

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Кафедра математического моделирования

И. С. Кащенко

Асимптотическое разложение решений уравнений

Методические указания

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2011

УДК 517.52
ББК В16я73
К 31

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010 / 2011 учебного года*

Рецензент

кафедра математического моделирования
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова

Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений
К 31 уравнений: метод. указания / И. С. Кащенко; Яросл. гос.
ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 44 с.

В методических указаниях описаны основные методы построения асимптотических приближений решений алгебраических уравнений: метод прямого разложения, метод диаграмм Ньютона; их использование подробно проиллюстрировано примерами. Приведено большое количество задач для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010501.65 Прикладная математика и информатика (дисциплина „Асимптотические методы“, блок ДС), очной формы обучения.

УДК 517.52
ББК В16я73

© Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2011

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Некоторые определения	7
1.1. “о-малое”	7
1.2. Асимптотические последовательности и ряды . . .	8
1.3. Асимптотическое приближение решений уравнений	10
2. Прямое разложение по малому параметру	12
2.1. Решение уравнений рядами	12
2.2. Ряд Лагранжа	15
3. Метод диаграмм Ньютона	20
3.1. Постановка задачи	20
3.2. Определение главного члена разложения	21
3.3. Уточнение асимптотики	24
3.4. Теоремы	25
3.5. Пример 1	26
3.6. Пример 2	29
4. Задачи для самостоятельного решения	33
Приложение	37
Литература	41

ВВЕДЕНИЕ

Если уравнение содержит малый параметр, то это нужно использовать. Именно нужно, не можно, не “приятно и полезно”, а нужно. Действительно, очень часто бывает, что при решении той или иной задачи как раз для малых значений параметра (или для больших, что по сути сводится к тому же) все стандартные методы отказывают. Обычно в таких случаях панацеей оказываются асимптотические методы.

Этот несколько расплывчатый термин объединяет классические *методы Лапласа*, *метод стационарной фазы*, *метод перевала* — для оценки интегралов, содержащих большой параметр, *метод пограничного слоя* — для исследования решений дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) с малым параметром при всех или части старших производных, различные варианты *метода осреднения* для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, содержащих быстро колеблющиеся по времени и/или по пространству коэффициенты или свободные члены. Можно еще назвать *методы многомасштабных разложений*, ряд специальных методов для уравнений с медленно меняющимися параметрами, для уравнений с сингулярностями и т. д. Надо сказать, что классические методы находятся в постоянном развитии, их приходится усовершенствовать для решения новых задач. Не прекращается и процесс возникновения новых асимптотических методов.

В методических указаниях описаны методы асимптотического разложения решений уравнений: *метод прямого разложения* по малому параметру и *метод диаграмм Ньютона*.

В первом разделе даются определения таких понятий, как “о-малое”, асимптотическая последовательность, асимптотиче-

ский ряд. Описывается, что такое асимптотическое приближение решения уравнения.

Второй раздел посвящен методам прямого разложения по малому параметру. Несмотря на свою бесхитростность, эти методы часто оказываются весьма эффективными. Также во втором разделе выводится формула ряда Лагранжа — асимптотическая сумма, приближающая решение (либо даже функцию от решения) уравнения специального вида.

В третьем разделе описывается метод диаграмм Ньютона. Этот универсальный метод позволяет находить с точностью любого порядка асимптотические приближения корней многочленов, в случае когда коэффициенты зависят от малого параметра.

В четвертом — содержатся задачи для самостоятельного решения.

В приложении приведен оригинальный результат приближения решения трансцендентного уравнения, основанный на использовании разрывных функций.

1. Некоторые определения

Сначала мы дадим несколько важных определений. Прежде всего напомним, что такое “о-малое”, и опишем его основные свойства. Затем с помощью этого определения будут введены важные понятия **асимптотической последовательности** и **асимптотического ряда**. Наконец, мы опишем, что такое асимптотическое приближение решения уравнения.

1.1. “о-малое”

Будем говорить, что $f(t)$ является “о-малым” от $g(t)$ в окрестности t_0 (t_0 может быть и $\pm\infty$), если существует и равен нулю предел при $t \rightarrow t_0$ отношения f и g , т. е. выполняется

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Кратко это записывается как

$$f(t) = o(g(t)), \quad t \rightarrow t_0.$$

Пример. Если $a > b$, то $t^a = o(t^b)$, $t \rightarrow 0$. Действительно, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^a}{t^b} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{a-b} = 0$. Последнее равенство справедливо, т. к. показатель степени положительный.

Различные свойства “о-малых” можно посмотреть в любом учебнике по математическому анализу [1 — 5]. Здесь мы лишь приведем без доказательств некоторые нужные нам в дальнейшем свойства.

1. Если $f(t) = o(g(t))$, то $|f(t)|^\alpha = o(|g(t)|^\alpha)$ для любой положительной константы α .

2. Если $f_i(t) = o(g_i(t))$ ($i = 1, \dots, k$), то $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) = o(\sum_{i=1}^k |\alpha_i| |g_i(t)|)$ для любого набора констант α_i .

3. Если $f_i(t) = o(g_i(t))$ ($i = 1, \dots, k$) и $|g_i(t)| \leq \Psi(t)$, то $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) = o(\Psi(t))$.

4. Если $f_i(t) = o(g_i(t))$ ($i = 1, \dots, k$), то $\prod_{i=1}^k f_i(t) = o(\prod_{i=1}^k g_i(t))$.

5. Если $f(t) = o(g(t))$, $g(t) = o(h(t))$, то $f(t) = o(h(t))$.

Введем еще одно определение. Через $o(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ будем обозначать выражение, которое можно представить в виде суммы

$$o(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t),$$

где $f_k(t) = o(g_k(t))$.

Пример. Из предыдущего примера понятно, что $t^{a+1} + t^{b+1} = o(t^a, t^b)$. Однако мы не можем сказать, что $t^{a+1} + t^{b+1} = o(t^a)$ либо $t^{a+1} + t^{b+1} = o(t^b)$, т. к. неизвестны соотношения между a и b .

1.2. Асимптотические последовательности и ряды

Будем говорить, что функциональная последовательность $\varphi_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) является **асимптотической последовательностью** при $t \rightarrow t_0$, если для всех натуральных n выполняется $\varphi_n(t) = o(\varphi_{n-1}(t))$ при $t \rightarrow t_0$. Простейшими, но в то же время наиболее важными примерами асимптотических последовательностей являются

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots \text{ при } t \rightarrow 0,$$

а также

$$1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, \dots, \frac{1}{t^n}, \dots \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Если последовательность $\varphi_n(t)$ асимптотическая, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t) \tag{*}$$

называется **асимптотическим рядом** (для любого набора c_n). Как правило, если речь идет об асимптотических рядах, то не интересует их сходимость. Более того, асимптотический ряд может не сходиться ни в одной точке и при этом иметь смысл в отличие от обычного, “классического” ряда.

Дело в том, что асимптотический ряд никогда не воспринимается как бесконечная сумма — лишь как набор конечных сумм, каждая из которых является хорошим (в определенном смысле) приближением некоторой функции. Дадим аккуратное определение.

Будем говорить, что асимптотический ряд (*) является асимптотическим приближением функции $f(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется соотношение

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(t) \right| = o(\varphi_n(t)), \quad t \rightarrow t_0.$$

Говорят, что ряд (*) — это **асимптотика** функции $f(t)$.

Если последовательность $\varphi_n(t)$ выбрана, то существует не более одного ряда (*), который приближает данную функцию $f(t)$. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема (о единственности приближения асимптотическим рядом).

Пусть $\varphi_n(t)$ асимптотическая последовательность. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(t)$ являются асимптотическими приближениями функции $f(t)$. Тогда для любого n верно $a_n = b_n$.

Однако если выбрать другую асимптотическую последовательность, то функция может быть приближена другим асимптотическим рядом.

Пример. Функция $f(t) = \frac{1}{t-1}$ при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближается рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^n}$, а также рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t+1}{t^{2n}}$.

Кроме того, один и тот же ряд может служить асимптотическим приближением различных функций.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^n}$ при $t \rightarrow +\infty$ является асимптотическим приближением как функции $f_1(t) = \frac{1}{t+1}$, так и функции

$$f_2(t) = \frac{1}{t+1} + e^{-t}.$$

Наиболее часто в качестве асимптотического ряда используют ряды Тейлора¹. Именно они будут служить основой для всех построений в разделе 2. В разделе 3 будут строиться степенные ряды, основанные на асимптотических последовательностях следующего вида:

$$\varphi_k(t) = (t - t_0)^{\delta_k}, \quad \delta_k > \delta_{k-1}.$$

Здесь числа δ_k произвольные, образующие монотонно возрастающую последовательность. В приложении будет применяться асимптотический ряд, в котором функции $\varphi_k(t)$ разрывны в любой окрестности t_0 .

1.3. Асимптотическое приближение решений уравнений

Рассмотрим уравнение относительно x

$$F(x, t) = 0$$

при значении параметра t близком к t_0 .

Будем говорить, что асимптотический ряд (*) приближает решение уравнения, если данный ряд при $t \rightarrow t_0$ является асимптотическим приближением решения $x(t)$, где функция $x(t)$ такова, что подстановка $x = x(t)$ превращает уравнение в тождество при t из некоторой, достаточно малой окрестности t_0 .

На практике задача о нахождении асимптотического приближения корня уравнения сводится к следующим двум этапам:

- 1) выбрать асимптотическую последовательность $\varphi_k(t)$;
- 2) после этого определить коэффициенты c_k .

На первом этапе, вообще говоря, асимптотическую последовательность можно выбирать не единственным образом. Главное, чтобы $x(t)$ можно было приблизить соответствующим рядом. В следующем разделе будут приведены примеры, когда

¹Sir Brook Taylor (18.08.1685 – 30.11.1731) — английский математик.

при неудачном выборе $\varphi_k(t)$ решить задачу не удастся. В разделе 3 приведен алгоритм, позволяющий последовательно определять члены последовательности $\varphi_k(t)$ и коэффициенты c_k . В приложении разобран пример, в котором изменение асимптотической последовательности позволяет получить новые, порой неожиданные результаты.

Контрольные вопросы

1. Что такое “о-малое”? Приведите примеры функций, являющихся “о-малыми” от $g(t) = e^t$ при: а) $t \rightarrow 0$; б) $t \rightarrow +\infty$; в) $t \rightarrow -\infty$.
2. Является ли тысяча “о-малым” от одной тысячной? А наоборот?
3. Докажите самостоятельно свойства “о-малых”, приведенные в пункте 1.1.
4. Что значит “ряд служит асимптотическим приближением некоторой функции”? Приведите пример асимптотического ряда, который будет приближать: а) при $t \rightarrow 0$ функцию $\sin(t)$; б) при $t \rightarrow +\infty$ функцию $\frac{a}{t+b}$.

2. Прямое разложение по малому параметру

2.1. Решение уравнений рядами

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной x

$$F(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

при значении параметра t из некоторой окрестности t_0 . Поставим задачу: найти асимптотическое приближение решения (решений, если их несколько) этого уравнения.

В предыдущем разделе было сказано, что для того, чтобы найти асимптотику корня (2.1), нам в первую очередь необходимо выбрать асимптотическую последовательность $\varphi_k(t)$. В этом разделе мы всегда будем считать, что это последовательность

$$\varphi_k(t) = (t - t_0)^k.$$

Таким образом, остается только найти коэффициенты ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k. \quad (2.2)$$

Покажем, как последовательно можно определить все c_k .

Прежде всего определим c_0 .

Пусть функция $F(x, t)$ достаточно гладкая (т. е. дифференцируема столько раз, сколько нам понадобится, в идеале — бесконечное число раз дифференцируема). Сделаем в (2.1) подстановку $x = c_0 + o(1)$ (это выражение — “сжатая” форма записи (2.2)). “о-малое” понимается в смысле при $t \rightarrow t_0$. В результате получим

$$0 = F(x, t) = F(c_0 + o(1), t_0 + o(1)) = F(c_0, t_0) + o(1).$$

Последнее равенство следует, например, из непрерывности $F(x, t)$. Если перейти к пределу при $t \rightarrow t_0$, то получаем:

$$F(c_0, t_0) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) внешне похоже на уравнение (2.1), однако, как правило, оно является более простым. Говорят, что уравнение (2.3) является **вырожденным** для уравнения (2.1). Вырожденное уравнение получается из исходного, если принять значение параметра в точности равным “предельному”. Предположим, что мы откуда-то знаем корень уравнения (2.3). Это означает, что мы определили значение c_0 . В случае, когда у (2.3) несколько корней, мы получим несколько вариантов c_0 , а значит, несколько рядов (2.2), каждый из которых приближает какой-то корень (2.1).

Перейдем к определению следующих коэффициентов ряда (2.2). Положим в (2.1) $x = c_0 + c_1(t - t_0) + o(t - t_0)$ (это выражение опять же “сжатая” форма записи (2.2)). В результате получим

$$0 = F(x, t) = F(c_0 + c_1(t - t_0) + o(t - t_0), t_0 + (t - t_0)).$$

Так как параметр t близок к t_0 , то разность $t - t_0$ является малой, а значит, функцию в правой части можно разложить в ряд Тейлора (мы предположили, что F достаточно гладкая), записав остаток в форме Пеано²:

$$0 = F(c_0, t_0) + (t - t_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0)c_1 + \frac{\partial F}{\partial t}(c_0, t_0) \right) + o(t - t_0).$$

Первое слагаемое, в силу (2.3), равно нулю. Поделим это выражение на $t - t_0$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow t_0$.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0)c_1 + \frac{\partial F}{\partial t}(c_0, t_0).$$

Потребуем, чтобы выполнялось

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0) \neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда последнее уравнение однозначно разрешимо относительно c_1 . Отметим, что требование (2.4) не является слишком строгим: при этом условии существует неявная гладкая функция $x(t)$, переводящая уравнение (2.1) в тождество. Именно для этой функции мы и строим асимптотическое приближение.

²Giuseppe Peano (27.08.1858 – 20.04.1932) — итальянский математик

Аналогично найдем c_2 . Для этого мы сделаем в (2.1) подстановку $x = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2)$, а функцию $F(t, x)$ разложим в ряд Тейлора до слагаемых порядка $(t - t_0)^2$ включительно.

$$\begin{aligned} 0 = F(x, t) = F(c_0, t_0) + (t - t_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0)c_1 + \frac{\partial F}{\partial t}(c_0, t_0) \right) + \\ + (t - t_0)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0)c_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_0, t_0)c_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(c_0, t_0)c_1 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(c_0, t_0) \right) + o((t - t_0)^2). \end{aligned}$$

Константы c_0 и c_1 уже известны. В силу их определения, первые два слагаемых тождественно равны нулю. Поделим уравнение на $(t - t_0)^2$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow t_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c_0, t_0)c_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_0, t_0)c_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(c_0, t_0)c_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(c_0, t_0) = 0.$$

Из этого уравнения однозначно определяется значение c_2 , т. к. выполнено условие (2.4).

Аналогично находим c_3, c_4 и т. д.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^2 - (3 + 2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0$ при условии, что ε — малая положительная величина: $0 < \varepsilon \ll 1$. Положим $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)$. В итоге получим уравнение $x_0^2 + 2\varepsilon x_1 x_0 + \varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_2 x_0 - 3x_0 - 3\varepsilon x_1 - 2\varepsilon x_0 - 3\varepsilon^2 x_2 - 2\varepsilon^2 x_1 + 2 + \varepsilon + o(\varepsilon^2) = 0$.

Устремим ε к нулю. Тогда уравнение перейдет в $x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$, откуда имеем два варианта для x_0 : $x_0 = 1$ и $x_0 = 2$. Найдем дальнейшие коэффициенты для случая $x_0 = 1$ (второй случай разбирается аналогично). После того как мы определили $x_0 = 1$, уравнение принимает вид (для краткости оно разделено на ε): $2x_1 + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon x_2 - 3x_1 - 2 - 3\varepsilon x_2 - 2\varepsilon x_1 + 1 + o(\varepsilon) = 0$. Опять перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим $-x_1 - 1 = 0$, значит $x_1 = -1$ (единственное значение!). Далее учтем значение x_1 , уравнение принимает вид $1 + 2x_2 - 3x_2 + 2 + o(1) = 0$. Если перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получим, что $3 - x_2 = 0$,

т. е. $x_2 = 3$. Итак, мы нашли первые несколько членов асимптотического приближения одного из корней исходного уравнения: $x(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Замечание 1. Описанный метод позволяет находить асимптотики корней даже в случае, когда $t_0 = \infty$. В этом случае удобно будет ввести новый параметр $\varepsilon = t^{-1}$. Тогда $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Дальнейшие построения остаются без изменений.

Замечание 2. Если условие (2.4) не выполнено, то применить описанный метод не удастся. В этом случае возможно удастся решение задачи методом диаграмм Ньютона³, который описан в следующей главе. Такая ситуация возникает, например, когда вырожденное уравнение имеет кратные корни.

Замечание 3. Метод прямого разложения по малому параметру не позволяет находить асимптотики решений, которые стремятся к ∞ при $t \rightarrow t_0$. Так, например, не удастся представить в виде (2.2) корень уравнения $tx + 1 = 0$ при $t \rightarrow t_0 = 0$. Дело в том, что получаемое при $t = 0$ вырожденное уравнение корней не имеет, однако при любом $t \neq 0$ корень есть.

2.2. Ряд Лагранжа

Рассмотрим уравнение, в котором присутствуют два параметра:

$$x = a + t\varphi(x). \quad (2.5)$$

Здесь a — некоторый параметр, а t — близкая к нулю величина (достаточно малая), $\varphi(x)$ — достаточно гладкая функция. Таким образом, решение — это функция двух переменных: $x = x(t, a)$.

В этом разделе мы покажем, как построить асимптотический ряд для приближения не только x , но и $f(x)$ ($f(x)$ — некоторая гладкая функция).

Продифференцируем (2.5) по t (считая, что x зависит от t):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varphi(x) + t \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial x}{\partial t}.$$

³Sir Isaac Newton (4.01.1643 – 31.03.1727) — английский физик, математик и астроном

Отсюда получаем

$$(1 - t \frac{d\varphi}{dx}) \frac{\partial x}{\partial t} = \varphi(x).$$

Аналогично если (2.5) продифференцировать по a , то получим

$$(1 - t \frac{d\varphi}{dx}) \frac{\partial x}{\partial a} = 1.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varphi(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial a}.$$

Если обозначить $u = f(x(t, a))$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для произвольной дифференцируемой функции $F(x)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(F(x) \frac{\partial u}{\partial a} \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(F(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (2.6)$$

Доказательство. Распишем подробно производные в правой и левой частях равенства:

$$\frac{dF}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial a} + F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial t} = \frac{dF}{dx} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial t} + F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial t}.$$

После сокращений получаем

$$\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial t},$$

с учетом полученных выше выражений для $\frac{\partial x}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ получаем, что это равенство верно. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого натурального n справедливо равенство

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\varphi^n(x) \frac{\partial u}{\partial a} \right).$$

Доказательство. Проведем доказательство леммы при помощи метода математической индукции.

Докажем базу математической индукции. При $n = 1$ равенство принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial a}.$$

Его мы обосновали ранее.

Теперь докажем индукционный переход. Пусть это равенство верно при некотором $n = k$, докажем, что оно верно и при $n = k + 1$. Напишем цепочку равенств.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = (\text{по предположению индукции}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left(\varphi^k(y) \frac{\partial u}{\partial a} \right) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi^k(y) \frac{\partial u}{\partial a} \right) = (\text{по лемме 1}) = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\varphi^k(y) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\varphi^{k+1}(y) \frac{\partial u}{\partial a} \right). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Осталось завершить построение ряда для $f(x)$. Представим $u = f(x(t, a))$ в виде ряда Тейлора

$$u = f(x(t, a)) = f(x(0, a)) + t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} + \dots + \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Big|_{t=0} + \dots$$

Понятно, что $x(0, a) = a$. Из леммы 2 имеем

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\varphi^n(x) \frac{\partial u}{\partial a} \right) \Big|_{t=0}.$$

Так как дифференцирование происходит по параметру a , то можно сначала подставить значение $t = 0$, а потом вычислять производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\varphi^n(x) \frac{\partial u}{\partial a} \right) \Big|_{t=0} &= \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\varphi^n(x(0, a)) \frac{df(x(0, a))}{da} \right) = \\ &= \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\varphi^n(a) \frac{df}{da}(a) \right). \end{aligned}$$

Итого, ряд для $f(x(t, a))$ принимает вид

$$f(x) = f(a) + t\varphi(a)\frac{df}{da}(a) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{da}(\varphi^2(a)\frac{df}{da}(a)) + \dots + \\ + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\varphi^n(a)\frac{df}{da}(a)) + \dots$$

Построенный ряд называется **рядом Лагранжа**⁴.

Пример. Рассмотрим уравнение $x = a + \frac{t}{x}$. Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Пусть $f(x) = x^{-k}$, тогда, используя полученные результаты, можно показать, что $f(x) = \frac{1}{x^k} = \frac{1}{a^k} + t\frac{1}{a} \cdot (-k\frac{1}{a^{k+1}}) + \frac{t^2}{2}\frac{d}{da}(\frac{-k}{a^{k+3}}) + o(t^2)$.

Пример. Важную роль в небесной механике (см. [6, 7]) играет уравнение Кеплера⁵

$$E = M + \varepsilon \sin E.$$

Оно описывает движение тела по эллиптической орбите в задаче двух тел. Здесь M — это *средняя аномалия*, ε — эксцентриситет орбиты, а E — эксцентрическая аномалия. Мы будем рассматривать это уравнение относительно неизвестной E . Таким образом, M и ε являются параметрами.

Для круговой орбиты (случай $\varepsilon = 0$) уравнение Кеплера принимает тривиальный вид $E = M$. В общем виде уравнение Кеплера трансцендентное, и в алгебраических функциях оно не решается. Однако его решение можно выразить с помощью специальных функций [8] и рядов Фурье⁶ [9]:

$$E(\varepsilon, M) = M + 2 \cdot \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \cdot \sin nM,$$

где

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - x \sin E) dE$$

⁴Joseph Louis Lagrange (25.01.1736 – 10.04.1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

⁵Johannes Kepler (27.12.1571 – 15.11.1630) — немецкий математик, астроном, оптик и астролог.

⁶Jean Baptiste Joseph Fourier (21.03.1768 – 16.05.1830) — французский математик и физик.

— функция Бесселя⁷ [8].

Однако это выражение достаточно сложно для дальнейшего анализа. Воспользуемся развитой в этом пункте теорией. В этом уравнении $\varphi(E) = \sin(E)$. Нас будет интересовать асимптотическое приближение E при достаточно малых ε (когда орбита близка к круговой).

Используя ряд Лагранжа, получаем, что

$$E = M + \varepsilon \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d}{dM} \sin^2 M + \frac{\varepsilon^3}{3!} \frac{d^2}{dM^2} \sin^3 M + \dots + \\ + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \sin^n M + \dots$$

Лаплас⁸ показал, что при $\varepsilon \leq 0,66$ этот ряд является сходящимся.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод прямого разложения по малому параметру? Когда он применим?
2. Уравнение $\varepsilon\lambda + 1 = e^{-\lambda}$ при $\varepsilon = 0$ имеет нулевой корень. Как изменится этот корень при достаточно малом ε ? Найдите первые два слагаемых его асимптотического приближения.
3. В уравнении $t^2x^2 - tx(t-1) - 2(1+t+t^2) = 0$ параметр t достаточно велик ($t \gg 1$). Найдите несколько первых членов асимптотического приближения корней этого уравнения.
4. В небесной механике радиус-вектор r связан с эксцентрической аномалией E через формулу $r = a(1 - \varepsilon \cos E)$, где a — большая полуось орбиты, а ε — эксцентриситет. Пусть ε мало, E определяется из уравнения Кеплера, найдите несколько первых слагаемых асимптотического приближения для $r(\varepsilon, M, a)$.

⁷Friedrich Wilhelm Bessel (22.07.1784 – 17.03.1846) — немецкий математик и астроном.

⁸Pierre-Simon Laplace (23.03.1749 – 5.03.1827) — французский математик, физик и астроном.

3. Метод диаграмм Ньютона

Метод диаграмм Ньютона — это алгоритм последовательного нахождения членов асимптотического приближения корней многочленов. Вообще, диаграмма Ньютона (многоугольник Ньютона) — выпуклая ломаная, введенная И. Ньютоном в 1669 г. для определения показателей главных членов алгебраических функций. Более подробно метод диаграмм Ньютона был разработан В. Пюизё⁹, и иногда этот метод называют диаграммой Пюизё. Алгебраический вариант метода диаграмм Ньютона задолго до В. Пюизё был исследован Ж. Лагранжем.

3.1. Постановка задачи

Поставим задачу: найти асимптотическое приближение корней многочлена

$$a_n(\varepsilon)x^n + a_{n-1}(\varepsilon)x^{n-1} + \dots a_1(\varepsilon)x + a_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.1)$$

в предположении, что ε — положительный малый параметр, т. е.

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Про коэффициенты многочлена (3.1) $a_k(\varepsilon)$ нам известно, что они представляются в виде

$$a_k(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} \varepsilon^{\rho_k + jq_k}.$$

Здесь $q_k > 0$, а под знаком равенства мы будем понимать, что ряд является асимптотическим приближением функции $a_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что, начиная с некоторого номера n_k , все c_j (при $j \geq n_k$) могут быть равны нулю, т. е. ряд превращается

⁹Victor Alexandre Puiseux (16.04.1820 – 9.09.1883) — французский математик и астроном.

в конечную сумму. Кроме того, будем считать, что для любого $k = 0, 1, \dots, n$ выполняется $c_{k0} \neq 0$ либо $a_k(\varepsilon) \equiv 0$, т. е. первое слагаемое ненулевое либо весь ряд тождественно равен нулю.

Если $a_0(\varepsilon) \equiv 0$, то уравнение (3.1) можно поделить на x и прийти к аналогичному уравнению меньшей степени. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $c_{00} \neq 0$. Аналогично должно выполняться $c_{n0} \neq 0$.

Асимптотический ряд, который будет являться приближением корней (3.1), мы будем искать в виде

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{\delta_k}. \quad (3.2)$$

Показатели степени ε — числа δ_k (пока что нам не известные) — должны идти по возрастанию, т. е. $\delta_{k+1} > \delta_k$. Это требуется для того, чтобы ряд был асимптотическим. Коэффициенты α_k мы будем предполагать ненулевыми. За исключением случаев, когда точный корень уравнения равен частичной сумме (3.2), такое представление всегда возможно.

Итак, получается, что наша задача — определить коэффициенты α_k и δ_k . Далее мы приведем алгоритм, с помощью которого для любого n можно будет последовательно определить все коэффициенты α_k и δ_k для $k = 1 \dots n$.

3.2. Определение главного члена разложения

Сначала займемся определением α_0 и δ_0 . Для краткости обозначим эти коэффициенты через α и δ . Тогда из (3.2) следует, что

$$x(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{\delta} + o(\varepsilon^{\delta}), \quad \alpha \neq 0.$$

Подставим представления для $x(\varepsilon)$ и $a_k(\varepsilon)$ в уравнение (3.1):

$$\begin{aligned} & (c_{n0}\varepsilon^{\rho_n} + o(\varepsilon^{\rho_n})) (\alpha \varepsilon^{\delta} + o(\varepsilon^{\delta}))^n + \\ & + (c_{n-1,0}\varepsilon^{\rho_{n-1}} + o(\varepsilon^{\rho_{n-1}})) (\alpha \varepsilon^{\delta} + o(\varepsilon^{\delta}))^{n-1} + \dots + \\ & + (c_{10}\varepsilon^{\rho_1} + o(\varepsilon^{\rho_1})) (\alpha \varepsilon^{\delta} + o(\varepsilon^{\delta})) + (c_{00}\varepsilon^{\rho_0} + o(\varepsilon^{\rho_0})) = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем каждое слагаемое в отдельности:

$$\begin{aligned} (c_{k0}\varepsilon^{\rho_k} + o(\varepsilon^{\rho_k})) (\alpha\varepsilon^\delta + o(\varepsilon^\delta))^k = \\ = (c_{k0}\varepsilon^{\rho_k} + o(\varepsilon^{\rho_k})) (\alpha^k \varepsilon^{k\delta} + o(\varepsilon^{k\delta})) = c_{k0}\alpha^k \varepsilon^{\rho_k+k\delta} + o(\varepsilon^{\rho_k+k\delta}). \end{aligned}$$

Таким образом, после раскрытия скобок мы получим

$$\begin{aligned} c_{n0}\alpha^n \varepsilon^{n\delta+\rho_n} + c_{n-1,0}\alpha^{n-1}\varepsilon^{(n-1)\delta+\rho_{n-1}} + \dots + c_{10}\alpha\varepsilon^{\delta+\rho_1} + c_{00}\varepsilon^{\rho_0} + \\ + o(\varepsilon^{n\delta+\rho_n}, \varepsilon^{(n-1)\delta+\rho_{n-1}}, \dots, \varepsilon^{\delta+\rho_1}, \varepsilon^{\rho_0}) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим набор чисел — показателей степеней ε — $P = \{\rho_0, \delta + \rho_1, \dots, (n-1)\delta + \rho_{n-1}, n\delta + \rho_n\}$. Если для некоторого k выполнялось $c_{k0} = 0$ (а это означает, что $a_k(\varepsilon) \equiv 0$), то соответствующий показатель считаем равным $+\infty$. В этом наборе есть хотя бы два конечных числа: ρ_0 и $n\delta + \rho_n$. Выберем среди чисел, входящих в P , наименьшее. Возможны два варианта.

1 случай. Наименьшее число ровно одно. Пусть это $m\delta + \rho_m$. Тогда наше уравнение можно записать в следующем виде

$$c_{m0}\alpha^m \varepsilon^{m\delta+\rho_m} + o(\varepsilon^{m\delta+\rho_m}) = 0.$$

Поделив это равенство на $\varepsilon^{m\delta+\rho_m}$ и перейдя затем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что

$$c_{m0}\alpha^m = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon^{m\delta+\rho_m})}{\varepsilon^{m\delta+\rho_m}} = 0.$$

Однако это равенство не может быть верно, т. к. $c_{m0} \neq 0$ и $\alpha \neq 0$. Следовательно, такой случай невозможен и наименьших чисел больше чем одно.

2 случай. Наименьших чисел несколько (более одного).

Обозначим наименьшее значение из P через $\varphi = \min_{p \in P} p$.

Пусть у нас есть всего j чисел с номерами m_1, m_2, \dots, m_j ($0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_j \leq n$). Тогда имеем равенство

$$m_1\delta + \rho_{m_1} = m_2\delta + \rho_{m_2} = \dots = m_j\delta + \rho_{m_j} = \varphi. \quad (3.3)$$

Исходное уравнение можно записать в виде

$$(c_{m_1}\alpha^{m_1} + c_{m_2}\alpha^{m_2} + \dots + c_{m_j}\alpha^{m_j})\varepsilon^\varphi + o(\varepsilon^\varphi) = 0.$$

Если разделить это равенство на ε^φ и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получим

$$c_{m_1}\alpha^{m_1} + c_{m_2}\alpha^{m_2} + \dots + c_{m_j}\alpha^{m_j} = 0.$$

Так как значение $\alpha = 0$ нам не нужно, то получившееся уравнение эквивалентно

$$c_{m_1} + c_{m_2}\alpha^{m_2-m_1} + \dots + c_{m_j}\alpha^{m_j-m_1} = 0.$$

Это уравнение имеет $m_j - m_1$ корней (возможно комплексных) с учетом кратности, причем ни один из них не равен нулю (т. к. $c_{m_1} \neq 0$). Таким образом мы определим коэффициенты α . Осталось лишь привести метод, позволяющий легко находить подходящие значения δ (чтобы выполнялся именно этот случай).

Заметим, что равенство (3.3) можно интерпретировать следующим образом: на координатной плоскости (x, y) существует прямая вида $x\delta + y = \varphi$, которая содержит точки (m_1, ρ_{m_1}) , (m_2, ρ_{m_2}) , ..., (m_j, ρ_{m_j}) . Кроме того, т. к. φ является минимумом множества P , то все остальные точки вида (k, ρ_k) лежат выше нашей прямой. Действительно, для всех остальных номеров k имеем: $k\delta + \rho_k > \varphi$. Значит, процесс нахождения δ сводится к нахождению прямой определенного вида. Опишем этот процесс детально.

Отметим на координатной плоскости все точки с координатами (k, ρ_k) , $k = 0, 1, \dots, n$. Если при некотором k выполняется $a_k(\varepsilon) \equiv 0$, то соответствующую точку не ставим. Всего будет отмечено не более $n + 1$ точки (см. рис. 3.1a), при этом обязательно будут отмечены точки $(0, \rho_0)$ и (n, ρ_n) .

Через точку $(0, \rho_0)$ проведем прямую, совпадающую с осью ординат, которую затем будем вращать вокруг этой точки против часовой стрелки до тех пор, пока она не попадет на какую-либо из нанесенных точек, например, (l, ρ_l) (см. рис. 3.1b).

Тангенс угла, составленного прямой, проходящей через точки $(0, \rho_0)$ и (l, ρ_l) с отрицательным направлением оси абсцисс, равен одному из значений δ , так как по построению эта прямая проходит хотя бы через две отмеченные точки, а все остальные лежат выше ее.

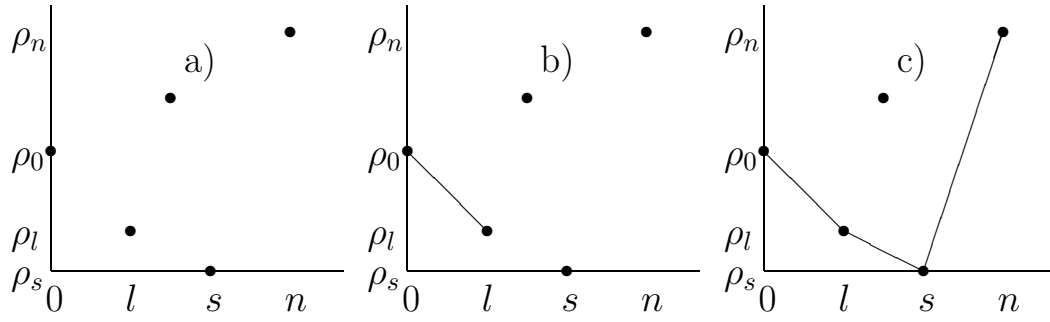


Рис. 3.1. Пример построения диаграммы Ньютона: а) отмечены точки вида (k, ρ_k) ; б) сделан первый шаг построения диаграммы; в) построенная диаграмма.

Далее поворачиваем прямую вокруг точки (l, ρ_l) , пока она не попадет на другую нанесенную точку (s, ρ_s) . Угловым коэффициентом этой прямой, взятый со знаком “минус”, даст нам еще одно из значений δ . Этот процесс повторяем до тех пор, пока не придем в точку (n, ρ_n) (см. рисунок 3.1с).

Рассмотрим один из отрезков диаграммы, концы которого — точки (l, ρ_l) и (s, ρ_s) ($l < s$). Уравнение для определения соответствующих α имеет ровно $s - l$ ненулевых корней (с учетом кратности), т. е. столько, сколько составляет длина проекции выбранного отрезка на ось абсцисс. Сумма длин проекций всех отрезков будет равна n , значит, мы найдем ровно n значений α (в совокупности для всех значений δ), каждое из которых (вместе с соответствующим δ) будет описывать главный член асимптотического приближения одного из n корней уравнения (3.1).

3.3. Уточнение асимптотики

Выше было показано, как найти первый член асимптотического разложения (3.2) — слагаемое $\alpha_0 \varepsilon^{\delta_0}$. Покажем теперь, как, зная первые n членов асимптотического разложения (коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ и показатели степени $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$), найти α_n и δ_n .

Перепишем формулу (3.2) в виде

$$x(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varepsilon^{\delta_i} + y(\varepsilon), \quad y(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\delta_{n-1}}). \quad (3.4)$$

В исходном уравнении (3.1) сделаем замену (3.4). В результате получим уравнение, похожее на (3.1), относительно y . Найдем методом, описанным выше, главный член асимптотического приближения y . При этом будем учитывать дополнительное условие: нам нужны только такие значения δ_n , чтобы выполнялось $y = \alpha_n \varepsilon^{\delta_n} = o(\varepsilon^{\delta_{n-1}})$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\delta_n > \delta_{n-1}.$$

Таким образом, мы определим α_n и δ_n .

Действуя так, мы, опираясь на найденные α_0 и δ_0 , последовательно определим α_1 и δ_1 , затем α_2 и δ_2 и так далее.

3.4. Теоремы

Сформулируем ряд точных результатов относительно метода диаграмм Ньютона.

Приведенный выше алгоритм действительно позволяет построить ряды, которые асимптотически приближают корни (3.1).

Теорема 1.

Описанный метод позволяет последовательно определить каждый из коэффициентов ряда (3.2) для каждого из корней уравнения (3.1). Каждый из построенных рядов вида (3.2) является асимптотическим приближением какого-либо из корней (3.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Как правило, в задачах числа ρ_k и q_k являются рациональными. В таком случае и показатели степеней ε ряда (3.2) тоже будут рациональными.

Теорема 2.

Если в уравнении (3.1) все константы ρ_k и q_k являются рациональными, то в (3.2) все показатели степени δ_k тоже рациональные.

Однако отметим, что даже если ρ_k и q_k являются целыми, то δ_k совсем не обязательно будут целыми. Примеры, когда такое не выполняется, приводятся в следующих разделах.

Несмотря на то что нами была поставлена задача построения асимптотического ряда, можно доказать, что при некоторых условиях ряд (3.2) будет сходящимся.

Теорема (Пюизё).

В условиях теоремы 2 существует такое ε_0 , что для каждого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ построенный ряд (3.2) сходится к корню уравнения (3.1).

Разберем несколько примеров на применение метода диаграмм Ньютона.

3.5. Пример 1

Найти первые два члена асимптотического приближения корней уравнения

$$x^3 - 3\varepsilon x + \varepsilon^3 = 0. \quad (3.5)$$

Начнем с построения диаграммы. Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(0, 3)$, $(1, 1)$ и $(3, 0)$ (см. рисунок 3.2 слева). Обратим внимание, что коэффициент при x^2 в уравнении равен нулю, поэтому точку с абсциссой 2 мы не ставим.

Строим нижнюю огибающую (см. рис. 3.2 справа). В нашем случае она состоит из двух отрезков. Первый соединяет точки $(0, 3)$ и $(1, 1)$ — коэффициент наклона соответствующей прямой равен -2 ; второй отрезок соединяет точки $(1, 1)$ и $(3, 0)$ — его угловой коэффициент равен $-\frac{1}{2}$. Таким образом, у нас есть два значения для δ_0 : $\delta_0 = 2$ либо $\delta_0 = \frac{1}{2}$. Рассмотрим оба этих случая по отдельности.

Случай 1. Пусть $\delta_0 = 2$, т. е. решение уравнения (3.5) будем искать в виде $x = \alpha_0 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$. Подставим это представление в

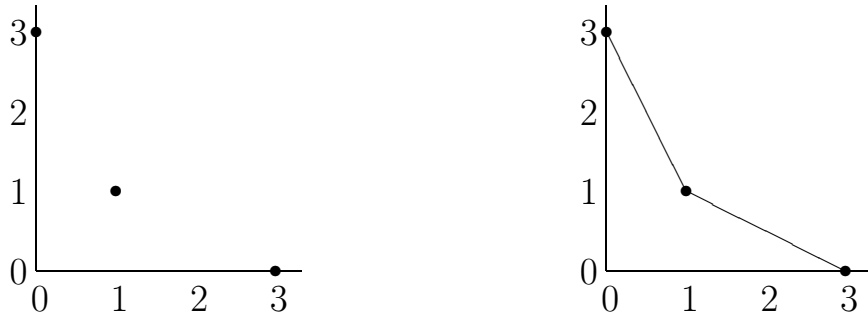


Рис. 3.2. Точки вида (k, ρ_k) (слева) и построенная диаграмма (справа) для уравнения (3.5).

(3.5)

$$-3\alpha_0\varepsilon^3 + \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) = 0 \quad \implies \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}.$$

Итак, мы нашли нулевое приближение для одного из корней:

$$x_1 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Случай 2. Пусть теперь $\delta_0 = \frac{1}{2}$. В уравнение (3.5) подставим $x = \alpha_0\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2})$.

$$\alpha_0^3\varepsilon^{3/2} - 3\varepsilon^{3/2}\alpha_0 + o(\varepsilon^{3/2}) = 0.$$

У этого уравнения есть корень $\alpha_0 = 0$ — он нам не интересен, а также два ненулевых корня $\alpha_0 = \pm\sqrt{3}$. Таким образом мы нашли нулевые приближения двух оставшихся корней этого уравнения.

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{3}\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}); \\ x_3 &= -\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Мы нашли первые слагаемые в асимптотических рядах, которые приближают корни уравнения (3.5). В задаче требовалось найти два слагаемых, поэтому нам надо продолжить исследование и уточнить асимптотики.

Уточним построенную асимптотику для корня x_1 . Сделаем в (3.5) замену $x = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + y$ (обязательное условие: y — второй и

последующие члены асимптотического ряда — должен быть “о-малым” от первого слагаемого, т. е. $y = o(\varepsilon^2)$). После очевидных упрощений, получим уравнение относительно y :

$$y^3 + \varepsilon^2 y^2 + \left(\frac{1}{3} \varepsilon^4 - 3\varepsilon \right) y + \frac{1}{27} \varepsilon^6 = 0. \quad (3.6)$$

Построим для этого уравнения диаграмму (рисунок 3.3 слева).

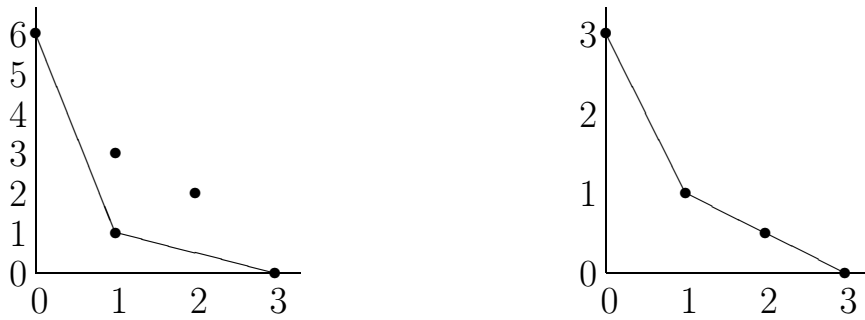


Рис. 3.3. Диаграммы для уравнения (3.6) (слева) и уравнения (3.7) (справа).

Угловые коэффициенты отрезков, входящих в диаграмму, равны -5 и $-\frac{1}{2}$. Значит, возможные значения для δ_1 : 5 и $\frac{1}{2}$. Однако значение $\delta_1 = \frac{1}{2} < 2$, следовательно, оно нам не подходит. Остается единственный вариант $\delta_1 = 5$. Определим α_1 . Для этого в уравнение (3.6) подставим $y = \alpha_1 \varepsilon^5 + o(\varepsilon^5)$. После того как мы отбросим слагаемые порядка $o(\varepsilon^6)$, останется

$$3\alpha_1 \varepsilon^6 + \frac{1}{27} \varepsilon^6 = 0 \quad \implies \quad \alpha_1 = -\frac{1}{81}.$$

Значит, $y = -\frac{1}{81} \varepsilon^5 + o(\varepsilon^5)$, а первый корень уравнения равен

$$x_1 = \frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{1}{81} \varepsilon^5 + o(\varepsilon^5)$$

Уточним теперь асимптотические приближения для корней x_2 и x_3 . В уравнении (3.5) сделаем замену $x = \pm \sqrt{3} \varepsilon^{1/2} + y$.

$$y^3 \pm 3\sqrt{3} \varepsilon^{1/2} y^2 + 6\varepsilon y + \varepsilon^3 = 0. \quad (3.7)$$

Соответствующая диаграмма приведена на рисунке 3.3 справа. Угловые коэффициенты отрезков, входящих в нее, равны -2 и $-\frac{1}{2}$. Значит, либо $\delta_1 = 2$, либо $\delta_1 = \frac{1}{2}$. Впрочем, второй случай не подходит, так как должно выполняться неравенство $\delta_1 > \delta_0 = \frac{1}{2}$. Значит, y мы ищем в виде $y = \alpha_1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$. Подставляя это выражение в (3.7), получаем

$$\varepsilon^3 + 6\alpha_1 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) = 0 \implies \alpha_1 = -\frac{1}{6}.$$

Значит $y = -\frac{1}{6}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{81}\varepsilon^5 + o(\varepsilon^5)$, $x_2 = \sqrt{3}\varepsilon^{1/2} - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, $x_3 = -\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

3.6. Пример 2

Найти главные члены асимптотического приближения корней уравнения

$$\varepsilon^4 x^{12} - 2\varepsilon^2 x^7 + \varepsilon^3 x^3 + x^2 - x + \varepsilon = 0. \quad (3.8)$$

Построим диаграмму. Отметим на координатной плоскости (см. рис. 3.4) точки с координатами $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,3)$, $(7,2)$ и $(12,4)$. Коэффициенты при x^4 , x^5 , x^6 , x^8 , x^9 , x^{10} и x^{11} равны нулю, поэтому точки с соответствующими абсциссами не появляются. Строим диаграмму. Она будет состоять из трех отрезков (см. рис. 3.4): первый соединяет точки $(0,1)$ и $(1,0)$; второй — точки $(1,0)$ и $(2,0)$; наконец, третий отрезок соединяет точки $(2,0)$ и $(12,4)$. Отметим также, что третий отрезок проходит через точку $(7,2)$.

Угловые коэффициенты этих трех отрезков соответственно равны -1 , 0 и $\frac{2}{5}$. Таким образом, δ_0 может принимать одно из трех значений: $\delta_0 = 1$, $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = -\frac{2}{5}$. Для каждого из трех значений найдем коэффициент α_0 .

Случай 1. Пусть $\delta_0 = 1$. Положим тогда $x = \alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon)$. Уравнение (3.8) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^4(\alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon))^{12} - 2\varepsilon^2(\alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon))^7 + \varepsilon^3(\alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon))^3 + \\ + (\alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon))^2 - (\alpha_0 \varepsilon + o(\varepsilon)) + \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

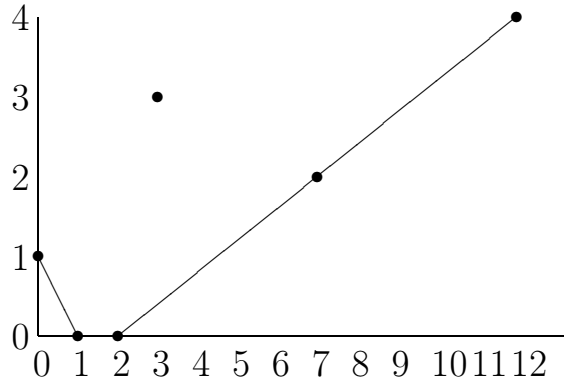


Рис. 3.4. Диаграмма для уравнения (3.8).

Выделим из каждого слагаемого главную часть:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4(\alpha_0^{12}\varepsilon^{12} + o(\varepsilon^{12})) - 2\varepsilon^2(\alpha_0^7\varepsilon^7 + o(\varepsilon^7)) + \varepsilon^3(\alpha_0^3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)) + \\ + (\alpha_0^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) - (\alpha_0\varepsilon + o(\varepsilon)) + \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Теперь легко видно, что это уравнение можно переписать в виде

$$-\alpha_0\varepsilon + \varepsilon + o(\varepsilon) = 0.$$

Поделим на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим, что

$$-\alpha_0 + 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \quad \implies \quad \alpha_0 = 1.$$

Итак, один из корней (3.8) имеет вид

$$x_1 = \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Случай 2. Пусть теперь $\delta_0 = 0$. В уравнении (3.8) положим $x = \alpha_0 + o(1)$. В результате оно принимает вид

$$\alpha_0^2 - \alpha_0 + o(1) = 0.$$

Отсюда получаем, что либо $\alpha_0 = 0$ (этот случай нам не нужен), либо $\alpha_0 = 1$. Таким образом, мы получили приближение второго корня:

$$x_2 = 1 + o(1).$$

Случай 3. Теперь пусть $\delta_0 = -\frac{2}{5}$. Подставим $x = \alpha_0\varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5})$ в уравнение (3.8).

$$\alpha_0^{12}\varepsilon^{-4/5} - 2\alpha_0^7\varepsilon^{-4/5} + \alpha^2\varepsilon^{-4/5} + o(\varepsilon^{-4/5}) = 0.$$

Если домножить это уравнение на $\varepsilon^{4/5}$ и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получим

$$\alpha_0^{12} - 2\alpha_0^7 + \alpha^2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{4/5} o(\varepsilon^{-4/5}) = 0.$$

Предел, стоящий в выражении, равен нулю (по определению “о-малого”). Значит, α_0 определяется из уравнения

$$\alpha_0^{12} - 2\alpha_0^7 + \alpha^2 = 0.$$

Это уравнение имеет нулевой корень, нам он не нужен, поэтому разделим уравнение на α_0^2 .

$$\alpha_0^{10} - 2\alpha_0^5 + 1 = (\alpha_0^5 - 1)^2 = 0 \implies \alpha_0^5 = 1.$$

Решая последнее уравнение, получаем, что $\alpha_0 = \cos \frac{2\pi n}{5} + i \sin \frac{2\pi n}{5}$ ($n = 1, \dots, 5$), причем каждое из этих значений имеет кратность 2. Значит, мы нашли главные части асимптотических приближений оставшихся десяти корней.

$$\begin{aligned} x_{3,4} &= \varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5}); \\ x_{5,6} &= \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) \varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5}); \\ x_{7,8} &= \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right) \varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5}); \\ x_{9,10} &= \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} \right) \varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5}); \\ x_{11,12} &= \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \right) \varepsilon^{-2/5} + o(\varepsilon^{-2/5}). \end{aligned}$$

Несмотря на то что главные части некоторых корней (например x_3 и x_4 , x_5 и x_6 и т. п.) совпадают, это еще не дает основания считать, что эти корни равны.

Обратим также внимание на то, что 10 из 12 корней (корни x_3, x_4, \dots, x_{12}) стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Методы прямого разложения по малому параметру, описанные в главе 2, не позволят найти приближение таких корней.

Контрольные вопросы

1. Что такое диаграмма Ньютона? Для решения каких задач она нужна?
2. Какие точки используются для построения диаграммы Ньютона? Как строится диаграмма Ньютона? Как по ней вычислить значения δ_0 ?
3. Как, зная значение δ_0 , найти коэффициент α_0 ? Сколько (с учетом кратности) может быть вариантов значений для α_0 ?
4. Как найти второе слагаемое ряда (3.2), если мы знаем α_0 и δ_0 ? Как затем отыскать третье, четвертое и последующие слагаемые?

4. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.

Учитывая, что $0 < \varepsilon \ll 1$, найдите первые два слагаемых асимптотического приближения для каждого решения уравнения:

1. $\varepsilon^2 x^3 - \varepsilon x + \varepsilon^2 = 0.$

2. $\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0.$

3. $x^3 - 3\varepsilon x + \varepsilon^3 = 0.$

4. $\varepsilon^3 x^3 - (1 + \varepsilon)x^2 + (1 + \varepsilon^2)x + \varepsilon^3 = 0.$

5. $\varepsilon^2 x^3 + 2\varepsilon x^2 + x + 2\varepsilon^2 = 0.$

6. $\varepsilon^2 x^3 - 4\varepsilon x^2 + 4x + \varepsilon = 0.$

7. $2\varepsilon^2 x^3 - 2\sqrt{2}\varepsilon x^2 + x + 3\varepsilon^3 = 0.$

8. $4\varepsilon^2 x^3 + 4\varepsilon x^2 + x + \varepsilon = 0.$

9. $-\varepsilon^2 x^3 - 2\varepsilon x^2 - x + 4\varepsilon = 0.$

10. $-\varepsilon^2 x^3 + 4\varepsilon x^2 - 4x + 2\varepsilon^2 = 0.$

11. $-4\varepsilon^2 x^3 - 4\varepsilon x^2 - x + 3\varepsilon^3 = 0.$

12. $9\varepsilon^2 x^3 - 6\varepsilon x^2 + x + 2\varepsilon = 0.$

13. $4\varepsilon^2 x^3 - 8\varepsilon x^2 + 4x + 3\varepsilon = 0.$

14. $\varepsilon^2 x^3 + \varepsilon x^2 + \frac{1}{4}x + \varepsilon^2 = 0.$

15. $\varepsilon x^3 + \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^3 = 0.$

16. $6\varepsilon x^3 + 6\varepsilon x^2 + 4\varepsilon^2 = 0.$

17. $6\varepsilon^2 x^3 + 6\varepsilon x^2 + 4\varepsilon^2 = 0.$

18. $\varepsilon^2 x^3 + 2\varepsilon x^2 + x + 2\varepsilon^2 = 0.$
19. $-\varepsilon^2 x^3 - 4\varepsilon x^2 - 4x + 4\varepsilon = 0.$
20. $-(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)x^3 + 4\varepsilon x^2 - 4x + 2\varepsilon^2 = 0.$
21. $-4\varepsilon^2 x^3 - 4\varepsilon x^2 - x + 2\varepsilon = 0.$
22. $9\varepsilon^4 x^3 - 6\varepsilon^2 x^2 + \varepsilon^2 x + 2 = 0.$
23. $\varepsilon x^3 - \varepsilon^2 x - \varepsilon = 0.$
24. $\varepsilon x^4 + x^2 + 2\varepsilon x = 0.$
25. $2\varepsilon^2 x^3 - 4\varepsilon x^2 + 2x + 5\varepsilon = 0.$
26. $\varepsilon^2 x^3 - \varepsilon^2 x^2 + x + 2\varepsilon = 0.$
27. $\varepsilon^3 x^3 - 3\varepsilon x^2 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0.$
28. $2\varepsilon^4 x^3 + 3\varepsilon x^2 + 3\varepsilon x + 2\varepsilon^4 = 0.$
29. $4\varepsilon^3 x^3 - x^2 + \varepsilon^2 x + \varepsilon = 0.$
30. $5\varepsilon^2 x^3 + 5x^2 + 3\varepsilon^2 x + 3\varepsilon^2 = 0.$

Задание 2.

Найдите главный член асимптотического приближения для каждого из решений уравнения ($0 < \varepsilon \ll 1$):

1. $\varepsilon^5 x^9 - 3\varepsilon^3 x^7 + \varepsilon x^5 + 2x^3 - x^2 + \varepsilon^3 = 0.$
2. $2\varepsilon^5 x^9 - 4\varepsilon^3 x^7 + 2\varepsilon x^5 - x^3 - 2x^2 + 4\varepsilon^3 = 0.$
3. $5\varepsilon^5 x^9 + 10\varepsilon^3 x^7 + 5\varepsilon x^5 + 2x^3 + 2x^2 - \varepsilon^3 = 0.$
4. $\varepsilon^5 x^9 + 3\varepsilon^3 x^7 + 2\varepsilon x^5 + x^3 - 3x^2 - 5\varepsilon^3 = 0.$
5. $2\varepsilon^5 x^9 - 3\varepsilon^3 x^7 + \varepsilon x^5 - 7x^3 + 7x^2 - 7\varepsilon^3 = 0.$
6. $-\varepsilon^5 x^9 + \varepsilon^3 x^7 + \varepsilon x^5 - 2x^3 + 4x^2 + 8\varepsilon^3 = 0.$
7. $\varepsilon^5 x^9 + \varepsilon x^5 - x^3 + x^2 - \varepsilon^3 = 0.$

8. $\varepsilon^7 x^8 - 2\varepsilon^5 x^7 + \varepsilon^3 x^6 - 2\varepsilon^2 x^5 + \varepsilon x^4 - x^2 + 9 = 0.$
9. $-\varepsilon^7 x^8 + 2\varepsilon^5 x^7 + \varepsilon^3 x^6 + 3\varepsilon^2 x^5 + \varepsilon x^4 + 4x^2 + 4 = 0.$
10. $2\varepsilon^7 x^8 - 4\varepsilon^5 x^7 + \varepsilon^3 x^6 - 3\varepsilon^2 x^5 - 2\varepsilon x^4 + x^2 - 1 = 0.$
11. $\varepsilon^7 x^8 - 4\varepsilon^5 x^7 + 2\varepsilon^3 x^6 - 3\varepsilon^2 x^5 - 2\varepsilon x^4 + x^2 - 1 = 0.$
12. $\varepsilon^7 x^8 - 3\varepsilon^3 x^6 - 3\varepsilon^2 x^5 - 2\varepsilon x^4 + x^2 - 1 + \varepsilon = 0.$
13. $-2\varepsilon^7 x^8 + 4\varepsilon^5 x^7 - 2\varepsilon^3 x^6 - 3\varepsilon^2 x^5 + 6\varepsilon x^4 + 3x^2 - 3 = 0.$
14. $\varepsilon^7 x^8 - 6\varepsilon^5 x^7 + 6\varepsilon^3 x^6 - 12\varepsilon^2 x^5 + 6\varepsilon x^4 + 2x^2 - 2 = 0.$
15. $\varepsilon^2 x^8 - 2\varepsilon x^6 + x^4 - x^3 + \varepsilon x - 4\varepsilon^4 = 0.$
16. $\varepsilon^2 x^8 + 2\varepsilon x^6 + x^4 - 3x^3 + 2\varepsilon x - 3\varepsilon^3 = 0.$
17. $\varepsilon^2 x^8 - 4\varepsilon x^6 + 3x^4 + x^3 + 2\varepsilon x - 2\varepsilon^2 = 0.$
18. $-2\varepsilon^2 x^8 - 8\varepsilon x^6 - 6x^4 + 2x^3 + \varepsilon x - 2\varepsilon^3 = 0.$
19. $\varepsilon^2 x^8 - 8x^4 + x^3 + 2\varepsilon x + 3\varepsilon^2 = 0.$
20. $\varepsilon^2 x^8 - 8x^4 + x^3 + 2\varepsilon x + 3\varepsilon^2 = 0.$
21. $\varepsilon^2 x^8 - 3\varepsilon x^6 + 2x^4 - 4x^3 + \varepsilon x - 4\varepsilon^2 = 0.$
22. $\varepsilon x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + \varepsilon^3 x^3 + \varepsilon x^2 - 5\varepsilon^3 x + 4\varepsilon^5 = 0.$
23. $\varepsilon x^7 - x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 2\varepsilon^2 x^3 + 4\varepsilon x^2 - 4\varepsilon^3 x + \varepsilon^5 = 0.$
24. $\varepsilon^2 x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 4\varepsilon^4 x^3 + 4\varepsilon x^2 + 4\varepsilon^3 x - \varepsilon^5 = 0.$
25. $-\varepsilon^2 x^7 + 3x^6 + 2\sqrt{3}x^5 + x^4 - 4\varepsilon^3 x^3 + \varepsilon x^2 - \varepsilon^3 x - 2\varepsilon^5 = 0.$
26. $\varepsilon^2 x^7 - 2x^6 + 2\sqrt{2}x^5 - x^4 + \sqrt{2}\varepsilon^2 x^3 + 2\varepsilon x^2 - \varepsilon^4 x - 4\varepsilon^5 = 0.$
27. $3\varepsilon^2 x^7 - 2x^6 + 3x^4 + \frac{2}{3}\varepsilon^3 x^3 - 2\varepsilon x^2 + \frac{2}{3}\varepsilon^3 x - 2\varepsilon^5 = 0.$
28. $2\varepsilon^7 - \varepsilon^3 x + 4\varepsilon^2 x^2 - 4\varepsilon x^4 + 7\varepsilon^5 x^5 + x^6 + 5\varepsilon^6 x^7 + \varepsilon^3 x^8 = 0.$
29. $\varepsilon^6 \varepsilon^7 - \varepsilon^3 x^6 + \varepsilon x^5 - x^4 + x^3 - \varepsilon x^2 + \varepsilon^3 x + \varepsilon^6 = 0.$
30. $2\varepsilon^6 \varepsilon^7 + 3\varepsilon^3 x^6 + \sqrt{2}\varepsilon x^5 - 3x^4 + \sqrt{3}x^3 + \varepsilon^3 x + 2\varepsilon^6 = 0.$

Задание 3. Найдите первые три члена асимптотического разложения при $x \rightarrow 0$ $y(x)$ — одного из корней данного уравнения, который определяется значением в точке $x = 0$.

1. $\operatorname{tg}(y + x) = 2y, \quad y(0) = 0.$

2. $\sin(y + x) = 2y, \quad y(0) = 0.$

3. $\cos(y + x) = y + 1, \quad y(0) = 0.$

4. $e^y = 2y + 1 + x, \quad y(0) = 0.$

5. $\ln y + x = 2(y - 1), \quad y(0) = 1.$

6. $\cos(y - x) = 1 - y, \quad y(0) = 0.$

7. $\sin(y + x) = -2y, \quad y(0) = 0.$

8. $\operatorname{tg}(y - x) = -y, \quad y(0) = 0.$

9. $e^{y+x} = 2y + 1, \quad y(0) = 0.$

10. $\ln y + x = 1 - y, \quad y(0) = 1.$

11. $\sin(y + x) = \frac{2}{\pi}y, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$

12. $\cos(y + x) = y - \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$

13. $\operatorname{tg}(y + x) = \frac{4}{\pi}y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$

14. $e^{y-x} = y + e - 1, \quad y(0) = 1.$

15. $\ln y - x = \ln 2(y - 1), \quad y(0) = 2.$

Приложение

Уравнение

$$\varepsilon\lambda + 1 = -e^{-\lambda} \quad (4.1)$$

является характеристическим для дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\varepsilon\dot{x} + x = -x(t-1) + f(x). \quad (4.2)$$

Расположение корней (4.1) относительно мнимой оси определяет устойчивость нулевого решения (4.2) (подробнее об этом см. [10, 11]).

В уравнении (4.1) ε — малый положительный параметр. Известно (см., например [11]), что у (4.1) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, т. е. нет таких корней $\lambda(\varepsilon)$, для которых выполняется $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) > d > 0$ при всех достаточно малых значениях ε . При этом уравнение имеет корни, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Асимптотика таких корней существенно используется для изучения локальной динамики уравнения (4.2) в окрестности нуля (см. [11, 12, 13]). Поставим задачу: найти асимптотическое приближение корней (4.1), действительная часть которых стремится к нулю.

Воспользуемся идеями главы 2. Корень, асимптотику которого мы ищем, можно представить в виде

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega(\varepsilon) + o(1).$$

Причем возможно, что $\omega(\varepsilon)$ не ограничена (или даже стремится к бесконечности) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

После подстановки в (4.1) получаем:

$$i\varepsilon\omega(\varepsilon) + 1 + o(\varepsilon) = -e^{-i\omega(\varepsilon)+o(1)}. \quad (4.3)$$

Модуль правой части равен единице. Возможны следующие варианты.

1 случай. $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ не ограничено при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако остальные слагаемые в (4.3) ограничены, следовательно, равенство (4.3) невозможно.

2 случай. $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ ограничено. Для каждой ограниченной (при $\varepsilon \rightarrow 0$) функции можно выбрать последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такую, что $\varepsilon_n\omega(\varepsilon_n)$ сходится к некоторому частичному пределу ω_* . Приравняем в (4.3) квадраты модулей правой и левой частей:

$$\omega^2(\varepsilon) + (1 + o(1))^2 = e^{o(1)}.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$, получим

$$\omega_*^2 + 1 = 1.$$

Отсюда видно, что $\omega_* = 0$. Значит, все частичные пределы $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равны нулю. Следовательно, $\varepsilon\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$, т. е. $\varepsilon\omega(\varepsilon) = o(1)$. Перепишем (4.3)

$$1 = -e^{-i\omega} + o(1)$$

Из этого следует, что $\omega(\varepsilon) = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Если выбрать некоторое фиксированное k , то дальнейшее построение асимптотики завершается без труда. Действительно, положим

$$\lambda_k = i\pi(1 + 2k) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o(\varepsilon^2).$$

В результате действий, описанных в главе 2, получим, что

$$\lambda_{k1} = -i\pi(1 + 2k), \quad \lambda_{k2} = -\frac{\pi^2(1 + 2k)^2}{2} + i\pi(1 + 2k).$$

Пусть теперь k зависит от ε , причем $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такую зависимость мы представим в следующем виде

$$k = \frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon).$$

Здесь z — произвольное положительное число. Параметр γ должен быть положительным (чтобы $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$), но меньше 1 (чтобы $\varepsilon\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$). Функция $\theta(\varepsilon)$ служит для того, чтобы значение правой части получалось целым. Например, можно определить ее следующим образом: $\theta \in [0, 1)$ такое, что $\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon)$ целое. Используя целые части, можно сказать, что $\theta(\varepsilon) =]\frac{z}{\varepsilon^\gamma}[-\frac{z}{\varepsilon^\gamma}$, где $]x[$ — большая целая часть — самое маленькое целое, не меньшее x .

Понятно, что θ — разрывная ограниченная функция, принимает значения из полуинтервала $[0; 1)$. Причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ каждое свое значение θ принимает бесконечное число раз.

Значит, корень уравнения (4.1) записывается как

$$\lambda = i \left(2 \frac{z}{\varepsilon^\gamma} + 2\theta(\varepsilon) + 1 \right) \pi + o(1).$$

Более того, для любого целого n

$$\lambda(\varepsilon) = i \left(2 \frac{z}{\varepsilon^\gamma} n + 2\theta(\varepsilon)n + 1 \right) \pi + o(1).$$

Уточним эту асимптотику. Подставим в (4.1)

$$\lambda(\varepsilon) = i \left(2 \frac{z}{\varepsilon^\gamma} n + 2\theta(\varepsilon)n + 1 + \varepsilon^q \lambda_1 \right) \pi + \varepsilon^p \lambda_2, \quad p, q > 0.$$

где λ_1 и λ_2 действительные.

Получаемое уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon i \left(2 \frac{z}{\varepsilon^\gamma} n + 2\theta(\varepsilon)n + 1 + \varepsilon^q \lambda_1 \right) \pi + \varepsilon^{p+1} \lambda_2 + 1 = \\ & = -\exp \left[-i \left(2 \frac{z}{\varepsilon^\gamma} n + 2\theta(\varepsilon)n + 1 + \varepsilon^q \lambda_1 \right) \pi - \varepsilon^p \lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Используем свойства функции θ и экспоненты

$$\begin{aligned} & i\pi \left(2zn\varepsilon^{1-\gamma} + 2\varepsilon\theta(\varepsilon)n + \varepsilon + \varepsilon^{1+q}\lambda_1 \right) + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 + 1 = \\ & = \exp \left[-i\pi\varepsilon^q\lambda_1 - \varepsilon^p\lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Перепишем выражение в левой части:

$$1 + 2i\pi zn\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 + i o(\varepsilon^{1-\gamma}) = \exp \left[-i\pi\varepsilon^q\lambda_1 - \varepsilon^p\lambda_2 \right].$$

Здесь мы сохраняем множитель i перед “о-малым” чтобы показать, что все переменные и константы могут принимать только вещественные значения.

Разложим теперь правую часть в асимптотический ряд (используем для этого разложение экспоненты в ряд Тейлора)

$$\begin{aligned} 1 + 2i\pi zn\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 + i o(\varepsilon^{1-\gamma}) &= 1 - [i\pi\varepsilon^q\lambda_1 + \varepsilon^p\lambda_2] + \\ &+ \frac{1}{2} [i\pi\varepsilon^q\lambda_1 + \varepsilon^p\lambda_2]^2 + o(\varepsilon^{2p}, \varepsilon^{2q}, \varepsilon^{p+q}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Самое большое по порядку мнимое слагаемое в левой части имеет порядок $\varepsilon^{1-\gamma}$, в правой — ε^q . Отсюда получаем, что $q = 1 - \gamma$, тогда λ_1 находится из равенства мнимых частей

$$\varepsilon^{1-\gamma} 2\pi z n + o(\varepsilon^{1-\gamma}) = -\pi \varepsilon^{1-\gamma} \lambda_1 \implies \lambda_1 = -2zn + o(1).$$

После сокращения единиц, в (4.4) самое большое по порядку слагаемое в левой части имеет порядок ε^{1+p} , а в правой таких слагаемых два. Они имеют порядки ε^{2q} и ε^p . Понятно, что $\varepsilon^{1+p} = o(\varepsilon^p)$, следовательно, для существования λ_2 должно выполняться равенство $p = 2q = 2 - 2\gamma$. Тогда если приравнять действительные части, то получается уравнение

$$o(\varepsilon^{2-2\gamma}) = -\varepsilon^{2-2\gamma} - \frac{1}{2}\pi^2 \varepsilon^{2-2\gamma} \lambda_1^2 + o(\varepsilon^{2-2\gamma}) \implies \lambda_2 = 2\pi^2 z^2 n^2 + o(1).$$

Таким образом, получаем, что у уравнения (4.1) есть корни с асимптотикой ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \lambda_n(z, \varepsilon) &= i\pi \left(\frac{2zn}{\varepsilon^\gamma} + 2\theta(\varepsilon)n + 1 - \varepsilon^{1-\gamma}(2zn + o(1)) \right) - \\ &- \varepsilon^{2-2\gamma} (2\pi^2 z^2 n^2 + o(1)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Несмотря на то что формула (4.5) зависит от непрерывных параметров $z > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, уравнение (4.1) имеет лишь счетное число корней. При $\varepsilon \rightarrow 0$ мы как бы “перескакиваем” из окрестности одного корня в окрестность другого за счет разрывной функции θ . Таким образом, модуль каждого λ_n неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор z и γ влияет лишь на скорость перехода с одного корня на другой.

Литература

- [1] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981.
- [2] Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1990.
- [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. Изд. стереотип. М.: Наука, 1980.
- [4] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
- [5] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
- [6] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
- [7] Колесов Ю. С. Концепции современного естествознания. Математический подход: Текст лекций. Ярославль, 2003.
- [8] Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. 3-е изд. СПб.: Лань, 2010.
- [9] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. СПб.: Лань, 1997.
- [10] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

- [11] Кащенко Д. С., Кащенко И. С. Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2006.
- [12] Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421. № 5. С. 586–589.
- [13] Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. №12. С. 2141–2150.

Учебное издание

Кащенко Илья Сергеевич

Асимптотическое разложение решений уравнений

Методические указания

Редактор, корректор И. В. Бунакова
Компьютерный набор и верстка И. С. Кащенко

Подписано в печать 17.04.2011. Формат 60×84/16.

Бумага тип.

Усл. печ. л. 2,55. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 25 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

