

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дополнительные главы методов оптимизации**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и вычислительная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Дополнительные главы методов оптимизации» - дать представление студентам предмете и методах линейного программирования, познакомить с основными типами задач линейного программирования и методами их решения, а также научить слушателей:

- формировать линейную модель экономической или производственной ситуации;
  - решать задачи линейного программирования геометрически и симплекс-методом;
  - для данной задачи линейного программирования строить двойственную задачу и использовать связь между задачами для отыскания оптимального решения.
- Кроме того, даются начальные сведения о геометрии выпуклых многогранников в многомерных пространствах.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Дополнительные главы методов оптимизации» является дисциплиной по выбору и относится к вариативной части Блока 1.

Дисциплина «Дополнительные главы методов оптимизации» относится к числу общепрофессиональных прикладных математических дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении таких математических дисциплин, как «Методы оптимизации», «Аналитическая геометрия», «Алгебра», «Линейная алгебра».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>ИД-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> основные методы решения задач линейного программирования, условия их применения и ограничения; <b>Уметь:</b> использовать изученные методы при решении экономических, сельскохозяйственных, производственных, военных и других задач. <b>Владеть навыками:</b>

		решения задач линейного программирования симплекс-методом, геометрическим методом решения задач линейного программирования в двумерном случае, использования жордановых исключений в линейной алгебре, а также потенциалов для решения транспортной задачи.
	<b>ИД-ПК-2.2</b> Обладает способностью применить современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Знать:</b> суть теоретических положений и выводов, методов решения задач, выполнения в полном объеме всех положений теоретического материала дисциплины. <b>Уметь</b> применять симплекс-метод для решения основной задачи линейного программирования при разных способах задания ограничений.
	<b>ИД-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата	<b>Знать</b> понимание сути методов решения задач, определять тип оптимизационной задачи и возможные методы их решения. <b>Уметь</b> применять жордановы исключения при решении задач линейного программирования и метод потенциалов при решении транспортной задачи <b>Владеть</b> техникой симплекс-метода для задач максимизации и минимизации линейных форм
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>ИД-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>Уметь</b> применять алгоритмические методы в области приложения линейного программирования <b>Владеть</b> решением и написанием алгоритма задачи оптимального производственного планирования, задачи о минимизации отходов и других.
	<b>ИД-ПК-3.2</b> Имеет навыки разработки и реализации алгоритмов в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>Уметь</b> использовать алгоритмы при построении и решении двойственных задач линейного программирования и алгоритма метода

		<p>потенциалов для транспортной задачи</p> <p><b>Владеть</b> навыками разработки и реализации алгоритмов для изучаемых задач линейного программирования</p>
	<p><b>ИД-ПК-3.3</b></p> <p>Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ</p>	<p><b>Знать</b> основные программы решения задач симплекс-методом и <b>Уметь</b> их критически анализировать</p> <p><b>Владеть</b> способностью анализа и совершенствования изученных и вновь разработанных алгоритмов для основной задачи линейного программирования.</p>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Основные понятия линейного программирования		3	6		1		7	Задания для самостоятельной работы
2	Симплекс-метод		5	10		1		7	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа 1, Контрольная работа 2
3	Теория двойственности		3	6		1		7	Контрольная работа 3
4	Приложения линейного программирования		3	6		1		8	Контрольная работа 4
5	Транспортная задача		4	8		1		7	
							0,3	12,7	Зачет
	Всего		18	36		5	0,3	48,7	108

## **Содержание разделов дисциплины:**

### **РАЗДЕЛ 1. Основные понятия линейного программирования**

- 1.1. Предмет линейного программирования (ЛП). Примеры некоторых задач ЛП (транспортная, производственная, задача о раскрое).
- 1.2. Постановка общей задачи ЛП (ОЗЛП). Понятие допустимого решения, области допустимых решений, оптимального решения задачи ЛП (ЗЛП).
- 1.3. Различные формы ЗЛП (стандартная, каноническая). Переход от одной формы ЗЛП к другой.
- 1.4. Графический метод решения ЗЛП.

### **РАЗДЕЛ 2. Симплекс-метод**

- 2.1. Жордановы исключения (метод исключений Жордана-Гаусса).
- 2.2. Построение опорного плана. Последовательное улучшение опорного плана. Применение жордановых исключений для приведения ОЗЛП к специальной форме.
- 2.3. Метод решения ОЗЛП (симплекс-метод).
- 2.4. Вырожденные ЗЛП. Пример заикливания в симплекс-методе. Эпсилон-метод преодоления заикливания симплекс-алгоритма (метод возмущений решения вырожденной ЗЛП).

### **РАЗДЕЛ 3. Теория двойственности**

- 3.1. Теория двойственности в ЛП. Правила построения двойственных задач.
- 3.2. Основные теоремы двойственности. Условия дополняющей нежесткости.
- 3.3. Двойственный симплекс-метод.

### **РАЗДЕЛ 4.**

- 4.1. Задачи оптимального производственного планирования.
- 4.2. Сельскохозяйственные задачи.
- 4.3. Задача о назначениях.
- 4.4. Военные задачи.

### **РАЗДЕЛ 5.**

- 5.1. Общая постановка транспортной задачи.
- 5.2. Метод потенциалов.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – даёт первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные

направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвящённое освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery). Договор 1506/KMP от 22.08.2018;

- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522. Лицензионный договор №Л-339 от 19/03/2013; акт №331 от 29/03/2013.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система

«БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Майорова Н.Л., Методы оптимизации: учеб.пособие для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Глазков Д.В; Яросл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2015. - 111 с.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20150201.pdf>

2. Бестужева, Л.П. Линейная алгебра: практикум/ Л.П.Бестужева, Н.Л.Майорова; Яросл. гос. ун-т им. П.Г.Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2011.- 56 с.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110204.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. Майорова Н.Л., Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»: метод.указания для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Яросл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2009. - 48 с1.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090202.pdf>

2. Карманов, В.Г. Математическое программирование: учебное пособие. / В.Г. Карманов – М.: Наука, 1975. – 272 с.

3. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / П.В. Конюховский. – СПб: Питер, 2000. - 208 с.
4. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т. 1 / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991. - 360 с.
5. Ашманов, С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. - 340 с.
6. Банди, Б. Основы линейного программирования / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. - 176 с.
7. Зуховицкий, С.М. Линейное и выпуклое программирование / С.М. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1967. - 460 с.
8. Юдин, Д.Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 776 с.

#### **в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке <http://window.edu.ru/library>).
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru) ).

#### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- -помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Доцент кафедры мат. моделирования, к.п.н. Н.Л. Майорова

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы методов оптимизации»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельной работы.**

1. Решить задачу линейного программирования геометрически:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1 - 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5$$

$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 3$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$$

$$x_i \geq 0, i = 1 - 6$$

3. Решить ЗЛП симплекс-методом, находя начальную точку методом искусственного базиса.

3.1.

$$f = -x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1...3$$

3.2

$$f = -x_1 + 10x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 13 \\ x_1 + 14,5x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1...3$$

3.3



$$f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots 4$$

3.4

$$f = -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots 4$$

3.5

$$f = -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots 4$$

4. Решить задачу линейного программирования

$$\max(3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

5. Решить задачу линейного программирования

$$\max(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3,$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

6. Решить задачу линейного программирования при ограничениях

$$\max(3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 8, \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

**Контрольная работа №1 по теме «Решение задач линейного программирования  
симплекс-методом»**

**Вариант 1.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\rightarrow \max \\x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\rightarrow \min \\-2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

**Вариант 2.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &\rightarrow \max \\2x_1 + 7x_2 + 22x_3 &\leq 2 \\2x_1 - x_2 + 6x_3 &\leq 6 \\2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\-4x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \max \\4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 5 \\5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 5 \\3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

**Вариант 3.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - 10x_2 + 100x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 0$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 5, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -6$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = -2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

#### Вариант 4.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 = 1$$

$$x_3 + x_4 + x_6 = 1$$

$$x_4 - x_5 - x_6 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 6$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10$$

$$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20$$

$$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

#### Вариант 5.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$2x_1 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &\rightarrow \max \\
x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 2 \\
x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 2 \\
x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 &= 2 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1-5
\end{aligned}$$

### Вариант 6.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\rightarrow \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1-4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\
x_1 - x_4 - 2x_6 &= 5 \\
x_2 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 &= 3 \\
x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 &= 5 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1-6
\end{aligned}$$

### Вариант 7.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1-4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &\rightarrow \max \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &= 0 \\
2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 - x_7 &= 0 \\
-x_3 + 2x_5 + 4x_7 &= 2 \\
2x_1 + x_2 - x_4 + 4x_7 &= 4 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1-7
\end{aligned}$$

### Вариант 8.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& x_1 + \quad \quad x_4 \rightarrow \max \\
& x_1 + x_2 \quad \quad = 1 \\
& \quad \quad x_2 - x_4 = 2 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1-4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
& -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12 \\
& \quad \quad x_1 + x_4 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \leq 20 \\
& \quad \quad x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 10 \\
& -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 24
\end{aligned}$$

### Вариант 9.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1 \\
& \quad \quad x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1 \\
& \quad \quad x_2 \quad \quad - x_6 = 2 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1-6
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
& \quad \quad x_4 - x_5 \rightarrow \max \\
& 2x_1 \quad \quad + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& \quad \quad 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& \quad \quad x_1 - 2x_2 \quad \quad - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1-5
\end{aligned}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за обе решенные задачи – 4, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

### Контрольная работа №2 по теме «Симплекс-метод»

## Вариант 1

1. Решить следующую ЗЛП, используя симплекс-алгоритм:

$$L(X) = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -6, \\ 3x_1 + x_3 \leq 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

2. Что можно сказать о ЗЛП, представленной в виде симплекс-таблицы

	1	$-\dot{x}_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$z$	11	0	0	1	2
$\dot{x}_5$	-1	0	2	3	4
$\dot{x}_6$	4	0	12	8	-9
$x_7$	0	0	2	-3	5
$x_8$	1	0	1	1	1

3. Решить ЗЛП графическим методом

$$L(X) = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за три решенные задачи – 6, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

### **Контрольная работа №3 по теме «Приложения линейного программирования»**

1. Из труб длиной 25 м требуется нарезать трубы длиной 8, 12 и 16 м в количестве 100, 50 и 30 соответственно. Определить план раскроя с минимальными отходами, изрезав не более 80 труб.
2. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. у.е. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 м<sup>2</sup>. Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 5 тыс. у.е., занимающие производственную площадь 6 м<sup>2</sup> (с учетом проходов) и дающие 8 тыс. единиц продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. у.е., занимающие площадь 12 м<sup>2</sup> и дающие за смену 3 тыс. единиц продукции. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности нового участка.
3. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам, причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 единицу времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы. Затраты соответствующих факторов в у.е. при работе по разным технологическим процессам в течение 1 единицы времени показаны в таблице:

Произв. факторы \ Тех. процесс	1	2	3	4	5	Объем ресурсов
Сырье	12	15	10	12	11	1300
Электроэнергия	0,2	0,1	0,2	0,25	0,8	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладные расходы	6	5	4	6	4	800

Найти программу максимального выпуска продукции.

4. Произвести распил 5-метровых бревен на брусья размерами 1,5; 2,4; и 3,2 м в отношении 5:4:2 так, чтобы минимизировать общую величину отходов.
5. Имеется три вида ресурсов: I, II и III, которые используются для производства трех видов продукции: А, Б и В. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в таблице:

Ресурс	Норма расхода на единицу продукции		
	А	В	С
I	1	2	0
II	2	1	0
III	0	1	1

В распоряжении предприятия находятся 500 единиц ресурса I, 550 единиц ресурса II и 200 единиц ресурса III. Прибыль от реализации единицы продукции А составляет 3 у.е., продукции Б - 4 у.е., продукции В - 1 у.е. Определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли.

6. Полосы материала длиной 3 м кроются на детали длиной 1,6; 1; 0,8 м, которые входят в комплект в количестве 2, 1 и 4 штуки соответственно. Определить план раскроя с минимальными расходами, если в наличии имеются 60 полос материала и требуется соблюсти комплектность.

7. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В таблице указаны мощности станков (тыс. станко-ч), ресурсы пряжи и красителей (тыс. кг), производительность станков по каждому виду ткани (м/ч), нормы расхода пряжи и краски (кг на 1000 м) и цена (у. е.) 1 м ткани:

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и норма расхода		
		1	2	3
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 м ткани составляет соответственно 3, 5 и 15 у.е.

8. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м<sup>3</sup> досок I типа и 1000 м<sup>3</sup> II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 300 чел.-ч. В таблице приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 единицы изделия и прибыль на 1 единицу изделия:

Ресурсы	Затраты на 1 единицу изделия			
	Стол	Стуль	Бюро	Кн. шкафы
Доски I типа, м <sup>3</sup>	5	1	9	12
Доски II типа, м <sup>3</sup>	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2	5	10
Прибыль, у.е./шт.	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если отношение количества столов к количеству стульев равно 1 : 6.

9. Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок типов А и В для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется 2 заготовки типа А и 10 заготовок типа В. Возможны 4 варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок А и В, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, и отходы от раскроя указаны в таблице.

Вариант раскроя	Заготовка А, шт.	Заготовка В, шт.	Отходы от раскроя, ед.
I	4	0	12
II	3	3	5
III	1	9	3
IV	0	12	0

Какое количество листов проката нужно раскроить каждым вариантом, чтобы отходы от раскроя были наименьшими?

10. Фабрика по производству мороженого может выпускать два сорта мороженого: молочное и сливочное. При производстве мороженого используют три вида сырья: молоко, дешевые наполнители и дорогие наполнители, запасы которых составляют 5 т, 3 т и 5.7 т соответственно. Известны удельные затраты сырья для каждого из сортов и цены продукции. Для молочного мороженого они составляют 0.5 кг, 0.1 кг и 0.4 на 1 кг мороженого, а для сливочного - 0.2 кг, 0.3 и 0.5 кг на 1 кг мороженого. Цена



молочного мороженого составляет 200 рублей за 1 кг, а сливочного - 300 рублей за 1 кг. Требуется построить план производства, который обеспечивает максимум дохода, и найти оптимальный доход.

11. Фирма по производству творожной пасты может выпускать два сорта пасты, используя три вида сырья - молоко, наполнители и специальные добавки. Затраты молока на килограмм пасты первого вида составляют 0.1 кг, а второго вида - 0.5 кг. Затраты наполнителей на килограмм пасты первого вида составляют 0.2 кг, а второго вида - 0.1 кг. Наконец, затраты добавок на килограмм пасты первого вида составляют 0.1 кг, а при производстве второго вида пасты не используются. Запасы молока составляют 350 кг, наполнителей - 160 кг, добавок - 60 кг. Цена 1 кг первого вида пасты составляет 200 рублей, а второго вида - 300 рублей. Найти план производства, максимизирующий доход от продажи творожной пасты, и соответствующее значение дохода.

**Система выставления оценки:** каждому обучающемуся предлагается одна задача на время в тридцать минут. Требуется составить математическую модель и решить задачу симплекс-методом. За полностью правильное решение задачи выставляется оценка отлично. При наличии мелких недочетов ставится оценка хорошо. При наличии более грубых ошибок и неправильный ответ из-за арифметических ошибок выставляется оценка удовлетворительно. Не отвечающее всем требованиям решение оценивается как неудовлетворительное.

#### **Контрольная работа №4 по теме “Двойственность в линейном программировании”**

##### **Вариант 1**

*Построить двойственные задачи.*

$$\begin{aligned} L(X) &= x_1 + 2x_2 - 5x_4 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 \leq 11, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(X) &= 2 + x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 9, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \geq -3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### **Вариант 2**

*Для каждой из следующих задач линейного программирования составить двойственную задачу и решить обе эти задачи.*

$$\begin{aligned} L(X) &= x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(X) &= 3x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} -x_2 + x_3 \leq 3, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases} \end{aligned}$$

### **Вариант 3**

Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач.

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$L(X) = 100 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 100, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 \leq 60, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за обе решенные задачи – 4, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения зачета по курсу «Дополнительные главы методов оптимизации»

1. Предмет математического программирования. Предмет ЛП.
2. Постановка задачи оптимального производственного планирования. Математическая модель.
3. Задача о раскрое. Постановка и математическая модель.
4. Транспортная задача. Постановка и математическая модель.
5. Сформулируйте общую задачу ЛП. Может ли система ограничений ОЗЛП содержать строгие неравенства?
6. Запишите предложенную задачу ЛП в стандартной и канонической формах.
7. Что называется допустимым (оптимальным) решением ЗЛП? Что понимается под областью допустимых решений (ОДР) задачи ЛП?
8. Какие случаи возможны при решении ЗЛП?
9. В чем заключается геометрическая интерпретация решения задачи ЛП с двумя (тремя) переменными?
10. Сколько переменных может содержать ЗЛП, которую можно решить графически?
11. Как изменяются элементы разрешающей строки (разрешающего столбца) при жордановых исключениях? Как изменяется разрешающий элемент?
12. Какой план называется базисным? Чем отличается базисный план от опорного плана?
13. Какой план ЗЛП называется вырожденным? Какая задача ЛП называется вырожденной?
14. Может ли оптимальный план ЗЛП быть вырожденным?
15. Сформулируйте условие опорности текущего базисного плана в табличной реализации симплекс-метода.

16. На каком этапе симплекс-алгоритма можно сделать вывод о несовместности ЗЛП? Сформулируйте условие несовместности ЗЛП по текущей симплекс-таблице.
17. Сформулируйте условие оптимальности текущего базисного плана в табличной реализации симплекс-метода.
18. На каком этапе симплекс-алгоритма можно сделать вывод о неограниченности ЗЛП? Сформулируйте условие неограниченности ЗЛП по текущей симплекс-таблице.
19. Если ЗЛП не ограничена, то можно ли то же самое утверждать и об ОДР?
20. Как выбирается разрешающий элемент на этапе построения (последовательного улучшения) опорного плана?
21. Сформулируйте основные этапы симплекс-метода.
22. Какие проблемы возникают при решении вырожденных задач с помощью симплекс-метода?
23. В чем основная идея метода возмущений?
24. Дайте определение двойственной задачи.
25. Что можно сказать о решении двойственной задачи, если основная задача несовместна?
26. Сформулируйте первую (вторую) теорему двойственности?
27. В каких ситуациях могут быть реализованы преимущества двойственного симплекс-метода?
28. Дайте классификацию точек выпуклых множеств.
29. Сформулируйте теорему о представлении точки выпуклого многогранного множества.

### **Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы методов оптимизации»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Дополнительные главы методов оптимизации» являются лекции. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с теорией задач линейного программирования.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных и самостоятельных работ.

Итоговая аттестация по курсу предусматривает проведение зачета. Зачетные курсы, как правило, вызывают у студентов меньше тревог и волнений, нежели экзаменационные. Как следствие, посещаемость зачетных курсов «среднестатистическими» студентами довольно быстро снижается. Естественно, это приводит к нежелательным результатам, как для студентов, так и для преподавателя, поскольку процесс сдачи зачета существенно затягивается. Основной способ борьбы с таким положением дел - учитывать текущую работу студентов в ходе практических занятий. На основании успешного написания итоговой контрольной работы, которая включает в себя основные задачи курса, а также по результатам активной работы в ходе семестра студентам может быть поставлен «зачет» досрочно. При этом студенты заранее ставят в известность, что атмосфера «официального» зачета будет существенно приближена к экзаменационной. В «зачетный» билет наряду с практическими задачами, входят также и теоретические вопросы. Такой подход, как нам кажется, до некоторой степени позволяет исправить ситуацию с низкой посещаемостью курса студентами, а также их слабой заинтересованностью в практической работе в ходе семестра. Необходимым условием получения «зачета» является умение пользоваться симплекс-методом для решения общей задачи линейного программирования. Кроме того, в качестве теоретического вопроса на зачете может быть предложен вопрос, связанный с обоснованием сходимости данного алгоритма и границами его применимости. Количество вопросов и задач, предлагаемых студенту на зачете, зависит от степени его участия в работе группы в ходе практических занятий. Но в любом случае для получения «зачета» студенту в ходе курса необходимо решить, как минимум, четыре типовые задачи, среди которых, разумеется, имеется задача, предполагающая использование при ее решении симплекс-метода.