МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по развитию образования
________________________Е.В.Сапир

"_____"___________________2012г.

Рабочая программа дисциплины
послевузовского профессионального образования
(аспирантура)
Теория алгебраических структур и представления конечных групп

по специальности научных работников

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ярославль 2012

1. Цели освоения дисциплины.

Целями освоения дисциплины **«Теория алгебраических структур и представления конечных групп»** в соответствии с общими целями основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования (аспирантура) (далее - образовательная программа послевузовского профессионального образования) являются:

- усвоение аспирантами знаний об основных структурах современной алгебры и ее приложений;
- формирование математической культуры аспиранта, фундаментальная подготовка по основам современной алгебры;
- овладение основными понятиями и методами алгебры для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы послевузовского профессионального образования

Данная дисциплина относится к разделу обязательные дисциплины (подраздел дисциплины по выбору аспиранта) образовательной составляющей образовательной программы послевузовского профессионального образования по специальности научных работников 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения университетского курса математики, а также алгебраических специальных курсов.

Алгебра (и ее наиболее развитая часть, теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр) относится к числу основных разделов современной математики. Знание основ этих разделов является важной составляющей общей математической культуры. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях математики, так и при решении задач из разнообразных прикладных областей, таких как математическая физика, математическая экономика, криптография и др.

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины «Теория алгебраических структур и представления конечных групп»

В результате освоения дисциплины «Теория алгебраических структур и представления конечных групп»

обучающийся должен:

Знать: основные понятия алгебры, определения и свойства математических объектов, используемых в этой области математики, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

Уметь: решать задачи теоретического характера из различных разделов алгебры, доказывать утверждения, строить примеры основных объектов и понятий.

Владеть: математическим аппаратом общей алгебры, методами доказательства алгебраических теорем.

4. Структура и содержание дисциплины «Теория алгебраических структур и представления конечных групп»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 часов)

№ п/п	Раздел Дисциплины	Курс	Неделя	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу обучающихся, и трудоемкость (в часах) Форма обуч.: очная/заочная					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям) Форма промежуточной аттестации
				Лекций	Лабораторных	Практических	Сам. работа	Контроль сам. работы	
1	**Тема 1.**	1	1	1			8		реферат
2	**Тема 2.**	1	2				8		реферат
3	**Тема 3.**	1	3	1			8		реферат
4	**Тема 4.**	1	4				8		реферат
5	**Тема 5.**	1	5	1/0			8/9		реферат
6	**Тема 6.**	1	6		4		8/9		контрольная работа
7	**Тема 7.**	1	7	1			9		реферат
8	**Тема 8.**	1	8				9		реферат
9	**Тема 9.**	1	9-11	1/0			9		реферат
10	**Тема 10.**	1	12				9		контрольная работа
11	**Тема 11.**	1	13-14	1			9		реферат
12	**Тема 12.**	1	15				9		реферат
		1		**6/4**	**4**		**102/104**		**Зачет**

Содержание дисциплины

Тема 1.

Предмет, цели и задачи курса. Основная терминология. Методы изучения алгебраических структур. Приложения алгебраических структур в физике, комбинаторных задачах оптимизации и обработке сигналов. Алгебраическая криптография.

Тема 2.

Коммутативная алгебра. Алгебраические и трансцендентные расширения. Теория Галуа.

Тема 3.

Аффинные кольца. Модули над кольцами главных идеалов. Алгебраические множества. Нормированные поля.

Тема 4.

Группы. Периодические и свободные группы. Задание групп порождающими элементами и соотношениями. Простые группы. Топологические группы. Абелевы группы.

Тема 5.

Конечные группы. Теоремы Силова. Разрешимые и нильпотентные группы. Полупрямые произведения. Центральные произведения. Сплетения и группы подстановок.

Тема 6.

Ассоциативные кольца. Классические полупростые кольца. Центральные простые алгебры. Радикал кольца с условием минимальности. Групповая алгебра конечной группы и представление группы. Структура простых колец. Представления и модули. Тензорные произведения. Полное кольцо частных.

Тема 7.

Характеры групп. Лемма Шура и теорема Машке. Соотношения ортогональности. Простейшие приложения соотношений ортогональности. Центральные идемпотенты. Теоремы Бернсайда и Фробениуса. Теоремы Бернсайда, Жордана и Шура о линейных группах.

Тема 8.

Индуцированные представления. Теория Клиффорда. Ограничения неприводимых представлений на нормальные подгруппы. Теорема взаимности Фробениуса. Импримитивные представления. Теорема о числе зацеплений. Теория Шура проективных представлений.

Тема 9.

Введение в теорию модулярных представлений. Инварианты Картана и числа разложения. Соотношения ортогональности и блоки. Дефект блока. Дефектная группа. Распределение классов по блокам. Теоремы Брауэра.

Тема 10.

Алгебра Ли. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Подалгебра Картана. Картаново разложение. Фундаментальная система корней. Группа Вейля. Классификация комплексных простых алгебр Ли.

Тема 11.

Группы лиева типа. Базис Шевалле и определение групп Шевалле. Коммутаторная формула Шевалле. Унипотентные подгруппы. Диагональная и мономиальная подгруппы.

Разложение Брюа. Группы с BN-парой. Порядки групп Шевалле. Простота групп Шевалле. Отождествление групп Шевалле с некоторыми классическими группами.

Тема 12.

Автоморфизмы групп Шевалле. Скрученные группы Шевалле. Порождающие и соотношения. Классификация конечных простых групп (основные идеи и техника).

5. Образовательные технологии

В преподавании используются мультимедийные презентации, иллюстрации, таблицы, методические пособия.

В преподавании курса используются активные и интерактивные технологии проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

Часть практических занятий проводится в компьютерных классах с использованием системы GAP.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В качестве средств текущего контроля используется 2 контрольных работы, а также написание в течение семестра 1 реферата на выбранную тему. Итоговая форма контроля (зачет) дает возможность выявить уровень профессиональной подготовки аспиранта по данной дисциплине.

Контрольная работа № 1

Вариант 1. Нахождение таблиц характеров конечных групп, заданных преподавателем.

Вариант 2. Нахождение фрагментов таблиц характеров, исходя из информации о вложении подгруппы в группу. Применение исключительных характеров.

Контрольная работа № 2

Вариант 1. Нахождение матриц разложения конечных групп.

Вариант 2. Нахождение матриц Картана конечных групп.

Вариант 3. Нахождение таблиц модулярных характеров конечных групп.

Вариант 4. Нахождение главных p-блоков конечных групп.

Вариант 5. Вычисление дефектных подгрупп блоков.

<u>Темы рефератов:</u>

1. Приложения алгебраических структур в физике, комбинаторных задачах оптимизации и обработке сигналов.
2. Алгебраические и трансцендентные расширения. Теория Галуа.
3. Модули над кольцами главных идеалов.
4. Нормированные поля.
5. Задание групп порождающими элементами и соотношениями
6. Топологические группы.
7. Абелевы группы.
8. Теоремы Силова.

9. Конструирование новых групп из известных (произведения и сплетение групп).

10. Группы подстановок.

11. Классические полупростые кольца.

12. Радикал кольца с условием минимальности.

13. Структура простых колец.

14. Тензорные произведения представлений и модулей.

15. Лемма Шура и теорема Машке.

16. Теоремы Бернсайда и Фробениуса.

17. Теоремы о линейных группах.

18. Индуцированные представления. Теория Клиффорда. Теорема взаимности Фробениуса.

19. Теория Шура проективных представлений.

20. Инварианты Картана и числа разложения. Соотношения ортогональности и блоки.

21. Дефект блока. Дефектная группа. Распределение классов по блокам.

22. Теоремы Брауэра.

23. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли.

24. Картаново разложение. Фундаментальная система корней. Группа Вейля.

25. Классификация комплексных простых алгебр Ли над полем комплексных чисел.

26. Базис Шевалле и определение групп Шевалле. Коммутаторная формула Шевалле.

27. Отождествление групп Шевалле с некоторыми классическими группами.

28. Автоморфизмы групп Шевалле. Скрученные группы Шевалле.

29. Классификация конечных простых групп (основные идеи и техника).

30. Группы с BN-парой.

Вопросы к зачету

1. Коммутативная алгебра. Алгебраические и трансцендентные расширения.
2. Аффинные кольца. Модули над кольцами главных идеалов.
3. Алгебраические множества. Нормированные поля.

4. Группы. Периодические и свободные группы. Задание групп порождающими элементами и соотношениями.
5. Конечные группы. Теоремы Силова. Разрешимые и нильпотентные группы.
6. Сплетения и группы подстановок.
7. Ассоциативные кольца. Классические полупростые кольца.
8. Групповая алгебра конечной группы и представление группы. Структура простых колец.
9. Характеры групп. Лемма Шура и теорема Машке. Соотношения ортогональности.
10. Теоремы Бернсайда и Фробениуса. Теоремы Бернсайда, Жордана и Шура о линейных группах.
11. Индуцированные представления. Теория Клиффорда. Ограничения неприводимых представлений на нормальные подгруппы.
12. Теорема взаимности Фробениуса. Импримитивные представления. Теорема о числе зацеплений.
13. Теория Шура проективных представлений.
14. Инварианты Картана и числа разложения. Соотношения ортогональности и блоки. Дефект блока. Дефектная группа. Распределение классов по блокам.
15. Теоремы Брауэра.
16. Алгебра Ли. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Подалгебра Картана. Картаново разложение.
17. Фундаментальная система корней. Группа Вейля. Классификация комплексных простых алгебр Ли.
18. Группы лиева типа. Базис Шевалле и определение групп Шевалле. Коммутаторная формула Шевалле. Унипотентные подгруппы. Диагональная и мономиальная подгруппы.
19. Разложение Брюа. Группы с BN-парой. Порядки групп Шевалле. Простота групп Шевалле.
20. Автоморфизмы групп Шевалле. Скрученные группы Шевалле. Порождающие и соотношения.
21. Классификация конечных простых групп (основные идеи и техника).

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература*:*

1. Кондратьев А.С., Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009, -310 с.
2. Бахтурин Ю.А., Основные структуры современной алгебры, М.:»Наука», 1990, - 320 с.

б) дополнительная литература:

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.

2. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
3. Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М.: «Наука», 1969. – 668 с.
4. Кострикин А.И. Основные структуры алгебры. Часть III. – М.: Физматлит, 2000.
5. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2002.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:
- для демонстрации презентаций используются программы *Windows* и *MS Office.*
- в качестве вспомогательных **интернет-ресурсов** по дисциплине используется:
Портал Math-Net.ru

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины
- компьютерный класс;
- набор теоретико-групповых программ GAP..

Программа составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями к структуре основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования (аспирантура) (приказ Минобрнауки от 16.03.2011 г. № 1365) с учетом рекомендаций, изложенных в письме Минобрнауки от 22.06.2011 г. № ИБ – 733/12.

Программа одобрена на заседании кафедры алгебры и математической логики 22.10.2012 (протокол № 2).

Заведующий кафедрой Л.С.Казарин, доктор физ-мат.наук, профессор

Автор Л.С.Казарин, доктор физ-мат.наук, профессор