

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра теоретической физики

Д. А. Румянцев, М. В. Чистяков

# Избранные задачи высшей математики

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2020

УДК 51(075.8)  
ББК В1я73  
Р 86

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2020 года*

**Рецензент**  
кафедра теоретической физики

**Румянцев, Дмитрий Александрович.**

**Р 86** Избранные задачи высшей математики / Д. А. Румянцев, М. В. Чистяков; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2020. – 40 с.

В пособии излагаются методы дифференциального и интегрального исчисления в приложении к решению задач, встречающихся в теоретической и математической физике, что является важным элементом математической базы для значительного числа специальных дисциплин, формирующих физика-теоретика.

Текст подготовлен на основе специального лекционного курса «Системы аналитических вычислений», читаемого студентам, обучающимся в бакалавриате кафедры теоретической физики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Пособие предназначено для студентов, обучающихся на первой ступени ВПО по направлению подготовки бакалавров 03.03.02 «Физика», профиль «Физика и компьютерные технологии» и другим родственным программам.

УДК 51(075.8)  
ББК В1я73

© ЯрГУ, 2020

## Оглавление

<b>1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных</b>	<b>3</b>
1.1. Дифференцирование неявных функций . . . . .	3
1.2. Условный экстремум функции нескольких переменных . .	4
<b>2. Методы вычисления интегралов</b>	<b>7</b>
<b>3. Методы теории функций комплексного переменного</b>	<b>21</b>
<b>4. Методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами</b>	<b>28</b>

# 1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

В этом разделе мы рассмотрим методы решения двух часто встречающихся в практике физика-теоретика задач, связанных с дифференциальным исчислением функции нескольких переменных: дифференцированием неявных функций и условным экстремумом функции нескольких переменных.

## 1.1. Дифференцирование неявных функций

Если функция  $F(x, y, z)$  обращается в нуль в некоторой точке  $A'_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F(x, y, z)$  и  $\partial F(x, y, z)/\partial z$  определены и непрерывны в окрестности точки  $A'_0$  и  $\partial F/\partial z \neq 0$  в точке  $A'_0$ , то в некоторой достаточно малой окрестности точки  $A_0(x_0, y_0)$  существует единственная однозначная непрерывная функция  $z = f(x, y)$ , удовлетворяющая уравнению  $F(x, y, z) = 0$ , причем такая, что  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

Если функция  $F(x, y, z)$ , удовлетворяющая уравнению  $F(x, y, z) = 0$ , дифференцируема в окрестности точки  $A'_0(x_0, y_0, z_0)$ , то функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $A_0(x_0, y_0)$  и ее производные  $\partial z/\partial x$  и  $\partial z/\partial y$  могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Если функция  $F(x, y, z)$  дифференцируема  $n$  раз по своим аргументам, то, последовательно дифференцируя (1), можно вычислить производные высших порядков от функции  $z$ .

**Пример 1.** Найти  $y'$  и  $y''$  для функции  $y$ , определяемой уравнением

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2. \quad (2)$$

**Решение**

Последовательно дифференцируя исходное равенство (2) по  $x$  два раза, получим

$$x + y = y'(y - x), \quad 1 + y' = y''(y - x) + y'(y' - 1).$$

Отсюда находим

$$y' = \frac{y+x}{y-x}, \quad y'' = \frac{1+2y'-y'^2}{y-x} = -\frac{2a^2}{(y-x)^3},$$

где в последнем равенстве использованы выражение для  $y'$  и уравнение (2).

**Пример 2.** Найти частные производные первого и второго порядков для функции  $z = z(x, y)$ , определяемой уравнением:

$$x + y + z = e^z. \quad (3)$$

### Решение

Дифференцируя (3) частным образом по  $x$  и  $y$ , будем иметь:

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = e^z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}.$$

Дифференцируя это равенство еще раз по  $x$  и  $y$  и подставляя в полученный результат производные  $\partial z/\partial x$  и  $\partial z/\partial y$ , окончательно найдем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3} = -\frac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}.$$

## 1.2. Условный экстремум функции нескольких переменных

Задача определения условного экстремума функции  $u = f(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  при наличии дополнительных условий  $\varphi_i(\mathbf{R}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m < n$ ,  $\mathbf{R} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  может быть решена с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$u^*(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = f(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(\mathbf{R}), \quad (4)$$

где  $\lambda_i = \text{const}$  – неопределенные множители Лагранжа, и будем исследовать ее на обычный безусловный экстремум. Имеем:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n + k. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) совместно с уравнениями связей  $\varphi_i(\mathbf{R}) = 0$  приводит к нахождению точек экстремума  $x_{j\ell}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  и множителей  $\lambda_i$ .

При этом функция  $u^*$  имеет в точке  $\mathbf{r}_\ell$  минимум, если  $d^2u^*(\mathbf{r}_\ell) > 0$  и максимум, если  $d^2u^*(\mathbf{r}_\ell) < 0$  и выполнено условие

$$\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0.$$

**Пример 3.** Найти точки условного экстремума функции  $z = xy$ , если  $x + y = 1$ .

**Решение**

Составляем вспомогательную функцию

$$z^* = xy + \lambda(x + y - 1)$$

и исследуем ее на обычный безусловный экстремум:

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} = y + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial y} = x + \lambda = 0.$$

Отсюда находим  $x = -\lambda$ ,  $y = -\lambda$ . Подставляя эти значения в условие  $x + y = 1$ , получим  $\lambda = -1/2$  и  $x = y = 1/2$ .

Для проверки достаточного условия экстремума заметим, что

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z^*}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z^*}{\partial x \partial y} = 1,$$

и, кроме того, дифференциал условия  $d(x + y) = dx + dy = 0$ .

Следовательно,

$$d^2 z^* = \frac{\partial^2 z^*}{\partial x \partial y} dx dy = -(dx)^2 < 0.$$

Таким образом, в точке  $\{1/2; 1/2\}$  функция  $z$  имеет максимум:  $z_{max} = 1/4$ .

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти  $y'$  и  $y''$  для функций  $y$ , определяемых уравнениями:

$$1.1. \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad 1.2. \quad x^y = y^x \quad (x \neq y);$$

$$1, 3. \quad x^2 + xy + y^2 = 3; \quad 1, 4. \quad y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

2. Доказать, что при  $1 + xy = k(x - y)$ ,  $k = \text{const}$ , имеет место равенство

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

3. Найти частные производные первого и второго порядков для функций  $z = z(x, y)$ , определяемых уравнениями:

$$3.1. \quad z^3 - xz + y = 0; \quad 3.2. \quad z^3 - 3xyz = a^3;$$

$$3.3. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad 3.4. \quad x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$$

4. Показать, что функция  $z = z(x, y)$ , определяемая уравнением  $\Phi(x - az, y - bz) = 0$ ,  $a, b = \text{const}$ , где  $\Phi(u, v)$  – произвольная дифференцируемая функция от переменных  $u$  и  $v$ , удовлетворяет уравнению

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

5. Найти точки условного экстремума следующих функций:

$$5.1. \quad z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \text{если} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$5.2. \quad z = x^2 + y^2, \quad \text{если} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$5.3. \quad z = x^2 + 12xy + 2y^2, \quad \text{если} \quad 4x^2 + y^2 = 25.$$

$$5.4. \quad u = x - 2y + 2z, \quad \text{если} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$5.5. \quad u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{если} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0.$$

## 2. Методы вычисления интегралов

В этом разделе мы рассмотрим методы вычислений интегралов (неопределенных и определенных), интегралов, зависящих от параметра, а также многомерных интегралов в приложении к физике элементарных частиц.

В большинстве случаев для вычисления интеграла того или иного типа достаточно найти первообразную подынтегральной функции. В этом случае, кроме хорошо известных методов (замена переменной, интегрирование по частям), может помочь метод подбора, когда известен общий вид первообразной с точностью до постоянных коэффициентов. Тогда, проводя дифференцирования, находят эти коэффициенты и вычисляют искомый интеграл.

**Пример 1.** Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

**Решение**

Предполагая, что первообразная имеет вид

$$F(x) = \alpha \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

дифференцированием по  $x$  находим:

$$\frac{dF}{dx} = \alpha \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

следовательно,  $\alpha = a^{-2}$  и окончательно находим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

В том случае, когда нахождение первообразной вызывает значительные трудности, а подынтегральная функция зависит от одного или нескольких параметров, можно воспользоваться методом дифференцирования или интегрирования по этому параметру (параметрам). Пусть требуется вычислить интеграл

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x, y), \quad (7)$$



где функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в области  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ , причем  $x_1 < \varphi(y) < x_2$  и  $x_1 < \psi(y) < x_2$ .

Поскольку интеграл (7) представляет собой функцию, непрерывную на сегменте  $y_1 \leq y \leq y_2$ , то его можно дифференцировать по параметру  $y$  (правило Лейбница)<sup>1</sup>:

$$\frac{dF(y)}{dy} = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad (8)$$

или интегрировать по этому параметру:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy F(y) = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x, y). \quad (9)$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} dx \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}. \quad (10)$$

**Решение**

Поскольку исходный интеграл сходится, его можно дифференцировать по параметру  $a$ . Для случая  $a > 0$  имеем:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Замена переменной  $t = \operatorname{tg} x$  приводит к интегралу:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + a^2 t^2)}.$$

Раскладывая подынтегральное выражение на простейшие дроби

$$\frac{1}{(1 + t^2)(1 + a^2 t^2)} = \frac{At + B}{1 + t^2} + \frac{Ct + D}{1 + a^2 t^2},$$

---

<sup>1</sup>Для несобственных интегралов необходимо добавить дополнительное условие равномерной сходимости в интервале  $(y_1, y_2)$ .

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{1 - a^2}, \quad D = -\frac{a^2}{1 - a^2}$$

и интегрируя, получим:

$$\frac{dI}{da} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + a}.$$

Интегрируя полученное выражение по параметру  $a$ , найдем:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a) + C.$$

Постоянную  $C = 0$  находим из условия  $I(0) = 0$ .

Для случая  $a < 0$  заменой  $\alpha = -|a|$  аналогично получим:

$$I(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \ln(1 - \alpha).$$

Следовательно,

$$I(a) = \frac{a}{|a|} \frac{\pi}{2} \ln(1 + |a|).$$

**Пример 3.** Выразить производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (11)$$

и

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < k < 1 \quad (12)$$

через  $E(k)$  и  $F(k)$ .

**Решение**

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi - 1)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{k} [E(k) - F(k)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{dF}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = -\frac{1}{k} F(k) + \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (14)$$

Для вычисления оставшегося интеграла заметим, что

$$\frac{d^2 E}{dk^2} = - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (15)$$

и после интегрирования по частям получим:

$$\frac{d^2 E}{dk^2} = -\frac{F(k)}{1 - k^2} + \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{F(k)}{k^2} - \frac{E(k)}{k^2(1 - k^2)}. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dk^2} &= -\frac{1}{k^2} [E(k) - F(k)] + \frac{1}{k} \left[ \frac{dE}{dk} - \frac{dF}{dk} \right] = \\ &= \frac{F(k)}{k^2} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), получим:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{E(k)}{1 - k^2}. \quad (18)$$

Подставляя полученный интеграл в (14), окончательно найдем:

$$\frac{dF}{dk} = \frac{1}{k} \left[ \frac{E(k)}{1 - k^2} - F(k) \right]. \quad (19)$$

Метод дифференцирования по параметру позволяет сводить искомый интеграл к дифференциальному уравнению. Проиллюстрируем это на следующем примере.

**Пример 4.** Вычислить интеграл:

$$g(z) = \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(zx)}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad (20)$$

## Решение

Заметим, что исходный несобственный интеграл понимается как предел

$$g(z) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} dx \frac{\cos(zx)}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (21)$$

С учетом этого замечания продифференцируем (21) дважды по  $z$ :

$$g'(z) = - \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} dx \frac{x \sin(zx)}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (22)$$

$$g''(z) = - \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} dx \frac{x^2 \cos(zx)}{\sqrt{1+x^2}} \quad (23)$$

и проинтегрируем разность  $g''(z) - g(z)$  по частям

$$g''(z) - g(z) = - \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} dx \sqrt{1+x^2} \cos(zx) = - \frac{g'(z)}{z}. \quad (24)$$

Следовательно,

$$g''(z) + \frac{g'(z)}{z} - g(z) = 0 \quad (25)$$

– уравнение Макдональда. Его решение – линейная комбинация модифицированной функции Бесселя,  $I_0(z)$  и функции Макдональда,  $K_0(z)$ :

$$g(z) = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z). \quad (26)$$

Из условия сходимости интеграла (21) при  $z \rightarrow \infty$  необходимо положить  $C_1 = 0$ . Для нахождения коэффициента  $C_2$  воспользуемся асимптотикой функции Макдональда при  $z \rightarrow 0$ :  $K_0(z) \simeq -\ln(z/2)$  и выделим лидирующий логарифм в исходном интеграле (21). Заметим, что при  $z \rightarrow 0$  интеграл (21) логарифмически расходится на верхнем пределе.

Для выделения особенностей такого типа можно использовать следующий прием. Рассмотрим интеграл:

$$I(a, s) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} dx \frac{\cos(sx)}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad a \rightarrow 0 \quad (27)$$

и разобьем область интегрирования на две части:

$$I(a, s) = \int_0^{\delta} dx \frac{\cos(sx)}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\ell} dx \frac{\cos(sx)}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

где  $\delta$  – произвольное положительное число, которое мы возьмем малым. Тогда первый интеграл легко вычисляется разложением числителя подынтегральной функции в ряд по малым  $x$ :

$$\int_0^{\delta} dx \frac{\cos(sx)}{\sqrt{a^2 + x^2}} \simeq \ln 2\delta - \ln a.$$

Во втором интеграле можно сразу положить  $a = 0$ :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\ell} dx \frac{\cos(sx)}{\sqrt{a^2 + x^2}} \simeq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\ell} dx \frac{\cos(sx)}{x} \simeq -\ln s\delta.$$

Следовательно,

$$I(a, s) \simeq -\ln\left(\frac{sa}{2}\right)$$

и параметр  $\delta$  сократился.

Сделав в (27) замену  $x = ay$ , положив  $z = as$ , найдем, что  $C_2 = 1$  и окончательно получим

$$g(z) = \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(zx)}{\sqrt{1 + x^2}} = K_0(z).$$

Метод интегрирования по параметру позволяет вычислить интегралы следующего вида.

**Пример 5.** Вычислить интеграл:

$$I(a, b) = \int_0^1 dx \frac{x^b - x^a}{\ln x}, \quad (a > 0, \quad b > 0). \quad (28)$$

### Решение

Заметим, что

$$\frac{d}{dy} x^y = x^y \ln x, \quad \int_0^z dy x^y \ln x = x^z - 1.$$

Поэтому

$$I(a, b) = \int_0^1 dx \int_a^b dy x^y = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Еще один метод интегрирования основан на применении преобразования Лапласа для некоторой функции  $f(x)$ , такой, что существует интеграл:

$$g(s) = \int_0^\infty dx e^{-sx} f(x). \quad (29)$$

Рассмотрим следующие примеры.

#### Пример 6.

Найти значение интеграла

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x - \sin x}{x^3}. \quad (30)$$

### Решение

Рассмотрим подынтегральное выражение как изображение по Лапласу некоторой функции. Получим последовательно

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty ds \frac{s - \sin s}{s^3} = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds (s - \sin s) \int_0^\infty dx x^2 e^{-sx} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\infty ds (s - \sin s) e^{-sx} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (31)$$

**Пример 7.**

Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{\infty} dx \frac{f(ax) - f(bx)}{x} = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad (a > 0, \quad b > 0), \quad (32)$$

где  $f(x)$  – непрерывная функция и интеграл

$$\int_{\ell}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x}$$

существует при любом  $\ell > 0$ .

**Решение**

Нетрудно видеть, что

$$f(as) = \int_0^{\infty} dx e^{-asx} g(x), \quad f(0) = \int_0^{\infty} dx g(x).$$

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{f(ax) - f(bx)}{x} &= \int_0^{\infty} ds \frac{f(as) - f(bs)}{s} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_0^{\infty} dx g(x) [e^{-asx} - e^{-bsx}] = \int_0^{\infty} dx g(x) \int_0^{\infty} ds \int_{ax}^{bx} dy e^{-sy} = \\ &= \ln \frac{b}{a} \int_0^{\infty} dx g(x) = f(0) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

**Пример 8.**

Вычислить интеграл:

$$f(x) = \int_0^{\infty} dt \frac{t \sin xt}{a^2 + t^2}. \quad (33)$$

## Решение

Воспользуемся преобразованием Лапласа. Изображение искомого интеграла имеет вид:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^\infty \frac{dt \, t}{a^2 + t^2} \int_0^\infty dx \, e^{-sx} \sin xt = \\ &= \int_0^\infty dt \frac{t^2}{(s^2 + t^2)(a^2 + t^2)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Раскладывая подынтегральное выражение на простейшие дроби, после несложных вычислений получим:

$$g(s) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a + s}. \quad (35)$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-ax}. \quad (36)$$

Кроме однократных интегралов, в задачах теоретической физики очень часто возникает необходимость вычисления кратных интегралов. Это становится особенно актуальным при изучении кинематики процессов с участием элементарных частиц. При этом в качестве количественной величины выступает фазовый объем реакции, который для процесса распада частицы сорта  $a$  на  $n$  частиц сорта  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  может быть представлен в следующем виде <sup>2</sup>:

$$\Phi = \frac{(2\pi)^4}{2E_a} \int \delta \left( E_a - \sum_{i=1}^n E_i \right) \delta^3 \left( \mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3}, \quad (37)$$

где первая  $\delta$ -функция выражает закон сохранения энергии, а вторая

$$\delta^3 \left( \mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right) = \delta \left( p_{ax} - \sum_{i=1}^n p_{ix} \right) \delta \left( p_{ay} - \sum_{i=1}^n p_{iy} \right) \delta \left( p_{az} - \sum_{i=1}^n p_{iz} \right)$$

– векторный закон сохранения импульса в реакции,  $E_a = \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}$ ,  $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$ ,  $m_a$  – масса распадающейся частицы  $a$ ,  $m_i$  – массы частиц  $b_i$ .

---

<sup>2</sup>Используется естественная система единиц, где  $c = \hbar = 1$ .



Следует отметить, что основная трудность при работе с кратными интегралами состоит в подходящем выборе новых переменных, в которых область интегрирования будет выглядеть наиболее просто. Проиллюстрируем все вышесказанное на следующих примерах.

**Пример 9.** Вычислить интеграл:

$$S = \int_{(D)} dx dy, \quad D : (x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (38)$$

**Решение**

Переходя к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , представим область интегрирования в виде:

$$0 \leq r \leq (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^{-1/2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$S = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^{-1/2}} dr r = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

Заменой переменной  $t = \sin \varphi - \cos \varphi$ , с учетом тождества  $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi = (\cos \varphi + \sin \varphi)(1 - \cos \varphi \sin \varphi)$  интеграл приводится к виду:

$$S = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(2 - t^2)(1 + t^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(2 - t^2)(1 + t^2)}.$$

Раскладывая подынтегральное выражение на простейшие дроби, получим:

$$S = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^1 dt \left( \frac{1}{\sqrt{2} - t} + \frac{1}{\sqrt{2} + t} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**Пример 10.** Найти фазовый объем реакции двухчастичного распада  $a \rightarrow b_1 + b_2$ :

$$\Phi = \frac{1}{32\pi^2 E_a} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta(E_a - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad (39)$$

где  $E_a = \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}$ ,  $E_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2}$ ,  $E_2 = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m^2}$ ,  $m_a$  – масса распадающейся частицы  $a$ ,  $m$  – массы частиц  $b_1$  и  $b_2$ .

### Решение

Пользуясь свойством  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0),$$

проинтегрируем  $\Phi$  по  $d^3p_2$  с  $\delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ :

$$\begin{aligned} \int d^3p_2 \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_{2x} \delta(p_{ax} - p_{1x} - p_{2x}) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dp_{2y} \delta(p_{ay} - p_{1y} - p_{2y}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{2z} \delta(p_{az} - p_{1z} - p_{2z}) = 1. \end{aligned}$$

Получим:

$$\Phi = \frac{1}{32\pi^2 E_a} \int \frac{d^3p_1}{E_1 E_2} \delta(E_a - E_1 - E_2),$$

где  $E_2 = \sqrt{(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1)^2 + m^2}$ .

Для дальнейших вычислений удобно выбрать сферическую систему координат, направив ось  $z$  по направлению импульса  $\mathbf{p}_a$ , а полярный угол  $\theta$  определить как угол между векторами  $\mathbf{p}_a$  и  $\mathbf{p}_1$ . Тогда

$$p_{1x} = p_1 \sin \theta \cos \varphi, \quad p_{1y} = p_1 \sin \theta \sin \varphi, \quad p_{1z} = p_1 \cos \theta,$$

$$d^3p_1 = p_1^2 \sin \theta dp_1 d\theta d\varphi.$$

Область интегрирования определяется из решения уравнения закона сохранения энергии:

$$E_a - \sqrt{p_1^2 + m^2} - \sqrt{p_a^2 + p_1^2 - 2p_a p_1 \cos \theta + m^2} = 0$$

и может быть представлена в виде:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \cos \theta = \frac{2E_a E_1 - m_a^2}{2p_1 p_a}, \quad p_1^{(1)} \leq p_1 \leq p_1^{(2)},$$

$$p_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( p_a \mp E_a \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_a^2}} \right).$$

Заменяв переменную  $\theta$  посредством  $E_2 = \sqrt{p_a^2 + p_1^2 - 2p_a p_1 \cos \theta + m^2}$  и проинтегрировав последовательно по  $d\varphi$ ,  $dE_2$  и  $dp_1$ , окончательно получим фазовый объем в виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{16\pi E_a p_a} \int_{p_1^{(1)}}^{p_1^{(2)}} \frac{dp_1 p_1}{\sqrt{p_1^2 + m^2}} \int dE_2 \delta(E_a - E_1 - E_2) = \\ &= \frac{1}{16\pi E_a p_a} \int_{p_1^{(1)}}^{p_1^{(2)}} \frac{dp_1 p_1}{\sqrt{p_1^2 + m^2}} = \frac{1}{16\pi E_a} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_a^2}} \Theta \left( 1 - \frac{4m^2}{m_a^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

– Тэта-функция Хевисайда.

Следует отметить, что величина  $E_a \Phi$  является инвариантом относительно преобразования Лоренца для энергии и импульса распадающейся частицы. Поэтому исходный интеграл (39) можно вычислить перейдя в систему покоя распадающейся массивной частицы <sup>3</sup>. Предоставляем студенту самостоятельно проделать соответствующие вычисления.

---

<sup>3</sup>Для безмассовой частицы такой системы отсчета не существует.

*Задачи для самостоятельного решения*

1. Применяя различные приемы, вычислить следующие неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} 1.1. \quad & \int dx \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}; & 1.2. \quad & \int dx \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}; \\ 1.3. \quad & \int \frac{dx}{[(x+1)^2(x-1)^4]^{1/3}}; & 1.4. \quad & \int dx \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}; \\ 1.5. \quad & \int dx \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x; & 1.6. \quad & \int dx \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}; \\ 1.7. \quad & \int dx \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x; & 1.8. \quad & \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}. \end{aligned}$$

2. Применяя различные приемы, вычислить следующие определенные интегралы, определив, где это необходимо, области изменения параметров:

$$\begin{aligned} 2.1. \quad & \int_0^{\pi/2} dx \ln [a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x]; & 2.2. \quad & \int_0^{\pi} dx \ln [1 - 2a \cos x + a^2]; \\ 2.3. \quad & \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} \ln \left[ \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \right]; & 2.4. \quad & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \\ 2.5. \quad & \int_0^1 dx \sin \left( \ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}; & 2.6. \quad & \int_0^1 dx \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}. \end{aligned}$$

3. Доказать формулы:

$$\begin{aligned} 3.1. \quad & \int_0^k dx x F(x) = E(k) - (1 - k^2) F(k); \\ 3.2. \quad & \int_0^k dx x E(x) = \frac{1}{3} [(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)]; \\ 3.3. \quad & \int_0^x dy y J_0(y) = x J_1(x), \end{aligned}$$

где  $F(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно;  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя.

4. Найти приближенное значение интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\varepsilon + \ln(1+x)}.$$

5. Используя преобразование Лапласа, вычислить следующие интегралы:

$$\begin{aligned} 5.1. \quad & \int_0^\infty dx \frac{\sin x \cos ax}{x}; & 5.2. \quad & \int_0^\infty dx \left( \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2; \\ 5.3. \quad & \int_0^\infty dx \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2}; & 5.4. \quad & \int_0^\infty dx \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}. \end{aligned}$$

6. Вычислить следующие многомерные интегралы:

$$6.1. \quad \int_{(D)} dx dy, \quad D: (x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy, \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2, \quad a > 0;$$

$$6.2. \quad \int_{(D)} dx dy, \quad D: (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), \quad a > 0;$$

7. Найти фазовый объем реакции двухчастичного распада с участием безмассовых частиц:

$$\Phi = \frac{1}{32\pi^2\omega} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\omega_1 \omega_2} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

где  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \delta(k_x - k_{1x} - k_{2x}) \delta(k_y - k_{1y} - k_{2y}) \delta(k_z - k_{1z} - k_{2z})$ ,  
 $\omega = |\mathbf{k}|$ ,  $\omega_1 = |\mathbf{k}_1|$ ,  $\omega_2 = |\mathbf{k}_2|$ .

Сравнить с результатом, полученным в примере 10.

### 3. Методы теории функций комплексного переменного

В этом разделе мы подробно рассмотрим методы теории вычетов в приложении к вычислению определенных интегралов. Сущность методов вычисления интегралов, основанных на применении теоремы о вычетах, состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции  $f(x)$  по какому-либо отрезку  $(a, b)$  оси  $x$ , который может быть как конечным, так и бесконечным. Дополним отрезок  $(a, b)$  кривой  $C$  (рис. 1) и аналитически продолжим  $f(x)$  в область  $D$ , ограниченную кривой  $C$  и отрезком  $(a, b)$ . Применяя теперь к построенному аналитическому продолжению  $f(z)$  теорему о вычетах, находим

$$\int_a^b dx f(x) + \int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k), \quad (40)$$

где

$$\text{Res } f(z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_k)^m f(z)] \quad (41)$$

– вычет функции  $f(z)$  в полюсе  $z = z_k$ , имеющем порядок  $m$ .

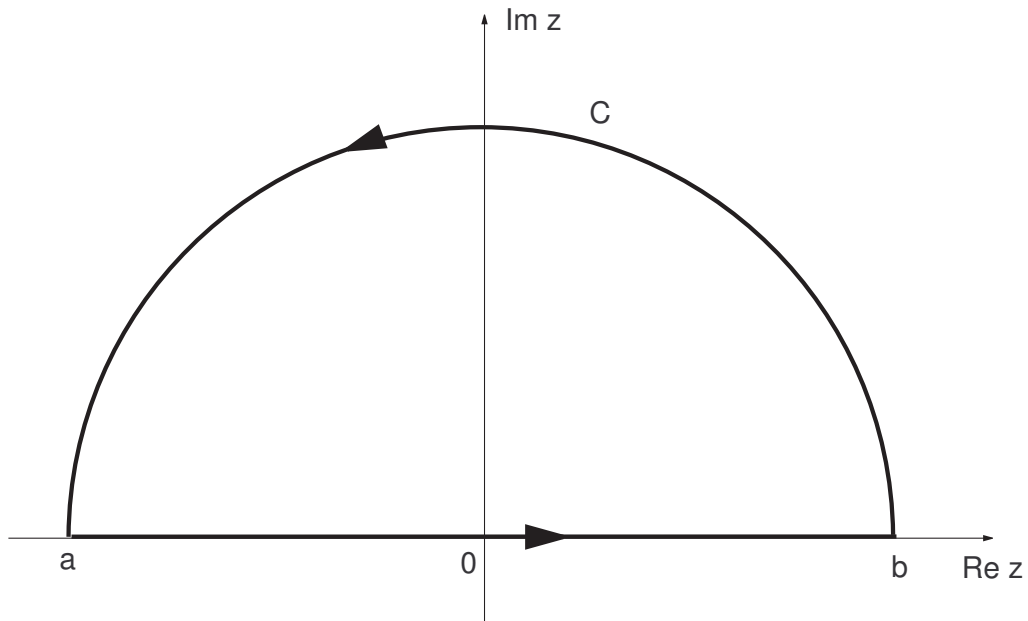


Рис. 1. Контур интегрирования в (40)

Если интеграл по кривой  $C$  удастся вычислить или выразить через искомый интеграл по отрезку  $(a, b)$ , то задача вычисления искомого интеграла будет решена.

При вычислении интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} d\varphi R(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (42)$$

с помощью теории вычетов в качестве контура интегрирования в комплексной плоскости переменного  $z = e^{i\varphi}$  выбирается окружность единичного радиуса,  $|z| = 1$ . При этом

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi R(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{z_k} R\left(\frac{z_k + z_k^{-1}}{2}, \frac{z_k - z_k^{-1}}{2i}\right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

В качестве иллюстрации вышесказанного разберем несколько характерных примеров.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{1 + x^2}. \quad (44)$$

### Решение

Выбираем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2}.$$

В качестве контура интегрирования рассмотрим полуокружность в верхней комплексной полуплоскости с замыканием вдоль вещественной оси (см. рис. 1). Функция  $f(z)$  имеет внутри контура простой полюс  $z = i$ . При этом интеграл по контуру  $C$  равен нулю в силу леммы Жордана. Следовательно, по формуле (40) находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{ix}}{1 + x^2} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Беря от обеих частей полученного равенства реальную часть, окончательно найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} dx \cos^2 x. \quad (45)$$

**Решение**

Согласно (43) имеем:

$$\int_0^{2\pi} dx \cos^2 x = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{4iz} \left(z + \frac{1}{z}\right)^2.$$

Внутри окружности  $|z| = 1$  в точке  $z = 0$  подынтегральная функция имеет полюс третьего порядка. Следовательно,

$$\frac{1}{4i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3} (z^2 + 1)^2 = \frac{\pi}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (z^2 + 1)^2 = \pi.$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x}. \quad (46)$$

**Решение**

Выберем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Контур интегрирования выберем, как указано на рис. 2 с обходом особой точки  $z = 0$  по полуокружности  $C_\varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . По теореме Коши



$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx f(x) + \int_{C_\varepsilon} dz f(z) + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx f(x) + \int_C dz f(z) = 0.$$

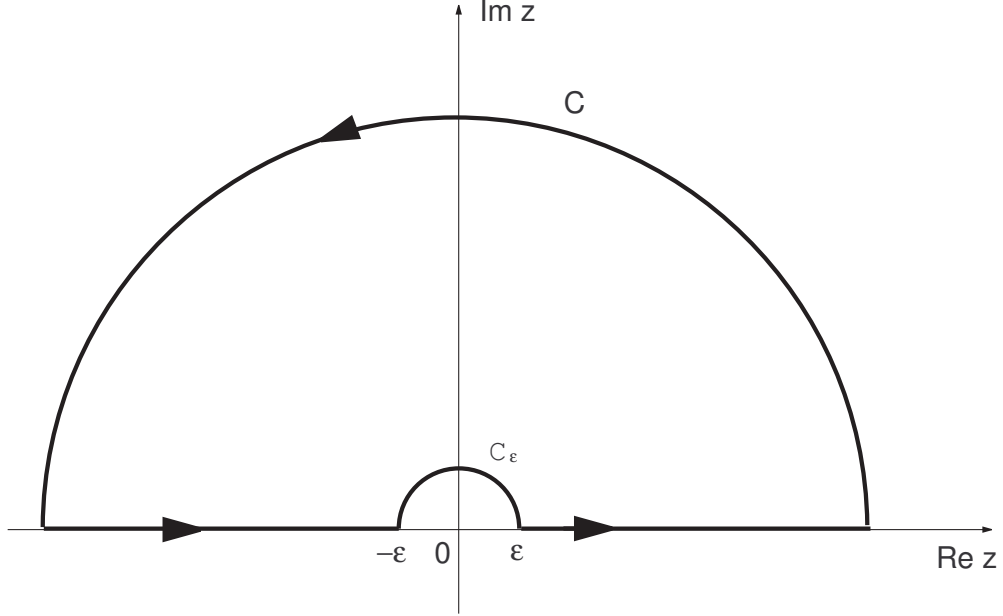


Рис. 2. Контур интегрирования для примера 3

Интеграл по контуру  $C$  равен нулю в силу леммы Жордана. Для вычисления интеграла по контуру  $C_\varepsilon$  рассмотрим разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 0$ :

$$f(z) \simeq \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2} - \dots$$

Таким образом, основной вклад в интеграл по  $C_\varepsilon$  даст слагаемое  $1/z$ . Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{C_\varepsilon} dz f(z) \simeq \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} = i \int_{\pi}^0 d\varphi \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}} = -i\pi.$$

Теперь теорему Коши можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x} = i\pi.$$

Заменяв в первом интеграле  $x \rightarrow -x$  и перейдя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , окончательно найдем

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (47)$$

где интегрирование ведется по прямой  $Re\ s = \sigma$ .

### Решение

Искомый интеграл представляет собой обратное преобразование Лапласа для функции  $s^{-\alpha}$ . Функция  $s^{-\alpha}$  многозначная, и начало координат является точкой ветвления. Поэтому удобно выбрать контур с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси с обходом точки ветвления  $s = 0$  по полуокружности радиуса  $\varepsilon$  (см. рис. 3). Внутри контура функция  $s^{-\alpha}$  аналитическая и однозначная. Следовательно, по теореме Коши

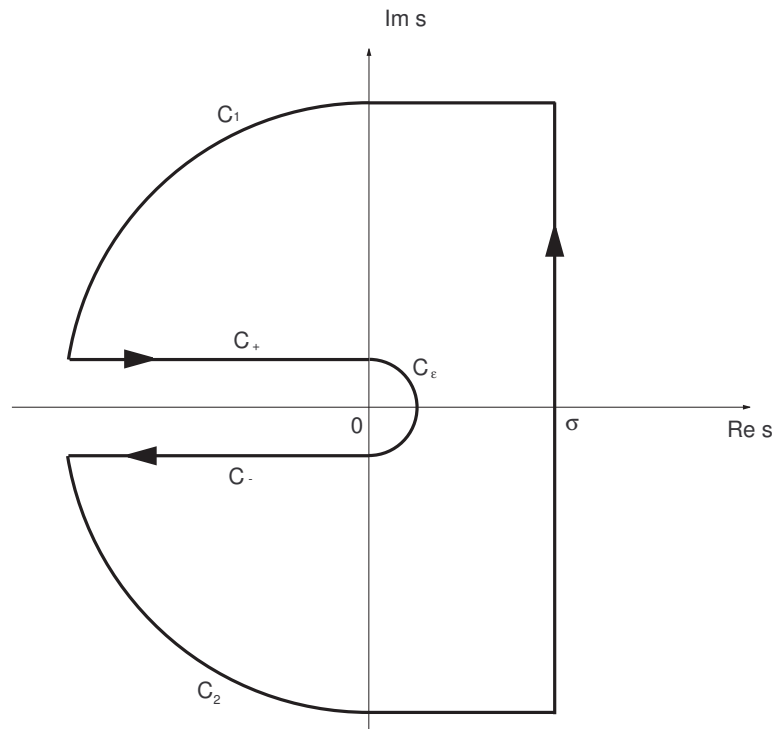


Рис. 3. Контур интегрирования для примера 4

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} + \int_{C_1} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} + \int_{C_+} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} + \\ & + \int_{C_\varepsilon} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} + \int_{C_-} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} + \int_{C_2} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Согласно лемме Жордана

$$\int_{C_1} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = 0, \quad \int_{C_2} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = 0.$$

Интеграл по полуокружности  $C_\varepsilon$

$$\int_{C_\varepsilon} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} \simeq i \int_{\pi/2}^{-\pi/2} d\varphi \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon^\alpha e^{i\alpha\varphi}} \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

По верхнему берегу разреза  $s = \xi e^{i\pi}$ ,  $ds = -d\xi$ :

$$\int_{C_+} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} d\xi \frac{e^{-\xi x}}{\xi^\alpha e^{i\pi\alpha}}.$$

По нижнему берегу разреза  $s = \xi e^{-i\pi}$ ,  $ds = -d\xi$ :

$$\int_{C_-} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^R d\xi \frac{e^{-\xi x}}{\xi^\alpha e^{-i\pi\alpha}}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \frac{e^{sx}}{s^\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi x} \xi^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} x^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

Используя соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

окончательно найдем

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

*Задачи для самостоятельного решения*

Используя методы теории вычетов, вычислить следующие интегралы:

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+2x^2+x^4};$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6};$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}};$$

$$5. \quad \int_0^{2\pi} dx \cos^n x;$$

$$6. \quad \int_0^{2\pi} dx \sin^n x;$$

$$7. \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x};$$

$$8. \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x};$$

$$9. \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x};$$

$$10. \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x};$$

$$11. \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \frac{\cos^2 x}{1+\varkappa^2 \sin^2 x};$$

$$12. \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \frac{\sin^2 x}{1+\varkappa^2 \cos^2 x};$$

$$13. \quad \int_0^{\infty} dt \frac{\cos xt}{a^2+t^2};$$

$$14. \quad \int_0^{\infty} dt \frac{\sin xt}{t(a^2+t^2)};$$

$$15. \quad \int_0^{\infty} dt \frac{\sin xt \cos t}{t};$$

$$16. \quad \int_0^{\infty} dt \frac{\sin xt \sin yt}{t^2};$$

## 4. Методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим 2 метода решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (48)$$

где  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  – заданные функции.

Первый метод является достаточно универсальным и основан на представлении решения исходного уравнения (48) в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48), получают систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $c_n$ . При необходимости заданные функции  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  также раскладывают в степенные ряды.

Второй метод основан на упоминавшемся в предыдущем параграфе преобразовании Лапласа. Он позволяет эффективно решать уравнения вида (49) с коэффициентами  $a_i(x) = k_i x + b_i$ .

Проиллюстрируем оба вышеизложенных метода на конкретных примерах.

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения:

$$xy'' - (1+x)y' + y = 0. \quad (50)$$

**а) Решение с использованием степенного ряда:**

Подставляя (49) в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-2)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n-1)x^n = 0.$$

Расписывая ряды почленно

$$c_0 - c_1 - c_2 x^2 + 3c_3 x^3 - 2c_3 x^3 + 8c_4 x^3 - 3c_4 x^4 + \dots = 0,$$

и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , найдем

$$c_0 = c_1, \quad c_3 = \frac{c_2}{3}, \quad c_4 = \frac{c_3}{4} = \frac{c_2}{12}, \quad \dots, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} = \dots = \frac{2c_2}{n!}, \\ n = 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$y(x) = c_0 + c_0 x + 2c_2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Вводя постоянные  $A_1 = 2c_2$ ,  $A_2 = c_0 - 2c_2$ , окончательно найдем

$$y(x) = A_1 e^x + A_2 (1 + x).$$

**б) Решение с использованием преобразования Лапласа:**

Пусть  $\bar{y}(s)$  есть образ по Лапласу от функции  $y(x)$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-sx} x y'' &= -s^2 \frac{d\bar{y}(s)}{ds} - 2s \bar{y}(s) + y(0), \\ \int_0^{\infty} dx e^{-sx} x y' &= -s \frac{d\bar{y}(s)}{ds} - \bar{y}(s), \\ \int_0^{\infty} dx e^{-sx} x y &= -\frac{d\bar{y}(s)}{ds}, \end{aligned}$$

получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка на функцию  $\bar{y}(s)$ :

$$\frac{d\bar{y}(s)}{ds} + \bar{y}(s) \frac{3s-2}{s(s-1)} = \frac{2y(0)}{s(s-1)}. \quad (51)$$

Решая теперь это уравнение обычным методом, найдем

$$\bar{y}(s) = \frac{C}{s^2(s-1)} + \frac{y(0)}{s-1} = \frac{y(0)+C}{s-1} - \frac{C}{s} - \frac{C}{s^2}, \quad (52)$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Используя обратное преобразование Лапласа, запишем решение исходного уравнения в виде:

$$y(x) = A_1 e^x + A_2 (1 + x). \quad (53)$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 2x y' + (6x - 13)y = 0. \quad (54)$$

**а) Решение с использованием степенного ряда:**

Подставляя (49) в исходное уравнение, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2n-13)x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.$$

Расписывая ряды почленно

$$-13c_0 + 6c_0x - 11c_1x + 6c_1x^2 + 2c_2 - 9c_2x^2 + 6c_2x^3 + 6c_3x + \dots = 0,$$

и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , найдем

$$c_2 = \frac{13}{2}c_0, \quad c_3 = \frac{11}{6}c_1 - c_0, \quad c_4 = \frac{39}{8}c_0 - \frac{c_1}{2}, \quad \dots,$$

где  $c_0$  и  $c_1$  – произвольные постоянные.

Подставляя полученные коэффициенты в ряд (49), получим

$$y(x) = c_0 \left( 1 + \frac{13}{2}x^2 - x^3 + \frac{39}{8}x^4 + \dots \right) + c_1 \left( x + \frac{11}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \dots \right).$$

Вводя обозначения

$$c_0 = -3e^{-9}A_2 + 19 \left[ A_1 - \frac{A_2}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(3) \right],$$

$$c_1 = 11e^{-9}A_2 - 69 \left[ A_1 - \frac{A_2}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(3) \right],$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}$$

– интеграл вероятности (функция ошибок), после достаточно трудоемких вычислений получим

$$y(x) = A_1(2x^2 - 12x + 19)e^{-3x} + A_2 \left[ (x-3)e^{-(x-3)^2} + (2x^2 - 12x + 19) \int_0^{x-3} d\xi e^{-\xi^2} \right] e^{-3x}. \quad (55)$$

## б) Решение с использованием преобразования Лапласа:

При решении с помощью преобразования Лапласа уравнений вида

$$y'' + (ax + b)y' + (cx + d)y = 0 \quad (56)$$

вычисления можно упростить, если в исходном уравнении выполнить следующие замены:

в случае  $a \neq 0$ :

$$y(x) = z(x) e^{-cx/a}, \quad x = t^{1/2} + \frac{2c - ab}{a^2}; \quad (57)$$

в случае  $a = 0, c \neq 0$ :

$$y(x) = z(x) e^{-bx/c}, \quad x = t^{1/3} + \frac{b^2 - 4d}{4c}. \quad (58)$$

В нашем случае  $a = 2, b = 0, c = 6, d = -13$  и мы можем произвести замену  $y(x) = z(x) e^{-3x}$ . Уравнение (54) преобразуется следующим образом:

$$z'' + (2x - 6)z' - 4z = 0. \quad (59)$$

Выполняя теперь в этом уравнении замену переменной  $x = \sqrt{t} + 3$ , получим:

$$2t\ddot{z} + (2t + 1)\dot{z} - 2z = 0, \quad (60)$$

где точка обозначает производную по  $t$ .

Пусть  $\bar{z}(s)$  есть образ по Лапласу от функции  $z(t)$ . Применяя к уравнению (60) преобразование Лапласа, получим дифференциальное уравнение первого порядка на функцию  $\bar{z}(s)$ :

$$\bar{z}'(s) + \bar{z}(s) \frac{3s + 4}{2s(s + 1)} = \frac{z(0)}{2s(s + 1)}. \quad (61)$$

Его решение:

$$\bar{z}(s) = C \frac{\sqrt{s + 1}}{s^2} + z(0) \frac{s + 2}{s^2}, \quad (62)$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

При нахождении оригинала  $z(t)$  возникает определенная сложность с первым слагаемым в (62). Для этого рассмотрим интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} d\xi e^{-\xi^2} \quad (63)$$



и найдем его изображение  $\bar{\varphi}(s)$  по Лапласу. Имеем

$$\int_0^{\infty} dt e^{-st} \frac{d \operatorname{erf}(\sqrt{t})}{dt} = \int_0^{\infty} dt e^{-st} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} = s \bar{\varphi}(s), \quad (64)$$

т. к.  $\operatorname{erf}(0) = 0$ . С другой стороны,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-(1+s)t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+s}}. \quad (65)$$

Следовательно,

$$\bar{\varphi}(s) = \frac{1}{s\sqrt{1+s}}. \quad (66)$$

Аналогично можно найти образ

$$\int_0^{\infty} dt e^{-st} t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2+3s}{2(1+s)^{3/2}}, \quad (67)$$

где мы воспользовались интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \sqrt{t} e^{-(1+s)t} = \frac{1}{2(1+s)^{3/2}}. \quad (68)$$

Представляя первое слагаемое в (62) в виде

$$C \frac{\sqrt{s+1}}{s^2} = \frac{C}{2(1+s)^{3/2}} + \frac{C(2+3s)}{2s^2(1+s)^{3/2}} + \frac{C}{2s(1+s)^{1/2}}, \quad (69)$$

получим

$$z(t) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-t} \sqrt{t} + (2t+1) \int_0^t d\xi e^{-\xi^2} \right) + z(0)(1+2t). \quad (70)$$

Возвращаясь к функции  $y(x)$ , окончательно найдем:

$$\begin{aligned} y(x) = & A_1(2x^2 - 12x + 19) e^{-3x} + \\ & + A_2 \left[ (x-3) e^{-(x-3)^2} + (2x^2 - 12x + 19) \int_0^{x-3} d\xi e^{-\xi^2} \right] e^{-3x}. \end{aligned} \quad (71)$$

*Задачи для самостоятельного решения*

1. Используя представление решения в виде степенного ряда или преобразование Лапласа, найти общие решения дифференциальных уравнений:

1.1.  $xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 0;$

1.2.  $xy'' - y' = x J_2(2\sqrt{x});$

1.3.  $xy'' - (5+x)y' + 3y = 0;$

1.4.  $y'' + xy' + 3y = 0.$

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений при начальном условии  $y(0) = 0$ :

2.1.  $xy'' + 2y' + ay = 0;$

2.2.  $xy'' + 2y' + ay = x^3;$

2.3.  $xy'' + 2y' + ay = J_0(2\sqrt{ax});$

2.4.  $xy'' - y' + ay = 0.$

# ОТВЕТЫ

## § 1

$$1.1. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \quad 1.2. \quad y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)},$$

$$y'' = \frac{y^2}{x^4(1-\ln y)^3} [y(1-\ln x)^2 - 2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2].$$

$$1.3. \quad y' = -\frac{2x+y}{x+2y}, \quad y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{y}{x}, \quad y'' = 0. \quad 3.1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2-x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3z^2-x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2zx}{(3z^2-x)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{6z}{(3z^2-x)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}.$$

$$3.2. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2zxy^3}{(z^2-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2zx^3y}{(z^2-xy)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

$$3.3. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}. \quad 3.4. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad 5.1. \quad z_{\min} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}, \quad \text{при}$$

$$x = -\frac{ab^2}{|ab|\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = -\frac{a^2b}{|ab|\sqrt{a^2+b^2}}; \quad z_{\max} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}, \quad \text{при}$$

$$x = \frac{ab^2}{|ab|\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{a^2b}{|ab|\sqrt{a^2+b^2}}. \quad 5.2. \quad z_{\max} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}, \quad \text{при}$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}. \quad 5.3. \quad z_{\max} = \frac{425}{4}, \quad \text{при } x = \pm \frac{3}{2},$$

$$y = \pm 4, \quad z_{\min} = -50, \quad \text{при } x = \pm 2, y = \pm 3. \quad 5.4. \quad u_{\min} = -3, \quad \text{при } x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}; \quad u_{\max} = 3, \quad \text{при } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3},$$

$$z = \frac{2}{3}. \quad 5.5. \quad u_{\min} = c^2, \quad \text{при } x = 0, y = 0, z = \pm c; \quad u_{\max} = a^2, \quad \text{при } x = \pm a, y = 0, z = 0.$$

## § 2

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1.1.} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left[ \frac{2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2}{2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2} \right] . \quad \mathbf{1.2.} \quad \frac{1}{2} \left( x^2 - x\sqrt{x^2 - 1} + \right. \\
& \left. + \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \right) . \quad \mathbf{1.3.} \quad -\frac{3}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3} . \quad \mathbf{1.4.} \quad -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \\
& + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) , \quad x > 0 . \quad \mathbf{1.5.} \quad e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} . \quad \mathbf{1.6.} \quad \frac{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}} \right] , \quad |x| < 1 . \quad \mathbf{1.7.} \quad \left( 1 - \frac{4}{x} \right) e^x . \\
& \mathbf{1.8.} \quad \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left[ \frac{1 + x\sqrt{3} + x^2}{1 - x\sqrt{3} + x^2} \right] - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1-x^2}{x\sqrt{3}} \right) . \\
& \mathbf{2.1.} \quad \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2} . \quad \mathbf{2.2.} \quad 0, |a| \leq 1; \quad \pi \ln a^2, |a| > 1 . \quad \mathbf{2.3.} \quad \pi \arcsin a . \\
& \mathbf{2.4.} \quad \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) . \quad \mathbf{2.5.} \quad \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2+a+b+ab} . \quad \mathbf{2.6.} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2} . \\
& \mathbf{4.} \quad -\ln \varepsilon + \operatorname{li}(2) - C_E . \quad \mathbf{5.1.} \quad \frac{\pi}{2}, |a| < 1; \quad \frac{\pi}{4}, |a| = 1; \quad 0, |a| > 1 . \\
& \mathbf{5.2.} \quad 2 \ln \left[ \frac{(2a)^a (2b)^b}{(a+b)^{a+b}} \right] . \quad \mathbf{5.3.} \quad -a \ln a . \quad \mathbf{5.4.} \quad (\sqrt{b} - \sqrt{a})\sqrt{\pi} . \\
& \mathbf{6.1.} \quad a^2 \left( \frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right) . \quad \mathbf{6.2.} \quad \frac{\pi a^2}{4} . \quad \mathbf{7.} \quad \frac{1}{16\pi\omega} .
\end{aligned}$$

## § 3

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1.} \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} . \quad \mathbf{2.} \quad \frac{\pi}{2} . \quad \mathbf{3.} \quad \frac{2\pi}{3} . \quad \mathbf{4.} \quad \frac{\pi}{2^{1+1/(2n)}n} \csc \left( \frac{\pi}{2n} \right) . \\
& \mathbf{5.} \quad \frac{\pi(2k)!}{2^{2k-1}k!}, \quad \text{при } n = 2k; \quad 0, \quad \text{при } n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
& \mathbf{6.} \quad \frac{\pi(2k)!}{2^{2k-1}k!}, \quad \text{при } n = 2k; \quad 0, \quad \text{при } n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

**7.**  $\pi\sqrt{2}$ . **8.**  $\pi\sqrt{2}$ . **9.**  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ,  $a > b$ . **10.**  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ,  
 $a > b$ . **11.**  $\frac{\pi}{\varkappa^2} \left( \sqrt{1+\varkappa^2} - 1 \right)$ . **12.**  $\frac{\pi}{\varkappa^2} \left( \sqrt{1+\varkappa^2} - 1 \right)$ .  
**13.**  $\frac{\pi}{2a} e^{-ax}$ . **14.**  $\frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-ax})$ . **15.**  $\frac{\pi}{2}$ ,  $x > 1$ ;  $\frac{\pi}{4}$ ,  
 $x = 1$ ;  $0$ ,  $x < 1$ . **16.**  $\frac{\pi}{4} (x + y - |x - y|)$ .

#### § 4

**1.1.**  $C_1 e^{2x} + C_2 (1 + 3x) e^{-x}$ . **1.2.**  $C_1 x^2 + C_2 - x J_2(2\sqrt{x})$ .  
**1.3.**  $C_1 (x^3 + 9x^2 + 36x + 60) + C_2 e^x (x^2 - 8x + 20)$ .  
**1.4.**  $C_1 (1 - x^2) e^{-x^2/2} + C_2 \left[ x + (1 - x^2) \int_0^x d\xi e^{-(\xi^2+x^2)/2} \right]$ .  
**2.1.**  $(x/a)^{3/2} J_3(2\sqrt{ax})$ . **2.2.**  $C (x/a)^{3/2} J_3(2\sqrt{ax}) + x^3/a$ .  
**2.3.**  $C (x/a)^{3/2} J_3(2\sqrt{ax}) - \frac{1}{2} (x/a)^{1/2} J_1(2\sqrt{ax})$ . **2.4.**  $C x J_2(2\sqrt{ax})$ .

## Список литературы

- [1] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2010. — 558 с.
- [2] Шелковников, Ф. А. Сборник упражнений по операционному исчислению / Ф. А. Шелковников, К. Г. Такайшвили. — М. : Высшая школа, 1976. — 184 с.
- [3] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. — 680 с.
- [4] Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М. : УРСС, 1998. — 424 с.
- [5] Смирнов, В.И. Курс высшей математики : В 5 т. / В.И. Смирнов. — М. : Наука, 1974. — Т. 1. — 479 с.
- [6] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1965. — 716 с.

Учебное издание

**Румянцев Дмитрий Александрович**  
**Чистяков Михаил Валерьевич**

**Избранные задачи  
высшей математики**

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерная верстка Д. А. Румянцев

Подписано в печать 10.07.2020. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 4 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова.  
150003 Ярославль, ул. Советская, 14.