

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра теоретической физики

А. Д. Смирнов

# Электродинамика

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2019

УДК 537.8(075.8)

ББК В313 я73

С50

Рекомендовано

Редакционно-издательством советом университета  
в качестве учебного издания. План 2019 года.

Рецензент

кафедра теоретической физики

Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Смирнов, Александр Дмитриевич.**

С50 Электродинамика : учебно-методическое пособие

/ А. Д. Смирнов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль :  
ЯрГУ, 2019. – 56 с.

Пособие содержит задачи с теорией и ответами по основам специальной теории относительности, электродинамике в вакууме и электродинамике в веществе, используемые на практических занятиях и на контрольных мероприятиях.

Учебно-методическое пособие по дисциплинам "Электродинамика" и "Физика сплошных сред" предназначено для студентов физического факультета, обучающихся по направлениям бакалавриата "Физика", "Радиофизика" и "Электроника и наноэлектроника".

УДК 537.8(075.8)

ББК В313 я73

# 1. Основы специальной теории относительности

## 1.1. Теоретические сведения

Координаты  $x, y, z$  и время  $t$  события, измеренные в инерциальной системе отсчета  $S$ , образуют четырехмерный вектор

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где  $c$  – скорость света.

Преобразования Лоренца для координат и времени события:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

где  $\{ct, x, y, z\}$  и  $\{ct', x', y', z'\}$  – время и координаты одного и того же события, измеренные в инерциальных системах отсчета  $S$  и  $S'$ . Здесь и далее система  $S'$  предполагается движущейся относительно системы  $S$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ .

Эффект замедления времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  – временной интервал между двумя событиями, происшедшими в одной точке ( $x'_2 = x'_1$ ) в системе  $S'$ , а  $\Delta t = t_2 - t_1$  – временной интервал между этими событиями в системе  $S$ .

Эффект сокращения длин:

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

где  $l = x_1 - x_2$  – длина стержня, движущегося в системе  $S$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ , понимаемая как расстояние между началом и концом летящего стержня, одновременно (в момент  $t_1 = t_2$ ) измеренное в системе  $S$ , а  $l_0 = x'_1 - x'_2$  – расстояние между началом и концом стержня в системе его покоя  $S'$ .

Преобразования декартовых компонент трехмерного вектора скорости частицы:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \\v_y &= v'_y \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}, \\v_z &= v'_z \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2},\end{aligned}$$

где  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ ,  $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$ ,  $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$  и  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$  — декартовые компоненты трехмерных векторов скорости  $\vec{v}'$  и  $\vec{v}$  в системах  $S'$  и  $S$  соответственно.

$$A^\mu = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{A^0, A_x, A_y, A_z\} = \{A^0, \vec{A}\} -$$

— контравариантные компоненты четырехмерного вектора  $A$ . При преобразованиях Лоренца компоненты  $A^\mu$  преобразуются как четырехмерные координаты  $x^\mu$ .

$$A_\mu = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{A^0, -A_x, -A_y, -A_z\} = \{A^0, -\vec{A}\} -$$

— ковариантные компоненты четырехмерного вектора  $A$ .

$$\begin{aligned}A^\mu A_\mu &= A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 = \\&= (A^0)^2 - (\vec{A})^2 -\end{aligned}$$

— четырехмерный квадрат четырехмерного вектора  $A$  (являющийся инвариантом преобразований Лоренца).

Четырехмерный вектор скорости:

$$u^\mu = \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}.$$

Энергия и импульс свободной частицы:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\varepsilon}{c^2} \vec{v},\end{aligned}$$

— где  $m$  и  $\vec{v}$  — масса и скорость частицы.

Четырехмерный вектор энергии-импульса частицы:

$$p^\mu = \left\{ \frac{\varepsilon}{c}, \vec{p} \right\} = \left\{ \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = m u^\mu.$$

Преобразования Лоренца для энергии-импульса частицы:

$$p'_x = \frac{p_x - V\varepsilon/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - V p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$p'_y = p_y,$$

$$p'_z = p_z,$$

где  $\{\varepsilon, p_x, p_y, p_z\}$  и  $\{\varepsilon', p'_x, p'_y, p'_z\}$  – энергия и импульс частицы в системах отсчета  $S$  и  $S'$  соответственно.

Четырехмерный квадрат четырехмерного вектора энергии-импульса

$$p^\mu p_\mu = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

является инвариантом преобразований Лоренца.

Отсюда с учетом явного вида  $p^\mu$  для свободной релятивистской частицы следуют соотношение между ее энергией и импульсом

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

и соответствующее выражение для энергии частицы как функции ее импульса

$$\varepsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}.$$

## 1.2. Задачи

**1-1.** Найти общий вид  $2 \times 2$ -матрицы  $\Lambda$  преобразований:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1$$

с инвариантом  $(x^0)^2 - (x^1)^2 = inv$ . Ответ выразить через параметр гиперболического преобразования  $\alpha$  и через скорость  $V$  преобразований Лоренца ( $\tan \alpha = V/c$ ). Показать, что  $\Lambda(V_1) \cdot \Lambda(V_2) = \Lambda(V_3)$  и найти  $V_3$ . Какой физический смысл скоростей  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ ?

**1-2.** Время жизни  $\mu$ -мезона в покое составляет  $\tau_\mu^0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{сек}$ . Какова длина пробега  $\mu$ -мезона при скорости  $v = 0,1 \text{ с}$  и при скорости  $v = 0,9 \text{ с}$ ? То же для  $\pi^+$ -мезона с временем жизни в покое  $\tau_{\pi^+}^0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{сек}$ .

**1-3.** Время жизни  $\mu$ -мезона в покое составляет  $\tau_\mu^0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{сек}$ . В атмосферных ливнях регистрируются  $\mu$ -мезоны с длиной пробега около 20 км. Какова скорость и энергия этих частиц?

**1-4.** Расстояние до звезды составляет 5 световых лет. Сколько времени по земным часам и часам космонавта занял бы полет до этой звезды со скоростью а)  $v = 0,1 \text{ с}$ , б)  $v = 0,9 \text{ с}$ , в)  $v = 0,99 \text{ с}$ , г)  $v = 0,999 \text{ с}$ , д)  $v = 0,9999 \text{ с}$ ? Какова кинетическая энергия космического корабля при таких скоростях и при его разумной массе?

**1-5.** Длину  $l$  стержня, движущегося в лабораторной системе отсчета вдоль своей оси с известной скоростью  $V$ , можно найти по времени  $\Delta t$  его пролета относительно фиксированной точки  $l = V \cdot \Delta t$ . Покажите, что в этом случае имеет место обычное лоренцево сокращение длины, т. е. что  $l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , где  $l_0$  — длина стержня в системе его покоя.

**1-6.** Две частицы летят в лабораторной системе навстречу друг другу с равными по величине скоростями  $v_1 = v_2 \equiv v$ . Чему равна скорость одной частицы в системе покоя другой? Какова скорость их сближения  $v_{12}$  в лабораторной системе?

**1-7.** Два стержня, длина каждого из которых в его системе покоя равна  $l_0$ , движутся в лабораторной системе навстречу друг другу с равными по величине скоростями  $v_1 = v_2 \equiv v$ . Какова длина одного из них в системе покоя другого?

**1-8.** Найти суммарную энергию  $\mathcal{E}_0$  двух частиц с равными массами  $m_1 = m_2 \equiv m$  в системе отсчета, в которой они летят навстречу друг другу с равными по величине скоростями  $v_{01} = v_{02} \equiv v_0$ , и в системе покоя одной из них  $\mathcal{E}$ . Найти связь между  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}$ .

**1-9.** Чему равна скорость протона при его энергии  $\varepsilon = 75 \text{ ГэВ}$  (ИФВЭ, Протвино)?

То же при  $\varepsilon = 0,9 \text{ ТэВ}$  (TEVATRON, FNAL, США),

то же при  $\varepsilon = 7 \text{ ТэВ}$  (LHC, CERN, Швейцария),

то же для электрона с энергией  $\varepsilon = 100 \text{ ГэВ}$  (LEP, CERN, Швейцария).

**1-10.** Найти длину пробега  $l$  частицы как функцию ее энергии  $\varepsilon$  (и ее кинетической энергии  $\varepsilon_k = \varepsilon - mc^2$ ), если время жизни частицы в покое равно  $\tau_0$ . Найти нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы полученного выражения.

**1-11.** Найти компоненты  $w^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  четырехмерного вектора ускорения, выразив результат через обычные трехмерные скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Найти четырехмерный квадрат ускорения  $w^\mu w_\mu$  и убедиться, что вектор  $w^\mu$  является пространственно-подобным.

**1-12.** Используя выражение для четырехмерной скорости

$$u^\mu = \left\{ c/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \vec{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2} \right\}$$

через трехмерную скорость  $\vec{v}$  и закон преобразования последней, найти  $u'^\mu$  в инерциальной системе отсчета, движущейся относительно исходной системы вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ . Выразив результат через  $u^\mu$ , убедиться, что для  $u^\mu$  получается обычный закон преобразования четырехмерного вектора.

**1-13.** Под равноускоренным движением частицы в релятивистской механике понимается движение, при котором ускорение частицы  $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  относительно мгновенно-сопутствующих систем отсчета в каждый момент времени остается постоянным.

а) Найти скорость  $v(t)$  и координату  $x(t)$  релятивистской частицы, совершающей одномерное равноускоренное движение вдоль оси  $x$  с ускорением  $a$  при начальных условиях  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ . Найти квадрат  $w^\mu w_\mu$  четырехмерного ускорения  $w^\mu$ .

б) То же в случае  $v(0) = v_0$ ,  $x(0) = x_0$ .

**1-14.** Найти скорость  $v(t)$  и координату  $x(t)$  частицы, совершающей одномерное движение с постоянным квадратом  $w^\mu w_\mu = -a^2$  четырехмерного ускорения  $w^\mu$ . Результат сравнить с результатом предыдущей задачи.

**1-15.** В лабораторной системе отсчета релятивистская частица массы  $m_1$  с энергией  $\varepsilon_1$  налетает на покоящуюся частицу массы  $m_2$  так, что их суммарная энергия в лабораторной системе равна  $\varepsilon = \varepsilon_1 + m_2 c^2$ .

а) Найти суммарную энергию  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}$  двух частиц равных масс ( $m_1 = m_2 \equiv m$ ) в системе их центра инерции. Результат сравнить с результатом задачи 1-8. Какова скорость системы центра инерции? Рассмотреть также нерелятивистский предел полученных выражений.

б) Чему равна энергия сталкивающихся протонов в системе их центра инерции на протонном ускорителе ОИЯИ, Дубна ( $\varepsilon_1 = 10 \text{ ГэВ}$ ), на протонном ускорителе ИФВЭ, Протвино ( $\varepsilon_1 = 75 \text{ ГэВ}$ )?

Какова была бы энергия  $\varepsilon_0$  в системе центра масс и соответствующая ей энергия  $\varepsilon$  в системе покоя одной из частиц, если бы на ускорителе в Протвино осуществлялись столкновения на встречных пучках?

Чему равна суммарная энергия  $\varepsilon$  в системе покоя одной из частиц для протон-антипротонного ускорителя на встречных пучках TEVATRON в FNAL (США), если их энергия равна  $\varepsilon_0 = 2 \times 0,9 \text{ ТэВ} = 1,8 \text{ ТэВ}$ ?

То же для протон-протонного ускорителя на встречных пучках LHC в CERN (Швейцария) при энергии  $\varepsilon_0 = 2 \times 7 \text{ ТэВ} = 14 \text{ ТэВ}$ .

в) Решить а) для случая частиц разной массы  $m_1$  и  $m_2$ .

**1-16.** Найти связь между энергией  $\varepsilon_0$  системы двух частиц равной массы в системе их центра инерции и их суммарной энергией  $\varepsilon$  в системе покоя одной из частиц, используя инвариантность квадрата суммарного четырехмерного вектора энергии-импульса. Результат сравнить с результатом задачи 1-15-а).



## 2. Основные уравнения электродинамики

### 2.1. Теоретические сведения

Сила, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля в вакууме (сила Лоренца):

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right\},$$

где  $e$  и  $\vec{v}$  – заряд и скорость частицы,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – электрическая и магнитная напряженности электромагнитного поля.

Электрическая  $\vec{E}$  и магнитная  $\vec{H}$  напряженности связаны с потенциалами электромагнитного поля соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} &= [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \end{aligned}$$

где  $\varphi$  и  $\vec{A}$  – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, образующие четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

$$A^\mu = \{\varphi, \vec{A}\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Зависимость напряженностей  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  от координат и времени определяется уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$  – заданные плотность зарядов и плотность тока как функции координат и времени, при этом  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ , где  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  – скорость движения зарядов в точке с координатами  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ .

Плотность зарядов  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  образуют четырехмерный вектор плотности тока в виде

$$j^\mu = \{\rho c, \vec{j}\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

и удовлетворяют уравнению непрерывности (закону сохранения электрического заряда в дифференциальной форме)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{s} &= 4\pi \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{s} &= \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{s}, \\ \oint_S \vec{H} d\vec{s} &= 0, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{s} &= 0. \end{aligned}$$

Закон сохранения электрического заряда в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \vec{j} d\vec{s} = 0.$$

Плотность энергии электромагнитного поля и вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова - Пойнтинга):

$$\begin{aligned} w &= \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]. \end{aligned}$$

Скалярный  $\varphi(\vec{r}, t)$  и векторный  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  потенциалы электромагнитного поля допускают над собой калибровочные преобразования с одной произвольной калибровочной функцией  $\chi(\vec{r}, t)$ , которые не меняют напряженности  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  и, следовательно, не влияют на физические проявления электромагнитного поля. Поэтому на потенциалы  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  всегда можно (без каких-либо физических последствий) наложить одно дополнительное условие, например условие Лоренца:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

При условии Лоренца потенциалы  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  по заданным плотности заряда  $\rho(\vec{r}, t)$  и плотности тока  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  определяются уравнениями:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \varphi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t),$$
$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t).$$

## 2.2. Задачи

**2-1.** Релятивистская частица массы  $m$  и заряда  $e$  движется в постоянном однородном электрическом поле напряженности  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ .

- а) Определить движение (т. е. координату  $x(t)$  и скорость  $v(t)$ ) заряда при начальных условиях  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$ . Найти квадрат 4-ускорения  $w^\mu w_\mu$ . Результаты сравнить с результатами задач 1-13, 1-14. Найти зависимость энергии частицы от времени и ее координаты  $x(t)$ .
- б) То же при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .
- в) То же при начальном импульсе  $\vec{p}(0) = (0, p_0, 0)$ . Найти уравнение траектории. Рассмотреть также нерелятивистский предел при  $v \ll c$ .

**2-2.** Релятивистская заряженная частица массы  $m$  и заряда  $e$  движется в постоянном однородном магнитном поле  $\vec{H} = (0, 0, H)$  с начальной энергией  $\varepsilon_0$ .

- а) Определить движение частицы (т. е. найти координаты частицы как функции времени) при начальных условиях  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ ,  $\vec{v}(0) = (0, v_0 \sin \alpha, v_0 \cos \alpha)$ , где  $v_0$  – величина начальной скорости заряда,  $\alpha$  – угол между начальной скоростью и направлением магнитного поля. Какова траектория движения? Определите её параметры. Рассмотрите также нерелятивистский предел для полученных выражений.
- б) Найти напряженность магнитного поля  $H$ , необходимую для удержания релятивистской заряженной частицы с энергией  $\varepsilon_0$  на круговой орбите радиуса  $R$ . Оценить напряженность поля, необходимую

для удержания протона с энергией  $75 \text{ ГэВ}$  на круговой орбите радиуса  $1 \text{ км}$ .

То же для протона с энергией  $1 \text{ ТэВ}$  при  $R = 1 \text{ км}$ , с энергией  $7 \text{ ТэВ}$  при  $R = 4 \text{ км}$ , с энергией  $20 \text{ ТэВ}$  при  $R = 14 \text{ км}$ .

**2-3.** Найти напряженность  $E(\vec{r})$  и потенциал  $\varphi(\vec{r})$  электростатического поля, создаваемого

- а) однородно (с объемной плотностью  $\rho$ ) заряженным шаром радиуса  $R$ .
- б) То же для бесконечного цилиндра радиуса  $R$ .
- в) То же для неограниченной пластины толщины  $2L$ .

**2-4.** Найти напряженность  $E(\vec{r})$  и потенциал  $\varphi(\vec{r})$  электростатического поля, создаваемого

- а) равномерно (с поверхностной плотностью  $\sigma$ ) заряженной сферой радиуса  $R$ .
- б) То же для боковой поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $R$ .
- в) То же для бесконечной плоскости.

**2-5.** Найти энергию электростатического поля

- а) однородно заряженного шара радиуса  $R$  и заряда  $Q$ ,
- б) равномерно заряженной сферы радиуса  $R$  и заряда  $Q$ .

**2-6.** Вдоль бесконечного цилиндрического проводника радиуса  $R$  течет однородно распределенный постоянный ток величины  $J$ .

- а) Найти напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника.
- б) Найти давление внутри цилиндрического стационарного плазменного шнура радиуса  $R$ , в котором течет однородно распределенный постоянный ток величины  $J$ .

**2-7.** Найти напряженность магнитного поля  $H$  внутри бесконечно длинного соленоида с линейной плотностью витков  $n(= N/L)$ , по которому течет ток  $J$ .

**2-8.** Два бесконечно длинных параллельных тонких проводника, по которым текут постоянные токи  $I_1, I_2$ , находятся на расстоянии  $r$  друг от друга в среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

- а) Используя уравнения Максвелла в интегральной форме в гауссовой системе единиц, найти отнесенную к единице длины силу взаимодействия этих проводников. Найти величину этой силы при  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ ,  $r = 1 \text{ см}$ .
- б) То же в системе СИ. Результаты сравнить с полученными в п. а).

### 3. Постоянные электрические и магнитные поля

#### 3.1. Теоретические сведения

Скалярный потенциал  $\varphi(\vec{r})$  электрического поля, создаваемого статическим распределением заряда с плотностью  $\rho(\vec{r})$ , определяется уравнением

$$\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

и имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Потенциал  $\varphi(\vec{r})$ , создаваемый заряженным телом на больших расстояниях от тела, можно представить в виде мультипольного разложения

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3} + \sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} + \dots,$$

где  $Q$  – полный заряд тела, а

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV', \\ D_{\alpha\beta} &= \int \left( 3 x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2 \right) \rho(\vec{r}') dV', \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

– вектор дипольного и компоненты тензора квадрупольного моментов.

Энергия взаимодействия заряженного тела с внешним квазиоднородным статическим электрическим полем с потенциалом  $\varphi(\vec{r})$  может быть представлена в виде

$$U(\vec{r}) = Q \varphi(\vec{r}) + U^{(d)}(\vec{r}) + U^{(D)}(\vec{r}) + \dots,$$

где первое слагаемое дает энергию взаимодействия точечного заряда с внешним полем, а два последующих

$$\begin{aligned} U^{(d)}(\vec{r}) &= -(\vec{d}\vec{E}(\vec{r})), \\ U^{(D)}(\vec{r}) &= \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

дают энергию взаимодействия дипольного момента и, соответственно, энергию взаимодействия квадрупольного момента с внешним полем.

Векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$  магнитного поля, создаваемого постоянным током с плотностью  $\vec{j}(\vec{r})$ , определяется уравнением

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

и имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

При этом напряженность магнитного поля  $\vec{H}(\vec{r})$  дается выражением

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV',$$

откуда, в частности, для элемента напряженности  $d\vec{H}$ , создаваемого элементом тока  $d\vec{J}$ , следует закон Био – Саварра:

$$d\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{[d\vec{J} \times \vec{R}]}{R^3},$$

где  $d\vec{J} = d\vec{J}(\vec{r}') = \vec{j}(\vec{r}') dV'$  – элемент тока,  $d\vec{H} = d\vec{H}(\vec{r})$ ,  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$ , создаваемый ограниченной в пространстве системой постоянных токов с плотностью тока  $\vec{j}(\vec{r})$ , на больших расстояниях от системы приближенно дается выражением

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} + \dots,$$

где

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV'$$

– магнитный момент системы.

Магнитный момент плоского замкнутого контура с током равен

$$\vec{\mu} = \frac{JS}{c} \vec{n},$$

где  $J$  – величина тока, текущего по контуру,  $S$  – площадь, охватываемая им,  $\vec{n}$  – вектор правой нормали к контуру.

Магнитный момент  $\vec{\mu}$  системы нерелятивистских частиц с равными удельными зарядами ( $e_1/m_1 = e_2/m_2 = \dots \equiv e/m$ ) пропорционален ее механическому моменту  $\vec{M}$ :

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} \vec{M}.$$

Энергия взаимодействия ограниченной в пространстве системы постоянных токов с внешним квазиоднородным магнитным полем напряженности  $\vec{H}(\vec{r})$  приближенно равна энергии взаимодействия  $U^{(\mu)}(\vec{r})$  ее магнитного момента  $\vec{\mu}$  с этим полем:

$$U^{(\mu)}(\vec{r}) = -(\vec{\mu} \vec{H}(\vec{r})) .$$

### 3.2. Задачи

**3-1.** Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна  $\rho(r) = -\frac{|e|}{\pi a^3} e^{-2r/a}$ , где  $a$  – боровский радиус,  $e$  – заряд электрона,  $r$  – расстояние от центра атома. Найти напряженность  $\vec{E}(\vec{r})$  и потенциал  $\varphi(r)$  электромагнитного поля, создаваемого электронным облаком. Исследовать поведение  $\vec{E}(\vec{r})$  и  $\varphi(r)$  на малых ( $r \ll a$ ) и больших ( $r \gg a$ ) расстояниях. Чему равна энергия  $U$  взаимодействия протона с электронным облаком?

**3-2.** Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на оси симметрии (ось  $z$ ) следующих равномерно заряженных тел (полный заряд тела равен  $Q$ ):

- а) тонкого кольца радиуса  $R$ ,
- б) тонкого диска радиуса  $R$ ,
- в) цилиндрической поверхности радиуса  $R$  и высоты  $2h$ ,
- г) поверхности цилиндра радиуса  $R$ , высоты  $2h$ , состоящей из боковой поверхности и двух оснований,
- д) объемно заряженного цилиндра радиуса  $R$ , высоты  $2h$ ,
- е) полусферы радиуса  $R$ ,
- ж) поверхности полушара радиуса  $R$ , состоящей из поверхности полусферы и основания,
- з) объемно заряженного полушара радиуса  $R$ .



**3-3.** Определить компоненты  $d_\alpha$  вектора дипольного момента и главные компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) квадрупольного момента следующих равномерно заряженных тел (полный заряд тела равен  $Q$ , ось симметрии выбрать в качестве оси  $z$ ):

- а) полушара радиуса  $R$  с центром в начале координат,
- б) полусферы радиуса  $R$  с центром в начале координат,
- в) полусферы вместе с основанием радиуса  $R$  с центром в начале координат,
- г) эллипсоида с полуосями  $a, b, c$  с центром в начале координат,
- д) цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $2h$  с центром в начале координат,
- е) тонкого диска радиуса  $R$  с центром в начале координат,
- ж) конуса высотой  $h$  и радиуса  $R$  с вершиной в начале координат.

**3-4.** Найти компоненты тензора квадрупольного момента  $D_{\alpha\beta}$  однородно заряженного тела вращения с главным квадрупольным моментом относительно оси симметрии, равным  $D_0$ , если ось симметрии находится в плоскости  $xy$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$ .

**3-5.** Найти компоненты  $D_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) тензора квадрупольного момента однородно заряженного цилиндра с зарядом  $Q$ , радиусом основания  $R$  и высотой  $2h$ , если центр его совпадает с началом координат, а ось симметрии находится в плоскости  $xy$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$ .

**3-6.** Найти компоненты  $D_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) тензора квадрупольного момента однородно заряженного тонкого диска с зарядом  $Q$  и радиусом основания  $R$ , если центр его совпадает с началом координат, а ось симметрии находится в плоскости  $xy$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$ .

**3-7.** Найти напряженность электрического поля, создаваемого в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  постоянным электрическим дипольным моментом  $\vec{d}$ , находящимся в начале координат. Чему равна энергия взаимодействия двух дипольных моментов  $\vec{d}_1$  и  $\vec{d}_2$ , находящихся на расстоянии  $|\vec{r}|$  друг от друга?

**3-8.** Прямоугольная рамка с током  $J$  и сторонами  $2a$  и  $2b$  лежит в плоскости  $xy$ . Найти напряженность магнитного поля на оси  $z$ , проходящей через центр рамки. Исследовать магнитное поле на оси  $z$  на больших расстояниях от рамки.

**3-9.** Найти напряженность магнитного поля на оси кольца с током  $J$  и радиусом  $R$ , исследовать поведение выражения на больших расстояниях от центра кольца.

**3-10.** Найти напряженность магнитного поля в центре однородно заряженного шара с зарядом  $Q$  и с радиусом  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

**3-11.** Компоненты вектора  $\vec{j}$  средней плотности тока, создаваемого электронным облаком в 2р-состоянии в атоме водорода, в сферической системе координат равны

$$j_r = j_\theta = 0 ; \quad j_\varphi = \frac{e\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta ,$$

где  $a$  – боровский радиус,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  и  $e$  – масса и заряд электрона. Найти напряженность магнитного поля, создаваемого орбитальным движением электрона, в центре атома. Какова энергия взаимодействия магнитного момента протона  $\mu_p$  с найденным магнитным полем электрона ?

**3-12.** Однородно заряженный шар с зарядом  $Q$  и радиусом  $R$  вращается относительно диаметра с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

а) Найти магнитный момент  $\vec{\mu}$  шара. Каково соотношение между магнитным моментом  $\vec{\mu}$  и механическим моментом  $\vec{M}$ , если принять, что масса распределена однородно по объему шара?

б) С какой угловой скоростью  $\vec{\omega}$  должен вращаться однородно заряженный шарик заряда  $e$ , массы  $m_e$  и радиуса  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ , чтобы иметь магнитный момент  $\mu_e = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}$ , где  $e, m_e$  – заряд и масса электрона,  $r_e$  – так называемый классический радиус электрона,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\mu_e$  – спиновый магнитный момент электрона? Какова линейная скорость на “экваторе” такого шарика?

**3-13.** Найти магнитный момент однородно заряженного с зарядом  $Q$  тела вращения, вращающегося вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , если таким телом является

- а) цилиндр высотой  $2h$  и радиуса основания  $R$ ,
- б) конус высотой  $h$  и радиуса основания  $R$ ,
- в) эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $c$ .

Каково соотношение между магнитным моментом  $\vec{\mu}$  и механическим моментом  $\vec{M}$  такого тела, если масса распределена однородно по его объему?

**3-14.** Найти напряженность магнитного поля, создаваемого в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  постоянным магнитным моментом  $\vec{\mu}$ , находящимся в начале координат. Чему равна энергия взаимодействия двух магнитных моментов  $\vec{\mu}_1$  и  $\vec{\mu}_2$ , находящихся на расстоянии  $|\vec{r}|$  друг от друга.

## 4. Излучение электромагнитных волн

### 4.1. Теоретические сведения

Потенциалы  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , определяемые заданными плотностью заряда  $\rho(\vec{r}, t)$  и плотностью тока  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений для потенциалов (см. п. 2.1) и даются формулами запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Поведение соответствующих этим потенциалам напряженностей  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  при  $r \rightarrow \infty$  таково, что приводит к важному эффекту электродинамики – излучению энергии переменного электромагнитного поля.

Количество энергии, излучаемое в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$  в направлении единичного вектора  $\vec{n}$ , называется дифференциальной (по углам) интенсивностью излучения  $dI$  и равно

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\vec{n} \times \dot{\vec{J}}(\vec{n}, t - r/c)]^2 d\Omega,$$

где

$$\vec{J}(\vec{n}, t - r/c) = \int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c + (\vec{n}\vec{r}')/c) dV'.$$

Полная интенсивность излучения  $I$  дает количество энергии, излучаемое в единицу времени по всем направлениям, и равна

$$I = \int dI = \frac{1}{4\pi c^3} \int [\vec{n} \times \dot{\vec{J}}(\vec{n}, t - r/c)]^2 d\Omega.$$

При  $\lambda \equiv cT \ll a$ , где  $T$  – характерное время существенного изменения плотности тока, а  $a$  – характерный размер излучателя (в случае гармонически меняющегося тока  $\lambda$  совпадает с длиной волны излучения), дифференциальная интенсивность излучения может быть выражена через низшие мультипольные моменты в виде

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left[ \vec{n} \times \left( \ddot{\vec{d}} + [\ddot{\vec{\mu}} \times \vec{n}] + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{D}} + \dots \right) \right]^2 d\Omega,$$

где  $\ddot{\vec{D}} = \vec{e}_\alpha \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta$ .

При этом полная интенсивность излучения может быть представлена в виде мультипольного разложения

$$I = I^{(d)} + I^{(\mu)} + I^{(D)} + \dots,$$

где

$$I^{(d)} = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}, \quad I^{(\mu)} = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{\mu}}|^2}{c^3}$$

– полные интенсивности дипольного и магнитодипольного излучений, а  $I^{(D)}$  – полная интенсивность квадрупольного излучения (см. задачу 4.16).

Излучение одиночной заряженной частицы массы  $m$  и заряда  $e$ , совершающей произвольное ( $0 < v < c$ ) финитное движение, определяется дифференциальной интенсивностью вида

$$dI(t) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}]]^2}{(1 - (\vec{n}\vec{v})/c)^5} \right\}_t d\Omega,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор направления излучения. В релятивистском случае это излучение имеет выраженный максимум в узком конусе вдоль направления скорости частицы.

## 4.2. Задачи

**4-1.** В линейной антенне длиной  $2l$  возбужден переменный ток  $J(z, t) = J_0 \cos(k_m z) \sin(\omega_m t)$ , где  $\omega_m = k_m c$ ,  $k_m = (2m+1)\pi/(2l)$ ,  $m$  – целое положительное число,  $c$  – скорость света в вакууме. Найти среднюю за период дифференциальную интенсивность излучения. Изобразите графически диаграммы направленности для трех низших гармоник ( $m = 0, 1, 2$ ). Какой вид имеет средняя за период полная интенсивность излучения?

**4-2.** В линейном отрезке провода длиной  $l$  возбужден переменный ток вида  $J(t) = J_0 \cos(\omega t)$ . Найти средние за период дифференциальную и полную интенсивности длинноволнового ( $\lambda \gg l$ ) излучения. Изобразите графически диаграмму направленности излучения. Результаты сравните с результатами предыдущей задачи.

**4-3.** Заряженная частица массы  $m$  и заряда  $e$  совершает одномерное гармоническое колебание с частотой  $\omega$  (заряженный гармонический осциллятор). Найти законы убывания средней за период полной энергии  $E$  и соответствующей ей амплитуды колебаний  $a$ , обусловленные дипольным излучением. Начальная энергия осциллятора равна  $E_0$ . Принять, что потеря энергии за период мала по сравнению со средней энергией.

**4-4.** В классической модели атома электрон массы  $m$  и заряда  $e$  вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом  $Z|e|$ .

а) Найти закон убывания средней за период полной энергии электрона  $E$ , обусловленный дипольным излучением. Принять, что средняя потеря энергии за период  $T$  мала по сравнению со средней энергией, а движение электрона – нерелятивистское. По какому закону уменьшается со временем радиус орбиты  $r$ ?

б) Определив область применимости полученного результата, оцените численно время перехода электрона с орбиты радиуса  $r_1$  на орбиту радиуса  $r_2$  для интересующих Вас случаев, например для

- 1)  $r_1 = 10^{-8}\text{см}, r_2 = 10^{-10}\text{см},$
- 2)  $r_1 = 2 \cdot 10^{-8}\text{см}, r_2 = 1 \cdot 10^{-8}\text{см},$
- 3)  $r_1 = 1\text{см}, r_2 = 1 \cdot 10^{-8}\text{см},$
- 4)  $r_1 = 2\text{см}, r_2 = 1\text{см}.$

**4-5.** Электрон массы  $m$  и заряда  $e$  вращается вокруг неподвижного ядра с зарядом  $Z|e|$  по эллиптической орбите с полной энергией  $E$  и угловым моментом  $M$ . Найти интенсивность дипольного излучения и потерю энергии за период движения. Результат сравните с решением задачи 4-4.

**4-6.** Заряженная частица массы  $m$  и заряда  $e$  совершает нерелятивистское ( $v \ll c$ ) движение по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $H$  с начальной энергией  $E_0$ .

а) Найти интенсивность излучения  $I$  как функцию энергии частицы.

б) Принимая, что средняя потеря энергии частицы на излучение за период  $T$  мала по сравнению с ее энергией, найти закон убывания со временем энергии частицы  $E$  и радиуса ее орбиты  $R$ .

**4-7.** Найти дифференциальную  $dI(t)$  и полную  $I(t)$  интенсивности излучения заряженной частицы массы  $m$  и заряда  $e$ , совершающей произвольное ( $0 < v < c$ ) финитное движение, как функцию ее скорости  $\vec{v}(t)$  и ускорения  $\dot{\vec{v}}(t)$ .

**4-8.** Заряженная частица массы  $m$  и заряда  $e$  совершает движение по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $H$  с начальной энергией  $E_0$ .

- а) Используя результат предыдущей задачи, найти интенсивность излучения  $I$  как функцию энергии частицы.
- б) Принимая, что средняя потеря энергии частицы на излучение за период  $T$  мала по сравнению с ее энергией, найти закон убывания со временем энергии частицы  $E$  и радиуса ее орбиты  $R$ .
- в) Найти нерелятивистский предел полученных выражений и убедиться, что в этом пределе результаты совпадают с результатами задачи 4-6.

**4-9.** Двухатомная жесткая молекула с дипольным моментом  $\vec{d}$  и моментом инерции  $I$  совершает малые угловые колебания в постоянном однородном электрическом поле напряженности  $\vec{E}$ . Найти законы убывания средней за период полной энергии  $\mathcal{E}$  и соответствующей ей амплитуды угловых колебаний  $\psi_0$ , обусловленные дипольным излучением. Принять, что потеря энергии за период мала по сравнению со средней энергией.

**4-10.** Найти в магнитодипольном приближении среднюю за период интенсивность длинноволнового ( $\lambda \gg a, b$ ) излучения неподвижной рамочной антенны со сторонами  $a$  и  $b$ , в которой возбужден ток вида  $J = J_0 \cos \omega t$ . Изобразить графически диаграмму направленности излучения антенны.

**4-11.** Найти интенсивность магнитодипольного излучения нейтрона с магнитным моментом  $\vec{\mu}$ , находящегося в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $\vec{H}$ . Принять, что механический момент нейтрона  $\vec{M}$  связан с его магнитным моментом соотношением  $\vec{\mu} = -\beta \vec{M}$ . Начальный угол между векторами  $\vec{\mu}$  и  $\vec{H}$  принять равным  $\theta_0$ .

**4-12.** Прямоугольная рамка со сторонами  $a$  и  $b$  и постоянным током  $J$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер. Найти интенсивность длинноволнового ( $\lambda \gg a, b$ ) излучения.

**4-13.** В неподвижной прямоугольной рамке со сторонами  $a$  и  $b$  возбужден ток  $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$ . Найти в магнитодипольном приближении полную энергию длинноволнового излучения за время  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Какой заряд за это время пройдет по рамке? Каково соотношение между энергией излучения, зарядом и параметром  $\alpha$ ?

**4-14.** Заряженный шар радиуса  $R$  с однородным распределением заряда  $Q$  и массы  $m$  совершает малые упругие вращательные колебания вокруг своего диаметра с частотой  $\omega$  и начальной энергией  $E_0$ . Определить среднюю за период интенсивность излучения и законы убывания его энергии и амплитуды угловых колебаний, обусловленные потерей энергии на излучение.

**4-15.** Заряженный шар радиуса  $R$  с однородным распределением заряда  $Q$  и массы  $m$  равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , составляющей угол  $\theta$  с направлением внешнего магнитного поля  $\vec{H}$ . Определить интенсивность  $I$  излучения.

**4-16.** Найти дифференциальную  $dI$  и полную  $I$  интенсивности квадрупольного излучения, выразив их через производные по времени  $\ddot{D}_{\alpha\beta}$  от матричных элементов  $D_{\alpha\beta}$  тензора квадрупольного момента.

**4-17.** Заряженное тело с осесимметричным распределением заряда и квадрупольным моментом относительно оси симметрии, равным  $D_0$ , равномерно вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии тела. Найти полную интенсивность квадрупольного излучения. (Воспользуйтесь результатами задач 4-16 и 3-4.)

**4-18.** Однородно заряженный тонкий диск радиуса  $R$  и заряда  $Q$  равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Определить полную интенсивность квадрупольного излучения. (Воспользуйтесь результатами задач 4-16 и 3-6.)



**4-19.** Однородно заряженный тонкий стержень длины  $2l$  и заряда  $Q$  равномерно вращается в плоскости вокруг своей центральной точки с угловой скоростью  $\omega$ . Определить полную интенсивность квадрупольного излучения. (Воспользуйтесь результатом задачи 4-16 и 3-4.)

**4-20.** Однородно заряженный цилиндр заряда  $Q$ , радиуса основания  $R$  и высоты  $2h$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его оси симметрии. Найти полную интенсивность квадрупольного излучения. (Воспользуйтесь результатами задач 4-16 и 3-5.)

**4-21.** Однородно заряженный эллипсоид вращения заряда  $Q$  с полуосями  $a$  и  $b$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его оси симметрии. Найти полную интенсивность квадрупольного излучения. (Воспользуйтесь результатами задач 4-16, 3-4 и 3-3-г.)

## 5. Электрические и магнитные поля в веществе

### 5.1. Теоретические сведения

Основные характеристики электромагнитного поля в веществе получают усреднением соответствующих микроскопических характеристик поля по флуктуациям в среде.

Основными силовыми характеристиками электромагнитного поля в веществе являются напряженность электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}^{микро}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B} = \vec{H}^{микро}$ . Эти характеристики определяют среднюю силу  $\vec{F} = \vec{F}^{микро}$ , действующую со стороны электромагнитного поля в веществе на пробный заряд (сила Лоренца), в виде

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\},$$

где  $e$  и  $\vec{v}$  – заряд и скорость пробной частицы.

После усреднения плотность электрических зарядов в веществе можно представить в виде

$$\bar{\rho}^{микро} = \rho + \rho_{связ},$$

где  $\rho = \bar{\rho}_{своб}^{микро}$  – усредненная плотность свободных зарядов, которая задается извне, а  $\rho_{связ} = \bar{\rho}_{связ}^{микро}$  – плотность связанных зарядов, которая получается усреднением из зарядов молекул вещества при его поляризации. Поляризация вещества описывается в каждой точке вектором поляризации  $\vec{P}$ , который по определению равен средней плотности дипольного момента в данной точке. Поляризация вещества приводит к появлению внутри тела и на его поверхности связанных зарядов с объемной  $\rho_{связ}$  и поверхностной  $\sigma_{связ}$  плотностями вида

$$\begin{aligned} \rho_{связ} &= -div \vec{P}, \\ \sigma_{связ} &= P_n. \end{aligned}$$

Аналогично после усреднения плотность электрических токов в веществе можно представить в виде

$$\vec{j}^{микро} = \vec{j} + \vec{j}_{связ},$$

где  $\vec{j} = \vec{j}_{своб}^{микро}$  – усредненная плотность свободных токов, которая задается извне, а  $\vec{j}_{связ} = \vec{j}_{связ}^{микро}$  – плотность связанных токов, которая получается усреднением внутримолекулярных токов вещества при его

намагничивании. Намагничивание вещества описывается в каждой точке вектором намагничения  $\vec{M}$ , который по определению равен средней плотности магнитного момента в данной точке. Намагничивание вещества приводит к появлению внутри тела и на его поверхности связанных токов с объемной  $\vec{j}_{связ}$  и поверхностной  $\vec{i}_{связ}$  плотностями вида

$$\begin{aligned}\vec{j}_{связ} &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}, \\ \vec{i}_{связ} &= c [\vec{M} \times \vec{n}],\end{aligned}$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности тела.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в веществе имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$  – заданные плотность свободных зарядов и плотность свободного тока как функции координат и времени. При этом  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ , где  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  – средняя скорость движения свободных зарядов в точке с координатами  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ .

Входящие в уравнения Максвелла поля  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  связаны с полями  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и вектором поляризации  $\vec{P}$  и вектором намагничения  $\vec{M}$  соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M}.\end{aligned}$$

Уравнения Максвелла в веществе в интегральной форме имеют вид

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} d\vec{s} &= 4\pi \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{s} &= \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{s}, \\ \oint_S \vec{B} d\vec{s} &= 0, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s} &= 0.\end{aligned}$$

Условия сшивания векторов поля на границе раздела двух сред:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\sigma, \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0, \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0, \\ H_{2t} - H_{1t} &= \frac{4\pi}{c} i_b, \end{aligned}$$

где индексы  $n$ ,  $t$  и  $b$  обозначают нормальные к границе раздела двух сред (вектор нормали проведен из первой среды во вторую), тангенциальные и бинормальные проекции векторов,  $\sigma$  и  $\vec{i}$  – поверхностные плотности свободных зарядов и свободных токов.

Для изотропных сред

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \alpha \vec{E}, \\ \vec{M} &= \chi \vec{E}, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\chi$  – электрическая и магнитная восприимчивости вещества. В этом случае

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$  и  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  – электрическая и магнитная проницаемости вещества.

В однородной изотропной среде плотность энергии и плотность потока энергии имеют вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]. \end{aligned}$$

Электрическая напряженность  $\vec{E}$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  в веществе связаны со скалярным  $\varphi$  и векторным  $\vec{A}$  потенциалами соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= [\vec{\nabla} \times \vec{A}]. \end{aligned}$$

В однородной изотропной среде при условии Лоренца

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

для потенциалов  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(\vec{r}, t), \\ \left( \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}(\vec{r}, t) &= \mu \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \end{aligned}$$

из которых, в частности, следует простое выражение

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

для скорости  $c'$  распространения электромагнитных волн в веществе.

В проводящей среде выполняется соотношение (закон Ома в дифференциальной форме)

$$\vec{j} = \sigma_{np} \vec{E},$$

где  $\sigma_{np} = 1/\rho_{conp}$  – электрическая проводимость среды,  $\rho_{conp}$  – ее удельное сопротивление.

Плотность тока в проводящей среде  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  в квазистационарном приближении ( $|\partial\vec{D}/\partial t| \ll 4\pi|\vec{j}|$ ) определяется уравнением

$$\vec{\nabla}^2 \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{4\pi\mu\sigma_{np}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0.$$

В случае переменного тока

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t} \},$$

гармонически меняющегося со временем с частотой  $\omega$ , комплексная амплитуда тока  $\vec{j}(\vec{r})$  определяется уравнением

$$\nabla^2 \vec{j}(\vec{r}) - \frac{2i}{\delta^2} \vec{j}(\vec{r}) = 0,$$

где

$$\delta = c / \sqrt{2\pi\mu\sigma_{np}\omega}$$

– толщина скин-слоя. Для переменного тока в проводнике характерен скин-эффект – эффект преимущественного распределения переменного тока в приповерхностном слое проводника с толщиной порядка  $\delta$ .

## 5.2. Задачи

**5-1.** Определить потенциал и напряженность электрического поля шара радиуса  $a$ , однородно поляризованного с вектором поляризации  $\vec{P}$  и находящегося в вакууме.

- а) Решить задачу путем нахождения потенциала поля, создаваемого возникшими при поляризации связанными зарядами.
- б) Решить задачу путем нахождения решения уравнения Лапласа для потенциала при необходимых граничных условиях.
- в) Решить задачу способом б) в случае, когда однородно поляризованный шар окружен бесконечной однородной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

**5-2.** Металлический шар радиуса  $a$  вносится в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ . Окружающая шар диэлектрическая среда однородна и имеет диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ .

- а) Определить потенциал и напряженность результирующего поля снаружи шара и плотность поверхностных зарядов на шаре в случае, когда полный заряд шара равен нулю.
- б) То же в случае металлического шара, имеющего полный заряд  $Q$ .

**5-3.** Однородный шар радиуса  $a$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  погружен в однородный неограниченный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ . На большом расстоянии от шара электрическое поле однородно с напряженностью  $E_0$ . Определить потенциал и напряженность поля во всем пространстве. Найти распределение возникающих связанных зарядов.

**5-4.** Однородный шар радиуса  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu$  вносится в однородное магнитное поле напряженности  $\vec{H}_0$ . Определить напряженность результирующего магнитного поля внутри и вне шара, индуцированный магнитный момент шара и плотность связанных токов.

**5-5.** Определить индукцию  $\vec{B}$  и напряженность  $\vec{H}$  магнитного поля, создаваемого шаром радиуса  $a$ , однородно намагниченным с вектором намагниченности  $\vec{M}$  и находящимся в вакууме.

- а) Решить задачу путем нахождения векторного потенциала  $\vec{A}'$  магнитного поля, создаваемого возникшими при поляризации связанными токами.
- б) Решить задачу путем нахождения решения уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала  $\psi$  при необходимых граничных условиях.
- в) Решить задачу способом б) в случае, когда однородно намагниченный шар окружен бесконечной однородной средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

**5-6.** Найти индукцию магнитного поля  $B$  внутри бесконечно длинного соленоида с сердечником, имеющим магнитную проницаемость  $\mu$ . Соленоид имеет линейную плотность витков  $n(= N/L)$  и ток в обмотке  $J$  (ср. с задачей 2-7). Оцените параметры  $n$ ,  $\mu$ ,  $J$ , необходимые для создания магнитных полей задачи 2-2-б).

**5-7.** Найти плотность переменного тока вида  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x j(z, t)$ , гармонически меняющегося со временем с частотой  $\omega$ , в однородной изотропной среде с проводимостью  $\sigma_{np}$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и заполняющей полупространство  $z \geq 0$ . Оцените толщину скин-слоя для меди на частотах а)  $\nu = 50 \text{ Гц}$  и б)  $\nu = 1 \text{ МГц}$ .

**5-8.** Найти плотность переменного тока вида  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z j(r, t)$ , гармонически меняющегося со временем с частотой  $\omega$  и текущего вдоль бесконечного цилиндрического проводника радиуса  $a$  с проводимостью  $\sigma_{np}$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ ,

- а) при  $\delta \ll r \leq a$ , где  $\delta$  – толщина скин-слоя,  $r$  – расстояние от оси цилиндра.
- б) То же при  $r \ll \delta$ .

## Ответы к задачам

### 1. Основы специальной теории относительности

$$1.1. \quad \Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) \\ -sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$i_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i_0 i_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2(\alpha) = \Lambda(\alpha) i_0, \quad \Lambda_3(\alpha) = \Lambda(\alpha) i_1, \quad \Lambda_4(\alpha) = \Lambda(\alpha) i_0 i_1,$$

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{-V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ \frac{-V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2 / c^2}.$$

$$1.2. \quad l_\mu(v = 0.1 c) = 66.3 \text{ м}, \quad l_\mu(v = 0.9 c) = 1363 \text{ м}, \\ l_{\pi^+}(v = 0.1 c) = 0.78 \text{ м}, \quad l_{\pi^+}(v = 0.9 c) = 16.1 \text{ м}.$$

$$1.3. \quad v \gtrsim 0.9995 c, \quad \varepsilon \gtrsim 3.2 \text{ ГэВ}.$$

1.4.  $\tau$ – время полета по земным часам,  $\tau_0$ – время полета по часам космонавта,  $E_{кин} = E - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right)$  – кинетическая энергия корабля.

$$\text{а) } v = 0,1 c, \quad \tau = 50 \text{ лет}, \quad \tau_0 = 49.7 \text{ года}, \quad E_{кин}/mc^2 = 0.005,$$

$$\text{б) } v = 0,9 c, \quad \tau = 5.55 \text{ года}, \quad \tau_0 = 2.42 \text{ года}, \quad E_{кин}/mc^2 = 1.3,$$

$$\text{в) } v = 0,99 c, \quad \tau = 5.05 \text{ года}, \quad \tau_0 = 0.71 \text{ года} = 260 \text{ суток}, \\ E_{кин}/mc^2 = 6.1,$$

$$\text{г) } v = 0,999 c, \quad \tau = 5.005 \text{ года}, \quad \tau_0 = 0.22 \text{ года} = 82 \text{ сутки}, \\ E_{кин}/mc^2 = 21.4,$$

$$\text{д) } v = 0,9999 c, \quad \tau = 5.0005 \text{ года}, \quad \tau_0 = 0.07 \text{ года} = 26 \text{ суток}, \\ E_{кин}/mc^2 = 69.7.$$

$$1.6. \quad |v'_2| = \frac{2v}{1 + (v/c)^2}, \quad v_{12} = 2v.$$

$$1.7. \quad l' = l_0 \frac{1 - (v/c)^2}{1 + (v/c)^2}.$$



$$1.8. \quad \varepsilon_0 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad \varepsilon = \frac{2mc^2}{1 - (v_0/c)^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = \frac{\varepsilon_0^2}{2mc^2}.$$

$$1.9. \quad v_p(\varepsilon_p = 75 \Gamma \partial B) = (1 - 8 \cdot 10^{-5}) c,$$

$$v_p(\varepsilon_p = 0.9 T \partial B) = (1 - 5 \cdot 10^{-7}) c,$$

$$v_p(\varepsilon_p = 7 T \partial B) = (1 - 9 \cdot 10^{-9}) c,$$

$$v_e(\varepsilon_e = 100 \Gamma \partial B) = (1 - 1.2 \cdot 10^{-13}) c.$$

$$1.10. \quad l = v\tau = c\tau_0 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2 - 1}, \quad l = c\tau_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{mc^2} \left(\frac{\varepsilon_k}{mc^2} + 2\right)},$$

в нерелятивистском ( $v \ll c$ ) пределе  $\varepsilon_k \ll mc^2$  и  $l \approx \sqrt{2\frac{\varepsilon_k}{m}} \tau_0 \approx v \tau_0$ ,  
в ультрарелятивистском пределе  $\varepsilon \gg mc^2$  и  $l \approx \tau_0 \frac{\varepsilon}{mc}$ .

$$1.11. \quad w^\mu = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \left\{ \frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{c}, \dot{\vec{v}} + \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times [\vec{v} \times \dot{\vec{v}}]] \right\} =$$

$$= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \left\{ \frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{c}, \dot{\vec{v}}(1 - v^2/c^2) + \frac{1}{c^2} \vec{v}(\vec{v}\dot{\vec{v}}) \right\},$$

$$w^\mu w_\mu = -\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3} \left\{ (\dot{\vec{v}})^2 (1 - v^2/c^2) + \frac{1}{c^2} (\vec{v}\dot{\vec{v}})^2 \right\} =$$

$$= -\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3} \left\{ (\dot{\vec{v}})^2 + \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \dot{\vec{v}}]^2 \right\} < 0.$$

$$1.13. \quad \text{а) } v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}, \quad x(t) = \frac{a}{c^2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right),$$

$$\text{б) } v(t) = \frac{at + c_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{at + c_1}{c}\right)^2}},$$

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{at + c_1}{c}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2} \right) + x_0,$$

$$\text{где } c_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 1.15. \quad \text{а)} \quad V &= c \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - mc^2}{\varepsilon_1 + mc^2}}, \\
 \varepsilon_0 &= \sqrt{2mc^2(\varepsilon_1 + mc^2)} = \sqrt{2mc^2} \varepsilon, \\
 \text{б)} \quad \varepsilon_0(\varepsilon = 10.94 \Gamma_{\partial} B) &= 4.5 \Gamma_{\partial} B, \\
 \varepsilon_0(\varepsilon = 75.94 \Gamma_{\partial} B) &= 11.9 \Gamma_{\partial} B, \\
 \varepsilon(\varepsilon_0 = 2 \cdot 75 \Gamma_{\partial} B) &= 12 T_{\partial} B, \\
 \varepsilon(\varepsilon_0 = 2 \cdot 0.9 T_{\partial} B) &= 1720 T_{\partial} B, \\
 \varepsilon(\varepsilon_0 = 2 \cdot 7 T_{\partial} B) &= 1 \cdot 10^5 T_{\partial} B, \\
 \text{в)} \quad \varepsilon_0 &= \sqrt{2m_2 c^2 \varepsilon_1 + m_2^2 c^4 + m_1^2 c^4}.
 \end{aligned}$$

$$1.16 \quad \varepsilon_0^2 = 2mc^2 \varepsilon.$$

## 2. Основные уравнения электродинамики

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad \text{а)} \quad v(t) &= \frac{c^2 e E t}{\sqrt{(mc^2)^2 + (ceEt)^2}} = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}, \\
 x(t) &= \frac{1}{eE} \left( \sqrt{(mc^2)^2 + (Eect)^2} - mc^2 \right) = \\
 &= \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right), \\
 \varepsilon(t) &= mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} = mc^2 + eE x(t), \\
 \text{где} \quad a &= eE/m, \\
 \text{б)} \quad v(t) &= \frac{at + c_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{at+c_1}{c}\right)^2}}, \\
 x(t) &= \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{at + c_1}{c}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2} \right) + x_0, \\
 \varepsilon(t) &= mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{at + c_1}{c}\right)^2} = \varepsilon(0) + eE (x(t) - x_0), \\
 \text{где} \quad a &= eE/m, \quad c_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } v_x(t) &= \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (c e E t)^2}}, \\
 x(t) &= \frac{1}{e E} \left( \sqrt{\varepsilon_0^2 + (E e c t)^2} - \varepsilon_0 \right) + x_0, \\
 v_y(t) &= \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (c e E t)^2}}, \\
 y(t) &= \frac{p_0 c}{e E} \operatorname{Arsh}(e E c t / \varepsilon_0), \\
 x &= \frac{\varepsilon_0}{e E} \left( c h \frac{e E y}{p_0 c} - 1 \right) + x_0, \\
 \text{где } \varepsilon_0 &= c \sqrt{p_0^2 + m^2 c^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad \text{а) } x(t) &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} (-\cos \omega t + 1), \\
 y(t) &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin \omega t, \\
 z(t) &= v_0 \cos \alpha t, \\
 \text{где } \omega &= \frac{e c H}{\varepsilon_0} - \text{циклотронная частота}, \\
 \varepsilon_0 &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} - \text{энергия частицы}, \\
 &\text{траектория движения – винтовая линия}, \\
 &\text{в нерелятивистском случае } \omega \approx \frac{e H}{m c}. \\
 \text{б) } H &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - m^2 c^4}}{e R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad \text{а) } E_r(r) &= \frac{Q r}{R^3}, \quad \varphi(r) = \frac{Q}{2 R^3} (3 R^2 - r^2), \quad r \leq R, \\
 E_r(r) &= \frac{Q}{r^2}, \quad \varphi(r) = \frac{Q}{r}, \quad r \geq R, \\
 &\text{где } r - \text{расстояние до центра шара.} \\
 \text{б) } E_r(r) &= 2 \pi \rho r, \quad \varphi(r) = \pi \rho (R^2 - r^2), \quad r \leq R, \\
 E_r(r) &= 2 \pi \rho \frac{R^2}{r}, \quad \varphi(r) = -2 \pi \rho R^2 \ln \frac{r}{R}, \quad r \geq R, \\
 &\text{где } r - \text{расстояние до оси цилиндра.} \\
 \text{в) } E_x(x) &= 4 \pi \rho x, \quad \varphi(x) = 2 \pi \rho (L^2 - x^2), \quad |x| \leq L, \\
 E_x(x) &= \pm 4 \pi \rho L, \quad \varphi(x) = 4 \pi \rho L (L - |x|), \quad |x| \geq L.
 \end{aligned}$$

$$2.4. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad E_r(r) &= 0, & \varphi(r) &= \frac{Q}{R}, & r &\leq R, \\ E_r(r) &= \frac{Q}{r^2}, & \varphi(r) &= \frac{Q}{r}, & r &\geq R, \end{aligned}$$

где  $r$  – расстояние до центра сферы.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad E_r(r) &= 0, & \varphi(r) &= 0, & r &\leq R, \\ E_r(r) &= 4\pi\sigma \frac{R}{r}, & \varphi(r) &= -4\pi\sigma R \ln \frac{r}{R}, & r &\geq R, \end{aligned}$$

где  $r$  – расстояние до оси цилиндрической поверхности.

$$\text{в)} \quad E_x(x) = \pm 2\pi\sigma, \quad \varphi(x) = -2\pi\sigma|x|.$$

$$2.5. \quad \text{a)} \quad W = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R},$$

$$\text{б)} \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R}.$$

$$2.6. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad H &= \frac{2J}{c} \frac{r}{R^2}, & r &\leq R, \\ H &= \frac{2J}{c} \frac{1}{r}, & r &\geq R. \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad p(r) = \frac{J^2}{\pi R^2 c^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + p(R).$$

$$2.7. \quad H = \frac{4\pi}{c} J n.$$

$$2.8. \quad \text{a)} \quad F/l = \mu \frac{2 I_1 I_2}{r c^2},$$

$$\text{б)} \quad F/l = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi r}.$$

### 3. Постоянные электрические и магнитные поля

$$3.1. \quad E_r^{(e)}(r) = -\frac{|e|}{r^2} \left[1 - e^{\frac{-2r}{a}} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right)\right],$$

$$\varphi^{(e)}(r) = -\frac{|e|}{r} \left[1 - e^{\frac{-2r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)\right],$$

$$U = |e| \varphi^{(e)}(0) = -\frac{e^2}{a},$$

$$E_r^{(e+p)}(r) = E_r^{(e)}(r) + \frac{|e|}{r^2} = \frac{|e|}{r^2} e^{\frac{-2r}{a}} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right),$$

$$\varphi^{(e+p)}(r) = \varphi_r^{(e)}(r) + \frac{|e|}{r} = \frac{|e|}{r} e^{\frac{-2r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right).$$

$$3.2. \quad \text{a)} \quad \varphi(z) = \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

$$\text{б)} \quad \varphi(z) = \frac{2Q}{R} \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} - \frac{|z|}{R} \right),$$

$$\text{в)} \quad \varphi(z) = \frac{Q}{2h} \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \varphi(z) = & \frac{Q}{2h + R} \left( \sqrt{1 + \frac{(z - h)^2}{R^2}} + \sqrt{1 + \frac{(z + h)^2}{R^2}} - \right. \\ & - \frac{|z - h|}{R} - \frac{|z + h|}{R} + \\ & \left. + \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right| \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad \varphi(z) = & \frac{Q}{2hR^2} \left( (z + h)\sqrt{R^2 + (z + h)^2} + \right. \\ & + (z - h)\sqrt{R^2 + (z - h)^2} - 4h|z| + \\ & \left. + R^2 \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right| \right), \quad \text{при } |z| \geq h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \frac{Q}{2hR^2} \left( (z + h)\sqrt{R^2 + (z + h)^2} + \right. \\ & + (z - h)\sqrt{R^2 + (z - h)^2} - 2(z^2 + h^2) + \\ & \left. + R^2 \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right| \right), \quad \text{при } |z| \leq h, \end{aligned}$$

$$\text{е)} \quad \varphi(z) = \frac{Q}{Rz} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - |z - R| \right),$$

$$\begin{aligned} \text{ж)} \quad \varphi(z) = & \frac{1}{3} \frac{Q}{R} \left( \frac{1}{z} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z - R|) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|) \right), \end{aligned}$$

$$\text{з)} \quad \varphi(z) = \frac{Q}{R^3 z} \left( (z^2 + R^2)^{3/2} - z^3 - \frac{3}{2} R^2 z + R^3 \right), \quad z \geq R,$$

$$\varphi(z) = \frac{Q}{R^3 z} \left( (z^2 + R^2)^{3/2} - 2z^3 + \frac{3}{2} R^2 z - R^3 \right), \quad 0 \leq z \leq R,$$

$$\varphi(z) = \frac{Q}{R^3 z} \left( (z^2 + R^2)^{3/2} + z^3 + \frac{3}{2} R^2 z - R^3 \right), \quad z \leq 0.$$

$$3.3. \quad \text{a)} \quad \vec{d} = \frac{3}{8} QR \vec{e}_z, \quad D_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\text{б)} \quad \vec{d} = \frac{1}{2} QR \vec{e}_z, \quad D_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\text{в)} \quad \vec{d} = \frac{1}{3} QR \vec{e}_z, \quad D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{г)} \quad \vec{d} = 0,$$

$$D_{xx} = \frac{3Q}{5} (2a^2 - b^2 - c^2),$$

$$D_{yy} = \frac{3Q}{5} (2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{3Q}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

$$\text{д)} \quad \vec{d} = 0,$$

$$D_{zz} = Q \left( \frac{2}{3} h^2 - \frac{R^2}{2} \right), \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2},$$

$$\text{е)} \quad \vec{d} = 0,$$

$$D_{zz} = -\frac{QR^2}{2}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2},$$

$$\text{ж)} \quad \vec{d} = \frac{5}{8} hQ \vec{e}_z,$$

$$D_{zz} = \frac{3}{10} Q (3h^2 - 2R^2), \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2}.$$

$$3.4. \quad D_{\alpha\beta} = \frac{D_0}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\alpha & 3 \sin 2\alpha & 0 \\ 3 \sin 2\alpha & 1 - 3 \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.5. \quad D_{\alpha\beta} = \frac{Q}{4} \left( \frac{2}{3} h^2 - \frac{1}{2} R^2 \right) \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\alpha & 3 \sin 2\alpha & 0 \\ 3 \sin 2\alpha & 1 - 3 \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.6. \quad D_{\alpha\beta} = -\frac{QR^2}{8} \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\alpha & 3 \sin 2\alpha & 0 \\ 3 \sin 2\alpha & 1 - 3 \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.7. \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{d}\vec{r})}{r^5} = \frac{-\vec{d} + 3\vec{n}(\vec{d}\vec{n})}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$U(\vec{r}) = -\frac{(\vec{d}_1\vec{d}_2)}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d}_1\vec{r})(\vec{d}_2\vec{r})}{r^5} = \frac{-(\vec{d}_1\vec{d}_2) + 3(\vec{d}_1\vec{n})(\vec{d}_2\vec{n})}{r^3}.$$

$$3.8. \quad \vec{H}(z) = \frac{4Jab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \left( \frac{1}{a^2 + z^2} + \frac{1}{b^2 + z^2} \right) \vec{e}_z, \\ \vec{H}(z) \approx \frac{4Jab}{cz^3} \vec{e}_z, \quad \text{при } |z| \gg a, b.$$

$$3.9. \quad \vec{H}(z) = \frac{2\pi R^2 J}{c(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{e}_z, \\ \vec{H}(z) \approx \frac{2\pi R^2 J}{cz^3} \vec{e}_z, \quad \text{при } |z| \gg R.$$

$$3.10. \quad \vec{H}(0) = \frac{Q}{cR} \vec{\omega},$$

$$3.11. \quad H_z(0) = \frac{e\hbar}{24mca^3}, \quad H_x(0) = H_y(0) = 0, \\ U_{max} = \frac{\mu_p e \hbar}{24mca^3}.$$

$$3.12. \quad \text{a) } \vec{\mu} = \frac{1}{5} \frac{QR^2}{c} \vec{\omega}, \quad \vec{\mu} = \frac{Q}{2mc} \vec{M}, \\ \text{б) } \omega = \frac{5\hbar m_e c^4}{2e^4}, \quad v = \omega r_e = \frac{5}{2} \frac{1}{\alpha} c, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

$$3.13. \quad \text{a) } \vec{\mu} = \frac{1}{4} \frac{QR^2}{c} \vec{\omega}, \\ \text{б) } \vec{\mu} = \frac{3}{20} \frac{QR^2}{c} \vec{\omega}, \\ \text{в) } \vec{\mu} = \frac{1}{5} \frac{Qa^2}{c} \vec{\omega}, \\ \vec{\mu} = \frac{Q}{2mc} \vec{M}.$$

$$3.14. \quad \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\mu}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{\mu}\vec{r})}{r^5} = \frac{-\vec{\mu} + 3\vec{n}(\vec{\mu}\vec{n})}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \\ U(\vec{r}) = -\frac{(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)}{r^3} + 3 \frac{(\vec{\mu}_1\vec{r})(\vec{\mu}_2\vec{r})}{r^5} = \frac{-(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2) + 3(\vec{\mu}_1\vec{n})(\vec{\mu}_2\vec{n})}{r^3}.$$

#### 4. Излучение электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad d\bar{I}_m &= \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos^2 \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \cos \theta \right] d\Omega, \\
 \bar{I}_m &= \frac{J_0^2}{c} c_m, \\
 c_m &= \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos^2 \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \cos \theta \right] \sin \theta d\theta, \\
 c_0 &\approx 1.22, \quad c_1 \approx 1.76, \quad c_2 \approx 2.01, \quad c_3 \approx 2.18.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad d\bar{I} &= \frac{(J_0 \omega l)^2}{8\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{J_0^2}{2\pi c} \left( \frac{\omega l}{2c} \right)^2 \sin^2 \theta, \\
 \bar{I} &= \frac{1}{3} \frac{(J_0 \omega l)^2}{c^3} = \frac{4}{3} \frac{J_0^2}{c} \left( \frac{\omega l}{2c} \right)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad E(t) &= E_0 e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^3}, \\
 a(t) &= a_0 e^{-\gamma t/2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.4. \quad \text{a)} \quad \frac{1}{E^3(t)} - \frac{1}{E^3(0)} &= \gamma t, \quad \gamma = \frac{32}{e^2 m^2 c^3}, \\
 r^3(t) &= r^3(0) - 4 r_e^2 c t, \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}, \\
 \text{б)} \quad v &\ll c, \quad IT \ll |E|, \\
 t_{r_1 \rightarrow r_2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{r_e^2 c} (r_1^3 - r_2^3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.6. \quad \text{a)} \quad I &= 2\gamma E', \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^4 H^2}{m^3 c^5}, \quad E' = E - mc^2 \ll mc^2. \\
 \text{б)} \quad E' &= E'_0 e^{-2\gamma t}, \quad R = R_0 e^{-\gamma t}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.7. \quad dI(t) &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}]]^2}{(1 - (\vec{n}\vec{v})/c)^5} \right\}_t d\Omega, \\
 I(t) &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{\dot{v}^2 (1 - v^2/c^2) + (\vec{v}\dot{\vec{v}})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \right\}_t.
 \end{aligned}$$



$$4.8. \quad \text{a)} \quad I = \frac{2}{3} \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left[ (E/mc^2)^2 - 1 \right].$$

$$\text{б)} \quad E(t) = mc^2 \frac{E_0 + mc^2 \operatorname{th}(\gamma t)}{E_0 \operatorname{th}(\gamma t) + mc^2}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^4 H^2}{m^3 c^5},$$

$$R(t) = R_0 \frac{mc^2}{E_0 \operatorname{sh}(\gamma t) + mc^2 \operatorname{ch}(\gamma t)}.$$

$$\text{в)} \quad E = mc^2 + E',$$

$$I = 2\gamma E' (1 + E'/(2mc^2)),$$

$$E'(t) = mc^2 \frac{E'_0 (1 - \operatorname{th}(\gamma t))}{(mc^2 + E'_0) \operatorname{th}(\gamma t) + mc^2},$$

$$R(t) = R_0 \frac{mc^2}{(mc^2 + E'_0) \operatorname{sh}(\gamma t) + mc^2 \operatorname{ch}(\gamma t)}.$$

$$\text{При } E'_0 \ll mc^2 :$$

$$I \approx 2\gamma E', \quad E' \approx E'_0 e^{-2\gamma t}, \quad R \approx R_0 e^{-\gamma t}.$$

$$4.9. \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{E d^3}{c^3 I^2},$$

$$\psi_0(t) = \psi_0(0) e^{-\gamma t/2}.$$

$$4.10. \quad \bar{I} = \frac{1}{3} \frac{J_0^2 a^2 b^2 \omega^4}{c^5}.$$

$$4.11. \quad I = \frac{2}{3} \frac{\beta^4 \mu^2 H^4}{c^3} \sin^2 \theta_0.$$

$$4.12. \quad I = \frac{2}{3} \frac{J_0^2 a^2 b^2 \omega^4}{c^5}.$$

$$4.13. \quad W^{(\text{изл.})} = \frac{J_0^2 a^2 b^2}{c^5} \sqrt{2\pi} \alpha^{3/2},$$

$$Q = J_0 \sqrt{\pi/\alpha}, \quad W^{(\text{изл.})} = \frac{Q^2 a^2 b^2}{c^5} \sqrt{2/\pi} \alpha^{5/2}.$$

$$4.14. \quad \text{a)} \quad \bar{I} = 2\gamma E, \quad \gamma = \frac{1}{30} \frac{Q^2 R^2 \omega^4}{mc^5},$$

$$\text{б)} \quad E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}, \quad \varphi_0(t) = \varphi_0(0) e^{-\gamma t}.$$

$$4.15. \quad I = \frac{2}{3} \frac{\beta^4 \mu^2 H^4}{c^3} \sin^2 \theta = \frac{1}{600} \frac{Q^6 r^4 \omega^2 H^4}{m^4 c^9} \sin^2 \theta.$$

$$\beta = \frac{Q}{2mc}, \quad \mu = \frac{1}{5} \frac{QR^2 \omega}{c}.$$

$$4.16. \quad dI = \frac{1}{144\pi c^5} [\vec{n} \times \ddot{\vec{D}}]^2 d\Omega, \quad \ddot{\vec{D}} = \vec{e}_\alpha \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta,$$

$$I = \frac{1}{180 c^5} \sum_{\alpha, \beta} (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 = \frac{1}{180 c^5} \text{Sp}(\ddot{D}\ddot{D}).$$

$$4.17. \quad I = \frac{2}{5} \frac{D_0^2 \omega^6}{c^5}.$$

$$4.18. \quad I = \frac{1}{10} \frac{Q^2 R^4 \omega^6}{c^5}.$$

$$4.19. \quad I = \frac{8}{45} \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{c^5}.$$

$$4.20. \quad I = \frac{2}{5} Q^2 \left( \frac{2}{3} h^2 - \frac{R^2}{2} \right)^2 \omega^6 / c^5.$$

$$4.21. \quad I = \frac{72}{125} \frac{Q^2 (a^2 - b^2)^2 \omega^6}{c^5}.$$

## 5. Электрические и магнитные поля в веществе

$$5.1. \quad \text{а) } \varphi(\vec{r}) = \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3}, \quad \vec{d} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{P}, \quad r > a,$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi (\vec{P}\vec{r}), \quad r < a,$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{d}\vec{r})}{r^5}, \quad r > a,$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{4}{3} \pi \vec{P}, \quad r < a,$$

$$\text{б) } \varphi = \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3}, \quad r > a,$$

$$\varphi = \frac{4}{3} \pi P r \cos \theta = \frac{4}{3} \pi (\vec{P}\vec{r}), \quad r < a.$$

$$\text{в) } \varphi = \frac{3}{1+2\varepsilon} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{3}{1+2\varepsilon} \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3}, \quad r > a,$$

$$\varphi = \frac{4}{1+2\varepsilon} \pi P r \cos \theta = \frac{4}{1+2\varepsilon} \pi (\vec{P}\vec{r}), \quad r < a.$$

$$5.2. \quad \text{a)} \quad \varphi = \frac{d \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta = \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^3} - (\vec{E}_0 \vec{r}), \quad \vec{d} = a^3 \vec{E}_0,$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{d} \vec{r})}{r^5} - \vec{E}_0,$$

$$\sigma = \frac{3 \varepsilon}{4\pi} E_0 \cos \theta,$$

$$\text{б)} \quad \varphi = \frac{Q}{\varepsilon r} + \frac{d \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta = \frac{Q}{\varepsilon r} + \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^3} - (\vec{E}_0 \vec{r}),$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{d} \vec{r})}{r^5} - \vec{E}_0,$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} + \frac{3 \varepsilon}{4\pi} E_0 \cos \theta.$$

$$5.3. \quad \varphi^{(1)} = -\frac{3 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} E_0 r \cos \theta = -\frac{3 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} (\vec{E}_0 \vec{r}), \quad r < a,$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta =$$

$$= \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^3} - (\vec{E}_0 \vec{r}), \quad \vec{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} a^3 \vec{E}_0, \quad r > a,$$

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{3 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} \vec{E}_0, \quad r < a,$$

$$\vec{E}^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{d} \vec{r})}{r^5} + \vec{E}_0, \quad r > a,$$

$$\rho_{c\delta\gamma\lambda}^{(1)} = 0, \quad \rho_{c\delta\gamma\lambda}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{c\delta\gamma\lambda} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2} E_0 \cos \theta.$$

$$5.4. \quad \vec{H}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{3}{\mu + 2} \vec{H}_0, \quad r < a,$$

$$\vec{H}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(\mu_0)} + \vec{H}_0 = -\frac{\vec{\mu}_0}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^5} + \vec{H}_0, \quad r > a,$$

$$\vec{\mu}_0 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \vec{H}_0,$$

$$\vec{j}_{c\delta\gamma\lambda} = 0,$$

$$\vec{i}_{c\delta\gamma\lambda} = \vec{e}_\varphi \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} c H_0 \sin \theta.$$

5.5. а)  $\vec{j}_{\text{связ.}} = c \operatorname{rot} \vec{M} = 0$ ,  
 $\vec{i}_{\text{связ.}} = c [\vec{M} \times \vec{n}'] = \vec{e}'_{\varphi} c M \sin \theta'$ ,  
 $\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} [\vec{M} \times \vec{r}]$ ,  $r < a$ ,  
 $\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{[\vec{\mu}_0 \times \vec{r}]}{r}$ ,  $\vec{\mu}_0 = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{M}$ ,  $r > a$ ,  
 $\vec{B}^{(1)} = \frac{8\pi}{3} \vec{M}$ ,  $\vec{H}^{(1)} = \vec{B}^{(1)} - 4\pi \vec{M} = -\frac{4\pi}{3} \vec{M}$ ,  $r < a$ ,  
 $\vec{B}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(\mu_0)}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\mu}_0}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^5}$ ,  $r > a$ .

б)  $\psi^{(1)}(\vec{r}) = -(\vec{H}^{(1)} \vec{r})$ , где  $\vec{H}^{(1)} = -\frac{4\pi}{3} \vec{M}$ ,  
 $\vec{B}^{(1)} = \vec{H}^{(1)} + 4\pi \vec{M} = \frac{8\pi}{3} \vec{M}$ ,  $r < a$ ,  
 $\psi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^3}$ ,  $\vec{\mu}_0 = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{M}$ ,  
 $\vec{B}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(\mu_0)}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\mu}_0}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^5}$ ,  $r > a$ .

в)  $\psi^{(1)}(\vec{r}) = -(\vec{H}^{(1)} \vec{r})$ , где  $\vec{H}^{(1)} = -\frac{4\pi}{1+2\mu} \vec{M}$ ,  
 $\vec{B}^{(1)} = \vec{H}^{(1)} + 4\pi \vec{M} = \frac{8\pi\mu}{1+2\mu} \vec{M}$ ,  $r < a$ ,  
 $\psi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^3}$ ,  $\vec{\mu}_0 = \frac{4\pi}{1+2\mu} a^3 \vec{M}$ ,  
 $\vec{B}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(\mu_0)}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\mu}_0}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{\mu}_0 \vec{r})}{r^5}$ ,  $r > a$ .

5.6.  $B = \frac{4\pi}{c} \mu J n$ .

5.7.  $j(z, t) = j_0 e^{-z/\delta} \cos(-z/\delta + \omega t + \alpha)$ ,  
 $\delta = c / \sqrt{2\pi\mu\sigma\eta p\omega}$ .

Для меди:

а)  $\nu = 50 \text{ Гц}$ ,  $\delta = 1 \text{ см}$ , б)  $\nu = 1 \text{ МГц}$ ,  $\delta = 0.07 \text{ мм}$ .

$$\begin{aligned}
 5.8. \quad \text{a) } j(r, t) &= j(a) \sqrt{a/r} e^{-(a-r)/\delta} \cos(r/\delta + \omega t + \alpha) = \\
 &= j(a) \frac{e^{-x/\delta}}{\sqrt{1 - x/r}} \cos(-x/\delta + \omega t + \alpha + a/\delta), \\
 &\quad \delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma_{np}\omega}, \quad x = a - r. \\
 \text{б) } j(r, t) &= j(0) (1 + \rho^4/16 + \dots) \cos(\omega t + \alpha + \rho^2/2 + \dots), \\
 &\quad \rho = r/\delta \ll 1.
 \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

### 1. Учебники

1. Бредов, М. М. *Классическая электродинамика* / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – СПб. : Лань, 2003. – 401 с.
2. Ландау, Л. Д. *Теория поля* / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2003. – 536 с.
3. Ландау, Л. Д. *Электродинамика сплошных сред* / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2005. – 656 с.
4. Левич, В. Г. *Курс теоретической физики: в 2 т. Т. 1: Теория электромагнитного поля; Теория относительности; Статистическая физика; Электромагнитные процессы в веществе* / В. Г. Левич, Ю. А. Вдовин, В. А. Мямлин. – СПб. : ЁЁ Медиа, 2012. – 937 с.
5. Левич, В. Г. *Курс теоретической физики* / В. Г. Левич. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 910 с.

### 2. Задачники

1. Алексеев, А. И. *Сборник задач по классической электродинамике* / А. И. Алексеев. – СПб. : Лань, 2008. – 319 с.
2. Алексеев, А. И. *Сборник задач по классической электродинамике* / А. И. Алексеев. – М. : Наука, 1977. – 312 с.
3. Батыгин, В. В. *Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности* / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – СПб. : Лань, 2010. – 480 с.
4. Батыгин, В. В. *Сборник задач по электродинамике* / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М. : РХД-ИКИ, 2002. – 640 с.
5. Батыгин, В. В. *Сборник задач по электродинамике* / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1970. – 504 с.
6. Гречко, Л. Г. *Сборник задач по теоретической физике* / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. – М. : Высшая школа, 1984. – 319 с.
7. Гречко, Л. Г. *Сборник задач по теоретической физике* / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. – М. : Высшая школа, 1972. – 335 с.
8. Смирнов, А. Д. *Электродинамика : сборник задач* / А. Д. Смирнов. – Ярославль : ЯрГУ, 2004. – 16 с.

## Приложения

### Приложение 1

#### Системы единиц измерения электрических и магнитных величин (гауссова система и система СИ)

Таблица 1

#### Основные формулы электродинамики в гауссовой системе единиц и в системе СИ

| Гауссова система единиц   | Система СИ  |
|---|---|
| $\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}$ $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho$ $\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $F = q_1 q_2 / (\varepsilon r^2)$ $F = l \mu 2 I_1 I_2 / (c^2 r)$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]$ $\left( \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \varphi(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(\vec{r}, t)$ $\left( \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$ $w = (\varepsilon E^2 + \mu H^2) / (8\pi)$ $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ $\vec{\mu} = \frac{1}{c} JS \vec{n}$ | $\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ $\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ $F = q_1 q_2 / (4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2)$ $F = l \mu_0 \mu I_1 I_2 / (2\pi r)$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]$ $\left( \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$ $\left( \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$ $w = (\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) / 2$ $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ $\vec{\mu} = JS \vec{n}$ $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ |

Таблица 2

**Единицы измерения основных  
механических и электромагнитных величин  
в гауссовой системе и в системе СИ**

| Физическая<br>величина | Единицы измерения    |                      | Соотношение<br>между единицами              |
|------------------------|----------------------|----------------------|---|
|                        | Гауссова система     | Система СИ           |   |
| $l$                    | сантиметр, $см$      | метр, $м$            | $1 м = 10^2 см$                             |
| $m$                    | грамм, $г$           | килограмм, $кг$      | $1 кг = 10^3 г$                             |
| $t$                    | секунда, $с$ , $сек$ | секунда, $с$ , $сек$ | -   |
| $F$                    | дина, $дин$          | ньютон, $Н$          | $1 Н = 10^5 дин$                            |
| $W$                    | эрг, $эрг$           | джоуль, $Дж$         | $1 Дж = 10^7 эрг$                           |
| $N$                    | эрг/сек, $эрг/сек$   | ватт, $Вт$           | $1 Вт = 10^7 эрг/сек$                       |
| $q$                    | $CGSE_q$             | кулон, $Кл$          | $1 Кл = 3 \cdot 10^9 CGSE_q$                |
| $I$                    | $CGSE_I$             | ампер, $А$           | $1 А = 3 \cdot 10^9 CGSE_I$                 |
| $\varphi$              | $CGSE_\varphi$       | вольт, $В$           | $1 CGSE_\varphi = 300 В$                    |
| $E$                    | $CGSE_E$             | $В / м$              | $1 CGSE_E = 3 \cdot 10^4 В / м$             |
| $B$                    | гаусс, $Гс$          | тесла, $Тл$          | $1 Тл = 10^4 Гс$                            |
| $D$                    | $CGSE_D$             | $Кл/м^2$             | $1 Кл/м^2 = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5 CGSE_D$ |
| $H$                    | эрстед, $Э$          | $А/м$                | $1 Э = \frac{10^3}{4\pi} А/м$               |
| $\Phi$                 | максвелл, $Мкс$      | вебер, $Вб$          | $1 Вб = 10^8 Мкс$                           |
| $C$                    | сантиметр, $см$      | фарада, $Ф$          | $1 Ф = 9 \cdot 10^{11} см$                  |
| $L$                    | сантиметр, $см$      | генри, $Гн$          | $1 Гн = 10^9 см$                            |
| $R$                    | $сек/см$             | ом, $Ом$             | $1 Ом = \frac{1}{9} 10^{-11} сек/см$        |
| $\rho_{сопр}$          | $сек$                | ом, $Ом \cdot м$     | $1 Ом \cdot м = \frac{1}{9} 10^{-9} сек$    |



Таблица 3

Соотношения между основными (выделены жирным шрифтом) и производными единицами основных механических и электромагнитных величин в гауссовой системе и в системе СИ

| Физ.<br>велич. | Единицы измерения  |   |
|----------------|--|---|
|                | Гауссова система   | Система СИ                                  |
| $l$            | <b>сантиметр</b> , $см$  | <b>метр</b> , $м$                           |
| $m$            | <b>грамм</b> , $г$   | <b>килограмм</b> , $кг$                     |
| $t$            | <b>секунда</b> , $с$ , $сек$                                   | <b>секунда</b> , $с$ , $сек$                |
| $F$            | $дин = г\ см\ сек^{-2}$  | $Н = кг\ м\ сек^{-2}$                       |
| $W$            | $эрг = г\ см^2\ сек^{-2}$                                      | $Дж = Н\ м = кг\ м^2\ сек^{-2}$             |
| $N$            | $эрг/сек = г\ см^2\ сек^{-3}$                                  | $Вт = Дж/сек = кг\ м^2\ сек^{-3}$           |
| $q$            | $CGSE_q = (эрг\ см)^{1/2} = г^{1/2}\ см^{3/2}\ сек^{-1}$       | $Кл = А\ сек$                               |
| $I$            | $CGSE_I = CGSE_q\ сек^{-1} = г^{1/2}\ см^{3/2}\ сек^{-2}$      | <b>ампер</b> , $А$                          |
| $\varphi$      | $CGSE_\varphi = CGSE_q\ см^{-1} = г^{1/2}\ см^{1/2}\ сек^{-1}$ | $B = Дж/Кл = кг\ м^2\ сек^{-3}\ А^{-1}$     |
| $E$            | $CGSE_E = CGSE_q\ см^{-2} = г^{1/2}\ см^{-1/2}\ сек^{-1}$      | $B/м = кг\ м\ сек^{-3}\ А^{-1}$             |
| $B$            | $Гс = г^{1/2}\ см^{-1/2}\ сек^{-1}$                            | $Тл = Вб/м^2 = кг\ сек^{-2}\ А^{-1}$        |
| $D$            | $CGSE_D = г^{1/2}\ см^{-1/2}\ сек^{-1}$                        | $Кл/м^2 = м^{-2}\ сек\ А$                   |
| $H$            | $\mathcal{O} = г^{1/2}\ см^{-1/2}\ сек^{-1}$                   | $А/м = А\ м^{-1}$                           |
| $\Phi$         | $Мкс = г^{1/2}\ см^{3/2}\ сек^{-1}$                            | $Вб = Тл\ м^2 = кг\ м^2\ сек^{-2}\ А^{-1}$  |
| $C$            | $см$   | $\Phi = Кл/В = кг^{-1}\ м^{-2}\ сек^4\ А^2$ |
| $L$            | $см$   | $Гн = кг\ м^2\ сек^{-2}\ А^{-2}$            |
| $R$            | $сек/см$   | $Ом = В/А = кг\ м^2\ сек^{-3}\ А^{-2}$      |
| $\rho_{conp}$  | $сек$  | $Ом \cdot м = кг\ м^3\ сек^{-3}\ А^{-2}$    |

## Приложение 2

### Некоторые физические константы

$$c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см /сек} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см /сек} -$$

– скорость света в вакууме,

$$e = -4.803204673(30) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}_q \approx -4.8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}_q -$$

– заряд электрона,

$$\hbar = h/2\pi = 1.054571800(13) \cdot 10^{-27} \text{ эрг сек} \approx 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг сек} -$$

– постоянная Планка.

$$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.035999139(31) \approx 1/137 -$$

– безразмерная константа электромагнитного взаимодействия  
(постоянная тонкой структуры) .

$$m_e = 9.10938356(11) \cdot 10^{-28} \text{ г} \approx 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ г} - \text{масса электрона,}$$

$$m_e c^2 = 0.5109989461(31) \text{ МэВ} \approx 0.5 \text{ МэВ} - \text{энергия покоя электрона,}$$

$$m_p c^2 = 938.2720813(58) \text{ МэВ} \approx 940 \text{ МэВ} - \text{энергия покоя протона.}$$

$$r_e = e^2/(m_e c^2) = 2.8179403227(19) \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см} -$$

– классический радиус электрона,

$$\lambda_e = \hbar/(m_e c) = r_e \alpha^{-1} = 3.8615926764(18) \cdot 10^{-11} \text{ см} \approx 3.9 \cdot 10^{-11} \text{ см} -$$

– комптоновская длина волны электрона,

$$a_B = \hbar^2/(m_e e^2) = r_e \alpha^{-2} = 0.52917721067(12) \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ см} -$$

– первый борковский радиус атома водорода.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}} = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}},$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{\text{м}} = 12.566370614 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{\text{м}} \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_H}{\text{м}}.$$

$$1 \text{ эВ} = 1.6021766208(98) \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \approx 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг,}$$

$$1 \text{ ангстрем} (\text{\AA}) = 10^{-8} \text{ см,}$$

$$1 \text{ ферми} (\text{\AA}_M) = 10^{-13} \text{ см,}$$

$$1 \text{ барн} (\text{бн}) = 10^{-24} \text{ см}^2.$$

## Некоторые математические формулы

### 3.1. Дифференциальные операции с векторными и скалярными полями в декартовой, сферической и цилиндрической системах координат

#### 3.1.1. Декартова система координат

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{e}_x a_x + \vec{e}_y a_y + \vec{e}_z a_z, \\ \text{grad } U &= \vec{\nabla} U(x, y, z) = \vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \text{div } \vec{a} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \vec{a} &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \vec{e}_x (\text{rot } \vec{a})_x + \vec{e}_y (\text{rot } \vec{a})_y + \vec{e}_z (\text{rot } \vec{a})_z, \\ (\text{rot } \vec{a})_x &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}]_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ (\text{rot } \vec{a})_y &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}]_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ (\text{rot } \vec{a})_z &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}]_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.\end{aligned}$$

#### 3.1.2. Сферическая система координат

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{e}_r a_r + \vec{e}_\theta a_\theta + \vec{e}_\varphi a_\varphi, \\ \text{grad } U &= \vec{\nabla} U(r, \theta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \text{div } \vec{a} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{rot } \vec{a} &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \vec{e}_r (\text{rot } \vec{a})_r + \vec{e}_\theta (\text{rot } \vec{a})_\theta + \vec{e}_\varphi (\text{rot } \vec{a})_\varphi, \\ (\text{rot } \vec{a})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}, \\ (\text{rot } \vec{a})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r}, \\ (\text{rot } \vec{a})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

### 3.1.3. Цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \vec{e}_\rho a_\rho + \vec{e}_\varphi a_\varphi + \vec{e}_z a_z, \\
 \text{grad } U &= \vec{\nabla} U(\rho, \varphi, z) = \vec{e}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}, \\
 \text{div } \vec{a} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\
 \text{rot } \vec{a} &= [\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \vec{e}_\rho (\text{rot } \vec{a})_\rho + \vec{e}_\varphi (\text{rot } \vec{a})_\varphi + \vec{e}_z (\text{rot } \vec{a})_z, \\
 (\text{rot } \vec{a})_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \\
 (\text{rot } \vec{a})_\varphi &= \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \\
 (\text{rot } \vec{a})_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}.
 \end{aligned}$$

## 3.2. Уравнение Лапласа в сферических и цилиндрических координатах

Оператор Лапласа в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ :

$$\vec{\nabla}^2 U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$ :

$$\vec{\nabla}^2 U(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Азимутально-симметричное решение уравнения Лапласа в сферических координатах

$$\vec{\nabla}^2 U(r, \theta) = 0$$

можно в общем случае представить в виде разложения

$$U(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l r^l P_l(\cos \theta),$$

где  $P_l(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра, а  $a_l$  и  $b_l$  – произвольные коэффициенты разложения,  $l = 0, 1, 2, \dots$ .

Потенциал единичного точечного источника удовлетворяет уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}).$$

### 3.3. Интеграл Пуассона и связанные с ним интегралы

Интеграл Пуассона

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

легко находится вычислением двукратного интеграла

$$I^2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\alpha r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Дифференцирование интеграла

$$I_0(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-1/2}$$

$k$  раз по параметру  $\alpha$  дает интегралы с четным индексом

$$I_{2k}(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k} \alpha^{-(2k+1)/2}.$$

Дифференцирование интеграла

$$I_1(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \alpha^{-1}$$

$k$  раз по параметру  $\alpha$  дает интегралы с нечетным индексом

$$I_{2k+1}(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} k! \alpha^{-(k+1)}.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| 1. Основы специальной теории относительности  | 3  |
| 2. Основные уравнения электродинамики   | 9  |
| 3. Постоянные электрические и магнитные поля  | 14 |
| 4. Излучение электромагнитных волн  | 20 |
| 5. Электрические и магнитные поля в веществе  | 26 |
| Ответы к задачам  | 32 |
| Литература  | 46 |
| Приложения  | 47 |
| 1. Системы единиц измерения электрических и магнитных величин (гауссова система и система СИ) . . . | 47 |
| 2. Некоторые физические константы . . . . .   | 50 |
| 3. Некоторые математические формулы . . . . .   | 51 |

Учебное издание

**Смирнов**  
Александр Дмитриевич

**Электродинамика**  
*Учебно-методическое пособие*

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерный набор, верстка А. Д. Смирнов

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 3,3. Уч.-изд. л. 3,0.

Тираж 3 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.