

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2014г.

**Программа вступительного экзамена  
в аспирантуру  
по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика  
направленность (профиль) 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория  
чисел**

Ярославль 2014

## ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1. Арифметические  $n$ -мерные векторы. Матрица элементарного преобразования. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
2. Ранг матрицы, теорема Кронекера-Капелли.
3. Операции над матрицами, их свойства. Обратимость матриц.
4. Определители, их основные свойства. Применение определителей к решению линейных систем, вычислению обратных матриц и вычислению ранга матриц.
5. Векторные пространства. Подпространства. Линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность. Преобразование координат. Ранг системы векторов.
6. Линейные отображения векторных пространств; задание их матрицами. Изоморфизмы линейных векторных пространств.
7. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма.
8. Инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Достаточные условия диагонализруемости матрицы линейного оператора.
9. Нильпотентные линейные операторы. Корневые векторы. Разложение в прямую сумму корневых подпространств.
10. Линейные формы. Сопряженное векторное пространство, сопряженный базис. Сопряженное линейное преобразование.
11. Билинейные и квадратичные формы, их задание матрицами. Ранг формы. Приведение симметрической билинейной формы к каноническому и нормальному виду.
12. Квадратичные формы над полем действительных чисел. Закон инерции. Положительно определенные формы. Критерий Сильвестра.
13. Евклидовы векторные пространства. Процесс ортогонализации. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы. Приведение ортогональной матрицы к каноническому виду. Ортогональные преобразования на плоскости и в 3-мерном евклидовом пространстве.
14. Симметрические линейные операторы, приведение их матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям.
15. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка.
16. Эрмитовы формы в комплексном пространстве. Эрмитово (комплексное евклидово) пространство. Унитарные операторы и матрицы.
17. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме.

## ГРУППЫ

18. Определение, простейшие свойства и примеры.
19. Подгруппы. Разложение группы на смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.
20. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
21. Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Изоморфизмы. Автоморфизмы, внутренние автоморфизмы. Центр группы.
22. Теорема о гомоморфизмах для групп.
23. 2-я теорема об изоморфизмах для групп.
24. Циклическая подгруппа; порядок элемента группы. Циклические группы; их классификация.
25. Произведения групп. Факторизация группы. 1-я теорема об изоморфизмах.
26. Полупрямые и прямые произведения групп.
27. Подгруппа, порожденная системой элементов. Система образующих группы. Конечнопорожденные группы.
28. Базис абелевой группы. Свободные абелевы группы.
29. Кручение абелевой группы. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму свободной и периодической подгрупп.
30. Примарные абелевы группы. Разложение конечнопорожденной периодической абелевой группы в прямую сумму примарных подгрупп.
31. Разложение конечнопорожденной примарной абелевой группы в прямую сумму циклических подгрупп.
32. Единственность разложения конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических подгрупп.
33. Действие группы на множестве. Орбиты и стационарные подгруппы. Свободные действия. Теорема Кэли. Транзитивные действия.
34. Действия группы на множестве смежных классов. Теорема о транзитивном действии.

## КОЛЬЦА И ПОЛЯ

35. Определение, простейшие свойства и примеры колец. Ассоциативные и коммутативные кольца. Подкольцо.
36. Идеал. Главный идеал. Факторкольцо по идеалу.
37. Гомоморфизмы колец, ядро и образ гомоморфизма. Изоморфизмы.
38. Теоремы о гомоморфизмах колец. 2-я теорема об изоморфизмах.
39. Делители нуля в кольце. Кольца без делителей нуля, области целостности. Характеристика кольца с единицей; случай кольца без делителей нуля.
40. Поля и тела; простейшие свойства и примеры. Расширения полей. Поле комплексных чисел и тело кватернионов. Поле частных области целостности.
41. Деление с остатком в кольце целых чисел и кольце многочленов от одной переменной над полем. Евклидовы кольца. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя.

42. Неразложимые и простые элементы в области целостности. Факториальные кольца; единственность разложения на простые множители.
43. Кольца главных идеалов, их факториальность.
44. Теорема Гаусса о факториальности кольца многочленов над факториальным кольцом.
45. Факторкольца колец главных идеалов. Расширение поля, связанное с неприводимым многочленом. Поле разложения многочлена, его существование.

#### ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

46. Множества и операции над ними. Отношения и отображения.
47. Эквивалентность, разбиение на классы эквивалентности.  
Эквивалентность, порожденная отображением.
48. Мощность множества, сравнение мощностей. Конечные и счетные множества, их свойства.
49. Логические связки. Исчисление высказываний. Формулы исчисления высказываний.
50. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств данного множества. Несчетность множества всех действительных чисел.
51. Предикаты и кванторы. Исчисление предикатов. Формулы исчисления предикатов. Тавтологически истинные формулы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. ~ М.: Наука, 1976.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. -- М.: Наука, 1977.
3. Ленг С. Алгебра. -- М.: Мир, 1968
4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. ~ М.: Наука, 1987
5. Новиков П. С. Элементы математической логики, ~ М.: Наука, 1973.