

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«ТЕОРИЯ ГРАФОВ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Плотникова Н.В., доцент кафедры МиИ,  
канд.ф.-м.наук, доцент

г. Череповец - 2022

## **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

### **Основная литература**

1. Алексеев, В. Е. Теория графов: учебное пособие / В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова. — Нижний Новгород: ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 119 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153421>
2. Забелин, А. А. Дискретная математика; методы и модели теории графов и их программная реализация: учебное пособие / А. А. Забелин, Е. С. Коган. — Чита: ЗабГУ, 2020. — 166 с. — ISBN 978-5-9293-2543-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/173636>
3. Микони, С. В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы: учебное пособие / С. В. Микони. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1386-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211049>

### **Дополнительная литература**

1. Игнатъев, А. В. Теория графов. Лабораторные работы / А. В. Игнатъев. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 64 с. — ISBN 978-5-8114-9603-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/230342>
2. Тюрин, С. Ф. Теория графов и её приложения: учебное пособие / С. Ф. Тюрин. — Пермь: ПНИПУ, 2017. — 207 с. — ISBN 978-5-398-01745-8. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/160870>
3. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 364 с. — ISBN 978-5-8114-4998-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/130477>
4. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебное пособие для вузов. - СПб.: Питер, 2003. - 304 с.: ил. - (Учебник для вузов).

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

1. Теория графов: Методические указания к самостоятельной работе для студентов математических и экономических специальностей / сост. В. Д. Власенко. — Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2005. — 23 с.

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)**

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>

4. Образовательная платформа Открытое образование. онлайн курсы: Теория графов. URL: <https://openedu.ru/course/mipt/GRAPHTH/>

## Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

### Лекции

№ п/п	Тема лекции	Количество часов
1	Определение графа. Способы задания графа. Метрические характеристики графа. Изоморфизм графов.	2
2	Основные операции над графами.	4
3	Маршруты, цепи, циклы. Нахождение маршрутов с заданным количеством ребер.	2
4	Метод Шимбелла нахождения экстремальных путей. Задача коммивояжера. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Беллмана-Мура. Алгоритм нахождения максимального пути.	4
5	Дерево. Остов. Нахождение остова экстремального веса.	4
6	Планарные графы. Алгоритм укладки графа на плоскости.	2
7	Правильная раскраска графа. Хроматическое число. Гипотеза 4-х красок. Алгоритм правильной раскраски графа.	4
8	Определение потока. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока в сети.	4
9	Критические пути, работы, резервы. Сетевые графики. Линейные графики.	4
	<b>Итого:</b>	<b>30</b>

### Лабораторные работы

№ п/п	Тема лабораторного занятия	Количество часов
4	Метод Шимбелла нахождения экстремальных путей. Задача коммивояжера. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Беллмана-Мура. Алгоритм нахождения максимального пути.	8
5	Поток. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока в сети.	6
6	Критические пути, работы, резервы. Сетевые графики. Линейные графики.	6
	<b>Итого</b>	<b>20</b>

### Практические занятия

№ п/п	Тема практического занятия	Количество часов
1	Определение графа. Способы задания графа. Метрические	2

	характеристики графа. Изоморфизм графов.	
2	Основные операции над графами.	4
3	Маршруты, цепи, циклы. Нахождение маршрутов с заданным количеством ребер.	4
4	Метод Шимбелла нахождения экстремальных путей. Задача коммивояжера. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Беллмана-Мура. Алгоритм нахождения максимального пути.	4
6	Дерево. Остов. Нахождение остова экстремального веса.	4
7	Планарные графы. Алгоритм укладки графа на плоскости.	4
8	Правильная раскраска графа. Хроматическое число. Гипотеза 4-х красок. Алгоритм правильной раскраски графа.	4
9	Определение потока. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока в сети.	2
	Критические пути, работы, резервы. Сетевые графики. Линейные графики.	2
<b>Итого</b>		<b>30</b>

## Средства контроля качества обучения

### Образец индивидуальных заданий

- 1) Найти количество маршрутов и сами маршруты, состоящие из трёх рёбер, из первой вершины

в четвертую, если граф задан матрицей смежности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Методом Дейкстры найти минимальный путь и его вес из первой вершины в шестую, если орграф задан матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

- 3) Методом Беллмана-Мура найти минимальный путь из первой вершины в шестую, если орграф задан матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & 13 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

- 4) Найти максимальный путь и его вес из первой вершины в шестую, если орграф задан матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

- 5) Найти количество остовных деревьев, минимальный по весу остов и его вес, если граф задан матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 11 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ 4 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ 10 & 7 & 6 & \infty & 15 & \infty & - \end{pmatrix}.$$

### Образец заданий лабораторных работ

1. Методом Шимбелла найти минимальные и максимальные пути из второй вершины в

четвертую, состоящие из трёх ребер, если граф задан матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. На вечеринку приглашены  $n$  мальчиков и  $n$  девочек. Они хотят станцевать несколько раундов. В каждом раунде гости делятся на  $n$  танцующих пар. Каждый гость должен быть в некоторой паре, каждая пара должна состоять из одного мальчика и одной девочки. В каждом раунде каждый мальчик должен танцевать с другой девочкой. Некоторые мальчики и девочки не нравятся друг другу. Каждый мальчик может танцевать не более чем с  $k$  девочками, которые ему не нравятся. Аналогично каждая девочка может танцевать не более чем с  $k$  мальчиками, которые ей не нравятся. Имеется информация о том, нравятся ли друг другу  $i$ -ый мальчик и  $j$ -ая девочка ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Найти наибольшее количество раундов, которое можно станцевать на вечеринке.

### Образец заданий проверочных работ.

1. Для ориентированного графа с шестью узлами, заданного списком дуг  $E = \{(1, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 3), (2, 4)\}$ ,
- 1) постройте диаграмму;
  - 2) составьте матрицы смежности и инцидентности;
  - 3) найдите полустепени и степени всех узлов;
  - 4) найдите число компонент связности, цикломатическое и хроматическое числа;
  - 5) выполните правильную раскраску графа и найдите его классы одноцветности.
2. Постройте граф отношения « $x+y \leq 7$ » на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Определите его свойства.

## Образец варианта контрольной работы.

1 Записать матрицы смежности и инцидентности орграфа, изображенного на рисунке.

2. Найти число полных путей в ориентированном графе с вершинами  $A, B, C, D$ ,

представленном матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

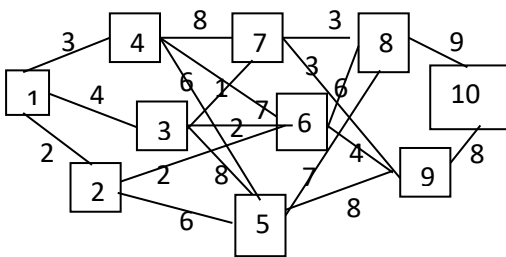
3. По матрицам смежности и инцидентности построить граф:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

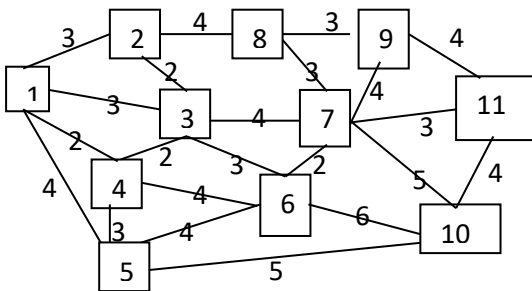
4. По матрицам смежности и инцидентности построить оргграф:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 10:



6. Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Предложить решение, которое позволит обеспечить доступ кабельной сети по всем точкам, но при этом общая протяженность кабельных сетей будет минимально возможной.



	Вопросы к экзамену
1	Определение графа. Способы задания графа. Метрические характеристики графа. Изоморфизм графов.
2	Основные операции над графами.
3	Маршруты, цепи, циклы. Нахождение маршрутов с заданным количеством ребер.
4	Метод Шимбелла нахождения экстремальных путей.
5	Задача коммивояжера.

6	Алгоритм Дейкстры.
7	Алгоритм Беллмана-Мура.
8	Алгоритм нахождения максимального пути.
9	Дерево. Остов. Нахождение остова экстремального веса.
10	Планарные графы. Алгоритм укладки графа на плоскости.
11	Правильная раскраска графа. Хроматическое число.
12	Гипотеза 4-х красок. Алгоритм правильной раскраски графа.
13	Определение потока. Теорема Форда-Фалкерсона.
14	Алгоритм нахождения максимального потока в сети.
15	Критические пути, работы, резервы. Сетевые графики.
16	Линейные графики.