МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и вычислительная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) «Математический анализ» являются изучение студентами основных концепций и методов математического анализа и его приложений для решения прикладных задач. В процессе изучения курса студенты знакомятся с такими понятиями как предел последовательности, предел функции, производная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, свойства непрерывных и дифференцируемых функций, числовые и функциональные ряды, приложения математического анализа в других разделах математики и в других науках.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математический анализ» изучается на протяжении первых трех семестров и относится к обязательной части образовательной программы. Знания, полученные при изучении курса необходимы для изучения таких дисциплин как дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной, теория вероятностей и математическая статистика, теория информации и др.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	**Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)**	**Перечень планируемых результатов обучения**
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**И-ОПК-1_1** Обладает основными фундаментальными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике их использования в профессиональной деятельности	Знать: - основные понятия математического анализа; - основные теоремы математического анализа. Уметь: - решать типовые задачи (вычисление пределов, вычисление интегралов, и др.); - решать с помощью методов математического анализа прикладные задачи (вычисление площадей, объемов, отыскание экстремумов функции одной и многих переменных и т.д.).

	И-ОПК-1_3 Имеет навыки аналитической работы, связанной с применением фундаментальных знаний на практике	Знать: - возможности применения методов математического анализа для решения прикладных задач. Уметь: - интерпретировать решения математических задач в терминах рассматриваемой предметной области.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 12 зачетных единиц, 432 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)* Формы ЭО и ДОТ *(при наличии)*
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
	1 семестр								
1	Теория пределов		16			2	8	9	
2	Непрерывность функции		16			2	8	9	
3	Производная функции		16			3	8	9	
4	Исследование функций с помощью производных		16			3	10	9	
	Всего за семестр	**144**	**64**			**10**	**34**	**36**	Экзамен
	2 семестр								
5	Неопределенный интеграл		21			3	11	12	
6	Определенный интеграл.		21			3	11	12	
7	Числовые и функциональные ряды		22			4	12	12	
	Всего за семестр	**144**	**64**			**10**	**34**	**36**	Экзамен

	3 семестр								
8	Пространство R^n и функции многих переменных		21			3	11	12	
9	Дифференциальное исчисление функций многих переменных		21			3	11	12	
10	Интегральное исчисление функций многих переменных		22			4	12	12	
	Всего за семестр	**144**	**64**			**10**	**34**	**36**	Экзамен
	ИТОГО	**432**	**192**			**30**	**102**	**108**	
	в том числе с ЭО и ДОТ								

Содержание разделов дисциплины:

1. Теория пределов
1.1. Множество действительных чисел (аксиомы, inf, sup, теорема о точной верхней грани).
1.2. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, предел константы $\lim c = c$, переход к пределу в неравенстве, переход к пределу в двойном неравенстве).
1.3. Бесконечно малые последовательности. Свойства б.м. последовательностей (сумма двух б.м. — б.м., произведение б.м. на ограниченную — б.м., $(x_n \to a) \Leftrightarrow (x_n - a \to 0)$.
1.4. Арифметические операции со сходящимися последовательностями (предел суммы, произведения, отношения).
1.5. Бесконечно большие последовательности. Свойства б.б. последовательностей (неограниченность, 1/ б.м. = б.б.).
1.6. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности.
1.7. Число e (доказательство сходимости последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$).
1.8. Теорема Кантора о вложенных отрезках.
1.9. Подпоследовательности. Частичные пределы, верхний и нижний пределы последовательности (определения).
1.10. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности.
1.11. Теорема Больцано-Вейерштрасса (ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность).
1.12. Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
1.13. Понятие функции. Определения предела функции на языке $\delta - \varepsilon$ (по Коши) и через предел последовательности (по Гейне). Теорема об эквивалентности определений.
1.14. Критерий Коши существования предела функции.
1.15. Различные типы предела функции: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где $a = c+0, c-0, \infty, +\infty, -\infty$, $A = B+0, B-0, \infty, +\infty, -\infty$. Теорема об односторонних пределах.

1.16. Локальные свойства функции, имеющей предел (ограниченность, сохранение знака).
1.17. Свойства пределов функции, связанные с неравенствами.
1.18. Теорема о существовании односторонних пределов монотонной функции.
1.19. Замена переменной при вычислении предела.
1.20. Неравенства для тригонометрических функций:
1.21. $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ x \neq 0$,
1.22. $|\sin x| \leq x,\ \forall x$
1.23. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
1.24. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
1.25. Сравнение функций. О-символика, эквивалентность. Теорема о вычислении пределов с помощью эквивалентных функций.

2. Непрерывность функции
   2.1. Понятие непрерывности функции. Непрерывность слева и справа. Классификация точек разрыва функции (1-го рода и 2-го рода).
   2.2. Свойства непрерывных функций (непрерывность функций $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$). Непрерывность сложной функции.
   2.3. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции непрерывной на отрезке.
   2.4. Теорема Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией точной верхней и нижней граней.
   2.5. Теорема Коши о нулях непрерывной функции.
   2.6. Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.
   2.7. Обратные функции. Теорема об обратной функции (существование, монотонность, непрерывность) для функции монотонной и непрерывной на отрезке.
3. Производная функции.
   3.1. Геометрический смысл производной.
   3.2. Производные элементарных функций ($C,\ x^n,\ \sin x,\ \cos x,\ a^x,\ e^x,\ \log_a x,\ \ln x,\ x^\alpha\ (\alpha \in R)$).
   3.3. Теорема о непрерывности функции, имеющей производную.
   3.4. Односторонние и бесконечные производные.
   3.5. Производные суммы, произведения и частного.
   3.6. Производная сложной функции.
   3.7. Производные элементарных функций ($\tan x,\ \cot x,\ e^{-x},\ \sinh x,\ \cosh x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$)
   3.8. Производная показательно-степенной функции $[u(x)]^{v(x)}$.
   3.9. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциала для приближенных вычислений.
   3.10. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
   3.11. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы дифференциала первого порядка и отсутствие инвариантности формы для дифференциалов порядка выше первого.
   3.12. Дифференцирование параметрически заданной функции (1-я, 2-я, 3-я производные).
   3.13. Понятие локального экстремума функции. Теорема Ферма.
   3.14. Теорема Ролля о нулях производной.
   3.15. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений).

3.16. Следствия из теоремы Лагранжа

3.17. $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=Const$,

3.18. $f'(x)=k \Rightarrow f(x)=kx+b$,

3.19. $\varphi(x_0)=\psi(x_0),\ \varphi'(x)>\psi'(x) \Rightarrow \varphi(x)>\psi(x),\ x>x_0$

3.20. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).

4. Исследование функций с помощью производных
   - 4.1. Критерий возрастания и убывания функции на интервале.
   - 4.2. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции.
   - 4.3. Понятие строгого возрастания (убывания) функции в точке. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции в точке.
   - 4.4. Многочлен Тейлора функции. Вспомогательная лемма $\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}\right)$.
   - 4.5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
   - 4.6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
   - 4.7. Единственность представления функции в виде $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_1(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^n\right)$
   - 4.8. Разложение по формуле Тейлора основных элементарных функций ($e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x),...$
   - 4.9. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.
   - 4.10. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей (случаи неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).
   - 4.11. Экстремумы функции (стационарные точки, критические точки, строгий экстремум, перемена знака). Первое достаточное условие строгого экстремума ($f'(x)$ меняет знак).
   - 4.12. Второе и третье достаточные условия строгого экстремума (исследование на экстремум с помощью $f''(x),\ldots,f^{(n)}(x)$).
   - 4.13. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
   - 4.14. Выпуклость функции. Точки перегиба. Достаточное условие выпуклости.
   - 4.15. Необходимое условие точки перегиба. Первое и второе достаточные условия точки перегиба (второе — без доказательства).
   - 4.16. Асимптоты графика функции.
   - 4.17. Примерная схема построения графика функции.
5. Неопределенный интеграл
   - 5.1. Неопределенный интеграл (первообразная, определение неопределенного интеграла, неоднозначность, первообразные отличаются на постоянную).
   - 5.2. Свойства неопределенного интеграла (линейность, замена переменной).
   - 5.3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
   - 5.4. Интегрирование рациональных функций (теорема о разложении на простые дроби /без доказательства/, интегрирование простых дробей).
   - 5.5. Интегрирование выражений, содержащих радикалы.
   - 5.6. Интегрирование дифференциального бинома.
   - 5.7. Подстановки Эйлера.
   - 5.8. Интегрирование тригонометрических функций (универсальная тригонометрическая подстановка, некоторые частные случаи).
6. Определенный интеграл
   - 6.1. Определенный интеграл (Римана). Определение (разбиение, выборка, интегральная сумма).

6.2. Необходимое условие интегрируемости (теорема об ограниченности интегрируемой функции).
6.3. Суммы Дарбу и их свойства.
6.4. Критерий интегрируемости функции.
6.5. Интегрируемость непрерывной функции.
6.6. Интегрируемость монотонной функции.
6.7. Свойства определенного интеграла (линейность, интегрируемость произведения интегрируемых функций).
6.8. Свойства определенного интеграла (функция, интегрируемая на $[a,b]$, интегрируема на $[a_1,b_1]\subset[a,b]$, аддитивность, $\int\limits_{c_1}^{c_2} = \int\limits_{c_1}^{c_3} + \int\limits_{c_3}^{c_2}$.
6.9. Оценки интегралов (интеграл от неотрицательной функции неотрицателен, интегрирование неравенств).
6.10. Теорема о среднем для определенного интеграла. Следствия из теоремы о среднем.
6.11. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.
6.12. Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом.
6.13. Существование первообразной непрерывной функции.
6.14. Формула Ньютона-Лейбница.
6.15. Замена переменной в определенном интеграле.
6.16. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
6.17. Приложения определенного интеграла (площадь криволинейной трапеции, площадь криволинейного сектора, объем тела вращения, объем тела с известной площадью поперечного сечения, длина дуги кривой, площадь поверхности вращения).
6.18. Несобственные интегралы. Определения несобственных интегралов двух типов. Понятие сходимости.
6.19. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
6.20. Свойства несобственных интегралов (линейность, формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменного, интегрирование неравенств).
6.21. Свойства несобственных интегралов от неотрицательных функций (признак сравнения, интегралы от эквивалентных функций).
6.22. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов (определения, из абсолютной сходимости следует сходимость в обычном смысле).
6.23. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
6.24. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла.

7. Числовые и функциональные ряды
7.1. Числовые ряды. Определение сходимости.
7.2. Необходимое условие сходимости ряда.
7.3. Свойства сходящихся рядов (сходимость суммы рядов, сходимость остатка ряда, группировка слагаемых сходящегося ряда).
7.4. Критерий Коши сходимости числового ряда.
7.5. Сходимость неотрицательных рядов: ряд сходится, если последовательность частичных сумм ограничена.
7.6. Сходимость неотрицательных рядов: интегральный признак.
7.7. Сходимость неотрицательных рядов: признак сравнения (в форме неравенства и в предельной форме).
7.8. Сходимость неотрицательных рядов: признак Даламбера (в форме неравенства и в предельной форме).
7.9. Сходимость неотрицательных рядов: признак Коши (в форме неравенства и в предельной форме).

7.10. Знакопеременные ряды. Понятия абсолютной и условной сходимости. Теорема: если ряд абсолютно сходится, то он сходится в обычном смысле.
7.11. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
7.12. Преобразование Абеля. Лемма об оценке суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
7.13. Признак Абеля сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
7.14. Признак Дирихле сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
7.15. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда.
7.16. Ряд Тейлора. Теорема о сходимости ряда Тейлора.
7.17. Функциональные последовательности и ряды. Понятия поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Примеры.
7.18. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.
7.19. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
7.20. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ (без доказательства).
7.21. Непрерывность суммы равномерно сходящихся последовательностей и рядов.
7.22. Условия интегрируемости функциональных последовательностей и рядов.
7.23. Условия дифференцируемости функциональных последовательностей и рядов.
7.24. Равномерная сходимость степенного ряда внутри области сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
7.25. Ряды Фурье. Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье.
7.26. Лемма Римана.
7.27. Частичная сумма ряда Фурье. Интеграл Дирихле.
7.28. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости ряда Фурье.
7.29. Разложение функции, заданной на $[0, \pi]$ только по косинусам и только по синусам.
7.30. Разложение в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$.

8. Пространство R^n и функции многих переменных
8.1. Пространство R^n (определение, операции сложения и умножения на константу, скалярное произведение, норма /свойства нормы/, расстояние /свойства расстояния/). Метрическое пространство.
8.2. Множества в R^n (шары, параллелепипеды, прямая, отрезок, луч, кривая).
8.3. Классификация точек и множеств в R^n (точка прикосновения, замыкание, замкнутое множество, внутренняя точка, внутренность, открытое множество, предельная точка, граничная точка, граница, выпуклое множество, связное множество, область).
8.4. Предел последовательности в R^n.Теорема: сходимость последовательности в R^n эквивалентна сходимости последовательностей-координат.
8.5. Единственность предела сходящейся последовательности.
8.6. Ограниченность сходящейся последовательности.
8.7. Критерий Коши сходимости последовательности в R^n.
8.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса (ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность).
8.9. Арифметические операции со сходящимися последовательностями.
8.10. Понятие компакта метрического пространства.

8.11. Функции в R^n. Линейные функции, линейный функционал.
8.12. Предел функции в точке. Определения предела через неравенства и через последовательности, эквивалентность определений.
8.13. Теорема о пределе суммы сходящейся последовательности.
8.14. Непрерывность функции многих переменных. Свойства функций непрерывных в точке. Непрерывность на множестве.
8.15. Теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная на компакте, ограничена на этом компакте.
8.16. Теорема Вейерштрасса: функции, непрерывная на компакте, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.
8.17. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на компакте.
8.18. Равномерная непрерывность функции многих переменных. Теорема Кантора.

9. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.
9.1. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Частные производные.
9.2. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке (теорема для случая функции двух переменных).
9.3. Дифференцируемость сложной функции.
9.4. Дифференциал функции нескольких переменных. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
9.5. Правила дифференцирования.
9.6. Формула конечных приращений Лагранжа.
9.7. Геометрические приложения производной функции многих переменных (касательная к прямой, касательная плоскость к графику функции двух переменных).
9.8. Производная по направлению. Градиент. Направление наискорейшего роста функции.
9.9. Частные производные порядков. Теорема о смешанных производных.
9.10. Дифференциалы высших порядков.
9.11. Формула Тейлора для функций многих переменных.
9.12. Экстремумы функций многих переменных.

10. Интегральное исчисление функций многих переменных
10.1. Интегралы, зависящие от параметра.
10.2. Гамма-функция Эйлера.
10.3. Бета-функция Эйлера.
10.4. Элементы теории меры.
10.5. Определение двойного интеграла. Интегрируемость непрерывной функции (без доказательства).
10.6. Свойства интегрируемых функций.
10.7. Вычисление двойного интеграла (сведение к повторному интегрированию) для прямоугольной и произвольной областей.
10.8. Приложения двойного интеграла (вычисление площадей, масс и объемов).
10.9. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные и обобщенные полярные координаты.
10.10. Тройные и многократные интегралы. Замена переменных в кратном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.
10.11. Несобственные кратные интегралы.
10.12. Кривые в R^2 и в R^3.
10.13. Криволинейные интегралы 1го типа: определение, свойства, физический смысл.
10.14. Криволинейные интегралы 2го типа: определение, свойства.
10.15. Формула Грина.
10.16. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла 2го типа.

10.17. Условия независимости криволинейного интеграла 2го типа от пути. Условия потенциальности поля.
10.18. Поверхности в R^3. Координаты на поверхности. Вектор нормали.
10.19. Вычисление площади поверхности. Свойства площади поверхности.
10.20. Поверхностные интегралы 1го типа: определение, свойства, физический смысл.
10.21. Поверхностные интегралы 2го типа: определение, вычисление.
10.22. Формула Стокса.
10.23. Формула Остроградского.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- издательская система LaTex;
- Adobe Acrobat Reader;
- https://www.wolframcloud.com/

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Климов В. С. Одномерный математический анализ. Часть I. Ярославль, ЯрГУ, 2005.
2. Климов В. С. Многомерный математический анализ. Часть I. Ярославль, ЯрГУ, 2006.
3. Климов В. С. Многомерный математический анализ. Часть I. Ярославль, ЯрГУ, 2009.
4. Климов В. С. Многомерный математический анализ. Часть II. Ярославль, ЯрГУ, 2009.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: изд-ва АСТ, Астрель, 2015. (и другие издания)

б) дополнительная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I, II, III. М.: ГИФМЛ, 1963; СПБ: Невский диалект, 2001, 2002. (и другие издания)
2. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М.: Бином, 2015 (и другие издания)
3. Климов В.С. , Ухалов А.Ю. Решение задач математического анализа с использованием компьютерной математики. Ярославль, 2014.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий.
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций.

Авторы:

Профессор кафедры
математического анализа, д.ф.-м.н. ____________ В. С. Климов
должность, ученая степень *подпись* *И.О. Фамилия*

Доцент кафедры
математического анализа, к.ф.-м.н. ____________ А. Ю. Ухалов
должность, ученая степень *подпись* *И.О. Фамилия*

Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины «Математический анализ»

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

1.Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Примеры заданий для экзамена. Семестр 1 (И-ОПК-1_1, И-ОПК-1_3)

№ 1

1. Используя принцип математической индукции, доказать равенство:

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}m^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Найти первую производную функции

$$f(x) = (0,4\cos(8x+5) - 0,6\sin 0,8x)^2.$$

3. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}.$$

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7.$$

№ 2

1. Используя принцип математической индукции, доказать равенство:

$$\sum_{m=1}^{n} m^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Найти первую производную функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}.$$

3. Найти предел последовательности

$$x_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}.$$

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

№ 3

1. Используя принцип математической индукции, доказать равенство:

$$\sum_{m=1}^{n} m^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

2. Найти первую производную функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 1} + \ln \frac{\sin^4 x}{\sin^3 x + 1}.$$

3. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2}{6n+1}.$$

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 8x^3 - x^4.$$

№ 4

1. Используя принцип математической индукции, доказать равенство:

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Найти первую производную функции

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos x}.$$

3. Найти предел последовательности

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}.$$

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2.$$

Примеры заданий для экзамена. Семестр 2 (И-ОПК-1_1, И-ОПК-1_3)

№ 1

1. Найти интеграл

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+3(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

3.Выяснить, какой интеграл больше

$$\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx.$$

4. Пусть $x\in(-1,1)$. Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}=\int_0^x \frac{1}{t}\ln\frac{1}{1-t}\,dt.$$

Подинтегральная функция предполагается равной 1 при $t=0$.

№ 2

1. Найти интеграл

$$\int_o^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arc\,tgn}{n^2+1}.$$

3. Доказать неравенство

$$0<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^5+2}}\,dx<\frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}.$$

4. Пусть $f\in\mathbb{R}[0,1]$. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_1^2 f\left(\frac{x}{2^k}\right)\,dx.$$

№ 3

1. Найти интеграл

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}.$$

3. Доказать, что если функция f непрерывна при $x \geqslant 0$ и

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a,$$

то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = a.$$

4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k^b+1}, \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

№ 4

1. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5+1}}.$$

3. Построить такую непрерывную при $x \geqslant 0$ функцию, для которой существует конечный предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

а предел функции $f(x)$ на ∞ не существует.

4.Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin^2\frac{1}{k}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

Примеры заданий для экзамена. Семестр 3 (И-ОПК-1_1, И-ОПК-1_3)

№ 1

1) Найти экстремумы функции $z = x + y$, при условии $x^2 + y^2 = 8$.

2) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$xyz = a^3 \quad \text{в точке} \quad (x_0, y_0, z_0).$$

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.

4) Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{x}{y}\, ds,$$

где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, лежащая между точками $(1, \sqrt{2})$ и $(2, 2)$.

№ 2

1) Найти экстремумы функции

$$z = -x^2 - \frac{y^2}{2}, \quad \text{при условии} \quad x + y = 1.$$

2) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$xy = z^2 \quad \text{в точке} \quad (1, 1, 1).$$

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

4) Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 + y^2)\, dy,$$

где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 5$ в положительном направлении.

№ 3

1) Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при условии} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

2) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$z = x^2 + 2y^2 \quad \text{в точке} \quad (1, 1, 3).$$

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x^2$, $y = x$.

4) Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, ds,$$

где S – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

№ 4

1) Найти экстремумы функции

$$z = x + 4y \quad \text{при условии} \quad \frac{x^2}{16} + (y+2)^2 = 2.$$

2) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{в точке} \quad (a, b, c).$$

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \ln(x+2)$, $z = \ln(6-x)$, $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$.

4) Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S z\, dx\, dy,$$

где S – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины
«Математический анализ»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс «математический анализ» является достаточно большим и сложным для усвоения. Все приводимые определения, теоремы и примеры задач можно найти в рекомендованной литературе. Однако опыт показывает, что освоить курс самостоятельно удается только очень немногим студентам. Рекомендуется регулярно посещать лекции и занятия по курсу «Практикум по математическому анализу», выполнять домашние задания. При необходимости – обращаться за консультацией к преподавателю. Посещение занятий позволит понять, какие темы и в каком объеме изучаются. Для самостоятельно работы лучше пользоваться рекомендованной преподавателем литературой и источниками.

В конце каждого семестра студенты сдают экзамен. Экзамен проводится в устной форме. При работе в дистанционном режиме экзамен может быть проведен в форму задания для самостоятельной работы. Вопросы к экзамену представлены в разделе «Содержание разделов дисциплины» настоящей программы. Примеры вариантов заданий для письменной работы приведены в Приложении 1. При устной форме экзамена, студенту предлагается билет, содержащий два теоретических вопроса. При ответе на вопросы требуется привести определения используемых понятий и сформулировать относящиеся к вопросу теоремы. В процессе ответа студенту может быть предложено решать задачу, относящуюся к теме вопросов. Примеры задач для каждого семестра можно найти в Приложении 1. Для того чтобы получить оценку «удовлетворительно», достаточно привести необходимые определения, формулировки утверждений и ответить на простые дополнительные вопросы. Для получения оценки «хорошо» или «отлично» требуется привести доказательства рассматриваемых утверждений. Если студент приводит доказательство теоремы, ему могут быть заданы вопросы для проверки понимания доказательства.