

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ,
канд.техн.наук, доцент

г. Череповец - 2022

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник для вузов / Б. А. Горлач. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 300 с. — ISBN 978-5-507-44063-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/208664>
2. Кайгородов, Е. В. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / Е. В. Кайгородов. — Горно-Алтайск: ГАГУ, 2018. — 112 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/159324>
3. Ивлева, А. М. Основы алгебры и аналитической геометрии: учебник / А. М. Ивлева. — 2-е изд. — Новосибирск: НГТУ, 2021. — 286 с. — ISBN 978-5-7782-4430-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/216242>

Дополнительная литература:

1. Багина, О. Г. Алгебра и геометрия: примеры решения задач: учебное пособие / О. Г. Багина. — Кемерово: КемГУ, 2019 — Часть 1 — 2019. — 112 с. — ISBN 978-5-8353-2560-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/156121>
2. Борзунов, С. В. Алгебра и геометрия с примерами на Python / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 444 с. — ISBN 978-5-8114-9980-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/202154>
3. Гармаев, В. Д. Алгебра и геометрия: практикум: учебное пособие / В. Д. Гармаев, С. С. Гармаева. — Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2015. — 84 с. — ISBN 978-5-89230-646-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/23630>
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов. - 19-е изд. - СПб.: Лань, 2013. - 431 с. + Предметный указатель. - (Классическая учебная литература по математике) (Лучшие классические учебники). - Библиогр.: с.425-426. - ISBN 978-5-8114-0521-3.
5. Толстиков, А.В. Алгебра и геометрия: учебное пособие для вузов / Толстиков А.В. - Череповец: ГОУВПО ЧГУ, 2004. - 326 с. - Библиогр.: с.321. - ISBN 5-85341-156-X.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Голицына Е.В. Математика. Векторная и линейная алгебра: Учеб.пособие. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2008.- 74 с.
2. Голицына Е.В. Математика. Аналитическая геометрия: Учеб.пособие. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2008.- 77 с.
3. Толстиков, А.В. Алгебра и геометрия: учебное пособие для вузов / Толстиков А.В. - Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2004. - 326 с. - Библиогр.: с.321. - ISBN 5-85341-156-X.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытое образование, онлайн курсы: Высшая математика 1 семестр. URL: <https://openedu.ru/course/spbstu/HIMAT/>

Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

Лекции

раздел дисциплины	Название темы лекции с кратким содержанием	час
1. Линейная алгебра	<p>Определители. Определители первого, второго и третьего порядков. Определение определителя n-го порядка и его основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложение определителя по элементам строки или столбца.</p> <p>Матрицы. Матрицы. Линейные операции над матрицами и их свойства. Операция умножения матриц и ее свойства. Операция транспонирования матриц и ее свойства. Ранги матриц. Обратная матрица и ее существование. Вычисление обратной матрицы.</p> <p>Системы линейных уравнений. Основные понятия. Равносильность систем линейных уравнений. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Совместность систем. Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по правилу Крамера, методом Гаусса и обратной матрицы.</p>	4
2. Векторная алгебра	<p>Определение вектора. Линейные операции над векторами и их свойства. Коллинеарные и компланарные векторы. Теорема о необходимом и достаточном условии коллинеарности векторов. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Длина вектора, направляющие косинусы. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.</p> <p>Скалярное произведение векторов: определение, физический и геометрический смысл, свойства, скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Векторное произведение векторов: тройка векторов, определение, свойства, векторное произведение векторов, заданных своими координатами, механический смысл. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, вычисление, геометрический смысл.</p>	4
3. Аналитическая	<p>Декартова и полярная системы координат на плоскости. Понятие об уравнении линии в них. Параметрическое задание линии на плоскости. Уравнения наиболее распространенных кривых (циклоида, астроида, лемниската Бернулли, улитка Паскаля, кардиоида).</p>	8

геометрия	<p>Прямая на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, каноническое и параметрическое, нормальное, через две точки, через точку и данный угловой коэффициент, в «отрезках». Три случая расположения двух прямых на плоскости. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой.</p> <p>Кривые второго порядка. Общее уравнение. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых. Приведение уравнений к каноническому виду. Характеристики кривых.</p> <p>Декартова, сферическая, цилиндрическая системы координат в пространстве. Понятие об уравнении линии и поверхности в них.</p> <p>Плоскость в пространстве: общее уравнение, уравнение плоскости через точку с данным нормальным вектором, через три точки, в «отрезках». Три случая расположения двух плоскостей в пространстве. Прямая в пространстве: общее, каноническое, параметрическое. Три случая расположения двух прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости.</p> <p>Поверхности 2-го порядка. Сфера, цилиндрические и конические поверхности, эллипсоид, гиперboloиды, параболоиды, поверхности вращения.</p>	
	Итого	16

Практические занятия

№ раздела (модуля)	Тема практического занятия	Количество часов
1	1. Матрицы, действия с ними. Вычисление определителей 1, 2, 3 порядка.	2 ч.
1	2. Вычисление определителей n -го порядка. Разложение по строке, столбцу, приведение к треугольному виду. Обратная матрица. Ранг матрицы.	2 ч.
1	3. Решение систем линейных уравнений методами Гаусса.	2 ч.
1	4. Решение систем линейных уравнений методами Крамера, обратной матрицы.	2 ч.
3	5. Линейные операции над векторами.	2 ч.
3	6. Скалярное произведение векторов.	2 ч.
2	7. Векторное, смешанное произведения векторов.	2 ч.
2	8. Контрольная работа.	2 ч.
3	9. Прямая на плоскости.	2 ч.
3	10. Кривые 2-го порядка. Приведение к каноническому виду, нахождение характеристик, построение.	2 ч.
3	11. Полярная система координат. Плоскость в пространстве.	2 ч.
3	12. Плоскость в пространстве.	2 ч.
3	13. Прямая в пространстве.	2 ч.
3	14. Смешанные задачи на прямую и плоскость.	2 ч.
3	15. Поверхности 2-го порядка. Приведение к каноническому виду, построение методом сечений.	2 ч.
3	16. Контрольная работа	2 ч.
	Итого	32 ч.

Средства контроля качества обучения

Тематика индивидуальных заданий	
1. Индивидуальное задание по теме «Определители».	
1) Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	1) методом треугольников, 2) путем разложения по второй строке, 3) по третьему столбцу, 4) приведением к треугольному виду.
2. Индивидуальное задание по теме «Матрицы».	
Найти транспонированную и обратную матрицы к матрице $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$. Найти сумму, произведение двух матриц $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.	
3. Индивидуальное задание по теме «Векторы».	
Даны четыре вектора: $\vec{a} = \{4; -2; -n\}$, $\vec{b} = \vec{i} + n\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \{n; -2; -3\}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, где $A(-4, 0, -8)$ $B(4, 5, -3)$; n – номер варианта.	
1) Найти разложение векторов \vec{a} и \vec{d} по базису векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. 2) Найти координаты единичного вектора \vec{b}^0 , вектора $(3\vec{a} + \vec{b})$. 3) Вычислить скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} . 4) Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{d} . 5) Найти проекцию вектора $(\vec{a} - \vec{d})$ на вектор $2\vec{b}$. 6) Найти векторное произведение векторов \vec{b} и \vec{c} . 7) Найти величину угла между векторами \vec{b} и \vec{c} . 8) Проверить коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{c} . 9) Проверить ортогональность векторов \vec{c} и \vec{d} . 10) Найти работу силы $\vec{F} = \{n, 2, -3\}$ по перемещению точки вдоль вектора $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. 11) Найти площадь треугольника, стороны которого образуют вектора \vec{a} и \vec{b} . 12) Найти момент силы $\vec{F} = \{n, 2, -3\}$, приложенной к точке A , относительно точки B . 13) Проверить, образуют ли векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} базис во множестве векторов. 14) Если да, то разложить вектор \vec{d} по базису векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . 15) Проверить компланарность векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{d} . 16) Найти объем параллелепипеда, образованного векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .	
Тематика проверочных работ	
1. Проверочная работа по теме «Системы линейных уравнений».	
1. Найти решение системы уравнений тремя методами:	$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$

<p>2. Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} 2x - y + z - 2u = 1 \\ 4x + 5y + z - 4u = 5 \\ x + 3y - u = 2 \end{cases}$</p>
<p align="center"><i>2. Проверочная работа по теме «Кривые второго порядка».</i></p> <p>1. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$, определить тип линии, найти характеристики, построить график.</p>
<p>Тематика контрольных работ</p>
<p align="center"><i>1. Контрольная работа № 1 по теме «Векторная алгебра».</i></p> <p align="center"><i>Примерный вариант</i></p> <p>1. Даны точки: $A(0;2;-10)$, $B(1;0;-8)$, $C(11;4;0)$, $D(8;6;-2)$, $N(2;1;1)$. Требуется:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{p} = 3\vec{DB} - 5\vec{AC} + \vec{BD}$; 2) проверить, является ли четырехугольник $ABDC$ – квадратом; 3) проверить, лежат ли точки A, B, C, N в одной плоскости; 4) найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{DB} \times \vec{AB}$ на вектор \vec{AC}. <p>2. Дано: $\vec{a} = \vec{b} = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c}_1 = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.</p> <p>3. Найти координаты вектора \vec{x}, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{c} = \{2, 3, -1\}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, удовлетворяет условию: $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 6$.</p> <p>4. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1 = \{2, 1, 0\}$ и $\vec{a}_2 = -\vec{j} + \vec{k}$.</p>
<p align="center"><i>2. Контрольная работа № 2 по теме «Аналитическая геометрия».</i></p> <p align="center"><i>Примерный вариант</i></p> <p>1. Найти расстояние от точки $A(2,0,-13)$ до плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$ (не применяя формулу).</p> <p>2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 0, 2)$ параллельно двум прямым:</p> $\begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}.$ <p>3. Даны точки $A(3, 1)$ и $B(3, -7)$. На оси абсцисс найти точку M такую, чтобы прямые AM и BM были перпендикулярны.</p> <p>4. Привести к каноническому виду уравнение кривой $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$. Определить тип линии, найти координаты центра (вершины), полуоси (если есть). Схематически построить кривую.</p> <p>5. Записать уравнение кривой $y = 2x^2 + 3$ в полярных координатах.</p> <p>6. Построить кривую $\rho \sin \varphi = 1$ в полярной системе координат. Записать уравнение заданной кривой в декартовых прямоугольных координатах.</p> <p>7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности $2y^2 + z^2 = 1 - x$. Схематически построить поверхность методом сечений.</p>

№ п/п	Вопросы к экзамену
1.	Определения и вычисление определителей 1,2,3 порядка. Определение и вычисление определителя n -го порядка. Свойства определителей.
2.	Матрицы, основные определения. Действия над матрицами.
3.	Определение минора элемента, алгебраического дополнения.
4.	Понятие обратной матрицы. Теорема об ее вычислении.
5.	Понятие о ранге матрицы.
6.	Системы линейных уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли.
7.	Системы линейных однородных уравнений. Методы решения.
8.	Системы линейных неоднородных уравнений. Метод Крамера. Теорема Крамера.
9.	Системы линейных неоднородных уравнений. Метод Гаусса.
10.	Системы линейных неоднородных уравнений. Метод обратной матрицы.
11.	Векторы. Основные определения. Сложение и вычитание векторов.
12.	Умножение вектора на скаляр. Коллинеарные вектора. Теорема о необходимом и достаточном условии коллинеарности векторов.
13.	Определение проекции вектора на ось. Теоремы о проекциях. Вектор в трехмерном пр-ве. Направляющие косинусы. Разложение вектора по ортам.
14.	Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.
15.	Скалярное произведение векторов. Геометрический и механический смысл. Свойства. Таблица умножения ортов. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Угол между векторами.
16.	Понятие тройки векторов. Левая, правая тройка. Определение векторного произведения. Геометрический смысл. Свойства. Векторное произведение в декартовых координатах (вывод формулы). Механический смысл.
17.	Смешанное произведение векторов. Свойства. Геометрический смысл. Компланарные векторы.
18.	Декартова и полярная системы координат. Понятие об уравнении линии в декартовой и полярной системах координат. Параметрическое задание линии.
19.	Прямая на плоскости. Вывод общего уравнения прямой. Частные случаи. Три случая расположения 2-х прямых на плоскости. Задачи на построение прямой.
20.	Эллипс. Определение, вывод, построение, характеристики.
21.	Гипербола. Определение, вывод, построение, характеристики.
22.	Парабола. Определение, вывод, построение, характеристики.
23.	Декартова, цилиндрическая, сферическая системы координат. Уравнение линии и поверхности в пространстве.
24.	Плоскость. Общее уравнение, вывод. Три случая расположения 2-х плоскостей в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки.
25.	Уравнение прямой в пространстве. Три случая расположения 2-х прямых. Угол между прямой и плоскостью. Вывод формулы расстояния от точки до плоскости.
26.	Цилиндрические поверхности. Определение. Построение.
27.	Конические поверхности. Определение. Метод сечения. Построение.
28.	Поверхности вращения. Вывод формулы.
29.	Вывод уравнения сферы. Эллипсоид. Построение методом сечения.
30.	Гиперболоиды. Построение методом сечения.
31.	Параболоиды. Построение методом сечения.

Вариант экзаменационного билета

1 вопрос. Определения и вычисление определителей 1,2,3 порядка. Минор. Алгебраическое дополнение.

2 вопрос. Плоскость. Общее уравнение, вывод. Три случая расположения 2-х плоскостей в пространстве.

3 вопрос. Тест.

1. Чему равен определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Чему равна сумма элементов матрицы $B \cdot A$, расположенных на ее главной диагонали?

3. Какие неизвестные можно считать независимыми свободными переменными в системе

уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} : 1) x_4, x_5, 2) x_1, x_2, x_3, 3) x_4, 4) x_5?$$

4. При каком значении λ вектор $\vec{a} = \{1, 2, -2\}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = \{4, -1, \lambda\}$?

5. Укажите соответствие между заданным вектором 1) $\vec{a}_1 = \{8, 0\}$, 2) $\vec{a}_2 = \{6, 2\}$, 3) $\vec{a}_3 = \{3, 2\}$, 4) $\vec{a}_4 = \{-6, 6\}$ и соответствующим ему нормированным (единичным) вектором

а) $\vec{e}_1 = \{-1, 1\}$, б) $\vec{e}_2 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}$, в) $\vec{e}_3 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, г) $\vec{e}_4 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\}$, д) $\vec{e}_5 = \{1, 0\}$.

6. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то чему равна длина ее действительной полуоси?

7. Расположите по возрастанию длины сторон треугольника ABC , где $A(-1, 4)$, $B(2, 3)$, $C(6, 6)$.