

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

М. Л. Мячин, О. А. Дунаева

Дополнительные главы
цифровой обработки сигналов
Вейвлетные преобразования

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению и специальности
Прикладная математика и информатика

Ярославль 2010

УДК 621.391.1.037.37
ББК 3 811.3я73
М 99

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года.

Рецензент
кафедра дискретного анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

М 99 **Мячин, М. Л. Дополнительные главы цифровой обработки сигналов. Вейвлетные преобразования:** методические указания / М. Л. Мячин, О. А. Дунаева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2010. – 34 с.

В методических указаниях последовательно изложена современная теория локального спектрального анализа сигналов, начиная с эмпирических схем скользящего преобразования Фурье и заканчивая разложениями по вейвлетным базисам.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению 010500.62 Прикладная математика и информатика и специальности 010501.65 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Цифровая обработка сигналов», блок ОПД), очной формы обучения.

Рис. 9.

УДК 621.391.1.037.37
ББК 3 811.3я73

© Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2010

1. Определения и обозначения

В этом разделе приведены формулы, определяющие математические объекты, которые используются в тексте и полагаются известными читателю. Мы не пытаемся здесь сколько-нибудь полно изложить соответствующую теорию. Целью настоящего раздела является избежание путаницы, связанной с наличием множества эквивалентных определений одного и того же объекта. Эти определения, идентичные по сути, приводят к появлению в формулах различных нормирующих коэффициентов, что существенно затрудняет изучение литературы.

Интегральное преобразование Фурье определяется следующими формулами:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt,$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) dt.$$

Здесь $x(t)$ — исходный сигнал, $X(f)$ — комплексный интегральный спектр Фурье исходного сигнала.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующими формулами:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp[-i(2\pi/N)kn],$$
$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp[i(2\pi/N)kn].$$

Здесь x_k — исходный дискретный сигнал, определенный для $0 \leq k < N$, X_n — комплексный дискретный спектр Фурье исходного сигнала. Дискретный спектр X_n определен для $0 \leq k < N$, но более естественно считать его N -периодической комплексной последовательностью.

Окно Ханна, называемое иногда также окном фон Ганна, определяется формулой

$$g_N(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right),$$

где N — длина временного ряда. Если последовательность y_k образована по правилу $y_k = g_N(k)x_k$, то

$$Y_n = \frac{1}{4}(-X_{n-1} + 2X_n - X_{n+1}),$$

где X_n и Y_n — дискретные спектры последовательностей x_k и y_k соответственно. Таким образом, умножению сигнала во временной области на окно Ханна в частотной области соответствует сглаживание спектра.

2. Локальный спектральный анализ

При использовании преобразования Фурье информация о спектральном составе сигнала осредняется по времени. Если спектральный состав сигнала изменяется с течением времени, то аппарат классического спектрального анализа оказывается неприменимым.

В этом случае хотелось бы иметь возможность выяснить спектральный состав в каждый момент времени, т.е. локальный спектральный состав сигнала. Простым примером локальной по времени информации о спектральном составе является нотная запись, которая определяет ноты (частоты), звучащие в каждый момент времени. Известно несколько способов получения локальной спектральной информации. Здесь мы обсудим локальный спектральный анализ скользящим окном, интегральные вейвлетные преобразования и дискретные вейвлетные разложения.

Вейвлетные преобразования — относительно новый вид спектральных преобразований, обладающий многими замечательными свойствами. Первоначально вейвлетные разложения были использованы французским геофизиком Ж. Морле (Jean Morlet) в начале 80-х годов для анализа сигналов сейсмической природы как эмпирический метод моделирования процесса распространения сейсмического сигнала в земной коре. И. Мейер (Yves Meyer), С. Малла (Stephane Mallat) и И. Добеши (Ingrid Daubechies) в 1985–1988 гг. разработали строгую теорию вейвлетных преобразований. В настоящее время аппарат вейвлетных разложений широко применяется в прикладной математике для анализа и обработки сигналов различной природы. Вейвлетное преобразование оказалось хорошо приспособленным для спектрального анализа широкополосных нестационарных сигналов.

2.1. Спектральный анализ скользящим окном

Попробуем получить информацию о локальном спектральном составе сигнала, используя описанный выше аппарат преобразования Фурье. Первое, что приходит в голову, — разрезать сигнал на куски и анализировать их по отдельности.

Известен совсем простой метод грубой оценки спектрального состава каждого из полученных кусков с помощью подсчета числа переходов через нуль. Центрируем каждый кусок (т.е. вычтем из каждого отсчета среднее значение сигнала на анализируемом участке) и посчитаем число пересечений сигналом нулевого уровня. Пусть n_0 — среднее число пересечений нуля за единицу времени. Для синусоидального сигнала с частотой f_0 имеет место соотношение:

$$n_0 = 2f_0.$$

Несмотря на простоту, описанный метод грубой оценки доминирующей частоты сигнала широко используется при анализе речевых сигналов для различения вокализованных и фрикативных звуков.

Более точный метод локального анализа связан с вычислением спектров отдельных кусков. Формализация этой идеи приводит к описанной ниже схеме *спектрального анализа скользящим окном*.

Пусть окно $w_\tau(t)$ представляет собой функцию, носитель которой сосредоточен на отрезке $[-\tau/2, \tau/2]$. Вырежем с помощью этого окна из исходного сигнала $x(t)$ участок

$$x_\tau(s, t) = x(t + s)w_\tau(s).$$

Определим локальный интегральный спектр сигнала $x(t)$ в момент времени t как преобразование Фурье участка $x_\tau(s, t)$ исходного сигнала, т.е. формулой:

$$X_\tau(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\tau(s, t) \exp(-i2\pi fs) ds.$$

Фактически при каждом значении t здесь производится обычный спектральный анализ участка исходного сигнала, локализованного в τ -окрестности момента времени t .

Перепишем формулу для локального интегрального спектра следующим образом:

$$X_\tau(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+s)w_\tau(s) \exp(-i2\pi fs)ds$$

и произведем замену переменной в виде $t+s=p$:

$$X_\tau(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)w_\tau(p-t) \exp(-i2\pi f(p-t))dp. \quad (1)$$

Последняя формула напоминает формулу для интегрального преобразования Фурье, в которой гармоника $\exp(-i2\pi fs)$ заменена на функцию $w_\tau(s-t) \exp(-i2\pi f(s-t))$. Эта функция представляет собой гармонику, локализованную окном $w_\tau(s)$ в τ -окрестности точки t .

На практике преобразование Фурье, как обычно, заменяется на ДПФ, а в качестве окна используется окно Ханна. Зафиксируем ширину M окна Ханна:

$$g_M(j) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi j}{M} \right).$$

Участок сигнала, локализованный вблизи момента времени k , определяется формулой

$$x_M(j, k) = x_{k+j}g_M(j).$$

Вычислим для этого сигнала дискретное преобразование Фурье:

$$X_M(n, k) = \sum_{j=0}^M x_M(j, k)W_M^{-jn}.$$

Локальный дискретный спектр $X_M(n, k)$ определяет спектральный состав сигнала x_j в M -окрестности момента времени k . Отметим, что при практическом использовании локального спектрального анализа перед выполнением ДПФ каждого участка сигнала производят обычные для спектрального анализа операции исключения постоянной составляющей и дополнения нулями.

Локальный дискретный спектр является функцией двух индексов и обычно изображается в виде так называемой спектрограммы. Спектрограмма изображается на координатной плоскости, у которой ось абсцисс представляет время (индекс k), а по оси ординат откладывается частота (индекс n). Сама спектрограмма представляет собой картинку в градациях серого; яркость точки с координатами (k, n) определяется мощностью $|X_M(n, k)|^2$ соответствующей спектральной составляющей. Следует отметить, что обычно при сдвиге окна на один отсчет изменение спектра оказывается ничтожно малым, поэтому при рисовании спектрограммы можно использовать больший шаг по времени k .

Рассмотрим вопрос о выборе ширины M окна, которая определяет длину участка, анализируемого на каждом шаге. Длина временного ряда при ДПФ определяет предельное разрешение по частоте и самую низкочастотную гармонику, которая может быть идентифицирована по спектру. Таким образом, ширину окна при локальном спектральном анализе следует выбирать, исходя из того, какую точность локализации спектральных составляющих по частоте мы хотим получить. С другой стороны, ширина окна определяет также точность локализации спектральной составляющей по времени. Широкое окно позволяет получить высокое разрешение по частоте, но точность временной локализации не превышает ширины окна. Узкое окно дает хорошую локализацию по времени, но частота самой спектральной составляющей определяется весьма грубо.

2.2. Скользящее БПФ

При локальном спектральном анализе вычисление БПФ является самой массовой и критичной по времени операцией. Пусть задана последовательность x_k , из которой вырезаются окна длиной N , т.е. при каждом заданном m по последовательности x_k формируется последовательность $y_k = x_{m+k}$ при $0 \leq k < N$. Если для всех последовательностей y_k^m требуется вычислить БПФ, то существует схема, более экономичная, чем непосредственное вычисление БПФ для каждой последовательности y_k^m .

Выпишем формулу для искомой последовательности спектров:

$$X_n^m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{m+k} W_N^{-kn}. \quad (2)$$

Попробуем выразить X_n^{m+1} через X_n^m , сделав замену $l = k + 1$:

$$X_n^{m+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{(m+1)+k} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_{m+l} W_N^{-(l-1)n} = W_N^n \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_{m+l} W_N^{-ln}.$$

Сравнивая последнее выражение с (2), получим:

$$X_n^{m+1} = W_N^n \left(X_n^m - \frac{x_m}{N} W_N^{-0n} + \frac{x_{m+N}}{N} W_N^{-Nn} \right) = W_N^n \left(X_n^m - \frac{x_m}{N} + \frac{x_{m+N}}{N} \right).$$

Вычисление последовательности спектров в соответствии с последней формулой называется алгоритмом *скользящего БПФ*.

Вычисление последовательности спектров X_n^m по схеме скользящего БПФ требует выполнения N умножений. Обычно интерес представляют не все спектры из последовательности X_n^m , а только элементы подпоследовательности X_n^{jL} , где L — шаг по времени между последовательными спектрами. Переход от спектра X_n^{jL} к спектру $X_n^{(j+1)L}$ требует L -кратного вычисления по формуле скользящего БПФ. В этом случае схема скользящего БПФ становится эффективнее прямого вычисления БПФ каждой последовательности x_{jL+k} , если выполнено неравенство $L < C \log N$, где C — константа, зависящая от реализации БПФ.

Схема скользящего БПФ имеет существенные недостатки: она несовместима с применением мультипликативных окон во временной области, не позволяет использовать дополнение нулями для повышения спектрального разрешения и при длительном наблюдении за спектром зачастую ведет к накоплению погрешностей. Мультипликативное временное окно можно заменить сглаживанием спектра, невозможность использования дополнения нулями не очень обременительна, но накопление погрешности может стать серьезным препятствием. В целом во всех случаях, когда это возможно, следует использовать прямое вычисление БПФ, обращаясь к схеме скользящего БПФ только в задачах, предельно критичных по времени вычисления локального спектра.

2.3. Интегральное вейвлетное преобразование

Основную проблему в локальном спектральном анализе скользящим окном составляет выбор ширины анализирующего окна. В то же время эта проблема может быть легко решена, если при идентификации низкочастотных спектральных составляющих использовать широкое окно, а высокочастотных — узкое. При этом точность локализации по времени, зависящая от ширины окна, будет пропорциональна периоду спектральной составляющей. Это — лучшее, чего можно ожидать, поскольку невозможно локализовать

гармонику по времени с точностью, большей, чем длина ее периода. Описанная идея реализуется в рамках интегрального вейвлетного преобразования.

Интегральное вейвлетное преобразование (wavelet transform) $h(k, t)$ сигнала $x(t)$ относительно вейвлеты $g(t)$ определим при $k > 0$ формулой:

$$h(k, t) = k^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) g^* \left[\frac{s-t}{k} \right] ds. \quad (3)$$

Ниже будет дано определение вейвлеты, пока же полезно иметь в виду формулу для наиболее широко используемой *вейвлеты Морле*

$$g_m(t) = \exp(-t^2/2) \exp(i2\pi f_0 t).$$

Эта формула имеет структуру, сходную со структурой анализирующей функции, используемой в спектральном анализе скользящим окном: в обоих случаях гармоника умножается на локализирующее окно. В качестве окна здесь использована функция Гаусса

$$g_0(t) = \exp(-t^2/2).$$

Обозначив

$$g_k(t) = k^{-1/2} g(t/k),$$

перепишем формулу для вейвлетного преобразования:

$$h(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) g_k^*(s-t) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+s) g_k^*(s) ds.$$

Можно заметить сходство между интегральным вейвлетным преобразованием и локальным спектральным анализом скользящим окном (формула (1)): с точностью до обозначений при спектральном анализе скользящим окном аналогом вейвлеты является произведение окна $w_\tau(t)$ и анализирующей гармоники $\exp(-i2\pi ft)$. Основное различие этих формул состоит в выборе ширины окна: при спектральном анализе скользящим окном ширина окна постоянна и не зависит от частоты колебаний анализирующей гармоники; при вейвлетном преобразовании изменение частоты производится путем масштабирования вейвлеты $g(t)$, что приводит к одновременному изменению ширины локализирующего окна.

Множитель $k^{-1/2}$ осуществляет нормировку: он обеспечивает равную мощность функций $g_k(t)$ при всех $k > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_k(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |g(s/k)|^2 d(s/k) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2 ds.$$

Отметим особенности терминологии, принятой в вейвлетном анализе: параметр k называют *масштабом* (scale). При малых k , когда фактически происходит сжатие анализирующей вейвлеты, говорят о мелком масштабе (выделяются мелкомасштабные составляющие сигнала); наоборот, при больших значениях параметра k , когда происходит растяжение анализирующей вейвлеты, говорят о крупном масштабе (выделяются крупномасштабные составляющие сигнала).

2.4. Вейвлетное преобразование в спектральной области

Выясним связь между интегральным вейвлетным преобразованием и преобразованием Фурье. Зафиксировав значение масштаба k и рассмотрев вейвлетный спектр $h(k, t)$

как функцию времени, получаем возможность определить преобразование Фурье $H(k, f)$ вейвлетного спектра:

$$H(k, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(k, t) \exp(-i2\pi ft) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} H(k, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} k^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) g^* \left[\frac{s-t}{k} \right] ds \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= k^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \int_{-\infty}^{\infty} g^* \left[\frac{s-t}{k} \right] \exp(-i2\pi ft) dt ds. \end{aligned}$$

Производя в последнем равенстве замену $q = (s - t)/k$, получим

$$\begin{aligned} H(k, f) &= k^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(q) \exp(-i2\pi f(s - kq)) k dq ds = \\ &= k^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i2\pi fs) ds \int_{-\infty}^{\infty} g^*(q) \exp(i2\pi f k q) dq. \end{aligned}$$

Если $G(f)$ — преобразование Фурье вейвлеты $g(t)$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi ft) dt,$$

то

$$G^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \exp(i2\pi ft) dt.$$

Окончательно имеем

$$H(k, f) = k^{1/2} X(f) G^*(kf). \quad (4)$$

Полученная формула показывает, что сечение вейвлетного спектра на масштабе k представляет собой результат обработки сигнала фильтром с частотной характеристикой $k^{1/2} G^*(kf)$. Таким образом, *каждый все более мелкий (малые k) масштабный уровень вейвлетного спектра образуется при использовании фильтра со все более широкой полосой пропускания, и поэтому он содержит детали, появляющиеся при рассмотрении сигнала с соответствующим этому масштабу все более высоким разрешением.*

Вычислим спектр $G_m(f)$ вейвлеты Морле. Спектр функции Гаусса $g_0(t)$ относится к классическим спектрам:

$$G_0(f) = (2\pi)^{1/2} g_0(2\pi f).$$

Умножение на гармонику $\exp(i2\pi f_0 t)$ приводит к сдвигу спектра вдоль оси частот:

$$G_m(f) = (2\pi)^{1/2} g_0[2\pi(f - f_0)].$$

2.5. Вычисление вейвлетного спектра

На практике интегральный вейвлетный спектр вычисляется по сигналу $x(t)$, заданному временным рядом x_j , при $0 \leq j < N$. Как обычно, считается, что $x_j = x(j\tau)$, где $\tau > 0$ — интервал дискретизации. Быстрый алгоритм основан на дискретизации формулы (4) и замене преобразования Фурье быстрым преобразованием Фурье.

Пусть $X(f)$ — спектр сигнала $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt,$$

и X_n — ДПФ временного ряда x_k :

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-i(2\pi/N)jn).$$

Напомним, что если для сигнала $x(t)$ выполнено условие одновременной финитности во временной и спектральной областях, причем носитель сигнала $x(t)$ лежит на отрезке $[0, T]$, то выполнено соотношение:

$$X(n\Delta f) = X_n,$$

где $\Delta f = 1/T$.

В нашем случае $T = N\tau$ и $\Delta f = 1/(N\tau)$. С учетом периодичности ДПФ имеем:

$$TX_n = \begin{cases} X(n\Delta f), & 0 \leq n \leq N/2, \\ X((n-N)\Delta f), & N/2 < n < N. \end{cases}$$

Аналогично, если $H_n(k)$ — ДПФ дискретизации $h(k, j\tau)$ сечения вейвлетного спектра $h(k, t)$ при фиксированном k , то выполнено соотношение:

$$TH_n(k) = \begin{cases} H(k, n\Delta f), & 0 \leq n \leq N/2, \\ H(k, (n-N)\Delta f), & N/2 < n < N. \end{cases}$$

Если определить последовательность $G_n(k)$ формулой

$$G_n(k) = \begin{cases} G(kn\Delta f), & 0 \leq n \leq N/2, \\ G(k(n-N)\Delta f), & N/2 < n < N \end{cases}$$

то формулу (4) можно будет переписать в следующем виде:

$$H_n(k) = k^{1/2} X_n G_n^*(k). \quad (5)$$

Теперь сечение вейвлетного спектра $h(k, j\tau)$ при фиксированном k может быть вычислено как обратное дискретное преобразование Фурье последовательности $H_n(k)$.

Окончательная схема быстрого вычисления вейвлетного преобразования выглядит следующим образом. Вычисляем дискретное преобразование Фурье X_n последовательности x_j . Для каждого фиксированного k вычисляем последовательность $H_n(k)$ по формуле (5). Обратное преобразование Фурье последовательности $H_n(k)$ дает сечение вейвлетного спектра $h(k, j\tau)$ при заданном k . Отметим, что вычисление вейвлетного спектра с использованием быстрого преобразования Фурье по приведенным выше формулам корректно только вдали от границ отрезка задания исходной функции, поскольку на границах вносится существенная погрешность, связанная с так называемым циклическим эффектом. Дело в том, что при вычислениях в частотной области с помощью ДПФ фактически вычисляется вейвлетное преобразование периодического продолжения исходного сигнала. Для устранения циклического эффекта следует дополнить исходные данные нулями на длину, соответствующую максимальной эффективной ширине используемой вейвлеты. Не следует также забывать об операции исключения постоянной составляющей, которая всегда выполняется перед спектральным анализом данных.

Оценим трудоемкость предложенного алгоритма. Пусть требуется вычислить вейвлетный спектр при K значениях масштабного параметра k . Дискретное преобразование Фурье последовательности x_k вычисляется лишь однажды, что требует $O(n \log_2 n)$ операций;

на вычисление каждой последовательности $H_n(k)$ тратится $O(n)$ умножений (без учета затрат на вычисление значений функции $G(kf)$); переход от последовательности $H_n(k)$ к последовательности $h(k, j\tau)$ требует еще $O(n \log_2 n)$ операций на каждое значение k . Окончательно получим $O(n \log_2 n + Kn + Kn \log_2 n) = O(Kn \log_2 n)$ операций.

Рассмотрим вопрос о выборе набора значений масштабного параметра k , при которых производится вычисление сечений вейвлетного спектра. На выбранном интервале $[k_{\min}, k_{\max}]$ масштаб k изменяется экспоненциально:

$$k_j = k_{\min} 2^{j\Delta j}, \quad 0 \leq j \leq j_{\max}.$$

Интервал, на котором масштаб k изменяется в 2 раза называют октавой. Шаг Δj выбирается так, чтобы при изменении j на M единиц масштаб k пробежал полную октаву, т. е. $\Delta j = 1/M$. В этом случае параметр M определяет количество масштабных уровней, проходящихся на октаву, т. е. частоту дискретизации вейвлетного спектра по оси масштабов. Максимальное значение параметра j определяется формулой:

$$j_{\max} = \frac{1}{\Delta j} \log_2 \frac{k_{\max}}{k_{\min}} = M \log_2 \frac{k_{\max}}{k_{\min}}.$$

2.6. Обратное вейвлетное преобразование

В этом разделе мы докажем формулу обращения вейвлетного преобразования и уточним определение вейвлеты.

Обратное интегральное вейвлетное преобразование задается формулой:

$$x(t) = 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-5/2} \int_{-\infty}^\infty h(k, s) g\left[\frac{t-s}{k}\right] ds dk, \quad (6)$$

где c_g — константа, значение которой полностью определено вейвлетой $g(t)$:

$$c_g/2 = \int_0^\infty f^{-1} |G(f)|^2 df = \int_0^\infty f^{-1} |G(-f)|^2 df < \infty. \quad (7)$$

Функция $g(t)$ называется вейвлетой, если выполнено условие (7). В этом случае формула (6) обратного интегрального вейвлетного преобразования имеет смысл и вейвлетное преобразование обратимо, а вейвлетный спектр $h(k, t)$ полностью определяет функцию $x(t)$.

Рассмотрим требования, которые накладывает на функцию $g(t)$ условие (7). Интеграл содержит две особенности — в нуле и на бесконечности. Для сходимости на бесконечности достаточно, чтобы функция $|G(f)|$ вела себя при достаточно больших значениях f как $f^{-\alpha}$ при произвольном $\alpha > 0$, т. е. требуется некоторая (минимальная) гладкость вейвлеты $g(t)$, но сходимость на бесконечности имеет место уже для разрывных функций, имеющих только разрывы первого рода. Для сходимости в нуле достаточно, чтобы спектр $G(f)$ был непрерывен в нуле и выполнялось равенство $G(0) = 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^\infty g(t) dt = 0.$$

Таким образом, от вейвлеты по сути требуется только, чтобы ее среднее значение было нулевым.

Вейвлета Морле не является вейвлетой в строгом смысле, поскольку $G_m(0) = (2\pi)^{1/2} g_0(-2\pi f_0) \neq 0$. Положение легко исправить, слегка изменив определение:

$$\bar{g}_m(t) = g_0(t) [\exp(i2\pi ft) - g_0(-2\pi f_0)].$$

В этом случае

$$\bar{G}_m(f) = (2\pi)^{1/2}g_0[2\pi(f - f_0)] - (2\pi)^{1/2}g_0(2\pi f)g_0(-2\pi f_0)$$

и $\bar{G}_m(0) = 0$. На практике обычно используются значения $f_0 \sim 1$, так что описанная поправка оказывается ничтожно малой и ею пренебрегают.

Следует отметить, что формула для обратного интегрального вейвлетного преобразования представляет чисто теоретический интерес и не применяется на практике. Дело в том, что интегральный вейвлетный спектр на практике можно вычислить только для конечного набора значений масштаба k , а обратное вейвлетное преобразование очень чувствительно к искажению масштабной информации. К сожалению, нет никаких разумных соображений относительно выбора способа дискретизации вейвлетного спектра вдоль оси масштабов.

Докажем, что формула (6) восстанавливает исходный сигнал по вейвлетному спектру. Для этого определим сигнал $y(t)$ в соответствии с формулой (6):

$$y(t) = 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-5/2} \int_{-\infty}^\infty h(k, s) g\left[\frac{t-s}{k}\right] ds dk$$

и докажем, что $y(t) = x(t)$. В действительности мы будем доказывать равенство $Y(f) = X(f)$. Имеем

$$Y(f) = 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-5/2} \int_{-\infty}^\infty h(k, s) \int_{-\infty}^\infty g\left[\frac{t-s}{k}\right] \exp(-i2\pi ft) dt ds dk.$$

Сделаем замену $q = (t - s)/k$:

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-5/2} \int_{-\infty}^\infty h(k, s) \int_{-\infty}^\infty g(q) \exp(-i2\pi f(kq + s)) k dq ds dk = \\ &= 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-3/2} \int_{-\infty}^\infty h(k, s) \exp(-i2\pi fs) ds \int_{-\infty}^\infty g(q) \exp(-i2\pi kfq) dq dk = \\ &= 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-3/2} H(k, f) G(kf) dk. \end{aligned}$$

Используя равенство (4), перепишем последнюю формулу в следующем виде:

$$Y(f) = 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-1} X(f) G^*(kf) G(kf) dk = X(f) \cdot 2c_g^{-1} \int_0^\infty k^{-1} |G(kf)|^2 dk.$$

Проводя при $f > 0$ замену $p = fk$, а при $f < 0$ замену $p = -fk$, убеждаемся, что благодаря условию (7) выполнено равенство $Y(f) = X(f)$.

2.7. Интерпретация вейвлетного спектра

Проведенные выше аналогии между интегральным вейвлетным преобразованием и локальным спектральным анализом скользящим окном позволяют рассматривать вейвлетный спектр как вариант спектрограммы (по крайней мере в случае вейвлеты Морле). В этом разделе приведены некоторые важные детали.

Для интерпретации вейвлетного спектра $h(k, t)$ большое значение имеет формула Парсеваля. Определим *мгновенный вейвлетный спектр мощности* $w(k, t)$ формулой

$$w(k, t) = |k^{-1}h(k, t)|^2.$$

Спектром мощности масштабов называется результат интегрирования мгновенного спектра мощности по времени:

$$w(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(k, t) dt.$$

Во введенных обозначениях формула Парсеваля имеет вид:

$$\int_0^{\infty} w(k) dk = (c_g/2) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Для доказательства формулы Парсеваля выпишем выражение для спектра мощности масштабов $w(k)$ в спектральной области:

$$w(k) = k^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(k, t)|^2 dt = k^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(k, f)|^2 df = k^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |G(kf)|^2 df.$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} w(k) dk &= \int_0^{\infty} k^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |G(kf)|^2 df dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \int_0^{\infty} k^{-1} |G(kf)|^2 dk df = (c_g/2) \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \\ &= (c_g/2) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Вейвлетный спектр мощности $w(k, t)$ характеризует мощность компоненты масштаба k в момент времени t . Рассмотрим сечение $w_k(t)$ вейвлетного спектра мощности $w(k, t)$ на масштабе k , т. е. значения спектра мощности при фиксированном масштабе. Это сечение показывает эволюцию во времени компоненты сигнала с характерным масштабом k . Аналогично интерпретируется сечение $w_t(k)$ вейвлетного спектра мощности $w(k, t)$ в момент времени t — оно характеризует масштабный состав сигнала в момент времени t .

Спектр мощности $w(k, t)$ одномерного сигнала представляет собой функцию двух переменных, которая обычно изображается в виде вейвлетной спектрограммы в грациях серого, когда значение спектра мощности $w(k, t)$ определяет яркость точки с координатами (k, t) . Часто также изображают вейвлетный спектр в виде семейства линий уровня функции $h(k, t)$ в проекции на плоскость (k, t) . Во всех случаях используют логарифмическую шкалу масштабов. Значение спектра мощности $w(k, t)$ при изменении масштаба k обычно пробегает значительный диапазон, поэтому чаще всего пользуются логарифмом значения спектра мощности. Если временная локализация особенностей сигнала важнее, чем их масштаб, более информативным оказывается так называемый скелетон — семейство точек локальных экстремумов вейвлетного спектра вдоль оси времени. Для изображения скелетона вейвлетного спектра на каждом масштабе отмечаются все точки локальных экстремумов.

Спектр мощности масштабов $w(k)$ демонстрирует вклад компонент различного масштаба в общую энергию сигнала или, иначе говоря, распределение мощности процесса по масштабам. Максимумы спектра мощности масштабов определяют масштабы процессов, вносящих основной вклад в суммарную мощность анализируемого процесса. Масштаб можно интерпретировать как среднюю продолжительность элементарных событий, образующих сигнал.

2.8. Масштаб и частота

Для интерпретации вейвлетных спектров большое значение имеет соотношение между масштабом и обычной частотой в смысле Фурье. Для того чтобы получить такое соотношение, вычислим вейвлетный спектр гармонического сигнала. Если $x(t) = \exp(i2\pi f_1 t)$, то $X(f) = \delta(f - f_1)$ и $H(k, f) = k^{1/2} G^*(kf) \delta(f - f_1)$. Тогда

$$h(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(k, f) \exp(i2\pi f t) df = k^{1/2} G^*(kf_1) \exp(i2\pi f_1 t).$$

Таким образом,

$$|h(k, t)|^2 = k |G(kf_1)|^2$$

и

$$w(k, t) = \frac{|G(kf_1)|^2}{k} = \text{const}(t).$$

В частном случае гармонического сигнала функция $\bar{w}(k) = k^{-1} |G(kf_1)|^2$ имеет смысл спектра мощности масштабов (сам спектр мощности масштабов $w(k)$ для гармоники корректно определить нельзя). Пусть при частоте f исходной гармоники максимум функции $\bar{w}(k)$ приходится на масштаб $k(f)$. Оказывается, что функция $k(f)$ для большинства вейвлет имеет вид:

$$k(f) = \alpha_g f^{-1},$$

где α_g — константа, зависящая только от выбора вейвлета. Таким образом, если в спектре мощности масштабов имеется максимум, соответствующий масштабу k_1 , то в исходном сигнале присутствует компонента с характерной частотой $f_1 = \alpha_g/k_1$ и периодом $T_1 = k_1/\alpha_g$. Следует отметить, что полученный при этом *характерный период вдвое больше, чем средняя продолжительность элементарных событий, образующих сигнал* — на каждый характерный период гармонике приходится два элементарных события (полуволны).

При вычислении вейвлетного спектра важно правильно выбрать интервал изменения масштаба k . Согласно теореме Шеннона-Найквиста временной ряд с интервалом дискретизации τ позволяет разрешить частоты f вплоть до частоты Найквиста $f_{\max} = 1/(2\tau)$. Таким образом, $k_{\min} f_{\max} = k_{\min}/(2\tau) = \alpha_g$, откуда

$$k_{\min} = 2\tau\alpha_g.$$

Проиллюстрируем процедуру вычисления постоянной α_g на примере вейвлета Морле. Перейдем к угловым частотам: $\omega_1 = 2\pi f_1$ и $\omega_0 = 2\pi f_0$. Легко убедиться, что

$$\bar{w}(k) = 2\pi k^{-1} \exp[-(k\omega_1 - \omega_0)^2].$$

Точку экстремума можно получить как решение квадратного уравнения

$$(k\omega_1)^2 - \omega_0(k\omega_1) + 1/2 = 0.$$

По очевидным соображениям (почему?) выбираем корень

$$k\omega_1 = [\omega_0 + (\omega_0^2 - 2)^{1/2}]/2,$$

откуда

$$\alpha_m = (2\pi)^{-1} [\omega_0 + (\omega_0^2 - 2)^{1/2}]/2.$$

Иногда вместо мгновенного спектра $w(k, t)$ работают непосредственно с функцией $|h(k, t)|^2$. Для экстремумов этой функции постоянная α_g может быть вычислена совершенно аналогично, но нужно помнить, что при этом получается другое значение:

$$\alpha'_m = (2\pi)^{-1} [\omega_0 + (\omega_0^2 + 2)^{1/2}]/2.$$

2.9. DOG-вейвлеты

Условие, накладываемое на вейвлету $g(t)$, оказалось достаточно необременительным — требуется только, чтобы функция $g(t)$ имела нулевое среднее. До сих пор мы рассмотрели только один пример вейвлеты — вейвлету Морле. Закономерным оказывается желание расширить набор анализирующих функций. Известно большое количество вейвлет и, в принципе, можно выбрать анализирующую вейвлету, наиболее адекватную решаемой задаче. К сожалению, обычно отсутствуют априорные знания, необходимые для такого выбора. Вейвлета Морле оказывается наиболее удобной при выполнении спектрального анализа нестационарных сигналов. Здесь мы рассмотрим два других примера вейвлет, применяемых для изучения уже не спектральной, а временной структуры сигнала.

Следующие формулы определяют WAVE-вейвлету $g_1(t)$ и МНАТ-вейвлету¹ $g_2(t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -g'_0(t) = tg_0(t), \\ g_2(t) &= -g'_1(t) = (t^2 - 1)g_0(t). \end{aligned}$$

WAVE-вейвлета и МНАТ-вейвлета относятся к классу DOG-вейвлет².

Вспоминая, что если $y(t) = x'(t)$, то $Y(f) = i2\pi fX(f)$, сразу получим формулы для спектров $G_1(f)$ и $G_2(f)$:

$$\begin{aligned} G_1(f) &= -i(2\pi f)(2\pi)^{1/2}g_0(2\pi f), \\ G_2(f) &= -(2\pi f)^2(2\pi)^{1/2}g_0(2\pi f). \end{aligned}$$

Простые вычисления позволяют получить значения константы α_g для DOG-вейвлет³:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2\pi)^{-1}(1/2)^{1/2} \approx 0.113, \\ \alpha_2 &= (2\pi)^{-1}(3/2)^{1/2} \approx 0.195. \end{aligned}$$

Для DOG-вейвлет легко может быть установлена связь вейвлетных разложений с дифференцированием. Определим формально $h_j(k, t)$ при $j = 0, 1, 2$ в соответствии с формулой (3):

$$h_j(k, t) = k^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)g_j \left[\frac{s-t}{k} \right] ds. \quad (8)$$

Продифференцировав эту формулу по t и учитывая, что $g_{j+1} = -g'_j$, получим

$$h'_j(k, t) = k^{-1}h_{j+1}(k, t). \quad (9)$$

Формула (8) при $j = 0$ реализует сглаживание сигнала гауссовым ядром ширины k . Формула (9) показывает, что спектры $h_j(k, t)$ при $j = 1, 2$ с точностью до коэффициента суть две первые производные сигнала, сглаженного ядром масштаба k . Поэтому *разложения, соответствующие МНАТ-вейвлете, хорошо выделяют локальные минимумы и*

¹Наименование «МНАТ» является акронимом слов «mexican hat» (мексиканская шляпа). Действительно, график МНАТ-вейвлеты по форме напоминает сомбреро.

²Наименование «DOG» не имеет никакого отношения к собаке, оно является акронимом слов «degree of gaussian» (степень гауссианы). Здесь жаргонное словосочетание «степень гауссианы» обозначает степень производной гауссовой кривой.

³При использовании спектра $|h(k, t)|^2$ вместо $w(k, t)$ нужно использовать другие значения этих констант: $\alpha'_1 = (2\pi)^{-1}(3/2)^{1/2} \approx 0.195$ и $\alpha'_2 = (2\pi)^{-1}(5/2)^{1/2} \approx 0.252$.

максимумы сигнала, соответствующие заданному масштабу, а WAVE-вейвлета выявляет большие значения скорости изменения сигнала.

Значение $h(k, t)$ вейвлетного спектра для DOG-вейвлет можно интерпретировать как меру локальной согласованности формы сигнала $x(s)$ и вейвлеты $g_k(s)$ в окрестности момента времени t . Вейвлета $g(t/k)$ представляет собой результат масштабирования (растяжения) исходной вейвлета $g(t)$ в k раз. Большое по модулю значение $h(k, t)$ вейвлетного спектра указывает на то, что в некоторой окрестности момента времени t сигнал близок по форме к вейвлете $g(t)$, растянутой в k раз. Параметр k имеет смысл масштаба, при котором происходит сравнение формы сигнала с анализирующей вейвлетой.

3. Дискретные вейвлеты

Рассмотренное в предыдущем разделе интегральное вейвлетное преобразование широко применяется при спектральном анализе сигналов. Интегральный вейвлетный спектр удобен для визуального анализа и его легко интерпретировать. Основным недостатком интегрального вейвлетного преобразования является продолжением его достоинств — большая часть информации, содержащейся в интегральном вейвлетном спектре, является избыточной⁴, а существенная для восстановления сигнала информация оказывается «размазанной» по области определения спектра. Мы вынуждены дискретизировать интегральный вейвлетный спектр, но при этом отсутствуют какие-либо соображения относительно того, как произвести дискретизацию без потерь информации. Вследствие этого на практике оказывается невозможным восстановить сигнал по его интегральному вейвлетному спектру.

Дискретное вейвлетное преобразование (discrete wavelet transform) по сути представляет собой схему дискретизации интегрального вейвлетного преобразования, гарантирующую отсутствие потерь и возможность обратного преобразования вейвлетного спектра в сигнал. Несмотря на такую прозаическую функцию, теория дискретного вейвлетного преобразования оказывается весьма сложной. Оказывается, что никакая дискретизация произвольной анализирующей вейвлета не порождает обратимое дискретное вейвлетное преобразование. Условие обратимости дискретного вейвлетного преобразования накладывает на порождающую вейвлету гораздо более жесткие условия и приводит к необходимости рассмотрения более сложных объектов — масштабного разложения и уравнения удвоения.

Дискретное вейвлетное преобразование широко используется в задачах фильтрации и сжатия сигналов, т.е. там, где важно получить неизбыточное спектральное представление, обеспечивающее возможность восстановления сигнала по спектру.

3.1. Вейвлетный базис

Рассмотрим интегральный вейвлетный спектр $h(a, t)$ сигнала $x(t)$ по вейвлете $\psi(t)$:

$$h(a, t) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \psi^* \left[\frac{s-t}{a} \right] ds.$$

⁴Это следует уже из того факта, что при интегральном преобразовании одномерный сигнал превращается в двумерный спектр. Более того, из формулы (4) следует, что почти для всех частот f спектр Фурье $X(f)$ сигнала $x(t)$ может быть восстановлен по значениям вейвлетного спектра при одном произвольном значении масштабного параметра k .

Произведем формальную дискретизацию вейвлетного спектра $h(a, t)$, положив $a = 2^{-j}$ и $t = 2^{-j}n$:

$$h_n^j = h(2^{-j}, 2^{-j}n) = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \psi^*(2^j s - n) ds, \quad (10)$$

где индексы j и n пробегает всевозможные целые значения. Эта формула задает *дискретное вейвлетное преобразование* сигнала $x(t)$. Набор коэффициентов h_n^j называется *дискретным вейвлетным спектром* сигнала $x(t)$. Описанная схема дискретизации обладает следующим важным свойством: при фиксированном масштабе $a = 2^{-j}$ интервал дискретизации вейвлетного спектра вдоль оси времени оказывается согласованным с масштабом: $\tau = 2^{-j} = a$. При больших значениях масштаба a , когда вейвлетный спектр выделяет крупномасштабные (и медленно меняющиеся) составляющие сигнала, используется грубая дискретизация спектра по времени, на малых же масштабах, где выделяются быстрые составляющие, выбирается малое значение интервала дискретизации.

Из формулы (10) видно, что коэффициент h_n^j представляет собой скалярное произведение сигнала и функции

$$\psi_n^j(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n).$$

Если система функций $\{\psi_n^j(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом пространства L_2 , то сигнал $x(t)$ из L_2 может быть восстановлен по спектру h_n^j :

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \psi_n^j(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j 2^{j/2} \psi(2^j t - n). \quad (11)$$

В этом случае дискретное вейвлетное преобразование оказывается обратимым и дискретный вейвлетный спектр h_n^j содержит всю информацию о сигнале $x(t)$. Представление (11) называется *дискретным вейвлетным разложением* сигнала $x(t)$, или *обратным дискретным вейвлетным преобразованием*. Ортонормированный базис $\psi_n^j(t)$ называется *вейвлетным базисом*, а элементы $\psi_n^j(t)$ вейвлетного базиса — *вейвлетами*. Вейвлетный базис получен путем масштабирования и сдвига⁵ единственной функции — *порождающей вейвлеты* $\psi(t)$, поэтому свойства вейвлетного базиса полностью определяются свойствами функции $\psi(t)$. Если семейство функций $\{\psi_n^j(t)\}$ образует ортогональный базис, то порождающая вейвлета $\psi(t)$ называется ортогональной.

Коэффициент h_n^j вейвлетного спектра определяет поведение исходного сигнала $x(t)$ вблизи точки $t = 2^{-j}n$ на *характерном масштабе времени*⁶ $\Delta t = 2^{-j}$. Суммирование по n дает детализацию поведения функции на всей оси времени при характерном масштабе времени $\Delta t = 2^{-j}$. Если при суммировании ограничиться для индекса j диапазоном $j \leq J$, то мы получим аппроксимацию исходной функции, учитывающую детали ее поведения с масштабом порядка 2^{-J} и больше. Коэффициенты вейвлетного спектра также хорошо локализованы и во временной области, поскольку при рассмотрении некоторого отрезка времени в вейвлетном разложении можно оставить только те слагаемые, носитель которых пересекается с рассматриваемым отрезком. Таким образом, в случае вейвлетного разложения мы имеем одновременную локализацию коэффициентов разложения во временной и спектральной области.

⁵Множитель $2^{j/2}$ гарантирует неизменность нормы функции $\psi_n^j(t)$ при всех значениях масштабного индекса j .

⁶Под характерным масштабом времени в случае локализованных функций можно понимать диаметр их носителя.

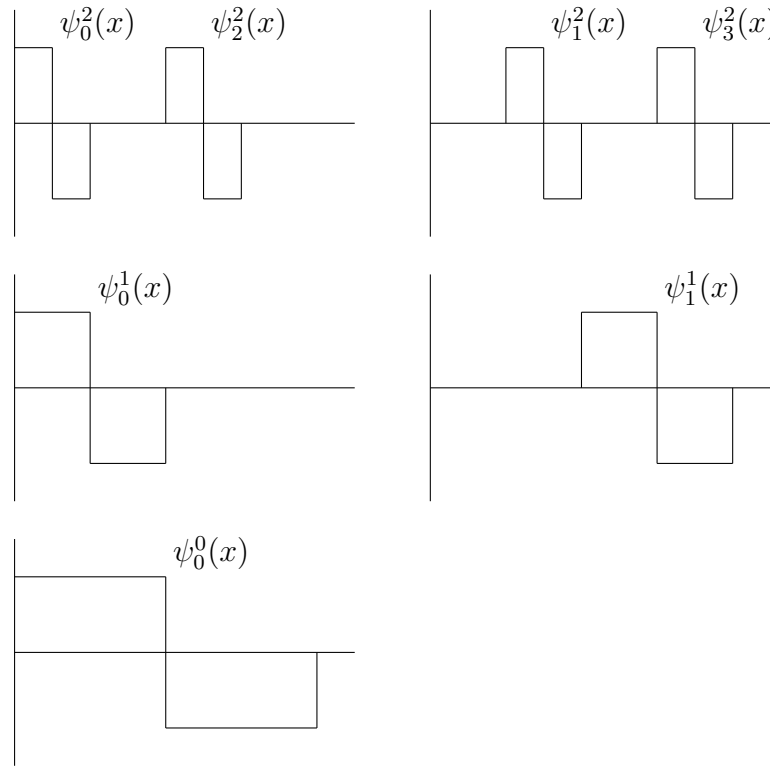


Рис. 1. Базис Хаара

Пример. Простейшим примером вейвлетного базиса является *базис Хаара*, порождаемый функцией

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

Можно непосредственно проверить, что система функций $\psi_n^j(t)$ образует ортогональный базис пространства L_2 . На рисунке 1 показано несколько базисных функций базиса Хаара.

3.2. Масштабное разложение

Конкретные примеры вейвлетных базисов (например базис Хаара) были построены еще до создания общей теории вейвлетных разложений. Конструкция, лежащая в основе этой теории, получила название масштабного разложения (multiresolution analysis⁷).

Масштабным разложением называется семейство $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ подпространств пространства L_2 , удовлетворяющих следующему набору условий:

- 1. Монотонность.** Подпространства V_j образуют возрастающую в смысле включения последовательность подпространств:

$$V_j \subset V_{j+1}.$$

⁷Термин «multiresolution analysis» переводят также как «анализ мультиразложений» или «кратномасштабный анализ».

2. Отделимость. Подпространства V_j пересекаются не более чем по нулевому подпространству:

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = 0.$$

3. Плотность. При увеличении Объединение всех V_j плотно в L_2 :

$$\text{cl} \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L_2.$$

4. Масштабная структура. Функция $x(t)$ лежит в подпространстве V_j тогда и только тогда, когда функция $x(2t)$ лежит в подпространстве V_{j+1} :

$$x(t) \in V_j \iff x(2t) \in V_{j+1}.$$

5. Сдвиговая структура. Ортонормированный базис подпространства V_0 образован совокупностью целочисленных сдвигов $\{\varphi(t - k)\}$ функции $\varphi(t)$:

$$V_0 = \text{cl} L(\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}).$$

Функция $\varphi(t)$, порождающая масштабное разложение, называется *масштабной функцией* (scaling function).

Обсудим неформально сущность условий, накладываемых на семейство подпространств V_j в приведенном определении.

Условия 1–3 фактически утверждают, что последовательность подпространств V_j возрастает от нулевого подпространства до всего L_2 . Каждое следующее подпространство «больше» предыдущего и последовательность V_j в известном смысле может быть названа возрастающей. При $j \rightarrow -\infty$ в подпространство V_j не входит ни одна функция за исключением нулевой, а при $j \rightarrow \infty$ подпространство V_j приближается ко всему пространству L_2 .

Условие 4 декларирует масштабную структуру подпространств, образующих масштабное разложение: переход от подпространства V_j к подпространству V_{j+1} осуществляется масштабированием в 2 раза. Аналогично подпространство V_j может быть получено масштабированием функций из V_0 в 2^j раз. Таким образом, все подпространства V_j имеют одинаковую структуру и отличаются друг от друга лишь временным масштабом составляющих их функций. Если «характерный масштаб» функций из подпространства V_0 равен Δt_0 , то характерный масштаб функций из подпространства V_j равен $\Delta t_j = 2^{-j} \Delta t_0$.

Условие 5 описывает внутреннюю структуру подпространства V_0 . Подпространство V_0 образовано целочисленными сдвигами единственной функции $\varphi(t)$. В силу свойства 4 можно также описать и структуру каждого из подпространств V_j : система функций $\{2^{1/2} \varphi(2^j - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис подпространства V_j . Таким образом, функция φ генерирует базисы всех подпространств V_j и полностью определяет масштабное разложение.

При вейвлетном разложении сигнала подпространства V_j используются для проектирования исходного сигнала. Проекция сигнала на подпространства V_j представляет собой сглаженный вариант сигнала, учитывающий при увеличении j все более мелкие детали. В этом смысле подпространство V_j аналогично подпространству всех частичных сумм ряда Фурье длины j . Такое подпространство содержит функции, спектр которых ограничен сверху частотой $j f_0$. При увеличении длины j отрезка ряда Фурье происходит увеличение

разрешения представления сигнала частичной суммой за счет расширения образующей его полосы частот.

Пример. Для примера рассмотрим масштабное разложение, порождающее базис Хаара. Выберем функцию $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

Легко проверить, что такая функция φ порождает корректное масштабное разложение. Подпространство V_0 образовано кусочно постоянными функциями со скачками, расположенными в целочисленных точках. Подпространство V_1 содержит все кусочно постоянные функции со скачками, расположенными в полужелых точках (т.е. точках вида $k/2$, при $k \in \mathbb{Z}$). Подпространство V_j состоит из кусочно постоянных функций со скачками в точках $2^{-j}k$, при $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Уравнение удвоения

Пусть семейство подпространств $\{V_j\}$ образует масштабное разложение. Семейство функций $\{\varphi(t - k)\}$ образует базис подпространства V_0 , а семейство функций $\{\varphi(2t - k)\}$ дает нам базис подпространства V_1 . Таким образом, каждый элемент подпространства V_1 допускает разложение в линейную комбинацию функций семейства $\{\varphi(2t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и, следовательно, для $\varphi \in V_0 \subset V_1$ имеет место разложение

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k), \quad (12)$$

называемое *уравнением удвоения* (two-scale equation). Ниже будет показано, что уравнение удвоения определяет масштабную функцию $\varphi(t)$ однозначно с точностью до множителя. Набор коэффициентов c_k однозначно определяет функцию $\varphi(t)$, которая, в свою очередь, порождает масштабное разложение. Таким образом, любое масштабное разложение может быть задано набором чисел c_k .

Поскольку система функций $\{\varphi(2t - k)\}$ ортогональна, коэффициенты c_k могут быть найдены в явном виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(2t - j)^* dt = \sum c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) \varphi(2t - j)^* \frac{d(2t)}{2} = c_j / 2.$$

Уравнение масштабирования накладывает ограничение на интеграл от масштабной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) dt = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

В то же время ясно, что $\int \varphi(t) dt \neq 0$, поскольку если это не так, то и для любой функции f из произвольного подпространства V_j будет выполнено равенство $\int f(t) dt = 0$ и нарушается условие 3 из определения масштабного разложения. Таким образом, имеем

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = 2.} \quad (13)$$

Поскольку $\int \varphi(t) dt \neq 0$, то можно считать, что выполнено *условие нормировки*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

Выясним теперь, к каким следствиям приводит требование ортонормированности целочисленных сдвигов функции $\varphi(t)$. Подставляя в условие ортогональности системы функций $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ уравнение удвоения, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-k)\varphi(t)^* dt &= \sum_i \sum_j c_i c_j^* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t-2k-i)\varphi(2t-j)^* dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2k+i} c_i c_j^* = \frac{1}{2} \sum_i c_i c_{2k+i}^*. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующее условие:

$$\boxed{\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i c_{i+2k}^* = 2\delta_k.} \quad (14)$$

Простым следствием полученного равенства является следующее условие:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = 2. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу определения функции $\varphi(t)$ по коэффициентам c_k уравнения удвоения. Ясно, что коэффициенты c_k должны удовлетворять условиям (13) и (14). Из (12) следует, что искомая функция $\varphi(t)$ является неподвижной точкой оператора

$$S_c[f(t)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f(2t-k).$$

Поэтому можно предложить следующий итерационный процесс для отыскания функции $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= S_c[f_n], \\ \varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \end{aligned}$$

для начальной функции $f_0(t)$, удовлетворяющей условию $\int f_0(s)ds \neq 0$. Для описанного итерационного процесса отсутствуют теоретические результаты, позволяющие надеяться на сходимость. На практике для всех используемых вейвлет итерационный процесс довольно быстро сходится.

Пример. В случае базиса Хаара функция $\varphi(t)$ обладает свойством самоподобия: ее график можно разрезать на две половинки, каждая из которых подобна исходной функции, т.е. образуется из нее путем масштабирования. Свойство самоподобия аналитически записывается в виде уравнения удвоения:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1).$$

Таким образом, для базиса Хаара $c_0 = c_1 = 1$.

Пример. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, график которой изображен на рисунке 2. На этом же рисунке изображены графики функций $\varphi(2t)/2$, $\varphi(2t-1)$ и $\varphi(2t-2)/2$. Из рисунка видно, что для этих функций выполнено соотношение

$$\varphi(t) = \varphi(2t)/2 + \varphi(2t-1) + \varphi(2t-2)/2,$$

следовательно функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению масштабирования при $c_0 = 1/2$, $c_1 = 1$ и $c_2 = 1/2$.

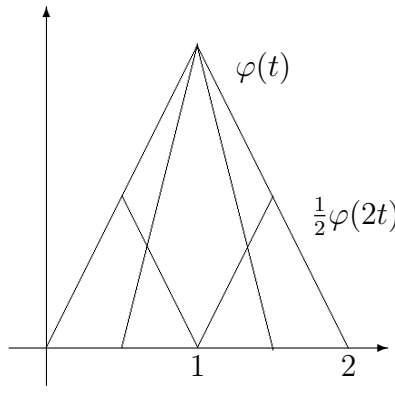


Рис. 2. Еще одна масштабная функция

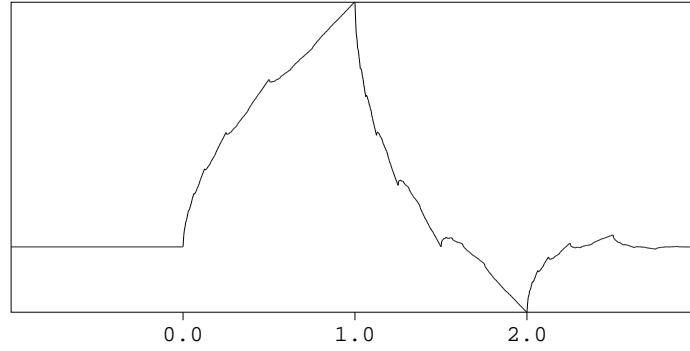


Рис. 3. Масштабная функция Добеши

Пример. На рисунке 3 показана масштабная функция, соответствующая *вейвлету Добеши*, значения которой вычислены с помощью описанного выше итерационного алгоритма. Коэффициенты уравнения удвоения для вейвлета Добеши имеют вид:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Опишем теперь метод, позволяющий выписать явную формулу для решения уравнения удвоения. Вычислим преобразование Фурье для левой и правой частей уравнения удвоения:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) \exp(-i2\pi ft) dt = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \exp\left(-i2\pi f \frac{s+k}{2}\right) \frac{ds}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_k c_k \exp(-i2\pi(f/2)k) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \exp(-i2\pi(f/2)s) ds. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$C(f) = \frac{1}{2} \sum_k c_k \exp(-i2\pi fk),$$

то равенство для спектров переписывается следующим образом:

$$\varphi(f) = C(f/2)\varphi(f/2).$$

Это равенство называется уравнением удвоения в спектральной области. Из условия нормировки следует равенство

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

Применяя теперь M раз спектральную форму уравнения удвоения, получим

$$\varphi(f) = \left[\prod_{j=1}^M C\left(\frac{f}{2^j}\right) \right] \varphi\left(\frac{f}{2^M}\right).$$

При $M \rightarrow \infty$ имеем

$$\varphi(f) = \prod_{j=1}^{\infty} C\left(\frac{f}{2^j}\right).$$

Таким образом, мы получили формулу, выражающую решение уравнения удвоения в спектральной области посредством бесконечного произведения.

3.4. Вейвлетное разложение

Пусть семейство подпространств $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ образует масштабное разложение. Ортогональное дополнение W_j подпространства V_j до подпространства V_{j+1} называется *подпространством вейвлет*:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (16)$$

Легко убедиться в справедливости равенств

$$V_{j+1} = \bigoplus_{i=-\infty}^j W_i.$$

Следовательно, ортогональная сумма подпространств W_j плотна в пространстве L_2 :

$$\text{cl} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} W_i = L_2.$$

Разложение пространства L_2 в ортогональную сумму подпространств W_j называется *вейвлетным разложением*.

Поскольку $V_j \subset V_{j+1}$, попробуем построить ортонормированный базис пространства L_2 , взяв за основу базис подпространства V_0 и достраивая его последовательно до ортонормированного базиса подпространств V_j ($j = 1, 2, \dots$). В V_0 имеется ортонормированный базис вида $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Подпространство V_1 обладает сдвиговой структурой: полуцелые сдвиги функций из V_1 не выводят за пределы V_1 . Попробуем дополнить ортонормированный базис $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ подпространства $V_0 \subset V_1$ до ортонормированного базиса подпространства V_1 , добавляя к нему функции вида $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. В случае успеха семейство функций $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ окажется ортонормированным базисом подпространства W_0 , а семейство $\{\varphi(t - k)\} \cup \{\psi(t - k)\}$ даст ортонормированный базис подпространства V_1 . В этом случае семейство функций

$$\psi_k^j(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

при $k \in \mathbb{Z}$ образует ортонормированный базис подпространства W_j , а из вейвлетного разложения пространства L_2 следует, что семейство функций $\{\psi_k^j(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ дает ортонормированный базис подпространства L_2 , называемый *вейвлетным базисом*.

Из включения $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$ сразу следует возможность разложить функцию $\psi(s)$ по элементам семейства $\{\varphi(2t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\psi(t) = \sum_k d_k \varphi(2t - k). \quad (17)$$

Подставляя уравнение (17) в условие ортонормированности семейства $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, мы приходим к равенству:

$$\boxed{\sum_i d_i d_{i+2k}^* = 2\delta_k.} \quad (18)$$

Простым следствием полученного равенства является следующее условие:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 = 2. \quad (19)$$

Аналогичным образом взаимная ортогональность семейств $\{\varphi(t - k)\}$ и $\{\psi(t - k)\}$ приводит к следующему равенству:

$$\boxed{\sum_i c_i d_{i+2k}^* = 0.} \quad (20)$$

Оказывается, что легко указать явную формулу для коэффициентов d_k так, что условия (18) и (20) окажутся выполненными автоматически:

$$\boxed{d_k = (-1)^k c_{1-k}^*} \quad (21)$$

Справедливость равенства (18) проверяется непосредственно:

$$\sum_i d_i d_{i+2k}^* = \sum_i (-1)^i c_{1-i}^* (-1)^{i+2k} c_{1-j-2k} = \sum_i c_{1-i}^* c_{1-j-2k} = \sum_s c_s^* c_{s-2k} = 2\delta_k.$$

Равенство (20) преобразуем аналогичным образом:

$$\sum_i c_i d_{i+2k}^* = \sum_i c_i (-1)^{i+2k} c_{1-i-2k} = \sum_i (-1)^i c_i c_{1-i-2k}.$$

Полученное выражение тождественно равно нулю, поскольку каждому слагаемому $(-1)^s c_s c_{1-s-2k}$ соответствует при $i = 1 - s - 2k$ слагаемое $(-1)^{1-s-2k} c_{1-s-2k} c_s$, имеющее противоположный знак, причем при всех i выполнено условие $1 - i - 2k \neq i$.

Пример. Формула (17) позволяет использовать описанный в предыдущем разделе итерационный алгоритм для вычисления значений функции $\psi(t)$. На рисунке 4 показана *вейвлета Добеши*, значения которой вычислены таким способом.

3.5. Алгоритм разложения по вейвлетному базису

Опишем сначала общую схему алгоритма разложения сигнала по вейвлетному базису. При разложении сигнала $x(t)$ по заданному вейвлетному базису в первую очередь исходный сигнал помещают в одно из подпространств V_j при помощи некоторого оператора проектирования. Ввиду масштабной структуры подпространств V_j можно ограничиться случаем проектирования сигнала на подпространство V_0 . Пусть $\bar{x}(t)$ — проекция сигнала

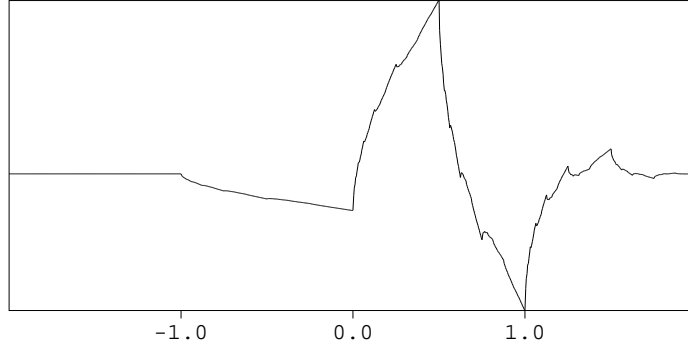


Рис. 4. Вейвлета Добеши

$x(t)$ на подпространство V_0 . Подпространство V_0 может быть представлено в виде ортогональной суммы

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}.$$

Входящее в это представление подпространство V_{-1} также представимо в виде ортогональной суммы:

$$V_{-1} = V_{-2} \oplus W_{-2},$$

следовательно,

$$V_0 = V_{-2} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим на m -м шаге следующее разложение:

$$V_0 = V_{-m} \oplus W_{-m} \oplus W_{-(m-1)} \oplus \dots \oplus W_{-1}.$$

Последовательное разложение подпространства V_0 можно проиллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \longrightarrow & V_{-1} & \longrightarrow & V_{-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & V_{-m} \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & W_{-1} & & W_{-2} & & & & W_{-m} \end{array}$$

Введем оператор P_j , производящий ортогональное проектирование на подпространство V_j , и оператор Q_j , производящий ортогональное проектирование на подпространство W_j . Проекция $\bar{x}(t)$ сигнала на подпространство V_0 может быть представлена в виде:

$$\bar{x}(t) = P_{-1}\bar{x}(t) + Q_{-1}\bar{x}(t).$$

Поскольку проекция $P_{-1}\bar{x}(t)$ лежит в подпространстве V_{-1} , для нее мы снова можем записать аналогичное разложение:

$$P_{-1}\bar{x}(t) = P_{-2}\bar{x}(t) + Q_{-2}\bar{x}(t),$$

что дает для исходной проекции $\bar{x}(t)$ следующее разложение:

$$\bar{x}(t) = P_{-2}\bar{x}(t) + Q_{-2}\bar{x}(t) + Q_{-1}\bar{x}(t).$$

Продолжая процесс проектирования, на m -м шаге получим:

$$\bar{x}(t) = P_{-m}\bar{x}(t) + Q_{-m}\bar{x}(t) + Q_{-(m-1)}\bar{x}(t) + \dots + Q_{-1}\bar{x}(t).$$

Последовательное проектирование на подпространства можно проиллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{x}(t) & \longrightarrow & P_{-1}\bar{x}(t) & \longrightarrow & P_{-2}\bar{x}(t) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_{-m}\bar{x}(t) \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & Q_{-1}\bar{x}(t) & & Q_{-2}\bar{x}(t) & & Q_{-m}\bar{x}(t) \end{array}$$

Проекция $P_{-m}\bar{x}(t)$ лежит в подпространстве V_{-m} , а проекция $Q_{-j}\bar{x}(t)$ — в подпространстве W_{-j} , следовательно, для них могут быть записаны следующие разложения по элементам естественного базиса соответствующих подпространств:

$$\begin{aligned} P_{-j}\bar{x}(t) &= \sum_k g_k^j \varphi_k^{-j}(t), \\ Q_{-j}\bar{x}(t) &= \sum_k h_k^j \psi_k^{-j}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, проекция $\bar{x}(t)$ оказывается представлена в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \sum_k g_k^m \varphi_k^{-m}(t) + \sum_k h_k^m \psi_k^{-m}(t) + \dots + \sum_k h_k^1 \psi_k^{-1}(t) = \\ &= \sum_k g_k^m \varphi_k^{-m}(t) + \sum_{j=1}^m \sum_k h_k^j \psi_k^{-j}(t). \end{aligned}$$

Получим теперь явные формулы для вычисления коэффициентов g_k^j и h_k^j вейвлетного разложения по сигналу $x(t)$. В первую очередь нам нужно конкретизировать процедуру проектирования сигнала $x(t)$ на подпространство V_0 . Элементом подпространства V_0 , приближающим сигнал $x(t)$ наилучшим образом, является ортогональная проекция $\bar{x}(t)$ сигнала $x(t)$ на подпространство V_0 . Ортогональная проекция $\bar{x}(t) \in V_0$ может быть разложена по естественному базису подпространства V_0 :

$$\bar{x}(t) = \sum_k g_k^0 \varphi(t - k),$$

где

$$g_k^0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi^*(t - k) dt.$$

Таким образом, ортогональное проектирование сигнала на подпространство V_0 требует выполнения операции интегрирования, что весьма сложно реализовать, даже если сигнал $x(t)$ каким-то образом задан при всех значениях аргумента t . Нам же обычно известна лишь дискретизация сигнала $x(t)$ и корректно произвести ортогональное проектирование не представляется возможным. Пусть сигнал $x(t)$ задан своей дискретизацией $x_k = x(k\tau)$, при $\tau = 1$. Самым простым и наиболее широко используемым решением является выбор оператора проектирования, действующего по правилу $g_k^0 = x_k$:

$$\bar{x}(t) = \sum_k x_k \varphi_k^0(t).$$

Попарная ортогональность функций $\varphi(t - k)$ позволяет восстановить отсчеты x_k по проекции $\bar{x}(t)$, т. е. введенный нами оператор проектирования обратим.

Каждый шаг алгоритма разложения сигнала по вейвлетному базису состоит в переходе от проекции $P_{-(j-1)}\bar{x}(t) \in V_{-(j-1)}$ к проекциям $P_{-j}\bar{x}(t) \in V_{-j}$ и $Q_{-j}\bar{x}(t) \in W_{-j}$. Такой переход равносильен переходу от набора коэффициентов g_k^{j-1} к наборам g_k^j и h_k^j :

$$\sum_k g_k^{j-1} \varphi_k^{-(j-1)}(t) = \sum_k g_k^j \varphi_k^{-j}(t) + \sum_k h_k^j \psi_k^{-j}(t). \quad (22)$$

Первый шаг алгоритма также укладывается в эту схему, поскольку $P_0\bar{x}(t) = \bar{x}(t) \in V_{-j}$. Система функций $\{\varphi_k^{-j}(t)\} \cup \{\psi_k^{-j}(t)\}$ ортонормирована, поэтому коэффициенты g_k^j и h_k^j удастся вычислить:

$$\begin{aligned} g_n^j &= \sum_k g_k^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \varphi_n^{-j}(t)^* dt, \\ h_n^j &= \sum_k g_k^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \psi_n^{-j}(t)^* dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение удвоения устанавливает связь между базисами пространств V_0 и V_1 . Масштабная структура пространств V_j позволяет записать аналогичное соотношение для базисов пространств V_{-j} и $V_{-(j-1)}$:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{-j}(t) &= 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - n) = 2^{-j/2} \sum_p c_p \varphi(2^{-(j-1)}t - 2n - p) = \\ &= 2^{-1/2} \sum_p c_p 2^{-(j-1)/2} \varphi(2^{-(j-1)}t - (2n + p)) = 2^{-1/2} \sum_p c_p \varphi_{2n+p}^{-(j-1)}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогичное соотношение можно выписать и для функций $\psi_n^{-j}(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_n^{-j}(t) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n) = 2^{-j/2} \sum_p d_p \varphi(2^{-(j-1)}t - 2n - p) = \\ &= 2^{-1/2} \sum_p d_p 2^{-(j-1)/2} \varphi(2^{-(j-1)}t - (2n + p)) = 2^{-1/2} \sum_p d_p \varphi_{2n+p}^{-(j-1)}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Полученные соотношения позволяют получить явные выражения для интегралов в формулах (23):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \varphi_n^{-j}(t)^* dt &= 2^{-1/2} \sum_p c_p^* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \varphi_{2n+p}^{-(j-1)}(t)^* dt = 2^{-1/2} c_{k-2n}^*, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \psi_n^{-j}(t)^* dt &= 2^{-1/2} \sum_p d_p^* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-(j-1)}(t) \varphi_{2n+p}^{-(j-1)}(t)^* dt = 2^{-1/2} d_{k-2n}^*. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} g_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k c_{k-2n}^* g_k^{j-1}, \\ h_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k d_{k-2n}^* g_k^{j-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Эти формулы можно переписать в следующей более удобной для реализации форме:

$$\boxed{\begin{aligned} g_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k c_k^* g_{k+2n}^{j-1}, \\ h_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k d_k^* g_{k+2n}^{j-1}. \end{aligned}} \quad (27)$$

Последовательное вычисление коэффициентов вейвлетного разложения можно проиллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} g_n^0 & \longrightarrow & g_n^1 & \longrightarrow & g_n^2 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow g_n^m \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & h_n^1 & & h_n^2 & & h_n^m \end{array}$$

Получим теперь формулы, позволяющие восстановить последовательность x_k по коэффициентам g_k^m, h_k^j ($j = 1, \dots, m$) вейвлетного разложения. Снова обратимся к формуле (22). Замечая, что система функций $\{\varphi_k^{-(j-1)}(t)\}$ ортонормирована, имеем

$$g_n^{j-1} = \sum_k g_k^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-j}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt + \sum_k h_k^j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^{-j}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt.$$

Интегралы в этой формуле также можно вычислить, используя соотношения (24) и (25):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{-j}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt &= 2^{-1/2} \sum_p c_p \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k+p}^{-(j-1)}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt = 2^{-1/2} c_{n-2k}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^{-j}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt &= 2^{-1/2} \sum_p d_p \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k+p}^{-(j-1)}(t) \varphi_n^{-(j-1)}(t)^* dt = 2^{-1/2} d_{n-2k}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем формулу, позволяющую по коэффициентам g_k^j и h_k^j получить коэффициенты g_k^{j-1}

$$\boxed{g_n^{j-1} = 2^{-1/2} \sum_k g_k^j c_{n-2k} + 2^{-1/2} \sum_k h_k^j d_{n-2k}.} \quad (28)$$

Восстановление исходной последовательности x_k можно проиллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} g_k^m & \longrightarrow & g_k^{m-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & g_k^2 \longrightarrow g_k^1 \longrightarrow x_k \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ h_k^m & & h_k^{m-1} & & & & h_k^2 & h_k^1 \end{array}$$

Алгоритм вейвлетного разложения дискретного сигнала называется *каскадным*, поскольку для нахождения коэффициентов g_k^j и h_k^j нужно сначала вычислить g_k^{j-1} . Аналогично устроен алгоритм восстановления сигнала по коэффициентам g_k^m, h_k^j ($j = 1, \dots, m$). Алгоритм вычисления коэффициентов вейвлетного разложения и алгоритм восстановления сигнала по коэффициентам вейвлетного разложения называются соответственно прямым и обратным *быстрым вейвлетным преобразованием* (fast wavelet transform).

Пусть среди коэффициентов c_k имеется L отличных от нуля, а исходный сигнал содержит N отсчетов. При вычислении каждого коэффициента вейвлетного разложения нужно произвести L умножений. На первом шаге вычисляется N коэффициентов вейвлетного разложения. На каждом следующем шаге количество вычисляемых коэффициентов уменьшается вдвое. Если производится m шагов алгоритма вейвлетного разложения, то суммарное число вычисленных коэффициентов равно $2N - N/2^{m-1}$. Можно еще учесть, что на последнем шаге нет нужды вычислять коэффициенты g_k^m и снизить число вычисляемых коэффициентов до $2N - N/2^{m-1} - N/2^m = 2N - 3N/2^m$. Во всех случаях суммарное количество вычисляемых коэффициентов равно $O(N)$ и число выполняемых операций умножения есть $O(LN)$. Аналогичная оценка имеет место для алгоритма восстановления исходного сигнала.

3.6. Схема субполосной фильтрации

В этом разделе мы рассмотрим полученные формулы в спектральной области и выясним смысл вейвлетного разложения сигнала с точки зрения теории цифровых фильтров.

Перепишем формулы (26), реализующие вейвлетное разложение сигнала, следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{g}_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k c_{k-n}^* g_k^{j-1}, \\ \bar{h}_n^j &= 2^{-1/2} \sum_k d_{k-n}^* g_k^{j-1}, \\ g_n^j &= \bar{g}_{2n}^j, \\ h_n^j &= \bar{h}_{2n}^j.\end{aligned}$$

Теперь видно, что очередной уровень вейвлетных коэффициентов получается путем свертки коэффициентов предыдущего уровня с некоторой последовательностью⁸ с последующим прореживанием полученного сигнала.

Вычислим спектр $\bar{G}^j(f)$ последовательности \bar{g}_n^j :

$$\begin{aligned}\bar{G}^j(f) &= \sum_n \bar{g}_n^j \exp(-i2\pi f n) = 2^{-1/2} \sum_n \sum_k c_{k-n}^* g_k^{j-1} \exp(-i2\pi f n) = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^{j-1} \sum_p c_p^* \exp[-i2\pi f(k-p)] = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^{j-1} \exp(-i2\pi f k) \sum_p c_p^* \exp(i2\pi f p) = 2^{1/2} G^{j-1}(f) C(f)^*.\end{aligned}$$

Здесь выполнена замена $p = k - n$. Для спектра $G^j(f)$ прореженной последовательности g_n^j получаем:

$$\begin{aligned}G^j(f) &= \sum_n g_n^j \exp(-i2\pi f n) = \sum_n \bar{g}_{2n}^j \exp(-i2\pi f n) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_n \bar{g}_n^j \exp[-i2\pi(f/2)n] + \sum_n \bar{g}_n^j \exp[-i2\pi(f/2 + 1/2)n] \right].\end{aligned}$$

Последнее равенство проверяется непосредственно. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}G^j(f) &= \frac{1}{2} [\bar{G}^j(f/2) + \bar{G}^j(f/2 + 1/2)] = \\ &= 2^{1/2} [G^{j-1}(f/2) C(f/2)^* + G^{j-1}(f/2 + 1/2) C(f/2 + 1/2)^*].\end{aligned}$$

Для последовательности \bar{h}_n^j получим аналогичную формулу:

$$\begin{aligned}\bar{H}^j(f) &= \sum_n \bar{h}_n^j \exp(-i2\pi f n) = 2^{-1/2} \sum_n \sum_k d_{k-n}^* g_k^{j-1} \exp(-i2\pi f n) = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^{j-1} \sum_p d_p^* \exp[-i2\pi f(k-p)] = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^{j-1} \exp(-i2\pi f k) \sum_p d_p^* \exp[i2\pi f p] = \\ &= 2^{1/2} G^{j-1}(f) D(f)^*,\end{aligned}$$

⁸Выписанные формулы отличаются от формул для свертки знаком индекса у последовательности c_{k-n} . Стого говоря, здесь происходит свертка с $2^{-1/2} c_{-k}^*$ и последующее зеркальное отражение полученной последовательности.

где сделана замена $p = k - n$ и использовано новое обозначение:

$$D(f) = \frac{1}{2} \sum_k d_k \exp[-i2\pi f k].$$

Вычислим теперь спектр $D(f)$:

$$\begin{aligned} D(f) &= \frac{1}{2} \sum_k d_k \exp(-i2\pi f k) = \frac{1}{2} \sum_k (-1)^k c_{1-k}^* \exp(-i2\pi f k) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_k (-1)^{1-k} c_{1-k}^* \exp(-i2\pi f k) = -\frac{1}{2} \sum_p (-1)^p c_p^* \exp[-i2\pi f(1-p)] = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-i2\pi f) \sum_p (-1)^p c_p^* \exp[i2\pi f p] = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-i2\pi f) \sum_p c_p^* \exp[i2\pi(f + 1/2)p] = -\exp(-i2\pi f) C(f + 1/2)^*. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $p = 1 - k$ и использовано тождество $(-1)^p = \exp[i2\pi(p/2)]$. Окончательно имеем:

$$\bar{H}^j(f) = 2^{1/2} G^{j-1}(f) D(f)^* = -2^{1/2} \exp(i2\pi f) G^{j-1}(f) C(f + 1/2)$$

Спектр $H^j(f)$ прореженной последовательности h_n^j вычисляется с помощью уже использованного выше приема:

$$\begin{aligned} H^j(f) &= \frac{1}{2} [\bar{H}^j(f/2) + \bar{H}^j(f/2 + 1/2)] = \\ &= -2^{-1/2} \exp(i\pi f) [G^{j-1}(f/2) C(f/2 + 1/2) - G^{j-1}(f/2 + 1/2) C(f/2)]. \end{aligned}$$

Переведем теперь в спектральную область формулу (28), реализующую восстановление сигнала по вейвлетным коэффициентам:

$$\begin{aligned} G^{j-1}(f) &= \\ &= 2^{-1/2} \sum_n \sum_k g_k^j c_{n-2k} \exp(-i2\pi f n) + 2^{-1/2} \sum_n \sum_k h_k^j d_{n-2k} \exp(-i2\pi f n) = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^j \sum_p c_p \exp[-i2\pi f(p + 2k)] + 2^{-1/2} \sum_k h_k^j \sum_p d_p \exp[-i2\pi f(p + 2k)] = \\ &= 2^{-1/2} \sum_k g_k^j \exp(-i2\pi(2f)k) \sum_p c_p \exp[-i2\pi f p] + \\ &\quad + 2^{-1/2} \sum_k h_k^j \exp(-i2\pi(2f)k) \sum_p d_p \exp[-i2\pi f p] = \\ &= 2^{1/2} G^j(2f) C(f) + 2^{1/2} H^j(2f) D(f). \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $p = n - 2k$. Используя полученное выше выражение для спектра последовательности d_k , получим:

$$G^{j-1}(f) = 2^{1/2} [G^j(2f) C(f) - \exp(-i2\pi f) H^j(2f) C(f + 1/2)^*].$$

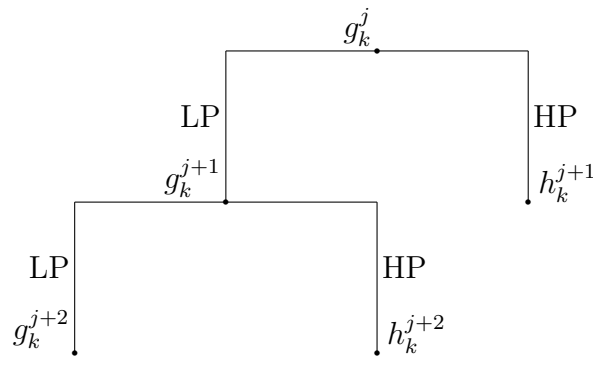


Рис. 5. Схема алгоритма вейвлетного разложения

Выпишем теперь все полученные формулы, реализующие каскадный алгоритм в спектральной области:

$$\bar{G}^j(f) = 2^{1/2} G^{j-1}(f) C(f)^*, \quad (29)$$

$$G^j(f) = 2^{1/2} \left[G^{j-1}\left(\frac{f}{2}\right) C\left(\frac{f}{2}\right)^* + G^{j-1}\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) C\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right)^* \right], \quad (30)$$

$$\bar{H}^j(f) = -2^{1/2} \exp(i2\pi f) G^{j-1}(f) C\left(f + \frac{1}{2}\right), \quad (31)$$

$$H^j(f) = -2^{-1/2} \exp(i\pi f) \left[G^{j-1}\left(\frac{f}{2}\right) C\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) - G^{j-1}\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) C\left(\frac{f}{2}\right) \right], \quad (32)$$

$$G^{j-1}(f) = 2^{1/2} \left[G^j(2f) C(f) - \exp(-i2\pi f) H^j(2f) C\left(f + \frac{1}{2}\right)^* \right]. \quad (33)$$

Фильтр, заданный формулой (29), выделяет из исходного сигнала низкие ($|f| < 1/2$) частоты. В сигнале, отфильтрованном с помощью ФНЧ, отсутствуют высокие частоты и его можно проредить вдвое, что реализуется формулой (30). Фильтр (31) выделяет из исходного сигнала высокие ($|f| > 1/2$) частоты. Этот фильтр реализован путем сдвига на $1/2$ частотной характеристики фильтра низких частот. Отфильтрованный сигнал не содержит низких частот и его тоже можно проредить, сдвинув высокие частоты на освободившееся место. Этот сдвиг реализован формулой (32). Таким образом, исходный сигнал оказался представлен двумя сигналами, каждый из которых содержит информацию о своей половине частотного диапазона. Формула (33) показывает, как при обратном преобразовании частотные поддиапазоны расставляются по своим местам. Описанная схема называется *субполосной фильтрацией* (subband filtering scheme).

В заключение покажем полезный интуитивный способ понимания спектрального смысла разложения пространства L_2 в ортогональную сумму подпространств W_j . Пусть спектр функции $\varphi(t)$ локализован на отрезке $|f| < f_0$. Тогда спектр функции $\varphi^j(t) = \varphi(2^j t)$ локализован на отрезке $|f| < 2^j f_0$. Таким образом, подпространства V_j содержат функции с локализованным спектром, причем длина отрезка локализации спектра растет с ростом индекса j . В этом случае ортогональное дополнение W_j пространства V_j до пространства V_{j+1} содержит функции, спектр которых локализован на отрезке $2^j f_0 < |f| < 2^{j+1} f_0$.

3.7. Вейвлетные пакеты

В этом разделе мы кратко опишем идею далеко идущего обобщения схемы вейвлетного разложения, предложенного Койфманом и названного им *вейвлетными пакетами* (wavelet packets).

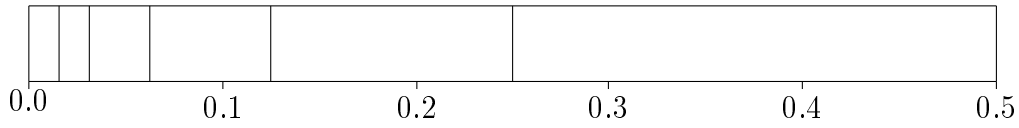


Рис. 6. Разбиение частотного диапазона в случае вейвлетного спектра

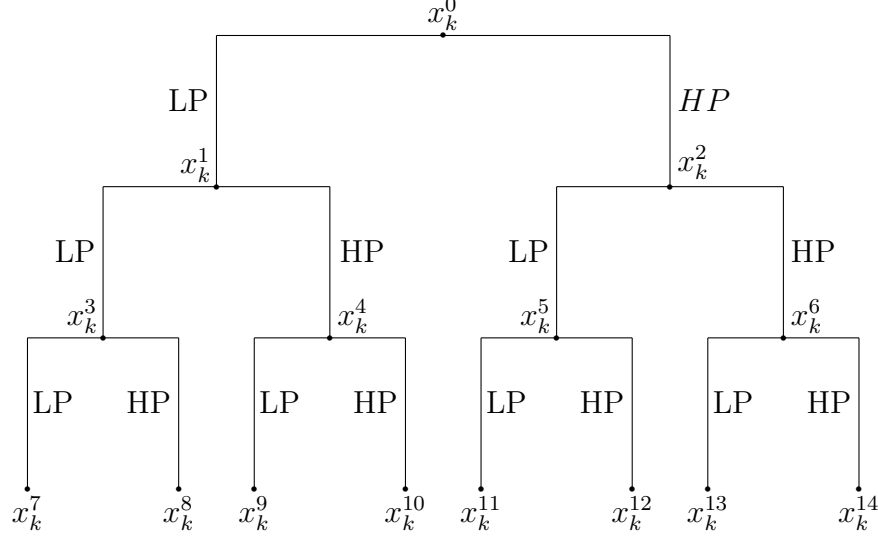


Рис. 7. Схема формирования библиотеки вейвлетных пакетов

Здесь нам будет удобно использовать терминологию, связанную со схемой субполосной фильтрации. Пусть операторы $LP[\cdot]$ и $HP[\cdot]$ осуществляют преобразование сигнала g_k^j в сигналы g_k^{j+1} и h_k^{j+1} соответственно. Рассмотрим сначала схему традиционного вейвлетного преобразования. Полученный на j -м шаге сигнал g_k^{j+1} , несущий информацию о низких частотах, снова обрабатывается с помощью пары фильтров $LP[\cdot]$ и $HP[\cdot]$, а высокочастотный сигнал h_k^{j+1} помещается на соответствующий масштабный уровень выходного вейвлетного спектра. На рисунке 5 схематически показаны преобразования исходного сигнала при получении последовательных масштабных уровней вейвлетного спектра. Часто такая схема обработки оказывается естественной, поскольку обычно высокочастотная часть сигнала менее информативна, чем низкочастотная и не требует дальнейшей спектральной детализации. После выполнения вейвлетного преобразования мы получаем разбиение частотного диапазона, показанное на рисунке 6 (такое разбиение частотного диапазона возникает после выполнения пяти шагов вейвлетного разложения).

В то же время можно представить себе ситуацию, когда высокочастотный сигнал h_k^{j+1} обладает не менее богатым спектральным составом, чем низкочастотный сигнал g_k^{j+1} . В этом случае для получения лучшей детализации спектра сигнала h_k^{j+1} его можно также обработать с помощью фильтров $LP[\cdot]$ и $HP[\cdot]$. В результате такой обработки частотный диапазон, соответствующий сигналу h_k^{j+1} , будет разбит на два поддиапазона. Если довести такую схему обработки до логического завершения, то каждый сигнал h_k^{j+1} окажется разложенным на два сигнала и мы получим полное бинарное дерево, которому соответствует равномерное разбиение исходного частотного диапазона. Рисунок 7 иллюстрирует описанную схему разложения. Здесь введены новые обозначения: x_k^0 — исходный сигнал, $x_k^{2j+1} = LP[x_k^j]$, $x_k^{2j+2} = HP[x_k^j]$. Совокупность всех сигналов x_k^j , при $0 \leq j < 2^{m+1} - 1$, где m — число шагов вейвлетного разложения, называется *библиотекой вейвлетных пакетов*. Рассмотрим связанное поддерево введенного выше полного бинарного дерева, включающее его корень и удовлетворяющее следующему условию: два ребра, выходящие из одной вершины одновременно либо включаются в поддерево, либо нет. Совокупность сигналов x_k^j ,

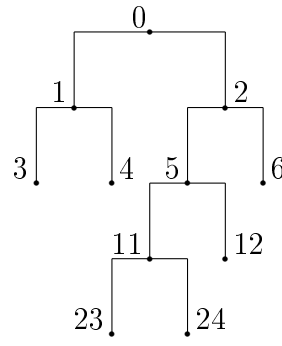


Рис. 8. Поддерево, задающее вейвлетный пакет

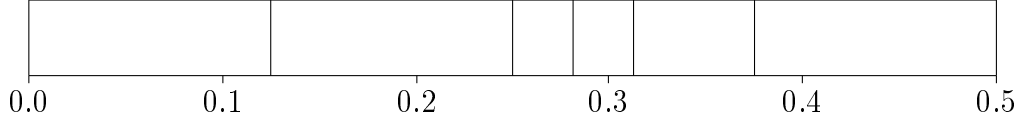


Рис. 9. Разбиение частот, порожденное вейвлетным пакетом

соответствующих вершинам такого поддерева, называется *вейвлетным пакетом* сигнала x_k^0 . *Пакетное вейвлетное преобразование* (packet wavelet transform) преобразует сигнал в соответствующий этому сигналу вейвлетный пакет. Для заданного вейвлетного базиса каждому допустимому поддереву полного бинарного дерева глубины m соответствует новое пакетное вейвлетное преобразование. Ясно, что любой вейвлетный пакет несет всю информацию о сигнале и по нему может быть восстановлен исходный сигнал. Каждый вейвлетный пакет порождает некоторое разбиение пространства в ортогональную сумму подпространств и соответствующий базис. Мы не будем здесь заниматься этими вопросами.

Рассмотрим, например, 4 шага вейвлетного разложения, формирующие вейвлетный пакет

$$\{x_k^0, x_k^1, x_k^2, x_k^3, x_k^4, x_k^5, x_k^6, x_k^{11}, x_k^{12}, x_k^{23}, x_k^{24}\}.$$

Такому пакету соответствует поддерево, показанное на рисунке 8, и разбиение частотного диапазона, показанное на рисунке 9.

Пакетное вейвлетное преобразование дает нам большую свободу в выборе базиса. В каждой задаче может быть выбран наиболее оптимальный базис, порожденный заданным вейвлетным базисом и допустимым поддеревом, генерирующим вейвлетный пакет. Известен простой адаптивный алгоритм выбора оптимального вейвлетного пакета. В этом алгоритме критерием качества вейвлетного пакета предлагается считать *энтропию сигнала относительно вейвлетного пакета*, которая определяется следующим образом:

$$E = - \sum_{j,k} |x_k^j| \log |x_k^j|.$$

Энтропия принимает большие значения, если энергия сигнала относительно равномерно «размазана» по базисным функциям. Малым значениям энтропии соответствует случай локализации энергии сигнала на небольшом подмножестве элементов базиса. В этом случае говорят, что базис хорошо согласован с сигналом. Алгоритм формирования поддерева состоит в том, что на каждом шаге вейвлетного разложения для каждого сигнала x_k^j производится пробное разложение на сигналы x_k^{2j+1} и x_k^{2j+2} , после чего производится сравнение энтропий для старого и нового пакетов. Соответствующие ребра бинарного дерева включаются в поддерево, если пробное разложение привело к уменьшению энтропии.

Оглавление

1. Определения и обозначения	3
2. Локальный спектральный анализ	3
2.1. Спектральный анализ скользящим окном	4
2.2. Скользящее БПФ	6
2.3. Интегральное вейвлетное преобразование	6
2.4. Вейвлетное преобразование в спектральной области	7
2.5. Вычисление вейвлетного спектра	8
2.6. Обратное вейвлетное преобразование	10
2.7. Интерпретация вейвлетного спектра	11
2.8. Масштаб и частота	13
2.9. DOG-вейвлеты	14
3. Дискретные вейвлеты	15
3.1. Вейвлетный базис	15
3.2. Масштабное разложение	17
3.3. Уравнение удвоения	19
3.4. Вейвлетное разложение	22
3.5. Алгоритм разложения по вейвлетному базису	23
3.6. Схема субполосной фильтрации	28
3.7. Вейвлетные пакеты	30

Учебное издание

Дополнительные главы цифровой обработки сигналов
Вейвлетные преобразования

Методические указания

Мячин Михаил Леонидович
Дунаева Ольга Александровна

Редактор, корректор И. В. Бунакова
Верстка М. Л. Мячин

Подписано в печать 18.11.2010. Формат 60х84 1/8.
Бум. офсетная. Гарнитура «Computer Modern».
Усл. печ. л. 3,58. Уч.-изд. л. 2,2.
Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.