МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ЭЛЕМЕНТЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА»

Направление подготовки (специальность):
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:
ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ, канд.техн.наук, доцент

г. Череповец - 2022

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022 — Том 3 — 2022. — 656 с. — ISBN 978-5-507-44238-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/221270

2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учебное пособие / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — 16-е изд. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 736 с. — ISBN 978-5-8114-0499-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210707.

Дополнительная литература:

1. Кытманов А.М. Математический анализ: учебное пособие для бакалавров / Кытманов А.М., Лейнартас Е.К., Лукин В.Н. и др. ; под общ.ред. А.М. Кытманова. - Москва: Юрайт, 2014. - 607 с. + Предметный указатель. - (Бакалавр. Базовый курс). Библиогр.: с.601. - ISBN 978-5-9916-2808-2.
2. Баврин, И.И. Высшая математика. Учебник для ВТУЗов [текст] / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – М.: ВЛАДОС, 2004 г.
3. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие.- 22 изд., перераб. [текст] / Г.Н. Берман.– СПб: Профессия, 2003-2006 г.
4. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Кудрявцев Л.Д. - Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 735 с.: ил. + Указатель. - ISBN 5-02-013950-5.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Кашинцева О.А., Сенатова И.А. Математика. Теория поля. Методические рекомендации по изучению курса**:** Учеб.- методическое пособие. – г. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. – 2010 г. – 68 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: http://biblioclub.ru/
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: http://window.edu.ru/
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: https://edu.chsu.ru/
4. Образовательная платформа Открытый МФТИ, онлайн курсы: Кратные интегралы и теория поля. URL: https://mipt.ru/education/chair/mathematics/process/praktikum-KIiTP.php

Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

Лекции

№ п/п	Тема лекции	Количество часов
1	*Кратные интегралы.* *Двойные интегралы.* Определение двойного интеграла Свойства интегралов. Теорема существования. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Приложение двойных интегралов. *Тройные интегралы*. Определение тройного интеграла. Свойства интегралов. Теорема существования. Сведение тройного интеграла к повторному. Замена переменных в тройном интеграле. Приложение тройных интегралов. *Криволинейные интегралы.* Криволинейные интегралы первого и второго рода. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения. Теорема Грина. *Поверхностные интегралы.* Поверхностные интегралы первого и второго рода. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения. Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса.	4 2 4 4
2	*Скалярное поле.* Скалярное поле: линии и поверхности уровня, производная по направлению, градиент. *Векторное поле.* Векторное поле: векторные линии, дивергенция, ротор, циркуляция векторного поля вдоль кривой, поток поля через поверхность. Дифференциальные операции. Специальные виды векторных полей.	2 8
	Итого	24

Практические занятия

Название темы практического занятия	часы
1. Двойной интеграл. Сведение кратного интеграла к повторному. Вычисление.	2 ч.
2. Вычисление двойного интеграла.	2 ч.
3. Проверочная работа по теме «Двойной интеграл». Замена переменных в двойном интеграле.	2 ч.
4. Приложения двойного интеграла.	2 ч.
5. Тройные интегралы. Приложения.	2 ч.
6. Замена переменных в тройном интеграле. Приложения.	2 ч.
7. Криволинейные интегралы первого рода.	2 ч.
8. Криволинейные интегралы 2-го рода. Теорема Грина. Приложения.	2 ч.
9. Поверхностные интегралы первого рода. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения. Поверхностные интегралы второго рода.	2 ч.
10. Поверхностные интегралы второго рода (продолжение). Геометрические и механические приложения. Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса. **ИДЗ** по теме «Приложение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов».	2 ч.
11. Контрольная работа по теме «Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы».	2 ч.
12. Скалярное поле: линии и поверхности уровня, производная по направлению, градиент.	2 ч.
13. Проверочная работа по теме «Скалярное поле».	2 ч.

14. Векторное поле: векторные линии. Поток поля через поверхность	2 ч.
15. Поток поля через поверхность. Дивергенция векторного поля.	2 ч.
16. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля.	2 ч.
17. Дифференциальные операции второго порядка. Специальные виды векторных полей.	2 ч.
18. Контрольная работа по теме «Векторное поле».	2 ч.

Средства контроля качества обучения

Тематика индивидуальных заданий

1. Индивидуальное задание по теме «Двойной интеграл».

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

2.Индивидуальное задание по теме «Приложение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов»

1. Найти массу пластинки $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1,\ \ y\ge 0$, если плотность $p(x,y)=yx^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $T=\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}} \end{cases}$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии $y=2-\frac{x^2}{8}$, от точки M(-4, 0) до точки N(0, 2).

4. Найти массу кривой l: $x=2t+3,\ y=1+t,\ 0\le t\le 2$, если плотность $p(x,y)=-x+3yx^2$.

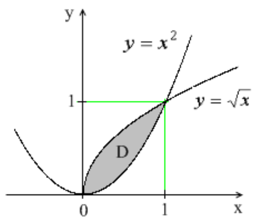
5. Найти массу поверхности $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=10$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x=4y-y^2, x+y=6$.

Тематика проверочных работ

1. Проверочная работа по теме «Двойной интеграл».

1.Перейти к повторному интегралу, поменять пределы интегрирования, вычислить (один из них) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ где\ D=\begin{Bmatrix} x^2-y^2=0 \\ y=3 \end{Bmatrix}$



2. Область интегрирования D изображена на рисунке.

Тогда двойному интегралу $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ соответствует повторный интеграл: а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$ б) $\int\limits_0^{x^2} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ в) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y)dy$ г) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

2. Проверочная работа по теме «Скалярное поле».

1. Найти линии уровня скалярного поля $u=2x^2+y^2$, схематически построить.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля $u=x+y+3z$, схематически построить.

3. Найти производную функции в заданной точке M в направлении вектора $\overrightarrow{MA}$ и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке. $u=xy^2+4xz$, M(3, -3, 1), A(-3, 4, 2).

4. Найти градиент функции $u = u(x,y,z)$ в точке M: $u=x+yz-\sqrt{xy}$, M(2, 2, 6).

Тематика контрольных работ

1. Контрольная работа № 1 по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»

Примерный вариант 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)}dxdy, T:=\{x\geq 0, x^2+y^2\leq 4\}$ 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T 15(x^2+y^2)dxdydz; T:=\{x=0, x+y=1, y=0, z=x+y, z=0\}$; 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=10$. 4. Вычислить $\int\limits_l (xy)ds; l: y=x+1,$ от точки A(1,2) до точки B(3,4). 5. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x^2dy+y^2dx); l=AB: y=x+1, , A(1,2), B(3,4)$. 6. Вычислить (двумя способами) поверхностный интеграл $\iint\limits_\sigma 9\pi x dydz + dxdz - 3xdxdy$, где поверхность $\sigma=\begin{cases}\frac{x}{3}+y+z=1\\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\end{cases}$, нижняя сторона
2. Контрольная работа № 2 по теме «Векторное поле» *Примерный вариант* 1. Вычислить дивергенцию градиента скалярного поля $u=\frac{x^2+y^2}{z+1}$. 2. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(P)=x^2yz\vec{i}+xy^2z\vec{j}+xyz^2\vec{k}$. 3. Вычислить поток вектора $\vec{a}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ через всю поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали. 4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y^2i-x^2j+z^2k$ по контуру $ABCA$, получаемому при пересечении параболоида $x^2+z^2=1-y$с координатными плоскостями. 5. Проверить соленоидальность поля $\vec{a}(P)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y}}\vec{i}+\frac{y}{z}\vec{j}-\frac{x\cdot\ln z}{y+1}\vec{k}$

№ п./п.	**Вопросы к зачету:**
1	Определение кратного интеграла. Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
2	Теорема существования двойного интеграла. Свойства двойных интегралов.
3	Вычисление двойных интегралов. Сведение двойного интеграла к повторному.
4	Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.
5	Приложения двойного интеграла.
6	Определение тройного интеграла. Геометрический и физический смысл тройного интеграла.
7	Вычисление тройных интегралов. Сведение тройного интеграла к повторному.
8	Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.
9	Приложения тройного интеграла.
10	Криволинейные интегралы первого рода. Их свойства и вычисление.
11	Криволинейные интегралы второго рода. Их свойства и вычисление.
12	Связь криволинейных интегралов. Приложения криволинейных интегралов.
13	Теорема Грина.

14	Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
15	Поверхностный интеграл первого рода. Свойства и вычисление.
16	Поверхностный интеграл второго рода. Свойства и вычисление.
17	Формулы Гаусса- Остроградского и Стокса.
18	Приложения поверхностных интегралов.
19	Скалярное поле. Линии и поверхности уровня.
20	Производная по направлению.
21	Градиент.
22	Векторное поле. Векторные линии.
23	Поток векторного поля.
24	Дивергенция векторного поля. Свойства дивергенции.
25	Теорема Гаусса – Остроградского.
26	Циркуляция векторного поля.
27	Ротор векторного поля и теорема Стокса.
28	Оператор Гамильтона.
29	Дифференциальные операции второго порядка.
30	Специальные виды векторных полей: соленоидальное.
31	Специальные виды векторных полей: потенциальное. Вычисление потенциала.
32	Специальные виды векторных полей: гармоническое или лапласово поле.
33	Теорема о разложении поля в сумму двух полей.

Вариант зачетного теста

1. (2 балла) Что из следующего не относится к области D в записи двойного интеграла?
Варианты ответа: 1) плоская фигура, 2) фигура, ограниченная прямыми линиями, 3) сфера, 4) треугольник.

---

2. (2 балла) Двойной интеграл проще вычислить в полярных координатах, когда:
Варианты ответа: 1) область интегрирования - окружность или её часть, 2) сложно расставить пределы интегрирования, 3) подынтегральная функция - сложная функция, 4) невозможно поменять местами переменные.

3. (2 балла) Что не является правильной областью V в случае тройного интеграла?
Варианты ответа: 1) эллипсоид, 2) пирамида, 3) тетраэдр, 4) область, границы которой прямая, параллельная оси Oz пересекает более чем в двух точках.

4. (2 балла) Что не является формулой, связывающей прямоугольные координаты с цилиндрическими?
Варианты ответа: 1) $x = r\cos\varphi$, 2) $y = r\sin\varphi$, 3) $z = r\,\mathrm{tg}\varphi$, 4) $z = z$.

5.**(2 балла)** Есть ли отличие в свойствах криволинейного интеграла первого рода и свойствах определённого интеграла, если есть, то в чём оно заключается?
Варианты ответа: 1) в случае криволинейного интеграла первого рода не имеет значения, какую из точек кривой считать началом отрезка, а какую – концом, 2) криволинейный интеграл первого рода можно вычислять в цилиндрических координатах, 3) в случае криволинейного интеграла первого рода нельзя выносить множитель за знак интеграла, 4) отличий нет.

6. (3 балла) Формулу Грина можно применить для вычисления интеграла (*какого рода?*), если кривая:
Варианты ответа: 1) парабола, 2) окружность, 3) гипербола, 4) любая замкнутая. **Записать теорему**.

7. (2 балла) Понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится для:
Варианты ответа: 1) сферы, 2) плоскости, 3) эллипсоида, 4) односторонней поверхности.

8. (3 балла) Формулу Гаусса-Остроградского можно применить для вычисления интеграла, если поверхность:

Варианты ответа: 1) сфера, 2) плоскость, 3) эллипсоид, 4) конус. **Записать теорему**.

9. (4 балла) Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{(y^2-4)/4}^{2-y} f(x,y)dx$.

10. (4 балла) Найти объем области T (при помощи тройного интеграла), ограниченной поверхностями $z = 9$, $z = x^2 + y^2$.

11. (**3 балла**) Найти работу силы $\vec{F} = \{(x+y)\vec{i} + x\vec{j}$ по перемещению точки вдоль параболы $y = x^2 + 2, \quad x \in [0, 2]$.

12. (4 балла) Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_{l} (x^2+2y)dx - (y-2x)dy$ от точки $A(0, 1)$ до точки $B(2,-1)$, соединенных кривой $l: \quad x^2 + y^2 + 2y = 3$, заменить путь интегрирования на другую кривую? Если да, то на какую? Можно ли при помощи данного интеграла вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = (x^2+2y)\vec{i} - (y-2x)\vec{j}$ вдоль l?

13. (2 балла) Дать определение скалярного поля. Линиями уровня скалярного поля $u = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ являются:
Варианты ответа: 1) параболы, 2) гиперболы, 3) прямые, 4) окружности. Изобразить.
14. (2 балла) Градиентом скалярного поля $u = x^2 y z^2$ в точке $M(3, -2, 1)$ является вектор:
Варианты ответа: 1) $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, 2) $-12\vec{i} + 9\vec{j} - 36\vec{k}$, 3) $6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, 4) $6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

15. (**3 балла**) Вычислить $div(rot\vec{a})$ и $rot(div\vec{a})$, если $\vec{a} = xz\vec{i} - 2x^2\vec{j} + 2yz^2\vec{k}$.
Поле, образуемое данным вектором:
Варианты ответа: 1) потенциальное, 2) соленоидальное, 3) гармоническое, 4) ни одно из предложенных вариантов?