

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 18 » мая 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины**

«Теория вероятностей и математическая статистика»

**Направление подготовки**

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

**Профиль**

«Информатика и компьютерные науки»

**Квалификация выпускника**

Бакалавр

**Форма обучения**

очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 13 апреля 2021 г.,  
протокол № 4

Программа одобрена НМК  
факультета ИВТ  
протокол № 7 от  
17 мая 2021 г.

Ярославль  
2021

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являются:

1. Обеспечение приобретения знаний и умений в соответствии с ФГОС ВПО
2. Содействие формированию мировоззрения и развитию способности понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат.
3. Обеспечение развития логического, эвристического и алгоритмического мышления и формирование представления о месте и роли математики в современном мире.
4. Формирование у студентов правильных интуитивных представлений об основных понятиях теории вероятностей как математической науки, изучающей закономерности случайных явлений.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к базовой части Блока 1.

Приступая к изучению теории вероятностей, студент должен иметь базовую подготовку по дисциплинам «Математический анализ I-II» и «Дискретная математика». Вместе с тем такие личностные характеристики как общая образованность, организованность и трудолюбие, самостоятельность, настойчивость в достижении цели необходимы при освоении дисциплины.

Полученные в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» знания необходимы при изучении дисциплин базовой части Блока 1: «Алгоритмы и анализ сложности», «Методы оптимизации и исследование операций». Также знания, полученные в данном курсе, необходимы для изучения следующих дисциплин по выбору из вариативной части Блока 1: «Основы прикладной статистики», «Прикладные задачи теории вероятностей», «Дополнительные главы математической статистики», «Компьютерное моделирование», «Моделирование информационных процессов», «Теория игр и исследование операций».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и	Знать: – основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики  Уметь: – выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями

	информационными технологиями	Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений; – нахождения вероятностей случайных событий; – вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов
--	------------------------------	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зач. ед., 144 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа							
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа		
1	Основные понятия теории вероятностей	4	6	6				4	Контрольная работа	
2	Вероятности сложных событий	4	6	8				6	Контрольная работа	
3	Испытания Бернулли	4	6	6				6	Контрольная работа	
4	Дискретные случайные величины	4	6	6				6	Контрольная работа	
5	Непрерывные случайные величины	4	4	4				5	Контрольная работа	
6	Предельные теоремы теории вероятностей	4	2							
7	Математическая статистика	4	4	4				6	Самостоятельная работа	
						7	36		Экзамен	
	<b>Всего за 4 семестр</b>		<b>34</b>	<b>34</b>		<b>7</b>	<b>36</b>	<b>33</b>		
	<b>Всего</b>		<b>34</b>	<b>34</b>		<b>7</b>	<b>36</b>	<b>33</b>		

Содержание разделов дисциплины:

**1. Основные понятия теории вероятностей.** Предмет теории вероятностей. Случайные события и их виды. Пространство элементарных событий. Вероятностная интерпретация операций теории множеств и соотношений между множествами. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики: правило умножения, размещения, перестановки, сочетания. Ограниченность классического определения вероятности, статистическая вероятность. Геометрическая вероятность.

**2. Вероятности сложных событий.** Произведение и сумма событий. Условная вероятность. Теорема умножения. Зависимые и независимые события. Независимые в совокупности события. Пример Бернштейна. Теорема сложения. Совместные и несовместные события. Полная группа несовместных событий. Формула полной вероятности. Апостериорные вероятности гипотез. Формула Байеса.

**3. Испытания Бернулли.** Последовательность независимых испытаний. Биномиальное распределение. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. Предельная теорема Пуассона. Нормальное приближение. Плотность нормального распределения. Функция Лапласа. Локальная теорема Муавра–Лапласа. Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

**4. Дискретные случайные величины.** Понятие случайной величины. Ряд распределения дискретной случайной величины. Индикатор (характеристическая функция) события и его свойства. Геометрическое распределение. Биномиальное распределение. Гипергеометрическое распределение. Распределение Пуассона. Механический и статистический смысл формулы, определяющей математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания. Среднее квадратическое отклонение случайной величины. Дисперсия. Свойства дисперсии случайной величины. Вычисление математического ожидания и дисперсии для основных дискретных распределений. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины. Коэффициент корреляции.

**5. Непрерывные случайные величины.** Основные числовые характеристики. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал. Вероятностный смысл плотности распределения. Функция распределения. Закон равномерного распределения. Показательное распределение. Нормальное распределение. Формулы для математического ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин. Вычисление числовых характеристик для основных распределений. Плотность совместного распределения двумерного случайного вектора.

**6. Предельные теоремы теории вероятностей.** Теорема Чебышева. Практическая значимость теоремы Чебышева. Центральная предельная теорема.

**7. Математическая статистика.** Выборка из генеральной совокупности. Задачи математической статистики. Статистическое распределение выборки. Оценка неизвестного параметра. Свойства несмещенности и состоятельности оценок. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Несмещенная оценка дисперсии. Доверительные интервалы. Статистическая гипотеза. Статистический критерий различения гипотез. Ошибки первого и второго рода.

**5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – групповые занятия, на которых по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты в решении задач, возникающие у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются: для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами

OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232

LibreOffice (свободное)

издательская система LaTeX;

для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next")

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. Максименко, А. Н., Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с

2. Максименко, А. Н., Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с

3. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с

4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с.

5. Гмурман, В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие. 11-е изд., М.: Изд-во Юрайт, 2017, 404с.

б) дополнительная:

1. Сборник задач по математике : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Пospelова. В 4 ч. Ч.4. - [3-е изд., перераб. и доп.], М., Физматлит, 2004, 430с.

2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / В. Е. Гмурман, М., Высшая школа, 2001, 479с

3. Хуснутдинов, Р. Ш., Сборник задач по курсу теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс] : учеб. пособие. - 2-е изд., испр., СПб., Лань, 2014, 320с.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Чернова Н. И. Теория вероятностей: Учебное пособие / СибГУТИ.— Новосибирск, 2009. - 128 с. (<https://nsu.ru/mmftvims/chernova/sibguti/tv-sibguti.pdf>).

2. Чернова Н. И. Математическая статистика: Учебное пособие / СибГУТИ.— Новосибирск, 2009. - 90 с. (<https://nsu.ru/mmftvims/chernova/sibguti/ms-sibguti.pdf>)

## **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий;

- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

-помещения для самостоятельной работы;

-помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы учебно-наглядных пособий, хранящиеся на электронных носителях и обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочим программам дисциплин.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий – списочному составу группы обучающихся.

### **Автор(ы) :**

Доцент кафедры дискретного анализа, к.ф.-м.н. Ю.В.Богомолов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки  
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы  
формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания по теме № 1 «Основные понятия теории вероятностей»:**

Разделы 1.1-1.4 сборника задач «Теория вероятностей и математическая статистика» (Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. / ЯрГУ, 2009).

**Задания по теме № 2 «Вероятности сложных событий»:**

Разделы 1.5-1.8 сборника задач «Теория вероятностей и математическая статистика» (Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. / ЯрГУ, 2009).

**Задания по теме № 3 «Испытания Бернулли»:**

Разделы 1.9-1.11 сборника задач «Теория вероятностей и математическая статистика» (Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. / ЯрГУ, 2009).

**Задания по теме № 4 «Дискретные случайные величины»:**

Разделы 2.1-2.4 сборника задач «Теория вероятностей и математическая статистика» (Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. / ЯрГУ, 2009).

**Задания по теме № 5 «Непрерывные случайные величины»:**

Разделы 2.6-2.8 сборника задач «Теория вероятностей и математическая статистика» (Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. / ЯрГУ, 2009).

**Задания по теме № 7 «Оценивание неизвестных параметров»:**

Часть третья из «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» (Гмурман В.Е. / Москва, 2010).

**Типовые варианты контрольной работы**

**Контрольная работа № 1.**

**1 вариант**

1. В автобусе, насчитывающем 26 мест, случайным образом занимают места 16 человек.

Найти вероятность того, что:

- а) последние 3 места останутся свободными;
- б) будут заняты последние 3 места.

2. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что в полученной выборке найдутся хотя бы две карты одинаковой масти, не важно какой.

3. Из отрезка  $[-1, 2]$  наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

4. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события:

- $A = \{\text{на трех костях выпадут разные грани}\},$
- $B = \{\text{хотя бы на одной из костей выпадет шестерка}\}.$

Вычислить  $P(B|A)$ .

5. Сколько нужно взять случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

6. Двое охотников заметили утку. Первый выстрелил один раз с вероятностью попадания 0.8, а второй успел сделать два выстрела, но с вероятностью попадания 0.4 на каждом из них. Утка упала, причём попадание в неё было только одно. Кто из охотников с большими основаниями может претендовать на добычу?

**Ответы:** 1. а)  $23!10!/(26!7!) = 3/65$ , б)  $23!16!/(26!13!) = 14/65$ . 2.  $1 - 9^4 32! 4! / 36! \approx 0,89$ . 3.  $(1,5 + 2 \ln 2) / 9$ . 4.  $1/2$ . 5. Не менее 4. 6. Первый.

## 2 вариант

1. Колода из 36 карт делится наугад на две равные пачки по 18 листов. Найти вероятность того, что в одной из пачек (не важно в какой) окажутся все четыре туза.

2. В город приехали семь туристов. Каждый из них случайным образом и независимо от других пошел в один из семи находящихся в городе кинотеатров. Найти вероятность того, что в одном из кинотеатров оказалось 4 туриста.

3. На отрезке длины  $l$  наудачу выбираются две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

4. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события:

$C = \{\text{появится хотя бы одна единица}\},$

$D = \{\text{появится не менее двух шестерок}\}.$

Найти  $P(C|D)$ .

5. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу две карты. Наблюдаемые события:

$A = \{\text{среди выбранных карт есть хотя бы один туз}\},$

$B = \{\text{хотя бы один король}\}.$

Вычислить  $P(A + B)$ .

6. В первой урне находится один белый и 9 черных шаров, а во второй – один белый и 5 черных шаров. Из каждой урны удалили случайным образом по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью (свободную) урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

**Ответы:** 1.  $2 \cdot 32!18! / (36!14!)$ . 2.  $5 \cdot 6^3 / 7^5$ . 3.  $1/4$ . 4.  $3/16$ . 5.  $2/5$ . 6.  $13/105$ .

## Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки:

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1	ОПК-1: Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений; – нахождения вероятностей случайных событий;	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потеря простого множителя или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2	ОПК-1: Владеть навыками:	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов;



	<ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
3	ОПК-1: Знать: <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> Владеть навыками: <ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
4	ОПК-1: Знать: <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> Уметь: <ul style="list-style-type: none"> <li>– выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями</li> </ul> Владеть навыками: <ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
5	ОПК-1: Знать: <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> Уметь:	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	<p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>
6	<p>ОПК-1:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 6 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:

- менее 3 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 3 до 3.9 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 4 до 4.9 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 5 баллов — оценка «отлично».

## Контрольная работа № 2.

### 1 вариант

1. Тестовое задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий верных ответов и выбирающий ответы наудачу, ответит правильно не менее, чем на 3 вопроса.

2. Предположим, что вероятность стать участником аварии в течение года для обычного автолюбителя в среднем равна 0,006. Страховая компания заключила 10 000 страховых контрактов с автолюбителями, согласно которым в случае аварии в течение ближайшего года застрахованному выплачивается 100 000 руб. Стоимость одного контракта составляет 1 200 руб. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания окажется в убытке.

3. Найти дисперсию дискретной случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения

$x_i$	-5	2	3	4
-------	----	---	---	---

$p_i$	0,4	0,3	0,2	0,1
-------	-----	-----	-----	-----

4. Из сосуда, содержащего  $m$  белых и  $n$  черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

5. Независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют математические ожидания  $M(X) = 2$ ,  $M(Y) = -3$  и дисперсии  $D(X) = 1$ ,  $D(Y) = 2$ . Найдите математическое ожидание случайной величины  $Z = 3X^2Y + 2Y^2 + 1$ .

6. Плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$  равна  $f(x) = C / (1+x^2)$ . Найти постоянный параметр  $C$  и математическое ожидание  $MX$ .

**Ответы:** 1.  $106 / 4^5$ . 2. 0. 3. 14,44. 4.  $MX = (n+m)/m$ ,  $DX = n(n+m)/m^2$ . 5. -22. 6.  $C = 1/\pi$ ,  $MX = 0$ .

## 2 вариант

1. Найти среднее число изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы число булочек без изюма составляло не более 1%.

2. Предположим, что вероятность стать участником аварии в течение года для обычного автолюбителя в среднем равна 0,006. Страховая компания заключила 10 000 страховых контрактов с автолюбителями, согласно которым в случае аварии в течение ближайшего года застрахованному выплачивается 100 000 руб. Стоимость одного контракта составляет 1 200 руб. Найти вероятность того, что по итогам года прибыль страховой компании превысит 4 млн. руб.

3. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

4. Брошены  $m$  игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

5. Система случайных величин  $(X, Y)$  задана таблицей распределения

$Y$	-2	0	1
$X$			
-1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,1

Найдите коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$ .

6. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения  $f(x)$ , равной  $e^{-x}$  при  $x \geq 0$  и равной 0 при  $x < 0$ . Найти математическое ожидание и дисперсию  $X$ .

**Ответы:** 1. Не менее  $\ln(100)$ . 2. 99,5%. 3.  $MX = 2$ ,  $DX = 1$ . 4.  $MX = 7n/2$ ,  $DX = 35n/12$ . 5.  $\rho(X, Y) \approx 0,11$ . 6.  $MX = 1$ ,  $DX = 1$ .

## Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки:

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1	ОК-3: Знать: – основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики Уметь: – выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями Владеть навыками:	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2	<p>ОК-3:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</li> <li>– нахождения вероятностей случайных событий;</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>
3	<p>ОК-3:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>
4	<p>ОК-3:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>

5	<p>ОК-3:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>
6	<p>ОК-3:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения, понятия и формулы теории вероятностей и математической статистики</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</li> </ul>	<p>0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка;</p> <p>0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое);</p> <p>0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;</p> <p>0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;</p> <p>1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.</p>

Максимальное суммарное количество баллов по ОК-3 – 6 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:

- менее 3 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 3 до 3.9 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 4 до 4.9 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 5 баллов — оценка «отлично».

## Тесты для самопроверки при подготовке к экзамену.

### Проверка сформированности компетенции ОПК-1

Для каждого из вопросов следует указать ВСЕ верные ответы.

**Вопрос 1.** Пусть вероятности событий А и В (связанных с одним и тем же экспериментом) равны 0,5 и 0,7 соответственно. Что можно сказать о вероятности события АВ?

- а) она больше 0.
- б) она больше 0,2.
- в) она меньше 0,7.
- г) она меньше 0,5.

**Вопрос 2.** В ящике лежали  $m$  белых и  $n$  черных шаров. Из него случайным образом извлекли один шар и, не глядя, положили его в карман. После этого извлекли еще один шар, который оказался белым. Чему равна вероятность того, что первый извлеченный шар тоже белый?

- а)  $m / (n + m)$ .
- б)  $(m - 1) / (n + m)$ .
- в)  $(m - 1) / (n + m - 1)$ .

**Вопрос 3.** Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей как минимум на одной из них выпадет грань с шестью очками.

- а)  $91 / 216$ .
- б)  $1/6$ .
- в)  $1/2$ .
- г)  $31 / 6^3$ .

**Вопрос 4.** В урне лежат 4 белых и 8 черных шаров. Из нее случайным образом и без возвращения вынимают два шара. Какой состав вынутых шаров наиболее вероятен?

- а) оба черные.
- б) оба белые.
- в) разного цвета.
- г) варианты а) и в).

**Вопрос 5.** Пусть А и В – некоторые события ненулевой вероятности. В каких из перечисленных случаев формула  $P(A + B) = P(A) + P(B)$  верна (для любых А и В)?

- а) А и В совместны.
- б) А и В несовместны.
- в) А и В независимы.
- г) А и В зависимы.

**Вопрос 6.** Из колоды в 36 карт вынули две карты. Пусть  $A = \{\text{обе вынутые карты – тузы}\}$ ,  $B = \{\text{среди вынутых есть хотя бы один туз}\}$ . Чему равна условная вероятность  $P(A|B)$ ?

- а)  $3 / 35$ .
- б)  $3 / 67$ .
- в)  $6 / (36 \cdot 35 - 32 \cdot 31)$ .
- г)  $12 / (32 \cdot 4 + 4 \cdot 3)$ .

**Вопрос 7.** Пусть  $A$  и  $B$  – некоторые события ненулевой вероятности. В каких из перечисленных случаев формула  $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$  верна для любых  $A$  и  $B$ ?

- а)  $A$  и  $B$  совместны.
- б)  $A$  и  $B$  несовместны.
- в)  $A$  и  $B$  независимы.
- г)  $A$  и  $B$  зависимы.

**Вопрос 8.** Из 28 костей домино случайным образом выбрали две. Найти вероятность того, что их можно приставить друг к другу (на них есть половинки с одинаковым числом точек).

- а)  $6/27$ .
- б)  $12/27$ .
- в)  $1/3$ .
- г)  $7/18$ .

**Вопрос 9.** Пусть события  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  образуют разбиение пространства исходов, а  $A$  – некоторое событие в этом пространстве. Известны вероятности  $P(H_1) = 1/3$ ,  $P(H_2) = 1/2$ ,  $P(H_3) = 1/6$ ,  $P(A|H_1) = 1$ ,  $P(A|H_2) = 1/2$ ,  $P(A|H_3) = 0$ . Воспользовавшись формулой Байеса, найти вероятность события  $H_2$  при условии, что  $A$  произошло.

- а)  $1/2$ .
- б)  $7/12$ .
- в)  $3/7$ .
- г)  $3/4$ .

**Вопрос 10.** Двое стрелков независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Пусть  $p$  – вероятность попадания для первого стрелка, а  $q$  – для второго. Укажите все верные способы вычисления вероятности того, что только один из стрелков попал.

- а)  $p + q$ .
- б)  $p(1-q) + q(1-p)$ .
- в)  $p + q - pq$ .
- г)  $1 - pq - (1-p)(1-q)$ .

**Вопрос 11.** Двое игроков по очереди (по одному разу) бросают игральную кость до тех пор, пока не выпадет грань с шестью очками. Выигрывает тот, у кого раньше появится '6'. Найти вероятность того, что выиграет тот, кто начинает игру.

- а)  $6/11$ .
- б)  $1/2$ .
- в)  $3/4$ .
- г)  $2/3$ .

## Правильные ответы

Вопрос №	Ответ
1	абвг
2	в
3	а
4	в
5	б
6	б
7	абвг
8	г
9	в
10	бг
11	а

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл. Набранное количество баллов не менее 9 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 7-8 баллов – на продвинутом уровне, 5-6 баллов – на пороговом уровне, менее 5 баллов – ниже порогового уровня.

### Проверка сформированности компетенции ОК-3

Для каждого из вопросов следует указать ВСЕ верные ответы.

**Вопрос 1.** Чему равна вероятность того, что при 10 бросаниях монеты герб появится ровно 5 раз?

- а)  $1/2$ .
- б)  $1/11$ .
- в)  $123/512$ .
- г)  $63/256$ .

**Вопрос 2.** Известно, что в школьной столовой в среднем одна из 55 булочек оказывается без изюма. Чему (приблизительно) равно среднее число изюминок в случайно выбранной булочке?

- а) 1.
- б) 2.
- в) 3.
- г) 4.

**Вопрос 3.** Какие из следующих уравнений верны для любых независимых случайных величин  $X$  и  $Y$ ?

- а)  $P(X=a, Y=b) = P(X=a) P(Y=b)$ , где  $a, b \in R$ .
- б)  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ .
- в)  $M(X Y) = M(X) M(Y)$ .
- г)  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ .
- д)  $D(X Y) = D(X) D(Y)$ .

**Вопрос 4.** Найти дисперсию дискретной случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения

$x_i$	-2	-1	0	1
$p_i$	0,4	0,3	0,2	0,1



- а) -1.
- б) 0.
- в) 1.
- г) 2.

**Вопрос 5.** Выберите верные утверждения.

- а)  $\rho(X, X) = 1$ .
- б)  $M(X X) = MX MX$ .
- в)  $\text{cov}(X, X) = DX$ .
- г)  $M(X X) = DX + (MX)^2$ .
- д)  $D(X X) = D(X) D(X)$ .

**Вопрос 6.** Выберите верные утверждения.

- а)  $\rho(X, Y) \leq 1$ .
- б)  $\rho(X, Y) \geq 0$ .
- в)  $\text{cov}(X, Y) \leq 1$ .
- г)  $M(X + Y) = MX + MY$ .
- д) Если  $X \leq Y$ , то  $DX \leq DY$ .

**Вопрос 7.** Для каких случайных величин равенство  $P(X=a) = 0$  справедливо при любом  $a \in \mathbb{R}$ ?

- а) дискретных.
- б) непрерывных.
- в) абсолютно непрерывных.

**Вопрос 8.** Укажите свойства плотности распределения  $f(x)$ .

- а)  $f(x) \geq 0$ .
- б)  $f(x) \leq 1$ .
- в)  $f(x)$  непрерывна слева.
- г)  $f(x)$  не убывает.
- д)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

**Вопрос 9.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ . Как можно найти математическое ожидание  $MX$ ?

- а)  $MX = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ .
- б)  $MX = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)dx$ .
- в)  $MX = \int_{-\infty}^{\infty} xF'(x)dx$ .
- г)  $MX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x)dx$ .

**Вопрос 10.** Найдите дисперсию для случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[-1, 3]$ .

- а)  $4/3$ .
- б) 1.
- в) 2.
- г)  $1/3$ .

**Вопрос 11.** Плотность нормального распределения выражается следующей формулой.

- а)  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ .

$$\begin{aligned}\text{б) } \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \\ \text{в) } \varphi(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \\ \text{г) } \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x}.\end{aligned}$$

### Правильные ответы

Вопрос №	Ответ
1	г
2	г
3	абвг
4	в
5	авг
6	аг
7	бв
8	ад
9	в
10	а
11	б

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл. Набранное количество баллов не менее 9 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 7-8 баллов – на продвинутом уровне, 5-6 баллов – на пороговом уровне, менее 5 баллов – ниже порогового уровня.

### Список теоретических вопросов к экзамену:

1. Пространство элементарных событий. Отношения между событиями.
2. Вероятность в дискретном пространстве элементарных событий. Основное положение (аксиома).
3. Основные формулы комбинаторики: число размещений, число сочетаний, число перестановок. Примеры.
4. Геометрические вероятности. Задача Бюффона об игле.
5. Совместные и несовместные события. Вероятность суммы событий.
6. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимые события. Произведение нескольких независимых событий.
7. Полная группа несовместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
8. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов.
9. Приближение Пуассона. Теорема Пуассона (Доказательство).
10. Нормальное приближение. Плотность нормального распределения. Функция Лапласа. Локальная теорема Муавра–Лапласа.
11. Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

12. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Биномиальное распределение и распределение Пуассона. Геометрическое распределение.
13. Сумма и произведение дискретных случайных величин. Независимые случайные величины.
14. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства.
15. Вычисление математического ожидания для биномиального распределения, распределения Пуассона и геометрического распределения.
16. Среднеквадратическое отклонение и дисперсия дискретной случайной величины. Свойства дисперсии.
17. Вычисление дисперсии для биномиального распределения и распределения Пуассона.
18. Функция распределения вероятностей для дискретной и непрерывной случайных величин. Свойства.
19. Плотность распределения вероятностей. Свойства.
20. Закон равномерного распределения вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин.
21. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
22. Центральная предельная теорема.
23. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины. Плотность совместного распределения двумерного случайного вектора.
24. Коэффициент корреляции. Линейная регрессия.
25. Выборка из генеральной совокупности. Задачи математической статистики. Статистическое распределение выборки.
26. Оценка неизвестного параметра. Свойства несмещенности и состоятельности оценок.
27. Оценивание вероятности наблюдаемого события. Вариационный ряд.
28. Эмпирическая функция распределения. Оценки подстановки неизвестных параметров.
29. Выборочное среднее и выборочная дисперсия.
30. Несмещенная оценка дисперсии.
31. Метод наибольшего правдоподобия оценивания неизвестных параметров.
32. Простые и сложные гипотезы. Статистический критерий различения гипотез. Ошибки первого и второго рода.

### Типовые варианты экзаменационных заданий

#### Вариант 1

##### Теоретические вопросы:

1. Определение вероятности в дискретном пространстве событий.
2. Сформулировать и доказать формулу полной вероятности.
3. Сформулировать (со всеми необходимыми пояснениями) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Свойства математического ожидания случайной величины (без доказательств).
5. Ковариация. Основные свойства **с доказательствами**.
6. Плотность распределения случайной величины. Свойства.

##### Задачи:

1. Найти вероятность того, что при бросании 10 игральных костей ровно на трех из них выпадет по шесть очков.
2. На отрезке АВ случайно выбираются две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними меньше одной трети длины АВ.
3. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90% (т.е. 10% носителей туберкулеза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со

средним процентом больных туберкулезом, равным 0,1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным по результатам просвечивания, действительно является носителем туберкулеза?

4. В учебном корпусе университета установлено 1000 ламп дневного света, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа для произвольно взятой лампы в течение одного дня равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение дня откажут не менее трех ламп.

5. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, извлекаются наудачу 3 шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа белых шаров среди вынутых.

6. Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $DX = 4$ ,  $DY = 5$ ,  $D(X-Y) = 15$ . Найти ковариацию  $\text{cov}(X, Y)$  и дисперсию  $D(2X+Y)$ .

**Ответы:** 1.  $(5/6)^7 \cdot 5/9$ . 2.  $5/9$ . 3.  $\approx 0,0826$ . 4.  $5e^{-2}$ . 5.  $MX = 1,8$ ,  $DX = 0,16$ . 6.  $\text{cov}(X, Y) = -3$ ,  $D(2X+Y) = 9$ .

### Вариант 2

#### Теоретические вопросы:

1. Условная вероятность. Формула для вероятности произведения событий.
2. Сформулировать и доказать формулу полной вероятности.
3. Дисперсия случайной величины и ее основные свойства (без доказательств).
4. Коэффициент корреляции и его основные свойства (без доказательств).
5. Теорема Пуассона. Доказательство.
6. Формулы для нахождения математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины.

#### Задачи:

1. Из урны, содержащей 3 белых и 3 черных шара, вынули два шара. Какие именно шары были вынуты – неизвестно. Но известно, что среди них есть как минимум один белый. Найти вероятность того, что оба вынутых шара белые.

2. Из отрезка от -1 до 2 случайно выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найти вероятность того, что их произведение окажется больше 1.

3. Среди имеющихся трех игральных костей есть одна, у которой на той грани, где должна быть цифра 1, написана цифра 6. Из этих трех костей случайно выбирают одну и бросают ее два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет 6.

4. Игрок бросает по три игральные кости за один раз. В том случае, если он выбрасывает три «шестерки», он получает 200 руб. выигрыша; если же хотя бы на одной из костей не выпадет 6, то он теряет один рубль. Найти вероятность того, что после 400 бросаний он не окажется в проигрыше.

5. Пусть  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону. Найдите коэффициент корреляции  $\rho(X-2Y, X)$ .

6. Случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[-1, 3]$ . Найти  $M(X^3)$  и вероятность  $P(-2 < X < 2)$ .

**Ответы:** 1.  $1/4$ . 2.  $(3 - 2 \ln 2) / 9$ . 3.  $1 / 18$ . 4.  $1 - e^{-50/27} \cdot 77 / 27 \approx 0,55$ . 5.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . 6.  $M(X^3) = 5$ ,  $P(-2 < X < 2) = 3/4$ .

#### Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки:

Блок теоретических вопросов нацелен на проверку знания основных определений, понятий и формул теории вероятностей и математической статистики (ОПК-3). Максимальная оценка за каждый теоретический вопрос – 1 балл. Исключение составляет 5-й вопрос, предполагающий изложение доказательства. Максимальная оценка для него – 2 балла. Шкала оценивания теоретических вопросов в целом соответствует таковой для задач:

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1	ОПК-1: Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений; – нахождения вероятностей случайных событий;	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2	ОПК-1: Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений; – нахождения вероятностей случайных событий;	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
3	ОПК-1: Уметь: – выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений; – нахождения вероятностей случайных событий;	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
4	ОК-3: Владеть навыками: – построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая

	– нахождения вероятностей случайных событий;	ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
5	ОК-3: Владеть навыками: – вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
6	ОК-3: Владеть навыками: – вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.7 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 1 балл – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 1.3 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 2 балла – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 10 баллов.

Максимальное суммарное количество баллов по ОК-3 – 9 баллов.

Набранное количество баллов соответствует оценке за экзамен:

- менее 4 баллов по ОПК-1 или менее 4 баллов по ОК-3 — оценка «неудовлетворительно»,
- не менее 4 баллов по ОПК-1 и не менее 4 баллов по ОК-3, в общей сумме от 10 до 12.9 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- не менее 5 баллов по ОПК-1 и не менее 5 баллов по ОК-3, в общей сумме от 13 до 15.9 баллов — оценка «хорошо»,

- не менее 7 баллов по ОПК-1 и не менее 6 баллов по ОК-3, в общей сумме 16 или более баллов — оценка «отлично».

### **Методические указания по выставлению итоговой оценки за экзамен.**

При формировании итоговой оценки по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» учитывается работа студента в течение семестра. Оценка за работу в семестре вычисляется как средняя оценка за контрольные работы. Если эта оценка незначительно отличается от оценки за экзамен, то оценка за экзамен считается итоговой. Если эти две оценки отличаются на два балла (например, «Хорошо» за контрольные и «Неудовлетворительно» за экзамен), то выставляется средняя. Если же среднюю между этими двумя не удастся определить однозначно («пограничный» случай), то студенту предлагается решить еще одну дополнительную задачу. Если студент с ней справляется, то выставляется более высокая отметка, иначе – низкая.

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

*Продвинутый уровень* - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

*Высокий уровень* - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.



## 2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Общекультурные компетенции						
К-3	О	Самостоятельная работа, Контрольные работы, Экзамен	– 9	1 Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности.  2. Воспроизведение описания испытаний Бернулли. Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и	1. Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности. Воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их решения.  2. Воспроизведение описания испытаний Бернулли. Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и Муавра-	1. Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности. Выполнение в полном объеме математических выкладок в процессе их решения.  2. Воспроизведение описания испытаний Бернулли. Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и Муавра-Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему.

			<p>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</p>	<p>Муавра-Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему.</p> <p>3. Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения.</p> <p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем.</p>	<p>Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему. Умение подобрать подходящую формулу для оценки вероятности.</p> <p>3. Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения. Умение пользоваться основными свойствами случайных величин и их числовых характеристик для нахождения свойств функций от случайных величин.</p> <p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем. Воспроизведение базовых</p>	<p>Умение подобрать подходящую формулу для оценки вероятности. Выполнение в полном объеме математических выкладок в процессе решения задач по оценке неизвестных параметров (числа испытаний и вероятности успеха).</p> <p>3. Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения. Умение пользоваться основными свойствами случайных величин и их числовых характеристик для нахождения свойств функций от случайных величин. Аналитическое описание закона распределения для неявно заданной случайной величины или случайного вектора.</p> <p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем. Выполнение в полном объеме математических выкладок и базовых математических рассуждений.</p>
--	--	--	---	---	--	--

				<p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов.</p>	<p>математических рассуждений.</p> <p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов. Умение решать задачи в формальной постановке.</p>	<p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов. Интерпретация практических задач на язык математической статистики. Умение решать задачи в формальной постановке. Анализ полученных результатов</p>
--	--	--	--	--	---	--

#### Общепрофессиональные компетенции

ПК-1	О	Самостоятельная работа, Контрольные работы, Экзамен	1 – 9	<p><b>Знать:</b> – основные определения и понятия теории вероятностей и математической статистики</p> <p><b>Уметь:</b> – выполнять аналитические действия со случайными событиями и их вероятностями</p> <p><b>Владеть навыками:</b></p>	1. Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности.	1. Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности. Воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их решения.	1. Воспроизведение определений и основных теорем теории случайных событий. Умение правильно подобрать подходящее вероятностное пространство при формализации задач на классическое и геометрическое определения вероятности. Выполнение в полном объеме математических выкладок в процессе их решения.  2. Воспроизведение описания испытаний Бернулли.
------	---	---	----------	--	---	---	---

			<p>– построения, анализа и применения математических моделей случайных явлений;</p> <p>– нахождения вероятностей случайных событий;</p> <p>– вычисления числовых характеристик случайных величин и случайных векторов</p>	<p>2.</p> <p>Воспроизведение описания испытаний Бернулли.</p> <p>Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и Муавра-Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему.</p> <p>3.</p> <p>Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения.</p>	<p>2.</p> <p>Воспроизведение описания испытаний Бернулли.</p> <p>Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и Муавра-Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему. Умение подобрать подходящую формулу для оценки вероятности.</p> <p>3.</p> <p>Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения. Умение пользоваться основными свойствами случайных величин и их числовых характеристик для нахождения свойств</p>	<p>Воспроизведение формулы Бернулли и приближенных формул Пуассона и Муавра-Лапласа. Умение правильно интерпретировать условие практических задач нахождения вероятности на данную тему. Умение подобрать подходящую формулу для оценки вероятности. Выполнение в полном объеме математических выкладок в процессе решения задач по оценке неизвестных параметров (числа испытаний и вероятности успеха).</p> <p>3. Воспроизведение определений и основных теорем по теме «Случайные величины». Умение вычислять числовые характеристики случайных величин и случайных векторов по явно заданным законам распределения. Умение пользоваться основными свойствами случайных величин и их числовых характеристик для нахождения свойств функций от случайных величин.</p> <p>Аналитическое описание закона распределения для неявно заданной случайной величины или случайного вектора.</p>
--	--	--	---	---	---	---

				<p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем.</p> <p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов.</p>	<p>функций от случайных величин.</p> <p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем. Воспроизведение базовых математических рассуждений.</p> <p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов. Умение решать задачи в формальной постановке.</p>	<p>4. Воспроизведение формулировок основных предельных теорем. Выполнение в полном объеме математических выкладок и базовых математических рассуждений.</p> <p>5. Постановка основных задач математической статистики. Воспроизведение её базовых понятий и методов. Интерпретация практических задач на язык математической статистики. Умение решать задачи в формальной постановке. Анализ полученных результатов</p>
--	--	--	--	---	--	--

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

Критериями оценивания степени овладения умениями и навыками, полученными в результате освоения данной дисциплины, являются критерии, описанные в таблице раздела 2.2.

Критерии оценивания формулируются исходя из следующих общих характеристик уровней:

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки подробно описаны в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций».

Высокий уровень формирования компетенций соответствует оценке «отлично» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу.

Продвинутый уровень формирования компетенций соответствует оценке «хорошо» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу.

Пороговый уровень формирования компетенций соответствует оценке «удовлетворительно» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» являются лекции. На практических занятиях происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и выработка вероятностной интуиции у обучающихся.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы теории вероятностей и математической статистики. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ. В конце семестра подводятся итоги – выставляется предварительная оценка, равная среднему арифметическому оценок за контрольные работы. Экзаменационная отметка не может отличаться от предварительной оценки более, чем на один балл. Экзамен проводится письменно. Задания содержат как теоретический материал, так и практические задачи, подобные тем, что студенты решали при выполнении контрольных работ. В зачетку ставится среднее арифметическое между предварительной оценкой и оценкой за письменный экзамен. Если оценка «спорная», студенту задается дополнительный вопрос, ответ на который и решает «спор».

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со спецификой данного курса. Хорошо известны примеры, когда видные ученые XVIII-XIX вв. совершали ошибки при решении, казалось бы, простых задач по теории вероятностей. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым.

Для проверки уровня сформированности компетенций при подготовке к экзамену рекомендуется выполнить тест для самопроверки.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.