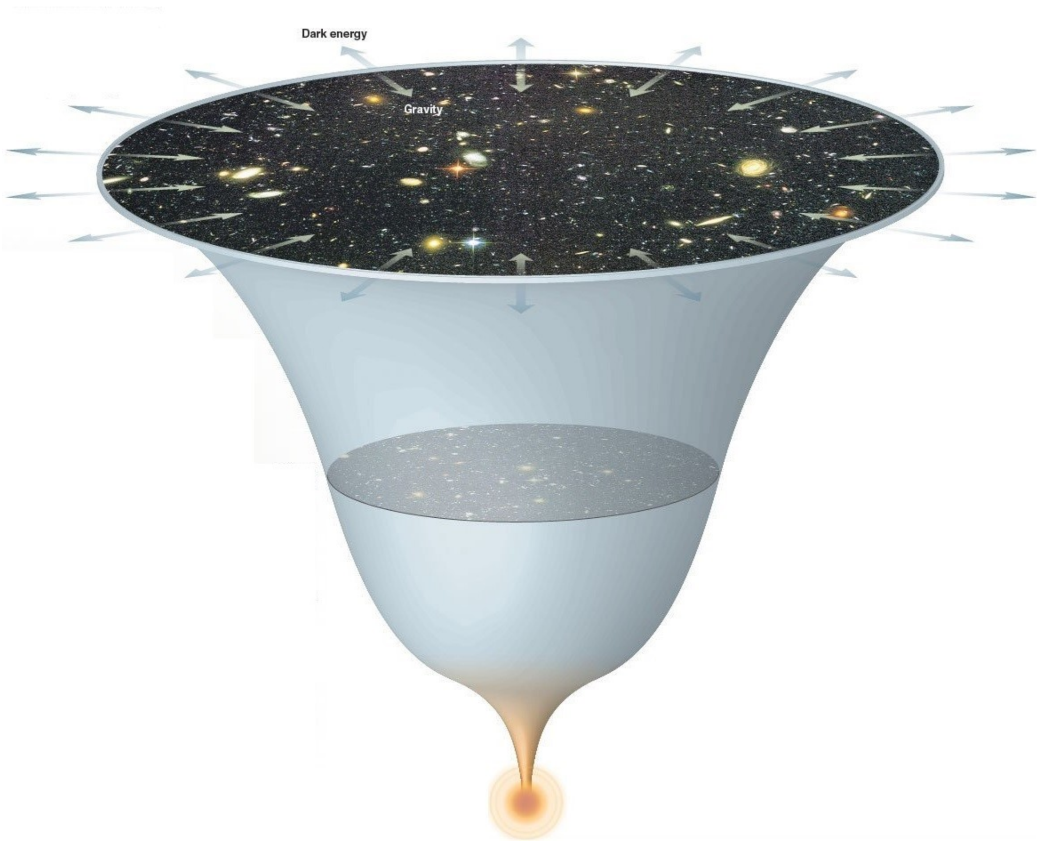
А. В. Кузнецов

Гидродинамические модели в космологии



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Кафедра теоретической физики

А. В. Кузнецов

Гидродинамические модели
в космологии

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2020

УДК 532+524.8(075.8)
ББК В253.31я73+В632я73
К89

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2020 года

Рецензент
кафедра теоретической физики

Кузнецов, Александр Васильевич.
К89 Гидродинамические модели в космологии : учебно-методическое пособие / А. В. Кузнецов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2020. – 28 с.

В пособии рассматриваются некоторые достаточно простые гидродинамические модели процессов и объектов, изучаемых в космологии, которые не нашли достаточного отражения в учебной литературе.

Предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине "Гидродинамические методы в теоретической физике".

Текст подготовлен с использованием издательской системы LaTeX. Иллюстрации выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

УДК 532+524.8(075.8)
ББК В253.31я73+В632я73

Рис. 3. Библиогр.: 5 назв.

Оглавление

1. Введение

В последние десятилетия значительно возросло осознание сообществом физиков двух проблем фундаментальной физики, затрагивающих самые основы наших знаний о Вселенной. Речь идёт о двух субстанциях – тёмной материи и тёмной энергии, природа которых на данный момент неизвестна и которые составляют, по современным понятиям, более 95 % массы Вселенной. Объём англоязычной литературы по данной теме достаточно обширен. Можно указать, например, две фундаментальные коллективные монографии [1, 2], также имеется большое число обзорных статей. Объём литературы на русском языке беднее примерно на два, если не на три порядка. Это, вероятно, можно объяснить тем, что авторы, активно работающие в данных направлениях, предпочитают писать статьи на английском языке, в соответствии с идущими «сверху» указаниями о повышении индекса цитируемости. Нетрудно видеть, как это сказывается на преподавании указанных вопросов в физических дисциплинах. Таким образом, включение названных тем в дисциплину «Гидродинамические методы в теоретической физике» является вполне обоснованным.

Здесь будет уместно кратко осветить историю преподавания данной дисциплины студентам, изучающим теоретическую физику в Ярославском университете. Уже начиная с 1972 года студенты-теоретики первых выпусков слушали специальный курс «Некоторые вопросы механики жидкости и газа» в соответствии с учебным планом, составленным проф. Э. М. Липмановым. Затем в 1980-х дисциплина исчезла из учебных планов и в 1992 г. была вновь возвращена по предложению автора. При этом необходимо было обосновать, почему следует выделить в специальный курс для будущих физиков-теоретиков тему, которая в действительности входит в дисциплину «Теоретическая механика», а соответствующие главы содержатся в учебнике [3].

Как показал многолетний опыт преподавания, включение в достаточном объёме часов вопросов гидродинамики в учебный план дисциплины «Теоретическая механика» невозможно без ущерба для других важных разделов. В то же время, как сказано в аннотации к дисциплине «Гидродинамические методы в теоретической физике», она «обеспечивает приобретение студентами углубленных знаний и умений теоретического описания систем многих частиц с помощью понятий континуума, скалярных, векторных и тензорных полей, континуальных уравнений сохранения, с целью применения этих знаний и умений к важным задачам теоретической астрофизики и космологии». В 2004 г. в содержание дисциплины было включено изучение гидродинамики однородной нестационарной Вселенной в рамках классической теории гравитации. Побудительным мотивом этого было знакомство со статьёй Я. Б. Зельдовича [4], где автор наглядно продемонстрировал возможность, исходя из простых принципов, описать достаточно сложные вопросы эволюции Вселенной. Начиная с 2009 г. в рамках дисциплины изучается ускоренное расширение Вселенной, обусловленное влиянием тёмной энергии.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются следующие вопросы: основные формулы механики идеальной жидкости; уравнение Пуассона для гравитационного потенциала; потенциал гравитационного поля однородной среды; закон Хаббла; система уравнений гидродинамики однородной нестационарной Вселенной в классической теории гравитации с учётом барионной и скрытой массы; критическая плотность; уравнение Фридмана; сценарии расширения Вселенной при плотности ниже и выше критического значения; ускоренное расширение Вселенной; включение тёмной энергии.

Автору приятно воспользоваться возможностью выразить благодарность А. Д. Смирнову за внимательное чтение рукописи и полезные обсуждения.

2. Основные формулы механики идеальной жидкости

Одним из основных понятий механики сплошной среды является *физически бесконечно малая частица*, то есть часть среды, с одной стороны, достаточно малая, так что в пределах такой частицы все физические параметры – плотность, давление и т. д. – можно считать примерно постоянными. С другой стороны, такая частица должна быть достаточно большой, чтобы дискретное строение среды не проявлялось. Например, в случае жидкости или газа частица должна содержать достаточно большое число молекул, так что можно вести речь именно о сплошной, то есть непрерывной среде.

Основным уравнением динамики сплошной среды является *уравнение непрерывности*, иными словами – закон сохранения массы в дифференциальной форме. Скалярное поле плотности среды $\rho(x, y, z, t)$ и векторное поле скоростей среды $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ связаны уравнением:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 0\,. \tag{1}$$

Идеальной жидкостью называется сплошная среда, в которой можно пренебречь тангенциальными, т. е. касательными напряжениями по сравнению с нормальными. Уравнение изменения импульса такой среды называется *уравнением Эйлера* и в случае потенциальных сил имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{2}$$

где p – давление, φ – потенциал объёмных сил, так что $\mathbf{f} = -\operatorname{grad}\varphi$ является удельной объёмной силой, т. е. силой, приходящейся на единицу массы.

3. Гравитационное поле точечной массы, однородной среды

В случае гравитационного поля удельной силой является ускорение свободного падения $\mathbf{g}$, которое можно, таким образом, назвать напряжённостью гравитационного поля. В полной аналогии с электростатикой можно ввести потенциал гравитационного поля φ, связанный с напряжённостью $\mathbf{g}$ соотношением $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi$. Как и в электростатике, потенциал должен определяться из решения уравнения Пуассона:

$$\Delta\,\varphi = C\,\rho\,, \tag{3}$$

где $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ – оператор Лапласа, ρ – плотность массы, а не заряда, C – некоторая константа.

Для определения константы C следует воспроизвести из уравнения Пуассона закон всемирного тяготения Ньютона. Найдём гравитационное поле точечной массы M, находящейся в начале координат. Плотность можно выразить через дельта-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}) = M\,\delta(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Проинтегрируем уравнение (3) с учётом (4) по объёму V_R шара радиуса R с центром в начале координат. В правой части формулы (3) имеем:

$$C\int\limits_{V_R}\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = C\,M\int\limits_{V_R}\delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = C\,M\,. \tag{5}$$

Интеграл в левой части формулы (3) преобразуем по формуле Гаусса—Остроградского в интеграл по сфере S_R радиуса R, в результате получим выражение для проекции напряжённости гравитационного поля $g_n(R)$ на нормаль к поверхности сферы –

поверхности равного потенциала:

$$\int\limits_{V_R} \mathrm{d}V \,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \oint\limits_{S_R} \mathrm{d}S\,(\mathrm{grad}\,\varphi)_n =$$
$$= -\oint\limits_{S_R} g_n\,\mathrm{d}S = -g_n\,4\pi R^2. \tag{6}$$

Сравнивая формулы (5) и (6) с выражением для ускорения свободного падения, которое следует из закона всемирного тяготения Ньютона для гравитационного взаимодействия точечных масс:

$$g_n = -\frac{GM}{R^2}\,, \tag{7}$$

где G – гравитационная постоянная, окончательно находим константу $C = 4\pi\,G$. Уравнение Пуассона принимает вид:

$$\Delta\,\varphi = 4\pi\,G\,\rho\,. \tag{8}$$

Найдём решение этого уравнения для потенциала в случае однородной среды с постоянной плотностью $\rho = \mathrm{const}$. В силу однородности и изотропности будем искать сферически симметричное решение $\varphi(r)$, переписав уравнение (8) в виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi\,G\,\rho\,. \tag{9}$$

После двукратного интегрирования получаем общее решение уравнения в виде:

$$\varphi(r) = \frac{2\pi}{3}\,G\,\rho\,r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2\,. \tag{10}$$

Поскольку сингулярность в точке $r = 0$ не имеет смысла для однородной среды, необходимо положить $C_1 = 0$.

Квадратично растущий с расстоянием потенциал выглядит необычно: мы привыкли к тому, что он должен стремиться к нулю на бесконечности. Это справедливо для ограниченной системы конечной массы. Но не для бесконечной Вселенной с постоянной плотностью материи.

4. Закон Хаббла. Гидродинамика однородной нестационарной Вселенной в классической теории гравитации. Критическая плотность

Нетривиальным вопросом является возможность применения законов механики сплошной среды ко Вселенной. Например, какого размера следует взять *физически бесконечно малую частицу*, чтобы плотность в ней можно было считать примерно постоянной и дискретное строение не проявлялось. Заметим, что структурными единицами здесь вместо молекул являются галактики, которые, как известно, сформированы в так называемую *крупномасштабную структуру Вселенной*, весьма далёкую от однородности. Существуют как скопления галактик, так и гигантские пустоты – *войды*. Как показывает анализ, для выполнения условия однородности $\rho = \mathrm{const}$ в качестве *физически бесконечно малой частицы* следует взять куб с ребром порядка 100 МПк (мегапарсек)[1].

Под плотностью будет пониматься плотность всей гравитирующей материи, включающей как наблюдаемую материю, участвующую в электромагнитном взаимодействии и обычно называемую барионной, или светящейся, так и тёмную материю, для которой на данный момент установлено участие только в гравитационном взаимодействии. По современным оценкам средняя плотность тёмной материи во Вселенной более чем в 5 раз превышает плотность светящейся материи.

Итак, будем применять законы механики сплошной среды ко Вселенной, записывая уравнение непрерывности (1) и уравнение Эйлера (2). При этом, в силу предположения однородности распределения вещества во Вселенной, естественно полагать, что $\operatorname{grad} p = 0$.

В качестве ещё одного уравнения рассмотрим закон Хаббла,

[1] В качестве единицы длины в космологии используется *парсек*, 1 Пк $\simeq 3 \cdot 10^{16}$ м. Для сравнения: расстояние от Солнца до центра Галактики составляет около 8.4 кПк.

согласно которому далёкие галактики удаляются от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор некоторой галактики, тогда её скорость равна:

$$\mathbf{v} = H(t)\,\mathbf{r}\,, \tag{11}$$

где $H(t)$ – постоянная Хаббла. Постоянна она в том смысле, что одинакова для всех удалённых галактик, однако её зависимость от времени, как мы далее увидим, является обязательной.

Подставим формулы (11) и (10) в уравнение Эйлера (2) и уравнение непрерывности (1), учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{r}\,,\\
&(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = H^2\mathbf{r}\,,\\
&\operatorname{grad}\varphi = \frac{4\pi}{3}\,G\,\rho\,\mathbf{r}\,,\\
&\operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 3\,\rho\,H\,.
\end{aligned}$$

Получаем два дифференциальных уравнения для функций $\rho(t)$ и $H(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -H^2 - \frac{4\pi}{3}\,G\,\rho\,, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -3\,\rho\,H\,. \tag{13}$$

Заметим: из уравнения (12) непосредственно видно, что постоянная Хаббла должна обязательно зависеть от времени, причём должна убывать, то есть расширение Вселенной должно замедляться. Как теперь известно, это справедливо только для «обычной» материи, то есть подчиняющейся законам гравитации. Аналогично из уравнения (13) видно, что и плотность ρ не может не зависеть от времени.

Решение системы уравнений (12) и (13) удобно провести, поделив первое из них на второе, тогда после несложного преобразования получаем дифференциальное уравнение для H^2, как функции плотности ρ:

$$\frac{\mathrm{d}H^2(\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \frac{2}{3\rho}\, H^2(\rho) = \frac{8\pi}{9}\, G\,. \tag{14}$$

Оно решается стандартным методом вариации постоянной. Сначала находим решение однородного уравнения, без правой части:

$$H_1^2(\rho) = C\,\rho^{2/3}\,, \tag{15}$$

затем объявляем произвольную постоянную функцией, $C = C(\rho)$, подставляем решение (15) в уравнение (14) и находим уравнение для этой функции:

$$\frac{\mathrm{d}C(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{8\pi}{9}\, G\,\rho^{-2/3}\,. \tag{16}$$

Решая его, находим решение неоднородного уравнения (14):

$$H^2(\rho) = A\,\rho^{2/3} + \frac{8\pi}{3}\, G\,\rho\,, \tag{17}$$

где A – новая произвольная постоянная. Её можно выразить через значения постоянной Хаббла H_0 и плотности Вселенной ρ_0 в данный момент t_0. Окончательно находим:

$$H^2(\rho) = \left(H_0^2 - \frac{8\pi}{3}\, G\,\rho_0\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} + \frac{8\pi}{3}\, G\,\rho\,. \tag{18}$$

Можно видеть, что поведение найденной функции будет существенно зависеть от знака выражения в скобках в первом слагаемом. Целесообразно ввести величину с размерностью плотности:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\,, \tag{19}$$

которая называется *критической плотностью*. Её численное значение можно оценить. Подставляя в выражение (19) величину постоянной Хаббла $H_0 \simeq 68\,$(км/с)/МПк, получаем, что критическая плотность составляет приблизительно 5 масс протона на кубометр.

5. Масштабный фактор. Уравнение Фридмана

Используя определение критической плотности (19), можно преобразовать выражение (18) к виду:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho_c}\left[\left(\frac{\rho_c}{\rho_0} - 1\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} + \frac{\rho}{\rho_0}\right]. \tag{20}$$

Введём одно из важнейших в космологии понятий – *масштабный фактор*. Пусть L_0 – расстояние между некоторыми двумя галактиками в данный момент времени t_0, а L – расстояние между ними же в произвольный момент космологического времени t. Пусть в момент t_0 в объёме L_0^3 содержится масса вещества m, тогда плотность равна $\rho_0 = m/L_0^3$. В момент времени t та же масса будет содержаться в объёме L^3 и в этом случае для плотности получим: $\rho = m/L^3$. *Масштабным фактором* называется величина:

$$a(t) = \frac{L(t)}{L_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)}\right)^{1/3}. \tag{21}$$

Введя для отношения плотности ρ_0 в данный момент к критической плотности обозначение

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c}\,, \tag{22}$$

можем переписать выражение (20) в виде:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega\left[\left(\frac{1}{\Omega} - 1\right)\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right]. \tag{23}$$

Вернёмся к уравнению (13). Перепишем его в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -3\,H\,\mathrm{d}t\,, \tag{24}$$

и с учётом преобразования, основанного на выражении (21),

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \mathrm{d}\ln\rho = -3\,\mathrm{d}\ln a = -3\,\frac{\mathrm{d}a}{a}\,,$$

можем записать уравнение для нахождения масштабного фактора в виде:

$$\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{a} = H\,. \tag{25}$$

Объединяя уравнения (23) и (25), получаем *уравнение Фридмана*:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\,\Omega\left[\frac{1}{a^3} - \left(1 - \frac{1}{\Omega}\right)\frac{1}{a^2}\right]. \tag{26}$$

Решение этого уравнения, то есть нахождение зависимости масштабного фактора от времени $a(t)$ с очевидным начальным условием $a(t_0) = 1$, даёт нам в неявном виде зависимость плотности Вселенной от времени, $\rho(t)$.

Преобразуем уравнение (26), разделив переменные, к виду:

$$H_0\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - \Omega + \Omega\,\frac{1}{a}}}\,, \tag{27}$$

что будет удобно для дальнейшего анализа.

Необходимо заметить, что приведённые рассуждения никак нельзя считать выводом уравнения Фридмана. В действительности, оно выводится из уравнения *общей теории относительности Эйнштейна*, откуда следуют как нерелятивистский закон всемирного тяготения Ньютона (7), так и закон Хаббла (11); детальнее эти вопросы можно изучить, например, по книге [5]. Мы же здесь, следуя Я. Б. Зельдовичу [4], в каком-то смысле переставили местами причину и следствие, введя закон Хаббла (11) как исходный эмпирический постулат. Этот полезный методический приём даёт возможность более простым языком, чем аппарат общей теории относительности, описать различные сценарии эволюции Вселенной.

6. Сценарии эволюции Вселенной

6.1. Плотность меньше критической, $\rho_0 < \rho_c$, $\Omega < 1$

Интегрируя уравнение (27) с учётом начальных условий, мы можем найти зависимость $a(t)$ в неявном виде:

$$H_0\,(t - t_0) = \int\limits_1^a \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1 - \Omega + \Omega\,\frac{1}{\alpha}}}\,. \tag{28}$$

Произведём замену переменной

$$\sqrt{1 - \Omega + \Omega\,\frac{1}{\alpha}} = x\,, \quad \alpha = \frac{\Omega}{x^2 - (1 - \Omega)}$$

и введём обозначение

$$1 - \Omega = \varepsilon^2\,,$$

интеграл (28) при этом перепишется в виде:

$$H_0\,(t - t_0) = -2\Omega \int\limits_1^{\bar{x}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - \varepsilon^2)^2}\,, \tag{29}$$

где

$$\bar{x} = \sqrt{1 - \Omega + \Omega\,\frac{1}{a}}\,.$$

Интеграл (29) несложно вычислить, используя соотношение:

$$\frac{1}{(x^2 - \varepsilon^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{(x - \varepsilon)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{(x + \varepsilon)^2} - \frac{1}{\varepsilon^3}\,\frac{1}{x - \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\,\frac{1}{x + \varepsilon}\right]. \tag{30}$$

После преобразований неявную зависимость $a(t)$ находим в виде:

$$H_0\,(t - t_0) = \frac{\sqrt{a}\sqrt{(1 - \Omega)\,a + \Omega} - 1}{1 - \Omega} - \\ - \frac{\Omega}{(1 - \Omega)^{3/2}}\,\ln\frac{\sqrt{(1 - \Omega)\,a + \Omega} + \sqrt{(1 - \Omega)\,a}}{1 + \sqrt{1 - \Omega}}\,. \tag{31}$$

Формула (31) позволяет вычислить момент Большого взрыва (Big Bang), t_{BB}, который определяется условием $a(t_{BB}) = 0$. Таким образом, возраст Вселенной, то есть время, прошедшее от момента Большого взрыва до настоящего момента, равно:

$$t_0 - t_{BB} = \frac{1}{H_0}\left(\frac{1}{1-\Omega} + \frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}}\,\ln\frac{\sqrt{\Omega}}{1+\sqrt{1-\Omega}}\right). \qquad (32)$$

На рис. 1 изображена зависимость масштабного фактора от времени при выбранном для иллюстрации значении отношения плотности в данный момент к критической плотности $\Omega = 0.9$.

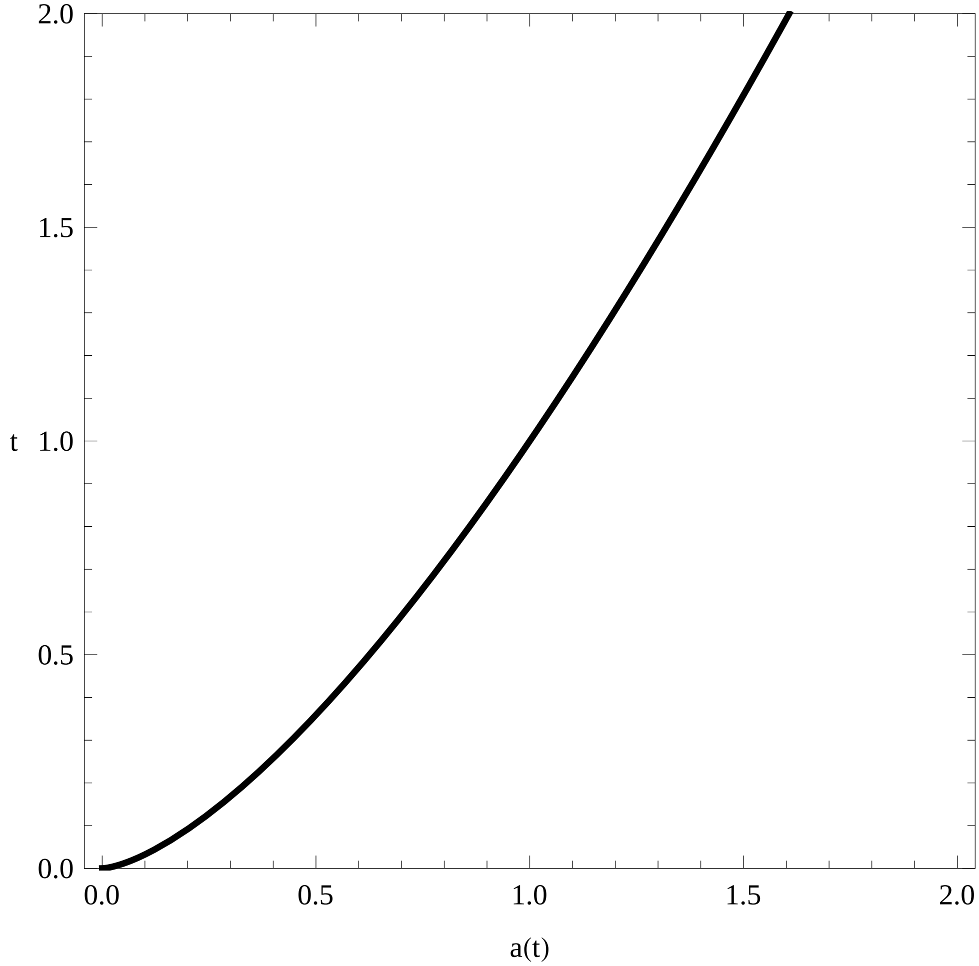


Рис. 1. Зависимость масштабного фактора от времени при $\Omega = 0.9$; время отложено в условных единицах, так что $t = 0$ соответствует моменту Большого взрыва, а $t = 1$ – настоящему моменту

Учитывая, что $1/H_0 \simeq 14$ млрд лет, можем оценить возраст Вселенной, в зависимости от величины Ω, в интервале $10 \div 13$ млрд лет, что согласуется по порядку величины с имеющимися научными данными.

Анализ формулы (31) позволяет определить асимптотическое поведение масштабного фактора при больших значениях космологического времени, а именно зависимость становится близка к линейному закону:

$$a(t) \simeq H_0 \sqrt{1-\Omega}\, t\,. \tag{33}$$

6.2. Плотность равна критической, $\rho_0 = \rho_c$, $\Omega = 1$

В этом случае уравнение (27) легко интегрируется, причём отсчёт времени удобнее вести от момента Большого взрыва и в качестве начального условия выбрать $a(0) = 0$. В результате получаем:

$$H_0\, t = \int\limits_0^a \alpha^{1/2}\, \mathrm{d}\alpha = \frac{2}{3}\, a^{3/2}\,. \tag{34}$$

Здесь мы можем найти зависимость $a(t)$ в явном виде:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\, H_0\, t\right)^{2/3}\,. \tag{35}$$

Как и в предыдущем случае, мы наблюдаем здесь неограниченный рост масштабного фактора, но по степенному закону $\sim t^{2/3}$, то есть более медленный, чем линейный рост при плотности меньше критической, см. формулу (33).

6.3. Плотность больше критической, $\rho_0 > \rho_c$, $\Omega > 1$

В этом случае уравнение (27) удобно переписать в виде:

$$H_0 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\frac{1}{a} - b}} \,, \tag{36}$$

где введено обозначение:

$$b = \frac{\Omega - 1}{\Omega} \,. \tag{37}$$

Здесь за начало отсчёта времени также удобно выбрать момент Большого взрыва с начальным условием $a(0) = 0$. Характерной особенностью данного случая является то, что из положительности подкоренного выражения в уравнении (36) следует ограничение на возможные значения масштабного фактора:

$$a \leqslant \frac{1}{b} = \frac{\Omega}{\Omega - 1} \,. \tag{38}$$

Перепишем уравнение (36) и проинтегрируем:

$$\sqrt{\Omega} \, H_0 \, t = \int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} - b}} \,, \tag{39}$$

произведя замену переменной

$$\frac{1}{\alpha} - b = b \, v^2 \,, \quad \alpha = \frac{1}{b(1 + v^2)} \,.$$

В результате интеграл сводится к табличному:

$$\sqrt{\Omega} \, H_0 \, t = \frac{2}{b^{3/2}} \int\limits_{v_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{(1 + v^2)^2} \,, \tag{40}$$

где

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{ab} - 1} \,.$$

Неявную зависимость $a(t)$ находим в виде:

$$\sqrt{\Omega}\, H_0\, t = \frac{1}{b^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{ab(1-ab)} - \mathrm{arctg} \sqrt{\frac{1-ab}{ab}} \right). \tag{41}$$

Как уже отмечалось, см. формулу (38), масштабный фактор не может превышать предельного значения, $a \leqslant 1/b$, а при равенстве $a = 1/b$ два последних члена в выражении (41) обращаются в нуль. Этому соответствует момент времени:

$$t_s = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \frac{1}{H_0}. \tag{42}$$

Из анализа выражения (41) можно также показать, что производная $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ при $t = t_s$ обращается в нуль. Действительно, вычисляя в формуле (41) производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}a$, можем видеть, что при $a \to 1/b$ она будет вести себя, как $(1-ab)^{-1/2}$, то есть при $t \to t_s$ имеем $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t \to (1-ab)^{1/2} \to 0$. А это означает, что расширение Вселенной к этому моменту останавливается.

Теперь вернёмся к уравнению Фридмана (26), переписав его через параметр b, см. (37), в виде:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega\, \frac{1-ab}{a^3}, \tag{43}$$

откуда, как и следовало ожидать, получаем тот же вывод об остановке расширения Вселенной: $H = 0$ при $a = 1/b$, то есть в момент времени $t = t_s$.

Возвращаясь теперь к формуле (12), которая при $H = 0$ принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi}{3}\, G\, \rho, \tag{44}$$

видим, что производная $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ при $H = 0$ имеет отрицательный знак, то есть величина постоянной Хаббла переходит к отрицательным значениям. Расширение Вселенной останавливается и сменяется сжатием!

Следовательно, теперь, поскольку $H = -\sqrt{H^2}$, при переходе от уравнения Фридмана (26) к уравнению (27), а затем к (36), где мы молчаливо полагали, что $H > 0$, следует изменить знак и вместо (36) решать уравнение вида:

$$-H_0\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\,\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\frac{1}{a} - b}}\,. \qquad (45)$$

При этом в качестве начального следует взять условие $a(t_s) = 1/b$. Процедура решения полностью аналогична изложенной выше. Преобразовав формулу (41), можно записать её и результат нового интегрирования единообразно:

при $t \leqslant t_s$

$$\sqrt{\Omega}\,H_0\,(t_s - t) = \frac{1}{b^{3/2}}\left(\sqrt{ab(1-ab)} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-ab}{ab}}\right), \qquad (46)$$

при $t \geqslant t_s$

$$\sqrt{\Omega}\,H_0\,(t - t_s) = \frac{1}{b^{3/2}}\left(\sqrt{ab(1-ab)} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-ab}{ab}}\right). \qquad (47)$$

Анализ уравнения (47) показывает, что в этом случае масштабный фактор уменьшается со временем и в момент $t_{BC} = 2\,t_s$ обращается в нуль – Вселенная должна сжаться в точку. Этот момент принято называть Большой хлопок (Big Crunch). На рис. 2 изображена зависимость масштабного фактора от времени при выбранном для иллюстрации значении отношения плотности в данный момент к критической плотности $\Omega = 1.1$.

Изложенная простая и наглядная модель Я. Б. Зельдовича [4], вероятно, и не должна была претендовать на научную строгость. По крайней мере, она неприменима к ранней Вселенной, поскольку не описывает стадии инфляции и радиационного доминирования. Однако эти вопросы выходят за рамки настоящего курса. Рассмотренная модель хорошо работает на так называемой пылевой стадии расширения Вселенной, и в литературе, как научной, так и научно-популярной, вышедшей до начала XXI века, можно, например, найти оценки для момента остановки расширения t_s (около 30 млрд лет от настоящего времени) и момента

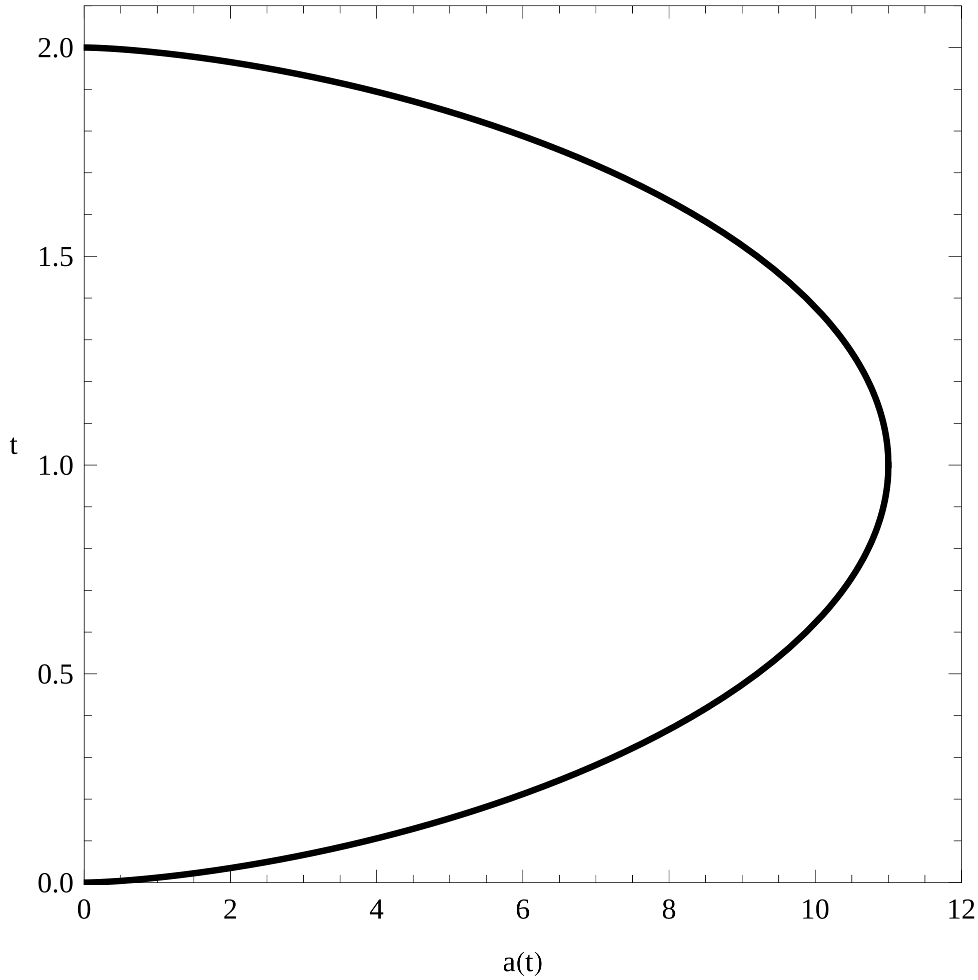


Рис. 2. Зависимость масштабного фактора от времени при $\Omega = 1.1$; время отложено в условных единицах, так что $t = 0$ соответствует моменту Большого взрыва, $t = 1$ – моменту остановки расширения Вселенной, а $t = 2$ – моменту Большого хлопка

Большого хлопка t_{BC} (плюс ещё примерно 45 млрд лет к указанной цифре).

Ситуация драматически изменилась в 1998 году, что ещё не нашло отражения в книге С. Вайнберга, к которой была написана статья-дополнение [4]. Именно об этом и пойдёт речь в следующем разделе.

7. Ускоренное расширение Вселенной. Включение тёмной энергии

В 1998 году две группы астрономов сообщили, что при наблюдениях сверхновых типа Ia (которые называют «стандартными космологическими свечами») было обнаружено, что в удалённых галактиках, расстояние до которых было определено по закону Хаббла, эти сверхновые имеют яркость ниже расчётной. Иными словами, расстояние до этих галактик, вычисленное по методу «стандартных свечей», оказывается больше расстояния, вычисленного на основании ранее установленного значения параметра Хаббла. Был сделан вывод, что Вселенная не просто расширяется, она расширяется с ускорением.

В настоящее время все наблюдательные космологические данные укладываются в стандартную космологическую модель, называемую ΛCDM. Здесь «Лямбда» происходит от названия космологической постоянной Λ в уравнениях Эйнштейна, CDM – сокращение от Cold Dark Matter, то есть холодной тёмной материи. В модели ΛCDM Вселенная заполнена, кроме обычной барионной материи, холодной тёмной материей, а также новой субстанцией, получившей название *тёмной энергии*. Подробный рассказ о её свойствах выходит за рамки настоящего курса, мы будем рассматривать только математическую сторону вопроса.

Перепишем уравнение Фридмана (26) для случая, когда плотность равна критической, $\rho_0 = \rho_c$, $\Omega = 1$, что хорошо согласуется с современными космологическими данными:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \, \frac{1}{a^3} \,. \tag{48}$$

Левая часть уравнения (48) содержит скорость изменения масштабного фактора $\dot{a}$, то есть скорость расширения Вселенной. Очевидно, что правая часть пропорциональна суммарной плотности материи, включающей как барионную, так и тёмную материю.

А теперь обобщим уравнение (48), включив в него как материю с весовой долей Ω_M, так и *космологическую постоянную* с весовой долей Ω_Λ, при этом $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_\Lambda > 0$. Уравнение примет вид:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{1}{a^3} + \Omega_\Lambda\right). \tag{49}$$

Последнее слагаемое в правой части, связанное с тёмной энергией, уже может характеризовать необычность её свойств. В первом слагаемом, описывающем вклад материи, величина a^3 в знаменателе есть не что иное, как обезразмеренный объём, следовательно, при расширении Вселенной плотность материи уменьшается. Отсутствие a^3 в знаменателе вклада тёмной энергии означает, что при расширении Вселенной её плотность остаётся постоянной! Следовательно, на начальной стадии расширения, когда плотность материи была намного больше, влияние тёмной энергии было незаметно. Но неизбежно наступает (уже наступила!) эпоха, когда тёмная энергия влияет на темп расширения Вселенной.

Уравнение (49) легко интегрируется с начальным условием $a(0) = 0$, в результате получаем:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\mathrm{sh}\left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}\, t\right)\right]^{2/3}. \tag{50}$$

На рис. 3 изображена зависимость масштабного фактора от времени, описываемая формулой (50).

Интересно исследовать поведение масштабного фактора в предельных случаях малых времён, $t \ll 1/H_0$, и больших времён, $t \gg 1/H_0$. При малых t из формулы (50) воспроизводится степенной закон, аналогичный выражению (35):

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_M}\, t\right)^{2/3}. \tag{51}$$

При больших t из формулы (50) получаем закон экспоненциального расширения:

$$a(t) \simeq \left(\frac{\Omega_M}{4\,\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \exp(H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}\, t)\,. \qquad (52)$$

На рис. 3 хорошо видно, как замедляющееся расширение Вселенной, происходящее при малых t, когда влияние тёмной энергии ещё не сказывается, переходит при больших t в расширение с ускорением.

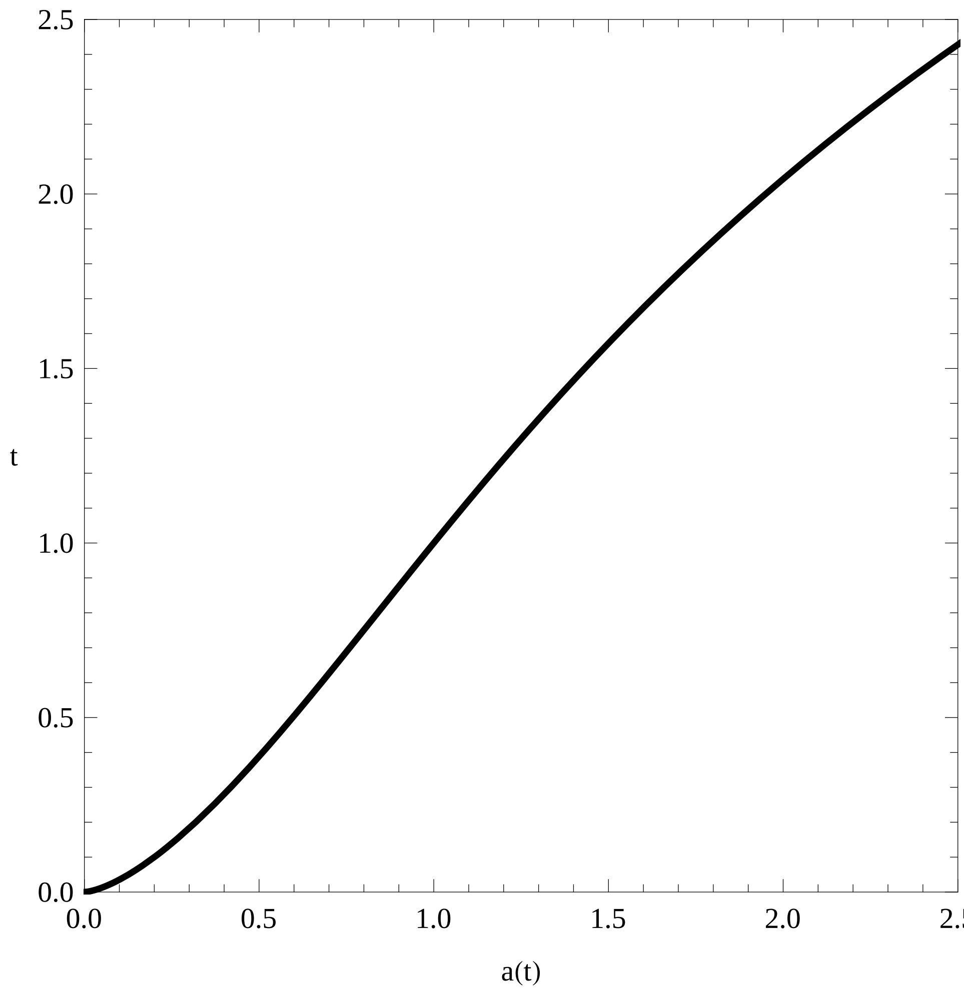


Рис. 3. Зависимость масштабного фактора от времени; время отложено в условных единицах, так что $t = 0$ соответствует моменту Большого взрыва, а $t = 1$ – настоящему моменту

8. Заключение

Материал из Википедии:

> Тёмная материя (англ. dark matter) в астрономии и космологии, а также в теоретической физике – гипотетическая форма материи, не участвующая в электромагнитном взаимодействии и поэтому недоступная прямому наблюдению. Составляет порядка четверти массы-энергии Вселенной и проявляется только в гравитационном взаимодействии. Понятие тёмной материи введено для теоретического объяснения проблемы скрытой массы в эффектах аномально высокой скорости вращения внешних областей галактик и гравитационного линзирования (в них задействовано вещество, масса которого намного превышает массу обычной видимой материи); среди прочих предложенных оно наиболее удовлетворительно.
> Состав и природа тёмной материи на настоящий момент неизвестны. В рамках общепринятой космологической модели наиболее вероятной считается модель холодной тёмной материи. Наиболее вероятные кандидаты на роль частиц тёмной материи – вимпы (от англ. WIMP, Weakly Interacting Massive Particle). Несмотря на активные поиски, экспериментально они пока не обнаружены.
>
> Тёмная энергия (англ. dark energy) в космологии – гипотетический вид энергии, введённый в математическую модель Вселенной для объяснения наблюдаемого её расширения с ускорением.

На основе данных космической обсерватории «Планк», полученных к 2013 г., было сделано заключение, что Стандартная модель элементарных частиц описывает только 4.9 % наблюдаемой Вселенной, куда входит вся известная материя, включая звёзды и межгалактический газ. Эти 4.9 % – так называемое «светящееся» вещество. Таким образом, доминирующая часть массы-энергии Вселенной – это тёмная материя (26.8 %) и тёмная энергия (68.3 %). Их исследование лежит на переднем крае современной фундаментальной физики.

Будет уместно процитировать здесь великого американского физика-теоретика Ричарда Фейнмана: «Нам необыкновенно повезло, что мы живём в век, когда ещё можно делать открытия. Это как открытие Америки, которую открывают раз и навсегда. Век, в который мы живём, это век открытия основных законов природы, и это время уже никогда не повторится. Это удивительное время, время волнений и восторгов...»

Можно надеяться, что изучение указанных вопросов по данному учебному пособию в дальнейшем поможет студентам при чтении более продвинутой научной литературы, такой, например, как уже ставшая классической книга [5].

Список литературы

[1] Dark Matter in the Universe / Ed. by J. Bahcall, T. Piran, S. Weinberg. – Singapore : World Scientific Publishing Co., 2004. – 246 p.

[2] Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches / Ed. by G. Bertone. – New York : Cambridge University Press, 2010. – 767 p.

[3] Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. — М. : Лань, 2009. — 576 с.

[4] Зельдович, Я. Б. Дополнение 1. Классическая нерелятивистская космология / Я. Б. Зельдович. // Вайнберг С. Первые три минуты: современный взгляд на происхождение Вселенной. — Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. — С. 190–194.

[5] Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. — М. : Изд-во ЛКИ, 2008. — 552 с.

Учебное издание

Кузнецов Александр Васильевич

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В КОСМОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор и верстка А. В. Кузнецов

Подписано в печать 30.09.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 3 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.

Для сведения читателей

За последние годы автором подготовлены следующие издания, в том числе в соавторстве:

Научная литература

- Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 136 p.
- Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Электрослабые процессы во внешней активной среде. Ярославль: ЯрГУ, 2010. 336 с.
- Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external active media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 282 p.

Учебная литература

- Кузнецов А. В. Методы математической физики: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2004. 200 с.
- Кузнецов А. В., Румянцев Д. А. Метод ренормализационной группы в квантовой теории поля: текст лекций. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 76 с.
- Кузнецов А. В., Румянцев Д. А. Вариационные задачи теоретической физики: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 96 с.
- Кузнецов А. В., Лоханин М. В. Элементы теории квантовых вычислений: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 136 с.
- Кузнецов А. В., Шитова А.М. Дополнительные главы математической физики: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011. 42 с.
- Кузнецов А. В., Румянцев Д. А. Интегральные преобразования в задачах теоретической физики: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2013. 96 с.