Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Кафедра микроэлектроники
и общей физики

**В. П. Алексеев, П. А Кузнецов,
С. Б. Московский, Е. О. Неменко,
В. А. Папорков, Н. А. Рудь,
Е. В. Рыбникова**

Механика
Физический практикум

Обработка результатов прямых и косвенных измерений

Практикум

Ярославль
ЯрГУ
2021

УДК 531(076.5)
ББК В2я73
М55

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2021 года

Рецензент:
кафедра
микроэлектроники и общей физики

М55 **Механика. Физический практикум : Обработка результатов прямых и косвенных измерений : практикум** / В. П. Алексеев [и др.]; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2021. – 74 с.

Практикум представляет собой руководство к выполнению двух первых фронтальных лабораторных работ по механике. Содержит основные методы обработки результатов физического эксперимента (включая статистические) при прямых и косвенных измерениях.

Предназначено для студентов первого курса физического факультета ЯрГУ, обучающихся по направлениям Физика; Радиофизика; Радиотехника; Инфокоммуникационные технологии и системы связи; Электроника и наноэлектроника.

Создано на основе ранее изданного учебного пособия 2012 г. [1].

Рис. 7. Табл. 6. Библиогр.: 13.

УДК 531(076.5)
ББК В2я73

Общие методические указания

Наука начинается с тех пор,
как начинают измерять.
Точная наука.
Д. И. Менделеев

Физические величины и их измерение

Физика – наука экспериментальная. Под экспериментом понимают наблюдение исследуемого явления в контролируемых условиях, которые позволяют следить за его ходом и воспроизводить каждый раз при соблюдении тех же самых условий. Целью эксперимента является поиск таких параметров физических явлений, которые можно измерить соответствующими методами, получив численные значения.

Свойства физических объектов и процессов, которые можно охарактеризовать количественно, прямым или косвенным образом, называют физическими величинами. Физические величины можно разделить на две категории:

- характеризующие свойства и состояние тел (масса, объем, плотность, электрическое сопротивление, давление и др.);
- характеризующие явления и процессы, протекающие во времени (линейная скорость, сила тока, работа и т. д.).

Чтобы иметь представление о физической величине с количественной точки зрения, необходимо выразить ее числом, т. е. измерить.

Измерение – это совокупность операций для определения отношения одной (измеряемой) физической величины к другой однородной величине, принятой за единицу измерений, хранящуюся в техническом средстве (средстве измерений).

Число, которое получается при измерениях, называют числовым значением физической величины. Таким образом, любая физическая величина равна произведению численного значения на единицу измерения. Численное значение совместно с обозначением используемой единицы называется значением физической величины.

Физическая величина и ее размерность – это не одно и то же. Одинаковую размерность могут иметь совершенно разные по своей природе физические величины, например работа и момент силы. Размерность не содержит информации о том, является ли данная физическая величина скаляром, вектором или тензором. Однако величина размерности важна для проверки правильности соотношений между физическими величинами.

Необходимо научиться не только измерять различные физические величины, но и находить связь между ними, проверять и сопоставлять результаты эксперимента с выводами теории. Результаты любого физического эксперимента нужно уметь проанализировать.

Обработка результатов измерений

Измерения проводят, чтобы получить численные значения физической величины. При прямых измерениях они получаются непосредственно, а при косвенных вначале определяют одно или несколько значений исходных физических величин, а затем по их значениям вычисляют нужную.

Опыт показывает, что при многократном повторении одного и того же измерения с достаточно высокой точностью получаются разные численные значения. Так бывает, даже если делать все операции совершенно одинаково.

Несмотря на высокую чувствительность наших органов чувств, следует строить эксперимент таким образом, чтобы исключить влияние восприятия экспериментатора на точность результата или свести его к минимуму. Конечные значения должны определяться характеристиками используемых приборов, а не временем реакции исследователя, остротой его зрения и т. п.

Чтобы результаты измерений получились более точными, необходимо тщательно выполнять следующие операции:

1) проверять средства измерения и правильно применять их;

2) снимать показания со средств измерений с практически необходимой точностью;

3) вычислять искомую величину по результатам измерений с соблюдением правил приближенных вычислений и с учетом погрешности измерений.

Лабораторная работа № 1

Статистическая обработка результатов прямых измерений

Цель работы:

1) изучить теорию статистической обработки результатов прямых измерений;

2) определить доверительный интервал методом среднего арифметического и статистическим способом по заданному набору значений измеряемой величины с учётом обусловленной доверительной вероятности.

1.1 Краткая теория

1.1.1 О точности и ошибках измерений

Любые результаты измерений физических величин никогда не являются абсолютно точными, а только приближенными. Как бы мы ни совершенствовали методы измерений, мы можем только приблизиться к таковым, т. е. истинным, но никогда не достигнем абсолютно точного результата. Абсолютно точное (истинное) значение физической величины X_0 является идеализацией. Истинное значение величины надо рассматривать лишь как значение, идеально отображающее в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство данного физического объекта. Оно является пределом, к которому приближается значение физической величины с повышением точности измерения. Поэтому сравнивать какую-либо измеренную величину мы можем только с табличным (общепринятым) значением, которое получено наиболее совершенным методом и указано в справочной литературе.

На практике применяют понятие действительного значения величины X_i, под которым понимается значение, определенное экспериментально – с помощью средств измерения – и приближающееся к истинному значению в такой мере, в которой оно может быть принято для данной конкретной цели вместо истинного значения.

Под термином «точность измерений» понимают степень приближения результатов измерения к некоторому действительному значению измеряемой величины. Она определяется той наименьшей долей единицы измеряемой величины, до которой можно вести измерения с уверенностью в правильности результата, и является качественной характеристикой применяемого метода измерений. Точность измерений всегда конечна и ограничена возможностями прибора, трудностью учета всех побочных факторов, влияющих на результат измерения, а также неполнотой наших знаний об исследуемом явлении. Точность прибора определяется наименьшим его показанием. Например, наименьшее показание ученической линейки – 1 мм, штангенциркуля – 0,1 мм, микрометра – 0,01 мм. Для количественной оценки совершенства метода измерений используется понятие «погрешность (ошибка) измерений». Таким образом, любые измерения производятся с какими-либо погрешностями (ошибками). Термины «точность» и «погрешность» неразрывно связаны друг с другом: чем меньше погрешность, тем выше точность. Оценка погрешности – одна из важнейших задач обработки результатов измерений, обеспечивающая их достоверность.

В науке идет постоянная борьба за точность, т. к. каждый знак после запятой может скрывать новый физический эффект.

К примеру, вначале метр определялся как 1/40000000 часть окружности земного шара по Парижскому меридиану. В 1889 г. был изготовлен точный международный эталон метра из сплава платины и иридия, имевший поперечное сечение в виде буквы «Х». Его копии были переданы на хранение в страны, в которых метр был признан в качестве стандартной единицы длины. Этот эталон всё ещё хранится в Международном бюро мер и весов как музейный экспонат, хотя больше по своему первоначальному назначению не используется. С 1960 г. было решено отказаться от использования изготовленного людьми предмета в качестве эталона метра, и с этого времени по 1983 г. метр определялся как число $1\ 650\ 763,73$, умноженное на длину волны оранжевой линии (6056 Å) спектра, излучаемого изотопом криптона ^{86}Kr в вакууме. С 1983 г. за эталон метра принята длина отрезка, который свет проходит в вакууме за 1/299792458 долю секунды. Скорость света в вакууме очень точно измерена и равна $c = 299792458$ м/с. Это одна из фундаментальных физических констант.

1.1.2 Типы погрешностей (ошибок) измерений

Поскольку значения физических величин находят опытным путем, их результаты всегда содержат некоторую ошибку ΔX. Поэтому в задачу измерений входит не только нахождение максимально точного значения величины, а определение интервала погрешностей, в котором оно лежит, а также, в ряде случаев, вероятности, с которой результаты измерений в него укладываются.

Систематическая погрешность

Ошибки, величина которых одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов, называются систематическими. Одной из основных забот при производстве измерений должен быть учет, а то и исключение систематических ошибок, которые в ряде случаев могут быть так велики, что совершенно исказят результаты измерений.

Систематические ошибки можно разделить на три группы:

Группа 1 - ошибки, природа которых известна и величина может быть достаточно точно определена. Их можно в дальнейшем учесть и исключить, скорректировав конечный результат. Такие ошибки называются поправками. При определении длины к поправкам относятся, например, удлинение, обусловленное изменением температуры измеряемого тела и измерительной линейки. Источники таких ошибок нужно тщательно анализировать, величины поправок определять и учитывать в окончательном результате. Величина поправок, которые есть смысл вводить, устанавливается в зависимости от величин других ошибок, сопровождающих измерение. Также к таким ошибкам относятся весьма распространённые случаи, когда отсчёт измерения приходится вести не от нулевого значения шкалы прибора.

Группа 2 - ошибки известного происхождения, но неизвестной величины, их ещё называют инструментальными. К их числу относится погрешность измерительных приборов, которая определяется классом точности или иным способом. В отличие от первой группы, эти систематические ошибки не могут быть исключены, но их наибольшее значение известно. Более конкретно о их величине ничего сказать невозможно.

Группа 3 - методологические ошибки. Это самые опасные ошибки, о существовании которых мы не подозреваем, хотя их величина может быть очень значительна. Такие ошибки возникают, например, при измерении падения напряжения на высокоомном участке электрической цепи, когда его сопротивление сравнимо с сопротивлением используемого вольтметра. Для устранения ошибок третьей группы нужно всегда очень аккуратно продумывать методику измерений, тщательно учитывая параметры приборов. Чем сложнее опыт, тем больше вероятность того, что какой-то источник систематических погрешностей может остаться неучтенным.

Случайная погрешность

Погрешности, величина которых различна даже для измерений, выполненных одинаковым образом, называют случайными. Случайные ошибки обязаны своим происхождением ряду причин, действие которых в каждом отдельном измерении неодинаково и не может быть учтено. Источниками случайных ошибок при физических измерениях могут являться различные изменения в окружающей среде (температурные, оптические, электрические, магнитные воздействия, изменение влажности, колебание воздуха), колебания питающих напряжений, трение, вибрации отдельных частей прибора и множество других причин, которые практически невозможно исключить.

Определить величину случайной погрешности для одного измерения принципиально невозможно, поэтому приходится многократно повторять измерения, а полученную совокупность экспериментальных результатов обрабатывать, применяя методы теории вероятностей и математической статистики.

Промахи

Погрешности результатов отдельного измерения или наблюдения, резко отличающиеся от остальных результатов, называются промахами. Их источником являются небрежность при отсчете по прибору, неразборчивая запись показаний, неправильное включение прибора или нарушение условий, в которых должен проводиться опыт. Для устранения промахов нужно соблюдать аккуратность и тщательность в работе и записях результатов. Такие ошибочные данные следует отбросить и сделать вместо них повторные (контрольные) измерения. Иногда можно выявить промах, повторив измерение в несколько отличных условиях, например перейдя на другой участок шкалы прибора. Способы обнаружения промахов будут описаны ниже, в соответствующем разделе.

1.1.3 Способы представления погрешности

Когда говорят, например, что "размер измерен с погрешностью в 1 миллиметр возникает вопрос: а хорошо это или плохо? Это зависит от того, что, собственно говоря, измеряется. Длина комнаты – это отличный результат. Диаметр карандаша – очень грубое измерение. Поэтому применяют две формы представления ошибок, называемые абсолютной и относительной погрешностями.

Абсолютная погрешность

Каждое измеренное значение $X_{\text{изм}}$ определяемой величины X имеет некоторую погрешность ΔX, выраженную в тех же единицах, что и измеряемая величина. Такая погрешность характеризует совершенство метода измерений в количественном выражении, т. е. точность измерения величины X. Величину ΔX называют абсолютной погрешностью.

Таким образом, действительное значение X лежит в интервале

$$(X_{\text{изм}} - \Delta X) < X < (X_{\text{изм}} + \Delta X),$$

где $X_{\text{изм}}$ – значение величины X, полученное при измерении.

Абсолютная погрешность ΔX показывает тот интервал вокруг измеренного значения $X_{\text{изм}} \pm \Delta X$, в котором может находиться действительное значение измеряемой величины и указывается в тех же единицах.

Относительная погрешность

Относительная погрешность – это погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности ΔX к измеренному значению физической величины $X_{\text{изм}}$. Относительную погрешность принято обозначать буквой ε. Такая погрешность описывает «удельный вес» абсолютной ошибки в измеренном значении величины, что значительно полнее характеризует качество результатов измерений. Исходя из этого, относительная погрешность – величина безразмерная, и её обычно выражают в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X_{\text{изм}}} 100~\%.$$

1.1.4 Классы точности приборов

Для характеристики большинства измерительных приборов часто используют понятие класса точности. Класс точности представляет собой приведенную погрешность $\varepsilon_{\text{п}}$.

Приведенная погрешность $\varepsilon_{\text{п}}$ – это отношение максимальной абсолютной погрешности прибора ΔX к предельному значению величины, измеряемому данным прибором X_{max}

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{\Delta X}{X_{max}} 100\%.$$

Таким образом, класс точности прибора – это абсолютная погрешность прибора, выраженная в процентах от максимального значения на его шкале.

По приведенной погрешности приборы делятся на семь классов: 0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 1.5; 2.5; 4. Приборы класса точности 0.1; 0.2; 0.5 считаются прецизионными и применяются для точных лабораторных измерений. Для технических измерений используют приборы классов 1.0; 1.5; 2.5; 4. Приборы, у которых значение класса выше 4, считаются индикаторами, поскольку об измерениях ими с какой-либо приемлемой точностью речь не идёт. Класс точности указывается на шкале прибора или в документации к нему.

Если у нас есть вольтметр с пределом измерения $0 \div 150$ В, на шкале которого указан класс точности 0.5, то это означает, что показания прибора имеют ошибку в измерении напряжения не более 0.75 В. Очевидно, что нет никакого смысла пытаться с помощью такого вольтметра измерять напряжение с точностью до 0.1 В. Таким образом, если мы, измеряя напряжение с помощью вышеуказанного вольтметра, получили $U = 67,5$ В, то результат следует записать в виде $U = 67.50 \pm 0.75$ В.

Погрешности цифровых приборов обычно указываются в их технической документации. Если таковая отсутствует, то величину ошибки можно принять следующим образом. Для измерительных (прецизионных) приборов она составляет $1/2$ от единицы наименьшего разряда в данном диапазоне (поскольку такие приборы, как правило, являются многопредельными). Т. е. если мы имеем вольтметр, который измеряет значения напряжения в интервале от -9.999 В до $+9.999$ В, то его погрешность будет равна ± 0.0005 В. Для приборов технического класса величина погрешности принимается в единицу наименьшего разряда, для вольтметра с таким же диапазоном она будет равна ± 0.001 В.

Для приборов, класс точности которых не указан, принято считать, что их погрешность равна половине цены деления шкалы. (Если к какому-либо прибору понятие цены деления неприменимо, то погрешность принимают равной половине точности прибора.)

1.1.5 Основные понятия и методы статистической обработки результатов измерений

Вероятность случайного события

Случайными называются такие события, о появлении которых не может быть сделано точного предсказания. Характеристикой частоты появления случайного события является его вероятность. Если возможно n благоприятных и m неблагоприятных событий, то вероятность благоприятного события $\alpha = P(n)$ равна

$$\alpha = P(n) = \frac{n}{m+n}, \tag{1.1}$$

а неблагоприятного

$$P(m) = 1 - P(n) = \frac{m}{m+n}. \tag{1.2}$$

Средняя квадратичная и средняя арифметическая ошибки

Для того чтобы выявить случайную ошибку измерений, необходимо повторить измерение несколько раз. Если каждое измерение дает несколько отличные от других измерений результаты, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная ошибка играет существенную роль.

В подавляющем большинстве простых измерений случайные ошибки подчиняются следующим закономерностям:

- Ошибки измерений Δx_i могут принимать непрерывный ряд значений.
- При большом числе наблюдений ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто.
- Частота появления ошибок уменьшается с увеличением величины ошибки. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Закон распределения ошибок описывается формулой Гаусса:

$$Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{x}-x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.3}$$

где $Y(x)$ – плотность распределения случайной величины x (плотность вероятности), $\overline{x}$ – среднее значение величины x, σ^2 – дисперсия измерений. Саму же величину σ называют генеральным средним квадратичным

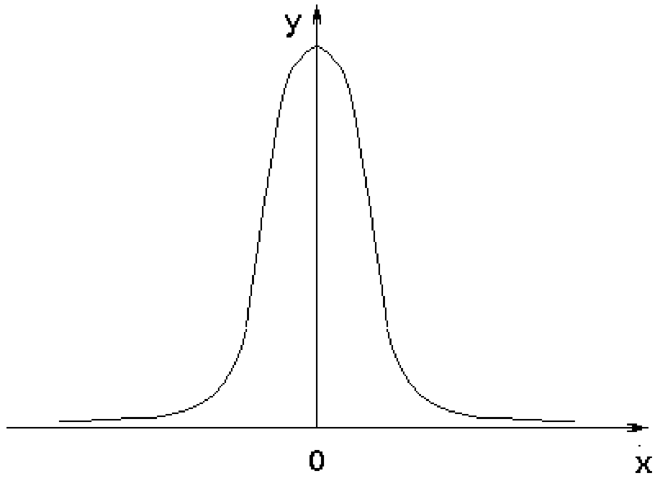

Рис. 1.1. Форма кривой Гаусса

отклонением. Сразу оговорим, что под термином «среднее значение» мы будем подразумевать среднее арифметическое:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.4}$$

Другие виды средних значений (которых существует великое множество) будут указываться отдельно, по мере необходимости.

Вообще говоря, дисперсия σ^2 – очень важное понятие, которое используется при математической обработке физических измерений. Она характеризует степень влияния случайных погрешностей на результаты измерений. Чем меньше σ^2, тем точнее проведено измерение. Если её величину определять на каждом шаге итерации и сравнивать текущее и предыдущее значения σ^2, можно управлять выбором расчётных параметров, с тем чтобы быстро привести результат вычислений к заданному уровню точности. Более подробная информация о распределении Гаусса содержится в Приложении В. Форма кривой Гаусса показана на рис. 1.1.

Чаще всего ошибкой измерения называют среднюю квадратичную погрешность. Различают среднюю квадратичную погрешность единичного измерения и среднюю квадратичную погрешность среднего арифметического. Средняя квадратичная погрешность единичного измерения (стандартное отклонение) имеет вид:

$$S_n = \sqrt{\frac{(\overline{x} - x_1)^2 + (\overline{x} - x_2)^2 + ... + (\overline{x} - x_n)^2}{n-1}} = \\ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)}{n-1}}, \tag{1.5}$$

где $\overline{x}$ – среднее арифметическое.

Примечание. Многие программы обработки данных имеют встроенную функцию для вычисления стандартного отклонения. К примеру в пакете *MS Excel* эта функция называется **СТАНДОТКЛ**, в *Open Office Calc* и *Libre Office Calc* – **STDDIV**, в *MATLAB* и его клонах (*Octave*, *Scilab*, *FreeMat*, *O-Matrix* и т. п.) – **std(x)**, где “x” – массив данных.

Средняя квадратичная погрешность среднего арифметического:

$$S_{n,\overline{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)}{n(n-1)}}. \tag{1.6}$$

Если число наблюдений очень велико, то величина S_n стремится к σ.

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Собственно говоря, именно этот предел и называется средней квадратичной ошибкой. Квадрат этой величины называется дисперсией измерений. Иногда применяется среднеарифметическая ошибка:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}|\overline{x} - x_i|}{n}. \tag{1.7}$$

Значение средней арифметической ошибки ρ определяется соотношением

$$\rho = \lim_{n\to\infty} Z_n. \tag{1.8}$$

При достаточно большом числе наблюдений (практически n $>$ 30) существуют зависимости $S_n = 1.25Z_n$ или $Z_n = 0.8S_n$.

Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала

Предположим, что значение измеряемой величины равно x . Ее среднее арифметическое значение, полученное в результате серии измерений, равно $\overline{x}$, а погрешность измерений этой величины – Δx. Вероятность α того, что результат измерений отличается от среднего значения на величину, не большую чем Δx

$$\alpha = P[(\overline{x} - \Delta x) < x < (\overline{x} + \Delta x)], \tag{1.9}$$

носит название ***доверительной вероятности***, а интервал значений от $\overline{x} - \Delta x$ до $\overline{x} + \Delta x$ соответственно называется ***доверительным интервалом***. Выражение (1.9) означает, что с вероятностью, равной α, результат измерений не выходит за пределы доверительного интервала $(\overline{x} - \Delta x) \div (\overline{x} + \Delta x)$. Разумеется, для большей доверительной вероятности большим получается и доверительный интервал.

Для любой величины доверительного интервала по формуле Гаусса может быть рассчитана соответствующая доверительная вероятность. Эти вычисления были проделаны, и их результаты сведены в таблицу Ж.1 (Приложение Ж).

Приведем примеры пользования таблицей Ж.1.

1. Пусть для некоторого ряда измерений получены

$$\text{x} = 1.27; \quad \sigma = 0.032.$$

Какова вероятность α того, что результат отдельного измерения не выйдет за пределы, определяемые неравенством

$$1.26 < x_i < 1.28?$$

Доверительные границы равны ± 0.01, что составляет в долях σ

$$0.01/0.032 = 0.31 = \varepsilon.$$

Из таблицы Ж.1 находим, что доверительная вероятность для $\varepsilon = 0.3$ равна 0.24. Иначе говоря, менее 1/4 измерений уложится в интервал ошибок ± 0.01.

2. Какой доверительный интервал нужно выбрать для тех же измерений, чтобы примерно 98 % результатов попали в него?

Из таблицы Ж.1 находим, что значению $\alpha = 0.98$ соответствует значение $\varepsilon = 2.4$, следовательно, $\Delta x = \sigma\varepsilon = 0.032 \cdot 2.4 \approx 0.077$ и указанной доверительной вероятности соответствует интервал

$$1.193 < x < 1.347,$$

или, округляя,

$$1.19 < x < 1.35.$$

Результат записывают в виде

$$\text{x} = 1.27 \pm 0.08$$

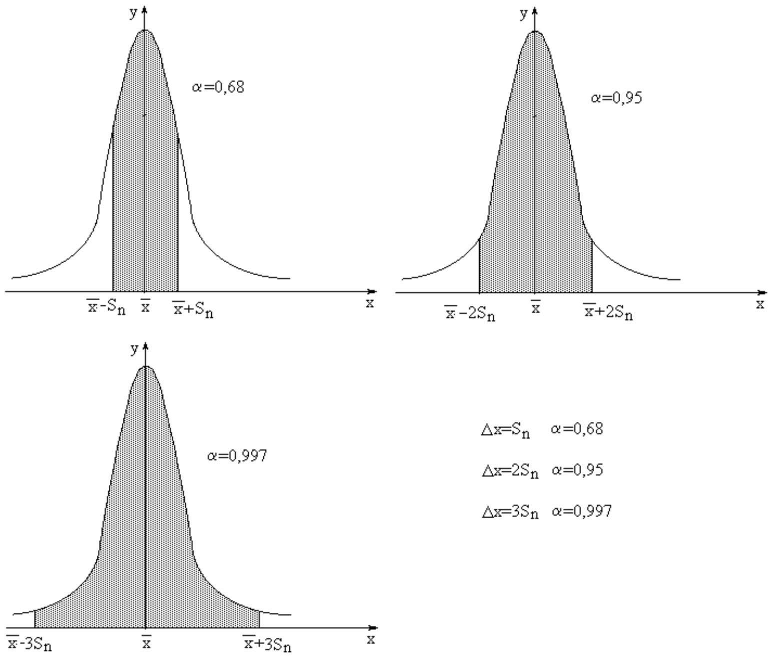

Рис. 1.2. Типовые значения доверительной вероятности при доверительном интервале $\Delta x = S_n$, $\Delta x = 2S_n$ и $\Delta x = 3S_n$

с указанием доверительной вероятности $\alpha = 0.98$.

Таким образом, для нахождения случайной ошибки нужно определить два числа: доверительный интервал (величину ошибки) и доверительную вероятность.

Для погрешности $\Delta x = S_n$ доверительная вероятность α будет составлять 0.68. Для $\Delta x = 2S_n$ – 0.9 и для $\Delta x = 3S_n$ – 0.997 (см. рис. 1.2). Приведенные здесь три значения α полезно помнить, так как обычно, когда в книгах или статьях дается значение средней квадратичной ошибки, уже не указывается соответствующая ей доверительная вероятность.

Закон сложения случайных ошибок

Если измеряемая величина z является суммой (или разностью) двух величин x и y, результаты измерений которых независимы, тогда дисперсии S_z этих величин связаны соотношением

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2$$

или

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}, \tag{1.10}$$

т. е. средняя квадратичная ошибка суммы (или разности) двух (или нескольких величин) независимых величин равна квадратному корню из суммы средних квадратичных ошибок отдельных слагаемых. Для средних арифметических ошибок закон сложения будет тот же самый:

$$Z_z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}. \tag{1.11}$$

Из закона сложения ошибок следуют два чрезвычайно важных вывода:
а. Вклад отдельных ошибок очень быстро падает по мере их уменьшения. Этот вывод всегда нужно иметь в виду и при повышении точности измерений в первую очередь уменьшать ошибку, имеющую большую величину;
б. Средняя квадратичная погрешность среднего арифметического равна средней квадратичной погрешности отдельного результата, деленной на квадратный корень из числа измерений n:

$$S_z = \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{1.12}$$

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа наблюдений. Разумеется, данное рассуждение относится лишь к измерениям, при которых точность результата полностью определяется случайной ошибкой.

Определение доверительного интервала и доверительной вероятности

Очевидно, важно знать, насколько может уклоняться от истинного значения x_0 среднее арифметическое $\overline{\mathrm{x}}$ измерений. Для этого можно воспользоваться таблицей Ж.1, взяв вместо величины σ_{x_i} величину $\sigma_{x_{\text{ср}}}$, т. е.

$$\sigma_{x_{\text{ср}}} = \frac{\sigma_{x_i}}{\sqrt{n}}. \tag{1.13}$$

Тогда для аргумента ε, который используется в таблице Ж.1, справедлива зависимость

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{x_{\text{ср}}}} = \frac{\Delta x \sqrt{n}}{\sigma_{x_i}}. \tag{1.14}$$

При применении формул (1.13) и (1.14) считается известной средняя квадратичная погрешность σ. Для того чтобы определить последнюю, нужно сделать очень много измерений, что не всегда возможно и удобно. В тех случаях, когда выполняются измерения с помощью уже хорошо исследованного метода, ошибки которого известны, заранее известна и величина σ. Однако, как правило, погрешность метода приходится определять в процессе измерений. Обычно можно определить только величину S_n, соответствующую сравнительно небольшому числу измерений (см. формулу 1.5). Если для оценки доверительной вероятности α

считать, что S_n совпадает с σ, и пользоваться таблицей Ж.1, то получаются неверные значения α.

Чтобы учесть это обстоятельство, интервал Δx можно представить в виде

$$\Delta x = \frac{t_{\alpha,n} S_n}{\sqrt{n}}, \tag{1.15}$$

откуда

$$t_{\alpha,n} = \frac{\Delta x \sqrt{n}}{S_n}. \tag{1.16}$$

Из формул (1.14) и (1.16) видно, что $t_{\alpha,n}$ – величина, аналогичная ε. Она играет ту же роль, но в случае когда число измерений, из которых определена ошибка S_n, не очень велико. Значения величины $t_{\alpha,n}$, носящей название коэффициента Стьюдента, вычисленные для различных значений n и α, приведены в таблице Ж.2 (Приложение Ж).

Сравнивая приведенные в ней данные с табл. Ж.1, легко убедиться, что при больших n величины $t_{\alpha,n}$ стремятся к соответствующим значениям ε. С увеличением n S_n стремится к σ. Используя коэффициенты Стьюдента, равенство (1.9) можно переписать в виде

$$P\left[\left(\overline{x} - t_{\alpha,n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) < x < \left(\overline{x} + t_{\alpha,n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha. \tag{1.17}$$

Пользуясь этим соотношением и таблицей Ж.2, легко определить доверительные интервалы и доверительные вероятности при любом небольшом числе измерений.

Пример. Среднее арифметическое x из 5 измерений равно 31.2. Средняя квадратичная ошибка, определенная из этих 5 измерений, равна 0.24. Найти доверительную вероятность того, что x отличается от истинного значения х не более чем на 0.2, т. е. будет выполняться неравенство

$$31 < x < 31.4.$$

Значение $t_{\alpha,n}$ найдем, подставив наши величины в формулу (1.16):

$$t_{\alpha,n} = \frac{0.2 \times \sqrt{5}}{0.24} = 1.86.$$

По таблице Ж.2 находим для $n = 5$ при $t_{\alpha,n} = 1.5$, $\alpha = 0.8$; при $t_{\alpha,n} = 2.1$ $\alpha = 0,9$. Вообще говоря, можно удовлетвориться ответом, что доверительная вероятность для этого случая лежит между 0.8 и 0.9. Однако, если необходимо получить более точное значение, можно прибегнуть к методу интерполяции. Тогда в рассматриваемом примере получится $\alpha = 0,86$.

Необходимое число измерений

Для уменьшения случайной ошибки результата могут быть использованы два пути: улучшение точности измерений, т. е. уменьшение σ, и увеличение числа измерений, т. е. использование соотношения, аналогичного (1.13):

$$\sigma_{x_{\text{cp}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{1.18}$$

Предположим, что все возможности совершенствования техники измерений (т. е. первый путь) уже исчерпаны. Пусть систематическая ошибка измерений равна δ. Известно, что уменьшать случайную ошибку целесообразно до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться систематической ошибкой. Практически должно выполняться требование

$$\Delta x \leqslant \frac{\delta}{3} \text{ или даже } \Delta x \leqslant \frac{\delta}{2}, \tag{1.19}$$

где Δx – полуширина доверительного интервала для величины σ. Надежность α, с которой требуется установить доверительный интервал, в большинстве случаев не должна превышать $0,95$. Для оценки необходимого числа измерений приведена таблица Ж.5 (Приложение Ж), в которой Δx дано в долях средней квадратичной ошибки.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{S_n}.$$

Пример. Измеряется напряжение с помощью вольтметра, имеющего точность $\delta = 1$ В. Средняя квадратичная погрешность измерений равна 2.3 В. Сколько измерений нужно проделать, чтобы получить ошибку не более 1.5 В с надежностью 0.95?

Положим

$$\Delta x = \frac{\delta}{2} = 0.5 \text{ В}, \quad S_n = 2.3\ B, \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{S_n} = \frac{0.5}{2.3} = 0.22.$$

Из таблицы Ж.5 в колонке $\alpha = 0.95$ находим для $\varepsilon = 0.3$ значение $n = 46$, а для $\varepsilon = 0.2$ – $n = 99$. Методом интерполяции определяем, что для $\varepsilon = 0.22$ получается $n = 88$.

1.1.6 Обнаружение промахов

Если осуществляется ряд одинаковых измерений, подверженных случайным ошибкам, то в этом ряду могут встретиться измерения с очень большими случайными ошибками. Однако большие ошибки имеют малую вероятность, и если среди результатов измерений встретится одно, имеющее резко отличное от других значение, то мы будем склонны приписать такой результат промаху и отбросить его как заведомо неверный. Естественно, следует объективно оценить, является ли данное измерение промахом или же результатом случайного, но совершенно закономерного отклонения.

Для оценки вероятности β случайного появления выскакивающих значений в ряду n измерений (для $n < 25$) на основании результатов, даваемых теорией вероятностей, была составлена таблица Ж.4 (Приложение Ж). При пользовании этой таблицей вычисляется среднее арифметическое $\overline{x}$ и средняя квадратичная погрешность S_n всех измерений, включая подозреваемое x_k, которое, на наш взгляд, недопустимо велико или мало.

Вычисляется относительное уклонение этого измерения от среднего арифметического, выраженное в долях средней квадратичной ошибки:

$$\Theta_{max} = \left|\frac{\overline{x} - x_k}{S_n}\right|. \tag{1.20}$$

По таблице Ж.4 находится, какой вероятности β соответствует полученное значение Θ_{max}. Разумеется, следует договориться, при каких значениях β будет отбрасываться (считаться промахом) измерение. Таблица Ж.4 составлена так, что наименьшее значение $\beta = 0.01$. Оставлять измерения, вероятность появления которых меньше этой величины, обычно нецелесообразно.

Пример. Среднее арифметическое значение измеряемой величины, полученное из 15 измерений, равно 257.1, средняя квадратичная погрешность $S_n = 2.6$. Определить, является ли промахом одно из измерений, равное 266.0.

Находим:

$$\Theta_{max} = \frac{266 - 257.1}{2.6} = 3.42. \tag{1.21}$$

Наибольшее значение Θ_{max} для $n = 15$, приведенное в таблице Ж.4, равно 2.8, чему соответствует $\beta = 0.01$. Так как с ростом Θ_{max} соответствующее значение β уменьшается, то при $\Theta_{max} = 3.42$ должно быть значительно меньше 0.01. Из того, что $\beta \ll 0.01$, следует, что результат 266 надо отбросить, считая его промахом.

Если вероятность появления данного измерения в ряду лежит в промежутке $0.1 > \beta > 0.01$, то представляется одинаково правильным как оставить это измерение, так и отбросить. Решая вопрос об отбрасывании выскакивающего измерения, полезно посмотреть, как сильно оно меняет окончательный результат.

В тех случаях, когда β выходит за указанные пределы, вопрос об отбрасывании решается просто.

При n, большем 25, оценку β можно производить с помощью соотношения

$$\beta \approx (1-\alpha)^n.$$

Здесь α – доверительная вероятность, определяемая для нормального распределения (α берется из таблицы Ж.1, полагая $S_n = \sigma$).

1.1.7 Учёт систематической и случайной ошибки

Измерения следует проводить так, чтобы погрешность результата целиком определялась систематической ошибкой измерений, которая обычно задается погрешностью измерительного прибора. Для этого следует определенным образом выбирать необходимое число измерений. Однако это не всегда удается сделать. В результате часто приходится мириться с положением, когда систематическая и случайная ошибки измерений соизмеримы друг с другом и они обе в одинаковой степени определяют точность результата. При этом в качестве верхней границы суммарной ошибки можно принять

$$\delta + 2\sigma, \tag{1.22}$$

где δ – систематическая ошибка, σ – среднеквадратичная ошибка. Данная оценка верна с вероятностью не менее 0.95.

1.1.8 Правила обработки и порядок представления результатов физических измерений

Указаные правила можно применять для случаев, когда распределение результатов подчиняется нормальному (Гауссовому) закону или мало отличается от него.

1. Определяют среднее арифметическое значение измеряемой величины:

   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

   где x_i – результат отдельного i-го измерения.

2. Находят абсолютные погрешности отдельных измерений:

   $$\Delta x_i = |\overline{x} - x_i|.$$

3. Вычисляют среднюю абсолютную погрешность отдельных измерений:

   $$\Delta\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|.$$

4. Вычисляют среднюю квадратичную погрешность отдельных измерений:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n-1}}.$$

5. Если для отдельных x_i выполняется $\Delta x_i > 3S_n$, то такие значения отбрасывают как промахи и повторяют пункты (1–5) без них.

6. По числу измерений n для заданной вероятности α по таблице Ж.2 определяют коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$.

7. Записывают величину полуширины доверительного интервала:

$$\Delta x = t_{\alpha,n} S_{n,\overline{x}} = \frac{t_{\alpha,n} S_n}{\sqrt{n}}.$$

8. Записывают результат измерений в виде

$$x = \overline{x} \pm \Delta x.$$

   Количество значащих цифр в окончательной записи определяется в соответствии с Приложением Д.

9. Определяют относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\overline{x}} 100\%.$$

10. Для определения суммарной общей ошибки измерений необходимо сравнить случайную и систематическую ошибки. Если полуширина доверительного интервала Δx удовлетворяет неравенству (1.19), то общая ошибка будет равна систематической ошибке δ; если требование (1.19) не выполняется, то верхняю ганицу суммарной общей ошибки определяем по формуле 1.22).

Пример программы статистической обработки данных, написанной в среде *Octave*, приводится в приложении Е.1.

Примечание. При малом числе наблюдений нужно пользоваться средней квадратичной погрешностью, для которой в этом случае легко определить доверительную вероятность, пользуясь таблицами коэффициентов Стьюдента. При большом числе измерений можно пользоваться соотношением

$$\Delta \overline{x} = 0.8 S_n.$$

Пример. Определить доверительный интервал с соответствующей доверительной вероятностью для дальности полета снаряда по следующим результатам опыта: 101.5; 105.0; 95.0; 98.5; 100.0 см.

1. $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$; $\overline{x} = 100$ см.

2. Таблица абсолютных погрешностей.

$\Delta x_i = \overline{x} - x_i$	${\Delta x_i}^2$
+1.5	2.25
+5.0	25.00
-5.0	25.00
-1.5	2.25
0.0	0.0
$\sum\lvert\Delta x_i\rvert = 13$	$\sum(\Delta x_i)^2 = 54.5$

3.
$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{n}\sum|\Delta x_i| = \frac{13}{5} = 2.6.$$

4.
$$S_n = \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{54.5}{4}} = 3.7.$$

5.
$$\overline{S_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 3.7 = 1.7.$$

6. Для $n = 5$, при доверительной вероятности $\alpha = 98\%$, коэффициент Стьюдента будет равен $t_{\alpha,n} = 3.75$.

7.
$$\Delta x = \overline{S_n}t_{\alpha,n} = 1.7 \times 3.75 = 6.$$

Следовательно, на 98 % можно ручаться, что рассеивание снарядов будет не больше ± 6 см от дальности полета в 100.0 см.

$$x = 100 \pm 6 \text{ см.}$$

1.2 Порядок выполнения работы

Задание: измерение заданной преподавателем величины.

1. Выполнить n измерений заданной величины и записать их результаты в таблицу. (Методика проведения измерений остаётся на усмотрение преподавателя.)

x_i																	
Δx_i																	
Δx_i^2																	
$\overline{x} =$						$\Delta\overline{x} =$						$x = \overline{x} \pm \Delta x$					

2. Произвести обработку результатов измерений, выполняя пункты 1 – 9 параграфа 1.1.8 при доверительной вероятности $\alpha = 0.95$. Записать окончательный ответ в виде $x = \overline{x} \pm \Delta x$.

3. Определить необходимое число измерений для доверительных вероятностей $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.9$ и полученной средней квадратичной ошибки S_n при $\Delta x_1 = \overline{\Delta x}$ (формула (1.7)) и $\Delta x_2 = \Delta x_{\text{стат}}$ (формула (1.15))по таблице Ж.5 Приложения Ж.

4. Определить доверительный интервал для S_n по формуле 1.16 при $\alpha = 0.95$.

5. Определить доверительную вероятность α для интервала $\Delta x = \Delta\overline{x}$ по формуле 1.16.

6. (Дополнительно) Построить гистограмму результатов измерений длины тела, используя данные компьютерной обработки.

Контрольные вопросы

1. Что такое измерение?

2. Назовите основные типы ошибок.

3. Опишите 3 группы систематических ошибок.

4. В каких случаях измерение производится один раз, а в каких – несколько раз?

5. Чем определяется необходимое число измерений?

6. Какие предположения приводят к Гауссову закону распределения ошибок?

7. Как вычисляются средняя квадратичная и средняя арифметическая ошибки?

8. В чём смысл средней квадратичной ошибки?

9. Какие два параметра характеризуют величину случайной ошибки?

10. Правила пользования таблицей Ж.1 (Приложение Ж).
11. Сформулируйте закон сложения случайных ошибок.
12. Чему равна средняя квадратичная погрешность среднего арифметического?
13. Каков порядок определения доверительных интервалов и доверительных вероятностей при любом небольшом числе измерений?
14. Как определяется доверительный интервал для заданного значения σ?
15. Назначение и правила пользования таблицей Ж.4 (Приложение Ж).
16. Правило обнаружения промахов.
17. Как оценить результирующую ошибку, когда систематическая и случайная ошибки измерений соизмеримы друг с другом.
18. Правило определения числа значащих цифр при записи окончательного ответа.

Лабораторная работа № 2

Обработка результатов косвенных измерений. Оценка точности измерений удельного сопротивления проводника

Цель работы:

1) ознакомиться с методами оценки результатов косвенных измерений и расчета погрешностей;

2) определить удельное сопротивление провода и интервал погрешности измерения.

Оборудование:

- установка FPM-01 для определения удельного сопротивления проволоки,

- штангенциркуль,

- микрометр.

2.1 Краткая теория

В большинстве случаев измеряется не непосредственно интересующая величина z, а одна или несколько других x, y, u и т. д., от которых она зависит тем или иным образом. При таких измерениях, называемых косвенными, необходимо также уметь вычислять ошибку измерений.

2.1.1 Методы определения ошибки косвенных измерений

Пусть величина z зависит от нескольких величин $x,\ y, ...$, значения которых найдены прямыми измерениями. Тогда функциональная зависимость между измеряемой величиной и величинами $x,\ y, ...$:

$$z = f(x, y, ..). \tag{2.1}$$

Получим выражение для погрешности Δz. Мысленно зафиксируем значения всех аргументов? кроме одного, например x. Тогда приращение функции при изменении данного аргумента будет иметь вид:

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y, ...) - f(x, y, ...). \tag{2.2}$$

Если значение Δx мало, то функцию $z = f(x)$ в интервале $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ можно считать линейной. Тогда приращение функции Δz_x мы можем рассматривать как частную производную этой функции по переменной x, умноженную на приращение Δx.

$$\Delta z_x = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x. \tag{2.3}$$

При определении ошибки косвенных измерений можно считать, что величина Δz_x – погрешность Δz, вносимая погрешностью Δx. Аналогичным образом определяются погрешности, обусловленные другими аргументами. Результирующая погрешность косвенных измерений Δz вычисляется с помощью квадратичного суммирования ее составляющих, вносимых каждым аргументом:

$$\begin{gathered}\Delta z = \sqrt{(\Delta z_x)^2 + (\Delta z_y)^2 + ...}, \\ \text{или} \\ \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + ...}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Применение соотношение (2.4) обусловливается двумя условиями:

1) результирующая погрешность обусловлена влиянием ошибок многих аргументов, среди которых нет преобладающего фактора;

2) погрешности аргументов статистически не связаны.

Действительно, если наша величина зависит от двух других величин, одна из которых измерена с точностью 20 %, а другая 0.5 %, то результат будет определяться первой погрешностью.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, полная погрешность косвенных измерений Δz вычисляется с помощью суммирования по модулю ее составляющих, вносимых каждым аргументом:

$$\Delta z = |\Delta z_x| + |\Delta z_y| + \dots$$
$$\text{или} \tag{2.5}$$
$$\Delta z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \dots$$

Однако соотношение (2.5) часто даёт завышенное значение погрешности косвенных измерений.

Таким образом, алгоритм обработки косвенных измерений выглядит так:

1. Определить погрешности величин, измеряемых прямым способом. В случае однократного измерения используется инструментальная (систематическая) погрешность. В случае многократных измерений находятся статистические погрешности всех величин, для всех них принимается одинаковая доверительная вероятность;

2. По известной зависимости измеряемой величины от её аргументов вычислить значение функции $\bar{z}$. При этом используются значения аргументов, найденные с помощью прямых измерений (2.1);

3. Вычислить составляющие погрешности по каждому аргументу, для чего найти частные производные по всем аргументам и умножить их на погрешности соответственных аргументов (2.3);

4. Вычислить полную погрешность функции (2.4);

5. Результат обработки измерений записать в форме $z = \bar{z} \pm \Delta z$.

В случае когда величина z зависит только от одной измеряемой величины x,

$$z = f(x). \tag{2.6}$$

Тогда можно записать

$$\Delta z = \frac{df}{dx}\Delta x. \tag{2.7}$$

Разделив выражение (2.6) на (2.7), получим величину относительной погрешности:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x. \tag{2.8}$$

2.1.2 Некоторые частные случаи определения ошибки косвенных измерений

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Величина z является суммой x и y:

$$z = x + y. \tag{2.9}$$

Тогда погрешность косвенных измерений Δz определяются как

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{2.10}$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x + y}. \tag{2.11}$$

2. Величина z является разностью x и y:

$$z = x - y. \tag{2.12}$$

Тогда погрешность косвенных измерений Δz определяется как

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{2.13}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x - y}. \tag{2.14}$$

3. Величина z является произведением (или частным) величин x и y:

$$z = x \cdot y. \tag{2.15}$$

Тогда, дифференцируя, получим:

$$dz = y \cdot dx + x \cdot dy. \tag{2.16}$$

Погрешность косвенных измерений Δz:

$$\Delta z = \sqrt{y^2 (\Delta x)^2 + x^2 (\Delta y)^2}. \tag{2.17}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}. \tag{2.18}$$

Выражение для случая

$$z = \frac{x}{y}. \tag{2.19}$$

студентам предлагается вывести самостоятельно и убедиться, что оно совпадает с (2.18).

Также студентам предлагается самостоятельно рассмотреть случаи:

$$z = a\sqrt{\frac{x}{y}}, \tag{2.20}$$

относительная погрешность:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \tag{2.21}$$

и

$$z = x^y, \tag{2.22}$$

относительная погрешность:

$$\varepsilon = y\frac{\Delta x}{x}. \tag{2.23}$$

2.1.3 Вычисление погрешности удельного сопротивления проводника при косвенных измерениях

Электрическое сопротивление участка однородного линейного проводника

$$R = \rho\frac{L}{S}, \tag{2.24}$$

где R – сопротивление отрезка проводника, L – его длина, S – площадь поперечного сечения, ρ – удельное сопротивление проволоки.

Отсюда

$$\rho = R\frac{S}{L}. \tag{2.25}$$

Для измерения сопротивления с использованием закона Ома собирают электрическую цепь (см. рис. 2.1). Участок цепи АВ – отрезок проволоки, Е – источник тока, А – амперметр, V – вольтметр. Чтобы получить ρ, необходимо определить электрическое сопротивление R отрезка проволоки АВ и площадь сечения проволоки S, а также измерить длину этого отрезка L. Значение сопротивление R определяется из закона Ома ($I = U/R$), для чего измеряются напряжение U и сила тока I. Площадь сечения проволоки S определяется по формуле

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}. \tag{2.26}$$

Напряжение U, силу тока I измеряют приборами с известным классом точности. Длину проволоки L и ее диаметр d измеряют соответствующими приборами, точность которых также известна. С учетом вышесказанного для удельного сопротивления (2.25) получим:

$$\rho = \frac{U}{I}\frac{\pi d^2}{4L}. \tag{2.27}$$

Относительная погрешность определения ρ будет вычисляться так:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta\rho}{\overline{\rho_i}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta d}{\overline{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L_i}\right)^2}, \tag{2.28}$$

где ΔU, ΔI, Δd и ΔL – относительные погрешности прямых измерений.

Студентам предлагается вывести эту формулу самостоятельно.

2.2 Описание лабораторной установки

Функциональная схема установки представлена на рис. 2.1а. В ней используются две схемы измерения сопротивления.

Первый метод использует электрическую цепь(рис. 2.1б), в которой вольтметр включен так, что измеряет падение напряжения U на участке проволоки, а миллиамперметр при этом измеряет силу тока I, который затем разветвляется в узле на силу тока, протекающего по образцу проводника, и силу тока, протекающего через вольтметр. Сопротивление вольтметра R_V много больше, чем у проволоки. Сопротивление измеряемого отрезка в этом случае определяется выражением

$$R = \frac{U}{I}\left(1 + \frac{U}{R_V I}\right). \tag{2.29}$$

Второй метод использует электрическую цепь (рис. 2.1в), в которой миллиамперметр включен последовательно с исследуемой проволокой и измеряет силу тока I в ней.

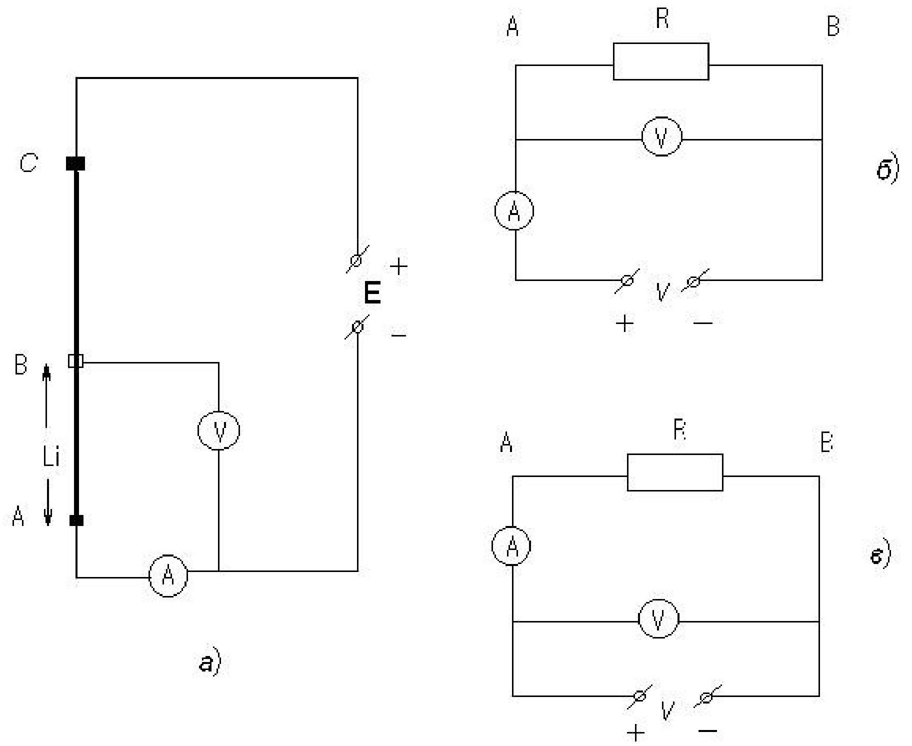

Рис. 2.1. Функциональная схема установки (а) и способы подключения амперметра и вольтметра (б, в)

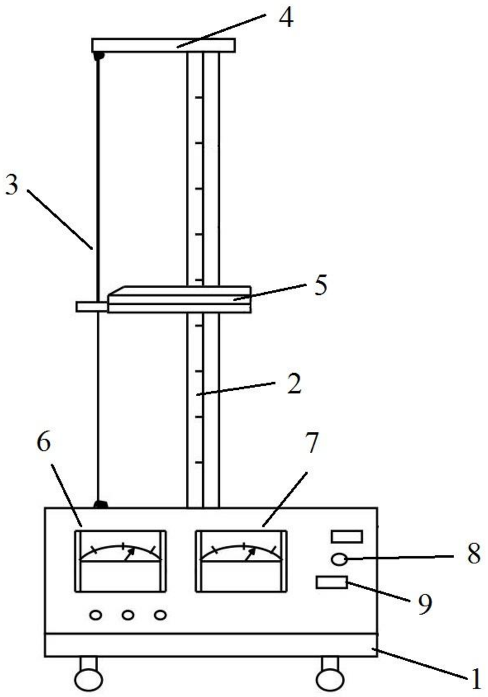

Рис. 2.2. Общий вид лабораторной установки

Вольтметр измеряет напряжение U не только на измеряемом участке проволоки, но и на амперметре (сопротивление которого R_A). Сопротивление измеряемого отрезка образца в этом случае определяется выражением

$$R = \frac{U}{I}\left(1 - \frac{R_A I}{U}\right). \qquad (2.30)$$

Общий вид экспериментальной установки представлен на рис. 2.2. На основании (1) установки закреплена стойка (2) с нанесенной миллиметровой шкалой. На ней крепятся два кронштейна (4) и (5), между которыми натянута проволока. Длина исследуемого отрезка проволоки регулируется кронштейном с подвижным контактом (5).

Проволока подключена при помощи проводов низкого сопротивления к измерительному блоку прибора, состоящему из вольтметра (6), амперметра (7) и источника питания. Регулировка тока осуществляется потенциометром (8), включение и выключение прибора – кнопкой (9). Передвижением подвижного кронштейна устанавливается необходимая длина проволоки.

Поскольку сопротивление амперметра невелико и может быть сравнимо с сопротивлением проволоки, измерения следует проводить первым методом. Так как сопротивление вольтметра R_V много больше, чем сопротивление проволоки, то слагаемым $\frac{U}{R_V I}$ в формуле 2.29 можно пренебречь. Выбор режима производится специальной кнопкой на измерительном блоке установки.

2.3 Порядок выполнения работы

1. С помощью штангенциркуля и микрометра измерить диаметр d_i проволоки по всей ее длине в 4–5 точках. Рассчитать диаметр проволоки по формуле
$$d = \overline{d} \pm \Delta d \tag{2.31}$$
и определить относительную погрешность $\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}$. Для микрометра принимается величина $\Delta d = 0.005$ мм, для штангенциркуля – $\Delta d = 0.05$ мм (половина точности соответствующего прибора). Результат измерений записать в таблицу.

d	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\overline{d}$	Δd
Штангенциркуль							
Микрометр							

2. Выбрать следующие значение длин L_i участка AB: 0.1 м; 0.2 м; 0.3 м; 0.4 м; 0.5 м (в случае если установка не позволяет установить значение $L = 0.5$ м, выберите в качестве наибольшего значения длины $L = 0.45$ м), погрешность измерения длины ΔL определить как половину цены деления линейки (0.5 мм):
$$L = \overline{L} \pm \Delta L \quad \text{и} \quad \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L}. \tag{2.32}$$

3. Определить погрешность ΔU вольтметра и ΔI амперметра, исходя из их класса точности (1.5):

$$U = \overline{U} \pm \Delta U \quad \text{и} \quad \varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U}. \tag{2.33}$$

$$I = \overline{I} \pm \Delta I \quad \text{и} \quad \varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I}. \tag{2.34}$$

4. Для участка $L_i = 0.1$ м произвести измерение U_j и I_j, пять раз меняя их значения. Рекомендуется установить с помощью регулятора крайние значения U_{min} и U_{max}, совпадающие с делениями шкалы вольтметра и выбрать между ними 3 промежуточных.

5. Вычислить значения удельного сопротивления $\overline{\rho_i}$ по формуле (2.26) при заданной длине L_i для каждой пары значений U_j и I_j.

6. Определить по формуле (2.28) относительную погрешность ε_{ρ_j} для каждой пары значений U_j и I_j и значение погрешности $\Delta\rho_j$:

$$\Delta\rho_j = \varepsilon_{\rho_j}\overline{\rho_i}. \tag{2.35}$$

7. Найти погрешность удельного сопротивления для длины L_i как среднее значение погрешностей, полученных при разных U_j и I_j:

$$\Delta\rho_i = \overline{\Delta\rho_j}. \tag{2.36}$$

8. Записать итоговый результат в виде

$$\rho_i = \overline{\rho_i} \pm \Delta\rho_i. \tag{2.37}$$

9. Повторить п.п. 4–8 для участков
$L_i = 0.2$ м, 0.3 м, 0.4 м, $0.5(0.45)$ м. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу.

<table>
<tr><th>L(м)</th><th>U(В)</th><th>I(А)</th><th>R(Ом)</th><th>ρ(Ом $*$ м)</th><th>$\overline{\rho}$(Ом $*$ м)</th><th>$\Delta\rho$</th></tr>
<tr><td rowspan="5">0.15</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">0.2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">0.3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">0.4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">0.5
(0.45)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

10. Построить график зависимости R от L в прямоугольной системе координат. На графике отобразить интервалы ΔR_i для каждой точки R_i.

11. Аппроксимировать полученный график линейной зависимостью. Определить её угловой коэффициент k как тангенс угла наклона прямой, исходя из того, что

$$R(L) = \frac{\rho L}{S} = kL,$$

где $k = \rho/S$, найти $\rho = kS$ графическим методом.

Пример программы обработки измерений удельного сопротивления проводника, написанной в среде *Octave*, приводится в приложении Е.2.

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называют косвенными измерениями?
2. Как рассчитать погрешность косвенного измерения?
3. Как определяется абсолютная погрешность длины при прямых измерениях?
4. Как определяется абсолютная погрешность диаметра при прямых измерениях штангенциркулем и микрометром?
5. Как определяется абсолютная погрешность при измерении физических величин стрелочными приборами?
6. Как вычисляется погрешность косвенных измерений?
7. Какие два условия необходимы, чтобы выполнялась формула (2.4)?
8. Как вычисляется погрешность косвенных измерений, если вышеупомянутые условия не выполняются.
9. Что такое электрическое сопротивление проводника и от чего оно зависит? Назовите единицы сопротивления и удельного сопротивления в системе единиц СИ?
10. Запишите и поясните формулу для сопротивления однородного проводника цилиндрической формы.
11. Выведите формулу, по которой в данной работе определяется удельное сопротивление проволоки.
12. С помощью электрических схем на рис. 2.1 объясните два метода экспериментального определения сопротивления с использованием вольтметра и амперметра. Какая из них является более корректной и почему?
13. Всегда ли можно определить сопротивление проводника, разделив показания вольтметра на показания амперметра?
14. Какова систематическая погрешность измерения удельного сопротивления для каждой из схем?
15. Каковы возможные источники погрешностей в данной установке?
16. Какой физический смысл имеет тангенс угла наклона графика $R(L)$ к оси абсцисс?

Приложение А

Погрешность определения погрешности

Если средняя квадратичная ошибка S_n определяется из очень большого числа измерений, то получается величина, как угодно мало отличающаяся от своего предельного значения σ. Но когда n невелико, то S_n отягчена случайными погрешностями. Для определения доверительного интервала, в котором находится σ при заданной доверительной вероятности α, пользуются таблицей Ж.3 (Приложение Ж) в соответствии с алгоритмом

$$P\big(\gamma_1 S_n < \sigma < \gamma_2 S_n\big) = \alpha. \tag{А.1}$$

Приведем два примера пользования таблицей Ж.3.
1. Средняя квадратичная погрешность, определенная из 5 измерений, равна 2. Нужно вычислить доверительный интервал для σ с надежностью $0,95$.
Из таблицы Ж.3 имеем для $n = 5$ и $\alpha = 0.95$, $\gamma_1 = 0,599$ и $\gamma_2 = 2,87$. Для σ можно записать неравенство, выполняемое с вероятностью 0.95:

$$0.599 \times 2 < \sigma < 2.87 \times 2 \text{ или } 1.2 < \sigma < 5.7.$$

2. При 40 измерениях $\gamma_1 = 0.821$, $\gamma_2 = 1.28$:

$$1.6 < \sigma < 2.6.$$

По сравнению с первым случаем здесь интервал значительно у́же и почти симметричный.

Приложение Б

Графическое представление результатов измерений

Основное достоинство графиков – их наглядность. График наглядно отображает функциональную зависимость, дает возможность получить о ней качественное представление и отметить наличие различных особенностей: максимумов, минимумов, точек перегиба, областей наибольшей и наименьшей скорости изменения, периодичности и т. п. График позволяет также четко судить о соответствии экспериментальных данных тем или иным теоретическим положениям и вообще облегчает обработку измерений. Графический метод, кроме того, позволяет отразить погрешности данных, полученных при измерении.

Функция $y = f(x)$ может изображаться прямой или кривой линией, поэтому при построении графика необходимо уяснить вид этой функции и характер её графика.

При построении графика руководствуются следующими правилами:

- Общепринято по оси абсцисс откладывать ту величину, изменения которой являются причиной изменения другой (т. е. по оси абсцисс – аргумент, по оси ординат – функцию). Не следует нарушать этого правила без серьезных оснований.

- Масштаб графика определяется погрешностью измерения величин, отложенных по осям: погрешность должна быть видна на графике, т. е. должна представляться в выбранном масштабе отрезком достаточной длины, иначе график не отразит всех деталей эксперимента и не может быть использован для графической обработки данных без потери точности. Шкала должна четко читаться, поэтому одна клетка масштабной сетки должна соответствовать удобному числу – 1; 2; 5; 10 единиц изображаемой на графике величины.

  Масштабы по обеим осям выбираются независимо друг от друга. Однако следует помнить, что график получается более наглядным, если основная часть кривой имеет наклон, не слишком отличающийся от 45^o. В этом случае наиболее удобно анализировать форму кривой.

- Масштабные риски наносятся на оси графика в виде равноотстоящих по значению «круглых» чисел, например: 2; 4; 6; … или 2,62; 2,64; 2,66 … Удобнее всего выбирать следующие масштабы: 10^n, $2 \cdot 10^n$ или $5 \cdot 10^n$, где n – любое целое число, положительное или отрицательное. В случае линейной шкалы риски проставляются по осям на одинаковом расстоянии друг от друга вдоль всей оси. По оси абсцисс числа числового масштаба пишут под рисками, по оси ординат – слева от рисок. Не следует расставлять эти числа слишком густо, достаточно нанести их через 2 или даже через 5 делений. На осях обязательно указываются обозначения и единицы измерения соответствующей величины.

- Выбирая масштаб графика, следует стремиться к тому, чтобы экспериментальные точки занимали всю площадь графика. На графике приводится только та область изменения измеренных величин, которая была исследована на опыте. Поэтому не следует стремиться поместить на осях начало координат (точка 0,0), если это не требуется по условию задачи. Пересечение оси абсцисс и оси ординат может начинаться с любого значения. Крайне нежелательно попадание на оси (и тем более на их пересечение) любых экспериментальных точек.

- Все полученные в измерениях значения должны наноситься на график очень тщательно и аккуратно, чтобы он получился возможно более точным. Если на один и тот же график наносятся различные группы данных (результаты измерения, полученные в разных условиях или разными авторами и т. п.), то точки, относящиеся к разным группам, должны быть помечены различными символами (кружками, треугольниками, звездочками и т. п.), чтобы их нельзя было спутать. Допускается выделять различные графики цветом или типом линий, соединяющих экспериментальные точки.

- Графики строят либо на миллимитровой бумаге со специальными координатными сетками (прямоугольной, логарифмической, полулогарифмической и др.), либо на компьютере с помощью специальных программ. Менее удобна бумага с такой сеткой, где не выделены половины сантиметров. При использовании миллиметровки не безразличен ее цвет: наименее утомителен для глаз желтый, хуже – красный, очень неудобен синий. При этом размер графика определяется не размером имеющегося у вас кусочка «миллиметровки», а масштабом, который выбирают прежде всего с учетом интервалов изменения величин по каждой оси.

- Экспериментальные точки не стоит соединять между собой отрезками прямой или произвольной кривой. Вместо этого должен строиться график той функции (линейной, квадратичной, экспоненциальной, тригонометрической и т. д.), которая, исходя из теоретических соображений, отражает проявляющуюся в данном опыте физическую закономерность, выраженную в виде соответствующей формулы. Кривая должна проходить насколько возможно ближе ко всем нанесенным точкам, но ни в коем случае не следует стремиться провести ее через каждую точку (точки могут располагаться по обе стороны от неё). Кривую на графике проводят плавно, избегая изломов и перегибов, за исключением тех участков, где имеются некие особенности, такие как резкое изменение кривизны, максимум , минимум и т. п. Излом на кривой можно рисовать только в том случае, если он не может быть объяснен погрешностью измерений. Кроме того, нужно быть уверенным в отсутствие систематических ошибок (изломы часто появляются, например, когда сначала работают на одном диапазоне прибора, а потом переходят на другой). На таких участках стоит увеличить густоту экспериментальных точек. Следует помнить, что всякая особенность на кривой требует либо специального доказательства, либо теоретического обоснования.

  Прямую на графике проводят карандашом по линейке (удобна прозрачная линейка, позволяющая видеть все точки). Кривую проводят по экспериментальным точкам от руки. Лекала используются для последующей обводки кривой.

  Во всех случаях кривая должна быть проведена так, чтобы она не закрывала экспериментальных точек. Результат эксперимента – это точки, а кривая – только толкование результата (вообще говоря, не всегда однозначное).

- Для построения графиков на компьютере можно пользоваться следующими программами: **Grapher**, **Grapher for Windows**, **MATLAB** (и его бесплатные клоны **Octave, Scilab, FreeMat**), **MS Office Excel**, **SciDAVis**, **Open/Libre Office Calc**, **GNU Plot**. Последние три пакета являются бесплатными и распространяются свободно.

- Готовый график обязательно подписывается. Подпись должна содержать точное описание того, что показывает график. Изображенные на графике линии следует объяснить в подписи либо основном тексте.

Разные группы точек (разные символы) или разные кривые на графике также должны быть объяснены. Такое пояснение называется легендой. Легенда располагается либо в подписи к графику (под графиком или справа от него), либо на свободном, не занятом кривой месте на самом графике.

Приложение В

Построение гистограмм

Чтобы выявить распределение вероятностей получаемых значений измеряемой величины, построим столбчатую диаграмму, которая носит название “гистограмма”.

Например, воспользуемся для этого данными, полученными при измерении длины тела. Разобьем эти данные на группы с постоянным шагом Δx и определим для каждого интервала Δx_i число результатов, попадающих в него. Над каждым из них построим прямоугольник с высотой, равной числу попадающих в этот интервал результатов. Частота появления результатов, соответствующих этому интервалу, будет пропорциональна площади прямоугольника.

Если количество измерений увеличивать, а величину интервала уменьшать, то гистограмма будет приближаться к плавной кривой, имеющей форму кривой Гауса (рис. 1.1) в Лабораторной работе № 1.

Интервалы не могут равняться нулю, но могут быть бесконечно малыми ($\Delta x \to 0$).

Вероятность появления тех или иных значений случайной величины (или ее погрешности) определяется элементарной площадкой ydx, называемой элементом вероятности.

Совокупность всех этих площадок, расположенных под кривой Гауса, является вероятностью того, что случайная величина (или ее погрешность) принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. это вероятность достоверного события, равная 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ydx = 1.$$

(Следует обратить внимание на бесконечные пределы этого интеграла.)

При увеличении диапазона Δx новая площадь под кривой Гауса, составленная из элементарных площадок, дает большую вероятность, так

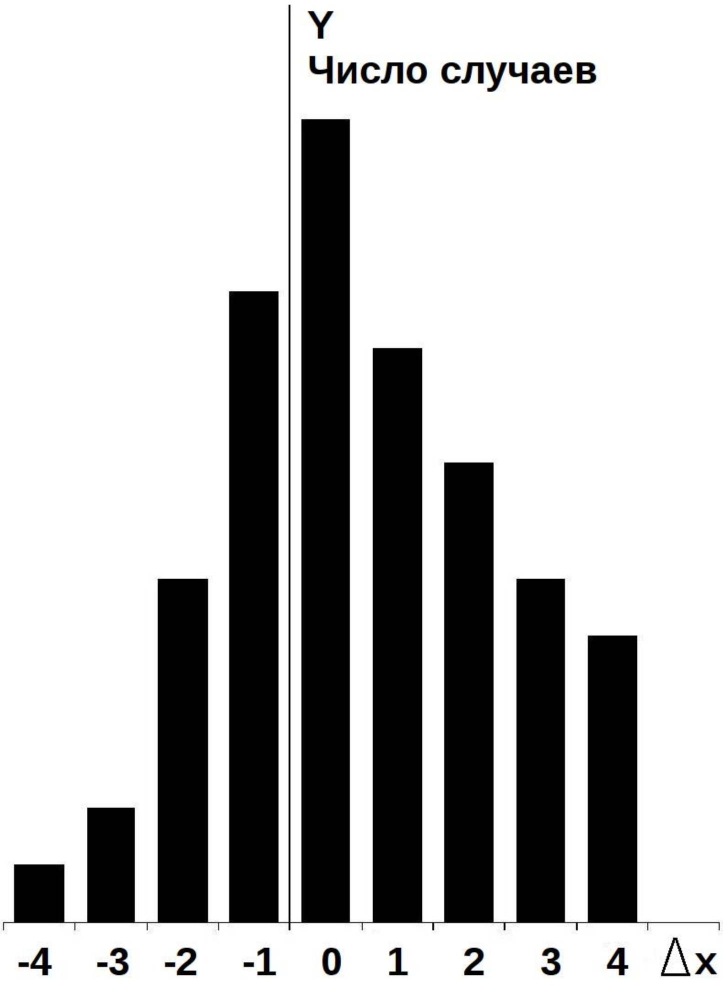

Рис. В.1. Гистограмма результатов измерений

как соответствует большей части возможных значений случайной величины или ее погрешности от всех возможных значений, которые попадают внутрь данного интервала.

Построим график распределения ошибок (рис. В.1). По оси абсцисс будем откладывать величину ошибок, допущенных в разных опытах. Разобьем эту ось на ряд интервалов $x_i \div x_{i+1}$, как это сделано на рисунке. По оси ординат отложим число случаев, когда ошибка попала в данный интервал.

Полученные в результате опыта данные измерений предстанут после этого в виде столбчатой диаграммы (такие графики называют гистограммами) с максимумом в области небольших ошибок (чем ошибки больше, тем они обычно встречаются реже; очень большие ошибки при разумной постановке опыта происходят крайне редко или никогда не встречаются). Высота кривой, а следовательно, и площадь, расположенная под кривой, для каждого интервала ошибок пропорциональна числу случаев, в которых данная ошибка наблюдалась. Гистограмма рис. В.1 может служить для выяснения и более сложных вопросов. Можно, на-

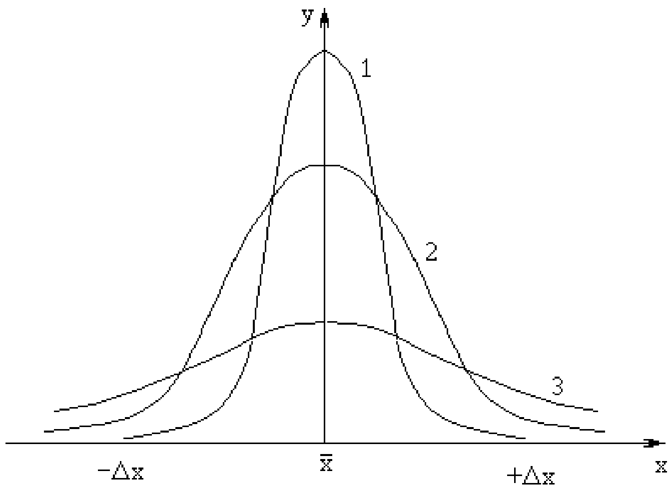

Рис. В.2. Зависимость формы кривой Гаусса от качества измерений. 1 – точные измерения; 2 – грубые измерения; 3 – недоброкачественные измерения. Площадь под кривой остаётся постоянной

пример, выяснить число случаев, когда ошибка лежит в 1 и −1 интервалах. Легко видеть, что это число определяется площадью, заключенной под кривой на участках 1 и −1. Число случаев, когда ошибка выходит за пределы 1 и −1 интервала, равна площади всей гистограммы за вычетом площадей, принадлежащих участкам 1 и −1 и т. д.

Будем теперь увеличивать число измерений и соответственно уменьшать ширину интервалов разбиения оси абсцисс. Гистограмма рис. В.1 будет при этом стремиться к плавной кривой. Форму гистограммы, получаемой при небольшом числе опытов, нельзя предсказать заранее. Но теория вероятностей позволяет вычислить форму предельной гладкой кривой, к которой стремятся гистограммы при неограниченном увеличении числа опытов и случайном, независимом выпадении результатов измерений. Эта предельная кривая носит название кривой Гауса (рис. 1.1). Кривая Гауса имеет вид колокола с максимумом при ошибке, равной нулю. При доброкачественных измерениях (т. е. когда относительная ошибка измерений мала) кривая Гауса заметно отличается от нуля лишь в области малых ошибок. При плохих измерениях (ошибка велика) – сплошная кривая – колокол расширяется, а его максимум становится соответственно ниже (площадь под кривой не зависит от качества измерений)(см. рис. В.2).

Как при плохих, так и при хороших измерениях, однако, возможно в результате случайности получить очень хорошее значение. В зависимости от качества измерений такие значения будут получаться чаще или реже.

Приложение Г

Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов (регрессионный анализ)

На практике часто возникает необходимость найти функциональную зависимость между величинами x и y, которые получены в результате эксперимента. Часто характер эмпирической зависимости известен, а её числовые параметры нет.

Метод наименьших квадратов – один из методов теории ошибок для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Метод наименьших квадратов применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений. Когда искомая величина может быть измерена непосредственно, как, например, длина прямой или угол, то для увеличения точности измерение производится много раз и за окончательный результат берут среднее арифметическое из всех отдельных измерений. Это правило арифметической середины основывается на соображениях теории вероятности; легко показать, что сумма квадратов отклонений отдельных измерений от среднего арифметического будет меньше, чем сумма квадратов отклонений отдельных измерений от какой бы то ни было другой величины. Само правило арифметической середины представляет, следовательно, простейший случай метода наименьших квадратов.

Мы рассмотрим в качестве примера аппроксимацию экспериментальной зависимости полиномами первого (линейную) и более высокого порядка. Аппроксимация с применением иных функций (экспоненциальной, логарифмической, степенной и т. д.) будет изучаться в курсе численных методов математического моделирования.

Г.1 Линейная аппроксимация

Линейная аппроксимация является наиболее удобным и часто применяемым инструментом анализа экспериментальных данных. В случаях, когда экспериментальная зависимость имеет характер, отличный от полинома первого порядка, её можно попытаться линеаризовать путём перехода к другой системе координат, т. е. представить в виде линейной функции. Например, если экспериментальные данные должны подчиняться закону $y = ax^2$, то после линеаризации, перейдя к системе координат $\sqrt{y} = ax$, мы получим линейную зависимость. Благодаря такому подходу, отклонения от заданной кривой на отдельных участках экспериментальной кривой будут чётко видны, тогда как в исходных координатах окажутся трудно обнаружимыми.

Рассмотрим сначала простейший случай линейной функции одного аргумента. Пусть из опыта получены точки:

$$x_1,\ y_1; \quad x_2,\ y_2; \quad \dots \quad x_n,\ y_n.$$

Мы знаем или предполагаем, что зависимость y от x подчиняется линейному закону. Используя метод наименьших квадратов, надо найти параметр a и b аппроксимирующей прямой $y = ax + b$.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных a и b

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2 \tag{Г.1}$$

принимает наименьшее значение, то есть при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом и состоит суть метода наименьших квадратов.

Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Вывод формул для нахождения коэффициентов

Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными. Находим частные производные функции Г.1 по переменным a и b, приравниваем эти производные к нулю.

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0. \tag{Г.2}$$

Следовательно,

$$-2\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)x_i = 0, \qquad -2\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big) = 0. \tag{Г.3}$$

Откуда

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{Г.4}$$

или

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{Г.5}$$

Решаем полученную систему уравнений любым методом (например, методом подстановки) и получаем формулы для нахождения коэффициентов по методу наименьших квадратов.

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{Г.6}$$

При данных a и b функция Г.1 принимает наименьшее значение. Доказательство этого факта мы не приводим. Желающие ознакомиться с ним могут обратиться к соответствующей литературе.

Вот и весь метод наименьших квадратов. Формула для нахождения параметра а содержит суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ и параметр n – количество экспериментальных данных. Значения этих сумм рекомендуем вычислять отдельно. Коэффициент b находится после вычисления a.

Г.1.1 Пример задачи на линейную аппроксимацию

Пусть задана некоторая совокупность экспериментальных данных:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
x_i	0	2	4	8	10
y_i	3.2	3.5	3.7	3.9	4.1

В нашем примере $n = 5$. Для удобства вычисления сумм, которые входят в формулы искомых коэффициентов, заполняем таблицу.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$\sum\limits_{i=1}^{5}$
x_i	0	2	4	8	10	24
y_i	3.2	3.5	3.7	3.9	4.1	18.4
$x_i y_i$	0	7	14.8	31.2	41.0	94
x_i^2	0	4	16	64	100	184

Умножая значения 2-й строки на значения 3-й строки для каждого номера i, получаем значения в четвертой строке таблицы. Возводя в квадрат значения 2-й строки для каждого номера i получим значения в 5-й строке таблицы. В последнем столбце таблицы – суммы значений по строкам.

Используем формулы Г.6 метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов a и b. Подставляем в них соответствующие значения из последнего столбца таблицы:

$$a = \frac{5\cdot 94 - 24\cdot 18.4}{5\cdot 184 - 24^2} \approx 0.083, \qquad b = \frac{18.4 - a\cdot 24}{5} \approx 3.284. \tag{Г.7}$$

Таким образом, $y = 0.08\, x + 3.284$ есть искомая аппроксимирующая прямая.

Г.2 Аппроксимация полиномами более высокого порядка

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений: $y_i = f(x_i)$, где $i = 1, 2, \dots n$. Требуется найти полином заданной степени $m \leqslant n-1$, для которого среднеквадратичное отклонение σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(P_m(x_i) - y_i^2\right)} \tag{Г.8}$$

минимально.

Так как полином $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$ определяется своими коэффициентами, то фактически нужно подобрать набор коэффициентов, $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$, минимизирующий функцию

$$\varPhi(a_0, a_1, a_2, \dots a_m) = \sum_{i=1}^{n}\left(P_m(x_i) - y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i\right)^2. \tag{Г.9}$$

Используя необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial \varPhi}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots m,$$

получаем так называемую нормальную систему метода наименьших квадратов:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k}\right) a_j = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots m.$$

Получилась система алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$. Можно показать, что определитель этой системы отличен от нуля, то есть решение существует и единственно. Однако при высоких степенях m система является плохо обусловленной. Поэтому метод наименьших квадратов применяют для нахождения многочленов, степень которых не выше 5. Решение нормальной системы можно найти, например, методом Гаусса.

Запишем нормальную систему наименьших квадратов для двух простых случаев: $m = 0$ и $m = 2$. При $m = 0$ полином примет вид $P_0(x) = a_0$. Для нахождения неизвестного коэффициента a_0 имеем уравнение

$$na_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

т. е. коэффициент a_0 есть не что иное, как среднее арифметическое значений функции в заданных точках.

Если же используется полином второй степени $P_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то нормальная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4\right) a_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases} \tag{Г.10}$$

Г.3 Примеры программ для аппроксимации методом наименьших квадратов

Ниже приводятся два примера программ для решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов. Они написаны с применением двух принципиально различных сред программирования и могут быть в дальнейшем использованы студентами при выполнении лабораторных и практических заданий как основа для создания собственных инструментов регрессионного анализа.

Г.3.1 Пример программы линейной аппроксимации

Ниже приведён пример программы на языке *QBasic*. Интерпретатор (программная среда) *QBasic* в настоящее время распространяется свободно и доступен для скачивания по адресу: https://www.microsoft.com/ru-ru/p/qbasic/9ntmcqwn2sqm?activetab=pivot:overviewtab.

```
DIM n, i, z  AS INTEGER
DIM sumx, b, bsumy, a, sumxy, sumxkv, x(100), y(100) AS SINGLE
CLEAR
PRINT "Линейная регрессия"
INPUT "Введите N  ", n
PRINT "Введите X(i), Y(i)"
FOR i = 1 TO n
    PRINT "Элемент № "; i
    INPUT "X(i) ", x(i)
    INPUT "Y(i) ", y(i)
    sumx = sumx + x(i)
    sumy = sumy + y(i)
    sumxkv = sumxkv + x(i) ^ 2
    sumxy = sumxy + x(i) * y(i)
NEXT i
a = (n * sumxy - sumx * sumy) / (n * sumxkv - sumx ^ 2)
b = (sumy - a * sumx) / n
PRINT "Y(X)="; a; "X+"; b
END
```

В данной программе отсутствует вывод графика, желающие могут дополнить её самостоятельно, а также переписать её на другом языке программирования.

Г.3.2 Пример программы аппроксимации полиномом произвольного порядка.

Желающие могут поупражняться в программировании на BASIC-е или других языках высокого уровня, но это далеко не основная задача физического практикума. Поэтому мы предлагаем воспользоваться средствами языков «сверхвысокого уровня», таких как *MATLAB*. Наиболее распространённым свободным аналогом *MATLAB*-а является пакет *OCTAVE*, доступный по адресу: https://www.gnu.org/software/octave/download.html.

В данной среде содержится удобный инструмент для нахождения аппроксимирующего полинома произвольной степени по заданному набору экспериментальных точек, заданных координатами x и y. Это две функции – **POLYFIT** и **POLYVAL**. Первая из них вычисляет коэффициенты полинома заданной степени, вторая вычисляет его значения для указанного набора точек. Синтаксис функций понятен из приведённой ниже программы и комментариев к ней. В программе используются данные из примера к разделу Г.1.

```
% Задаём массив данных x и y. Очевидно, что оба массива
```

```
% должны содержать одинаковое число элементов

x=[0 2 4 8 10];
y=[3.2 3.5 3.7 3.9 4.1];

% Вычисляем массив коэффициентов полинома. Последний параметр
% в скобках у функции polyfit определяет порядок полинома
% (в данном случае "1"). Обратите внимание, строка,
% в отличие от остальных не заканчивается символом ";".
% Это означает, что результат операции будет выводиться
% на текстовом экране.

a=polyfit(x,y,1)

% Слегка "раздвигаем" интервал по x, чтобы наш график
% не ограничивался экспериментальными точками
% и они не попадали на его оси.
% Для этого находим минимальное xs и максимальное xe
% значения x, затем величину интервала между ними d.
% Сдвигаем начало на 0.2d в меньшую сторону (xs1),
% а конец - на такую же величину в большую (xe1).

xs=min(x);
xe=max(x);
d=(xe-xs)/5;
xs1=xs-d;
xe1=xe+d;

% Вычисляем значения полинома на интервале от xs1 до xe1.
% Последний параметр в скобках у функции linspace
% задаёт число точек, которые будут равномерно распределены
% на данном интервале.

x1=linspace(xs1, xe1, 100);
y1=polyval(a,x1);

% Построим график полинома и экспериментальных точек в одной
% графической области. Третий параметр функции plot '-k'
% означает, что график y1(x1) строится непрерывно ("-") чёрной
% линией ("k" от blacK). Последний параметр означает, что
% точки экспериментальной зависимости x(y) строятся кружочками
% ("o") чёрного цвета ("k").

plot(x1,y1,'-k',x,y,'ok')

% Для наглядности на график накладывается сетка.

grid
```

На рис. Г.1 показан результат работы этой программы, выполненной в среде *Octave 3.4.0* с оболочкой *QtOctave* под *linux*. В качестве задачи

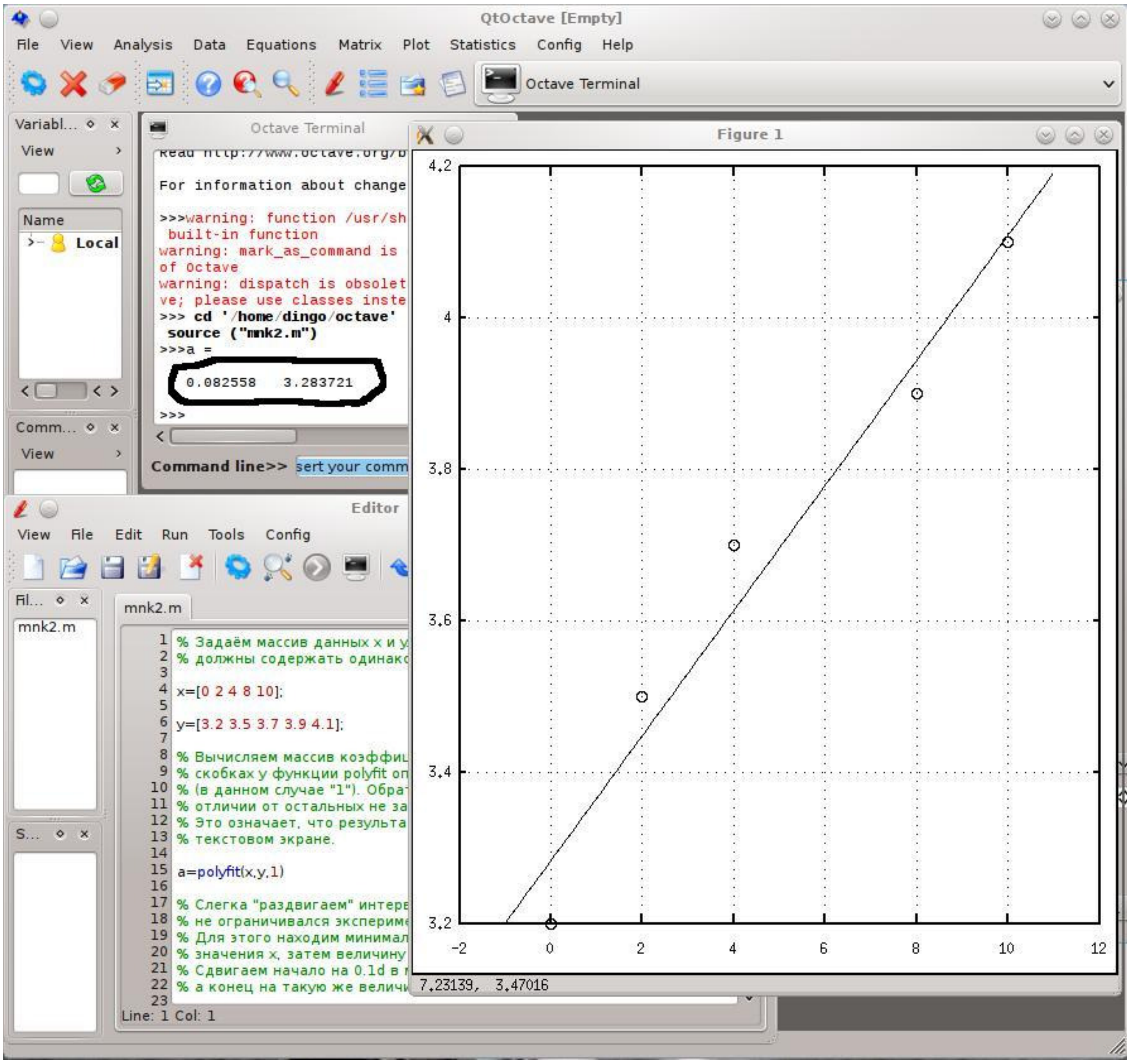

Рис. Г.1. Результат работы программы, приведённой в параграфе Г.3.2

указаны данные из примера Г.1.1 с линейной аппроксимацией. Обратите внимание на вычисленные коэффициенты полинома в окне терминала (обведены толстой линией).

Приложение Д

Правила приближенных вычислений

Студенты часто вычисляют искомую величину в задаче, выполняя расчеты с учетом пяти, шести, а иногда и более значащих цифр. Следует иметь в виду, что эта точность иллюзорна.

В окончательном ответе принято указывать не относительную, а абсолютную ошибку. Если хотя бы одна из величин в каком-либо сложном выражении задана с точностью до двух значащих цифр (не считая нулей впереди), то нет смысла вести вычисление результата с точностью более чем до двух значащих цифр.

Значащими цифрами называют все цифры, кроме нулей, стоящие левее первой, отличной от нуля цифры.

Пример: в числе 0.0707 три значащих цифры,
в числе 0.408 – три,
в числе 0.38 – две,
в числе 12.7 – три,
в числе 23.94 – четыре,
в числе 23.940 – пять,
в числе 5700 – четыре.

Иначе говоря, численное значение результата не должно содержать большего количества цифр, чем в числе, заданном с наименьшей точностью. Для уточнения значения последней значащей цифры результата нужно вычислить следующую за ней цифру; если она окажется меньше 5, ее следует просто отбросить, а если 5 или больше, то, отбросив ее, следует предыдущую цифру увеличить на единицу.

Пример: $0.764 \approx 0.76$; $\quad 0.275 \approx 0.28$.

Это общее правило округления. Однако, при записи результатов, имеющих погрешность, есть свои тонкости.

Введём понятие достоверной цифры приближенного числа. Достоверной называется такая цифра приближённого числа, для которой вычисленная абсолютная погрешность результата не превосходит половину единицы того разряда, в котором записана эта цифра.

Пример: Пусть нами получен результат $2,547 \pm 0,005$. Поскольку $0,001 < 0,005$, то «7» — сомнительная цифра. Для предыдущего разряда: $0,01 > 0,005$, следовательно «4» — достоверная цифра. Сомнительные цифры при приближённых вычислении следует округлять.

Требование это совершенно естественно и очевидно. В самом деле, если мы получили ошибку измерения порядка десятых, то нет смысла в результате указывать сотые и тысячные.

При этом необходимо учитывать, что любое округление чисел (в том числе и констант) представляет собой систематическую ошибку.

Например, при определении ускорения свободного падения с помощью математического маятника было вычислено, что

$$\Delta g = 0.019 \text{м/с}^2; \qquad \overline{g} = 9.823 \text{м/с}^2.$$

Окончательный результат следует представить так:

$$g = (9.82 \pm 0.02) \text{м/с}^2; \qquad E = \frac{\Delta g}{g} 100\% \approx 0.2\%.$$

Любое число можно записать как произведение степени числа 10 на десятичную дробь, содержащую от 1 до 9 целых единиц.

Пример: $273 = 2.73 \cdot 10^2$; $\quad 0.00455 = 4.55 \cdot 10^{-3}$.

Показатель степени числа 10 в этом случае называется порядком величины.

Запись $5.7 \cdot 10^3$ означает, что значащих цифр только две.

Десятичный разряд (порядок) последней значащей цифры результата должен соответствовать порядку первой значащей цифры ошибки.

Пример: 231.74 ± 0.06; это означает, что последний знак результата неверен, его ошибка составляет ± 6 единиц этого разряда.

Д.1 Действия над приближенными числами

Результат действий над приближенными числами есть также приближенное число.

При сложении и вычитании в конечном результате следует учесть столько десятичных знаков, сколько их в том исходном данном, которое содержит наименьшее количество десятичных знаков:

$$1.832 + 5.1 + 14.367 \approx 1.83 + 5.1 + 14.37 = 16.29 \approx \pm 16.3.$$

При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр:

$$16.3 \cdot 3.417 \approx 16.3 \cdot 3.42 = 55.712 \approx 55.7;$$

$$\frac{55.7}{2.158} \approx \frac{55.7}{2.16} = 25.787 \approx 25.8.$$

При возведении в степень

$$(12.3^2) = 151.29 \approx 151; \quad \sqrt{863} \approx 2.938 \approx 2.94; \quad \lg 25.6 = 1.3082 \approx 1.31.$$

Если при обработке результатов используются табличные величины или величины, измеренные заранее, то их абсолютная ошибка принимается равной ее предельной величине, т. е. половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе.

Пример: плотность $\rho = 7.9$ г/см^2, тогда $\Delta\rho = 0.05$ г/см^2.

Д.2 Применение метода оценки результатов измерений для предварительного анализа точности измерений

Определяя удельное сопротивление ρ проводника и имея для этого реохорд, амперметр, вольтметр, рулетку, микрометр и источник питания, мы получили следующие результаты (см. Л/р № 2):

$$U = 3,0\ B \pm 0,1\ B, \quad I = 0,50\ A \pm 0,05\ A,$$

$$L = 100,0\ \text{см} \pm 0,5\ \text{см}, \quad D = 0,3\ \text{мм} \pm 0,01\ \text{мм}.$$

Какая точность измерения удельного сопротивления ρ при этом нами достигнута?

Для вычисления ρ и $\Delta\rho_{\text{отн}}$ сначала находим приближенное значение удельного сопротивления проводника:

$$R = \frac{\rho L}{S}, \quad R = \frac{U}{I}, \quad S = \frac{\pi D^2}{4},$$

откуда

$$\rho = \frac{U\pi D^2}{4IL},$$

а затем границу относительной погрешности по формуле:

$$\frac{\Delta\rho_{\text{отн}}}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}.$$

Здесь

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0.1}{3} = 3\ \%; \qquad \frac{\Delta I}{I} = \frac{0.05}{0.5} = 10\ \%;$$

$$\frac{2\Delta D}{D} = \frac{2\cdot 0.01}{0.3} = 7~\% \qquad \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.5}{100} = 0.5~\%.$$

Анализируя полученные отдельные относительные погрешности, определяем, что с наибольшей тщательностью должны быть измерены сила тока, напряжение и диаметр проволоки. Если измерение длины проволоки производить с погрешностью отсчета в 1 см, то упростятся математические вычисления, а точность результата измерения практически не уменьшится, так как

$$\frac{1}{100} = 1~\%.$$

Погрешности косвенных измерений зависят от вида функции, определяющей искомую величину, и от погрешностей прямых измерений тех величин, которые входят в эту функцию.

Согласно теории погрешностей, вклад каждой погрешности в общую погрешность результата измерения очень быстро падает с уменьшением величины отдельной погрешности.

Следовательно, если нужно повысить точность измерения конечного результата, то необходимо уменьшить ту погрешность измерения, которая является наибольшей.

Для этого необходимо применить при измерении физической величины, дающей наибольшую погрешность, меру или измерительный прибор большей точности или использовать более совершенный метод измерения.

Приложение Е

Примеры программ обработки результатов

Е.1 Пример программы статистической обработки

Пример программы статистической обработки данных для лабораторной работы № 1, написанной в среде *Octave* (язык программирования аналогичен языку *MATLAB*).

```
% Задаем набор исходных значений. Обратите внимание, отдельные значения
% разделяются пробелом, десятичным разделителем является точка.
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
x=[141.52 145.49 143.56 143.61 143.78 146.55 144.39 143.02 144.1 143.36 149.81];
% Задаём коэффициент Стьюдента для данного количества значений
% исходя из доверительной вероятности 0.95.
t_an=2.2;
% Определяем количество исходных значений.
n=length(x);
% Находим среднее значение X. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
x_sred=mean(x)
% Находим среднюю квадратиную погрешность
sn=std(x)
% Вычисляем погрешность
delta_x=(t_an*sn)/sqrt(n)
```

Е.2 Пример программы обработки косвенных измерений

Пример программы обработки косвенных измерений удельного сопротивления проводника для лабораторной работы № 2, написанной в среде *Octave* (язык программирования аналогичен языку *MATLAB*).

```
% Очищаем все перменные.
clear all
```

```
% Для L=10 см.
% Задаём длину проволоки (в метрах)
% (позицию подвижного контакта).
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
L(1)=.1;
% Задаём значение тока и напряжения.
U=[.1 .2 .3 .4 .45];
I=[.07 .115 .175 .23 .25];
% Задаём диаметр проволоки (в метрах).
% При измерении  штангенциркулем.
d_sht1=[.3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3];
% И находим среднее
d_sht=mean(d_sht1);
% И при измерении микрометром.
d_mkr1=[.33e-3 .32e-3 .31e-3 .32e-3 .33e-3];
% И находим среднее
d_mkr=mean(d_mkr1);
% Вычисляем сопротивление. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
R=U./I;
R(1)=mean(R);
% Вычисляем площадь сечения проволоки.
S_sht=pi*d_sht^2/4;
S_mkr=pi*d_mkr^2/4;
% Вычисляем удельное сопротивление
% для случая со штангенциркулем.
a=S_sht./L(1);
rho_sht=a.*R(1)
% И для случая со штангенциркулем.
a=S_mkr./L(1);
rho_mkr=a.*R(1)
% Вычисляем относительную погрешность.
% Погрешность напряжения.
DeltaU=0.0225;
% Погрешность силы тока.
DeltaI=0.00375;
% Погрешность штангенциркуля.
Deltad_sht=.05e-3;
% Погрешность микрометра.
Deltad_mkr=.005e-3;
% Погрешность длины проволоки.
DeltaL=.5e-3;
% Вычисляем относительную погрешность
% удельного сопротивления
% для случая со штангенциркулем.
E_sht=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_sht/d_sht+DeltaL./L(1);
Deltarho_sht=E_sht.*rho_sht
% И для случая с микрометром.
E_mkr=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_mkr/d_mkr+DeltaL./L(1);
Deltarho_mkr=E_mkr.*rho_mkr
```

```
% Находим среднее значение удельного сопротивления
% Для штангенциркуля.
rho_sr_sht(1)=mean(rho_sht)
% Для штангенциркуля.
rho_sr_mkr(1)=mean(rho_mkr)
% Находим среднее значение погрешности
% удельного сопротивления.
% для случая со штангенциркулем.
Deltarho_sht_sr=mean(Deltarho_sht)
% И для случая с микрометром.
Deltarho_mkr_sr=mean(Deltarho_mkr)
% И закидываем их в отдельные массивы.
D_rho_sht(1)=Deltarho_sht_sr;
D_rho_mkr(1)=Deltarho_mkr_sr;
%-----------------------------------------------------
% Для L=20 см.
% Задаём длину проволоки (в метрах)
% (позицию подвижного контакта).
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
L(2)=.2;
% Задаём значение тока и напряжения.
U=[.2 .4 .6 .7 .9];
I=[.07 .115 .175 .23 .25];
% Вычисляем сопротивление. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
R=U./I;
R(2)=mean(R);
% Вычисляем площадь сечения проволоки.
S_sht=pi*d_sht^2/4;
S_mkr=pi*d_mkr^2/4;
% Вычисляем удельное сопротивление
% для случая со штангенциркулем.
a=S_sht./L(2);
rho_sht=a.*R(2)
% И для случая со штангенциркулем.
a=S_mkr./L(2);
rho_mkr=a.*R(2)
% Вычисляем относительную погрешность.
% Погрешность напряжения.
DeltaU=0.0225;
% Погрешность силы тока.
DeltaI=0.00375;
% Погрешность штангенциркуля.
Deltad_sht=.05e-3;
% Погрешность микрометра.
Deltad_mkr=.005e-3;
% Погрешность длины проволоки.
DeltaL=.5e-3;
% Вычисляем относительную погрешность
% удельного сопротивления
```

```
% для случая со штангенциркулем.
E_sht=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_sht/d_sht+DeltaL./L(2);
Deltarho_sht=E_sht.*rho_sht
% И для случая с микрометром.
E_mkr=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_mkr/d_mkr+DeltaL./L(2);
Deltarho_mkr=E_mkr.*rho_mkr
% Находим среднее значение удельного сопротивления
% Для штангенциркуля.
rho_sr_sht(2)=mean(rho_sht)
% Для штангенциркуля.
rho_sr_mkr(2)=mean(rho_mkr)
% Находим среднее значение погрешности
% удельного сопротивления.
% для случая со штангенциркулем.
Deltarho_sht_sr=mean(Deltarho_sht)
% И для случая с микрометром.
Deltarho_mkr_sr=mean(Deltarho_mkr)
% И закидываем их в отдельные массивы.
D_rho_sht(2)=Deltarho_sht_sr;
D_rho_mkr(2)=Deltarho_mkr_sr;
%-----------------------------------------------------
% Для L=30 см.
% Задаём длину проволоки (в метрах)
% (позицию подвижного контакта).
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
L(3)=.3;
% Задаём значение тока и напряжения.
U=[.3 .5 .8 1.2 1.4];
I=[.07 .115 .175 .23 .25];
% Вычисляем сопротивление. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
R=U./I;
R(3)=mean(R);
% Вычисляем площадь сечения проволоки.
S_sht=pi*d_sht^2/4;
S_mkr=pi*d_mkr^2/4;
% Вычисляем удельное сопротивление
% для случая со штангенциркулем.
a=S_sht./L(3);
rho_sht=a.*R(3)
% И для случая со штангенциркулем.
a=S_mkr./L(3);
rho_mkr=a.*R(3)
% Вычисляем относительную погрешность.
% Погрешность напряжения.
DeltaU=0.0225;
% Погрешность силы тока.
DeltaI=0.00375;
% Погрешность штангенциркуля.
Deltad_sht=.05e-3;
```

```
% Погрешность микрометра.
Deltad_mkr=.005e-3;
% Погрешность длины проволоки.
DeltaL=.5e-3;
% Вычисляем относительную погрешность
% удельного сопротивления
% для случая со штангенциркулем.
E_sht=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_sht/d_sht+DeltaL./L(3);
Deltarho_sht=E_sht.*rho_sht
% И для случая с микрометром.
E_mkr=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_mkr/d_mkr+DeltaL./L(3);
Deltarho_mkr=E_mkr.*rho_mkr
% Находим среднее значение удельного сопротивления
% Для штангенциркуля.
rho_sr_sht(3)=mean(rho_sht)
% Для штангенциркуля.
rho_sr_mkr(3)=mean(rho_mkr)
% Находим среднее значение погрешности
% удельного сопротивления.
% для случая со штангенциркулем.
Deltarho_sht_sr=mean(Deltarho_sht)
% И для случая с микрометром.
Deltarho_mkr_sr=mean(Deltarho_mkr)
% И закидываем их в отдельные массивы.
D_rho_sht(3)=Deltarho_sht_sr;
D_rho_mkr(3)=Deltarho_mkr_sr;
%--------------------------------------------------
% Для L=40 см.
% Задаём длину проволоки (в метрах)
% (позицию подвижного контакта).
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
L(4)=.4;
% Задаём значение тока и напряжения.
U=[.4 .9 .13 1.5 1.9];
I=[.07 .115 .175 .23 .25];
% Задаём диаметр проволоки (в метрах).
% При измерении  штангенциркулем.
d_sht1=[.3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3];
% И находим среднее
d_sht=mean(d_sht1);
% И при измерении микрометром.
d_mkr1=[.33e-3 .32e-3 .31e-3 .32e-3 .33e-3];
% И находим среднее
d_mkr=mean(d_mkr1);
% Вычисляем сопротивление. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
R=U./I;
R(4)=mean(R);
% Вычисляем площадь сечения проволоки.
S_sht=pi*d_sht^2/4;
```

```
S_mkr=pi*d_mkr^2/4;
% Вычисляем удельное сопротивление
% для случая со штангенциркулем.
a=S_sht./L(4);
rho_sht=a.*R(4)
% И для случая со штангенциркулем.
a=S_mkr./L(4);
rho_mkr=a.*R(4)
% Вычисляем относительную погрешность.
% Погрешность напряжения.
DeltaU=0.0225;
% Погрешность силы тока.
DeltaI=0.00375;
% Погрешность штангенциркуля.
Deltad_sht=.05e-3;
% Погрешность микрометра.
Deltad_mkr=.005e-3;
% Погрешность длины проволоки.
DeltaL=.5e-3;
% Вычисляем относительную погрешность
% удельного сопротивления
% для случая со штангенциркулем.
E_sht=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_sht/d_sht+DeltaL./L(4);
Deltarho_sht=E_sht.*rho_sht
% И для случая с микрометром.
E_mkr=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_mkr/d_mkr+DeltaL./L(4);
Deltarho_mkr=E_mkr.*rho_mkr
% Находим среднее значение удельного сопротивления
% Для штангенциркуля.
rho_sr_sht(4)=mean(rho_sht)
% Для штангенциркуля.
rho_sr_mkr(4)=mean(rho_mkr)
% Находим среднее значение погрешности
% удельного сопротивления.
% для случая со штангенциркулем.
Deltarho_sht_sr=mean(Deltarho_sht)
% И для случая с микрометром.
Deltarho_mkr_sr=mean(Deltarho_mkr)
% И закидываем их в отдельные массивы.
D_rho_sht(4)=Deltarho_sht_sr;
D_rho_mkr(4)=Deltarho_mkr_sr;
%-----------------------------------------------------
% Для L=50 см.
% Задаём длину проволоки (в метрах)
% (позицию подвижного контакта).
% Обратите внимание, точка с запятой в конце строки
% блокирует вывод в окно терминала.
L(5)=.5;
% Задаём значение тока и напряжения.
U=[.45 1.1 1.5 2.1 2.4];
I=[.07 .115 .175 .23 .25];
```

```
% Задаём диаметр проволоки (в метрах).
% При измерении  штангенциркулем.
d_sht1=[.3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3 .3e-3];
% И находим среднее
d_sht=mean(d_sht1);
% И при измерении микрометром.
d_mkr1=[.33e-3 .32e-3 .31e-3 .32e-3 .33e-3];
% И находим среднее
d_mkr=mean(d_mkr1);
% Вычисляем сопротивление. Точки с запятой в конце нет,
% данные выводятся на экран.
R=U./I;
R(5)=mean(R);
% Вычисляем площадь сечения проволоки.
S_sht=pi*d_sht^2/4;
S_mkr=pi*d_mkr^2/4;
% Вычисляем удельное сопротивление
% для случая со штангенциркулем.
a=S_sht./L(5);
rho_sht=a.*R(5)
% И для случая со штангенциркулем.
a=S_mkr./L(5);
rho_mkr=a.*R(5)
% Вычисляем относительную погрешность.
% Погрешность напряжения.
DeltaU=0.0225;
% Погрешность силы тока.
DeltaI=0.00375;
% Погрешность штангенциркуля.
Deltad_sht=.05e-3;
% Погрешность микрометра.
Deltad_mkr=.005e-3;
% Погрешность длины проволоки.
DeltaL=.5e-3;
% Вычисляем относительную погрешность
% удельного сопротивления
% для случая со штангенциркулем.
E_sht=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_sht/d_sht+DeltaL./L(5);
Deltarho_sht=E_sht.*rho_sht
% И для случая с микрометром.
E_mkr=DeltaU./U+DeltaI./I+2*Deltad_mkr/d_mkr+DeltaL./L(5);
Deltarho_mkr=E_mkr.*rho_mkr
% Находим среднее значение удельного сопротивления
% Для штангенциркуля.
rho_sr_sht(5)=mean(rho_sht)
% Для штангенциркуля.
rho_sr_mkr(5)=mean(rho_mkr)
% Находим среднее значение погрешности
% удельного сопротивления.
% для случая со штангенциркулем.
Deltarho_sht_sr=mean(Deltarho_sht)
```

```
% И для случая с микрометром.
Deltarho_mkr_sr=mean(Deltarho_mkr)
% И закидываем их в отдельные массивы.
D_rho_sht(5)=Deltarho_sht_sr;
D_rho_mkr(5)=Deltarho_mkr_sr;
% Выводим данные
R
D_rho_sht
D_rho_mkr
% Строим график R(L)
% Линейная аппроксимация
a=polyfit(L,R,1);
disp('Угловой коэффициент');
a(1)
R1=polyval(a,L);
% Собственно вывод графика
plot(L,R,'x',L,R1,'-');
```

Приложение Ж

Справочные материалы и таблицы

Ж.1 Таблица 1. Доверительные вероятности

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.990
0.05	0.04	1.3	0.80	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.51	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.57	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.978	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.9998
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.9999
				4.0	0.9999

Доверительные вероятности α для доверительного интервала, выраженного в долях среднеквадратичной ошибки $\varepsilon = \frac{\Delta x}{S_n}$. Функция Лапласа:

$$2\Theta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = \alpha.$$

Ж.2 Таблица 2. Коэффициенты Стьюдента

n	α						
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	0.99
1	0.33	0.73	1.38	3.1	6.31	12.71	63.7
2	0.29	0.63	1.06	1.9	2.92	4.3	9.9
3	0.28	0.58	0.98	1.6	2.35	3.18	5.8
4	0.27	0.57	0.94	1.5	2.13	2.77	4.6
5	0.27	0.56	0.92	1.5	2.02	2.57	4.0
6	0.27	0.55	0.9	1.4	1.94	2.45	3.7
7	0.26	0.54	0.9	1.4	1.89	2.36	3.5
8	0.26	0.54	0.9	1.4	1.86	2.31	3.4
9	0.26	0.54	0.88	1.4	1.83	2.26	3.3
10	0.26	0.54	0.88	1.4	1.81	2.23	3.2
11	0.26	0.54	0.87	1.4	1.8	2.2	3.1
12	0.26	0.54	0.87	1.4	1.78	2.18	3.1
13	0.26	0.54	0.87	1.4	1.77	2.16	3.0
14	0.26	0.54	0.87	1.3	1.76	2.14	3.0
15	0.26	0.54	0.87	1.3	1.75	2.13	2.9
16	0.26	0.54	0.86	1.3	1.75	2.12	2.9
17	0.26	0.53	0.86	1.3	1.74	2.11	2.9
18	0.26	0.53	0.86	1.3	1.73	2.1	2.9
19	0.26	0.53	0.86	1.3	1.73	2.1	2.9
20	0.26	0.53	0.86	1.3	1.72	2.1	2.8
22	0.26	0.53	0.86	1.3	1.72	2.1	2.8
24	0.26	0.53	0.86	1.3	1.71	2.1	2.8
26	0.26	0.53	0.86	1.3	1.7	2.0	2.8
28	0.26	0.53	0.85	1.3	1.7	2.0	2.8
30	0.26	0.53	0.85	1.3	1.7	2.0	2.7
40	0.25	0.53	0.85	1.3	1.68	2.0	2.7
60	0.25	0.53	0.85	1.3	1.67	2.0	2.6
120	0.25	0.53	0.85	1.3	1.66	2.0	2.6
∞	0.25	0.52	0.84	1.3	1.64	1.96	2.6

Ж.3 Таблица 3. Доверительные интервалы для σ

α	0.99		0.98		0.95		0.991	
n	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	0.43	14	0.47	10	0.52	6.3	0.58	4.4
4	0.48	6.5	0.51	5.1	0.57	3.7	0.62	2.9
5	0.52	4.4	0.55	3.7	0.60	2.9	0.65	2.4
6	0.55	3.5	0.58	3.0	0.62	2.5	0.67	2.1
7	0.57	3.0	0.60	2.6	0.64	2.2	0.69	1.9
8	0.59	2.7	0.62	2.4	0.66	2.0	0.70	1.8
9	0.60	2.4	0.63	2.2	0.68	1.9	0.72	1.7
10	0.62	2.3	0.64	2.1	0.69	1.8	0.73	1.6
11	0.63	2.2	0.66	2.0	0.70	1.8	0.74	1.6
12	0.64	2.1	0.67	1.9	0.71	1.7	0.75	1.5
13	0.65	2.0	0.68	1.8	0.72	1.6	0.76	1.5
14	0.66	1.9	0.69	1.8	0.73	1.6	0.77	1.5
15	0.67	1.8	0.69	1.7	0.73	1.6	0.77	1.5
16	0.68	1.8	0.70	1.7	0.74	1.5	0.78	1.4
17	0.68	1.8	0.71	1.7	0.75	1.5	0.79	1.4
18	0.69	1.7	0.71	1.6	0.75	1.5	0.79	1.4
19	0.70	1.7	0.72	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
20	0.70	1.7	0.73	1.6	0.76	1.5	0.81	1.4
25	0.73	1.6	0.75	1.5	0.78	1.4	0.83	1.3
30	0.74	1.5	0.77	1.4	0.80	1.3	0.85	1.3
40	0.77	1.4	0.79	1.3	0.82	1.3	0.86	1.2
50	0.79	1.3	0.81	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2
70	0.82	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2
100	0.85	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2	0.90	1.1
200	0.89	1.1	0.90	1.1	0.91	1.1	0.93	1.1

Ж.4 Таблица 4. Оценка выскакивающих измерений

n	β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.56	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
20	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

Вероятность β появления $\nu_{max} = \left|\frac{x-\overline{x}_k}{S_n Roman}\right|$ значений в ряду из n измерений.

Ж.5 Таблица 5. Необходимое число измерений для получения случайной ошибки ε с надёжностью α

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\delta}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	0.73	1.38	3.1	12.71	63.7
0.5	3	0.63	1.06	1.9	4.3	9.9
0.4	4	0.58	0.98	1.6	3.18	5.8
0.3	6	0.57	0.94	1.5	2.77	4.6
0.2	13	0.56	0.92	1.5	2.57	4.0
0.1	47	0.55	0.9	1.4	2.45	3.7
0.05	183	0.54	0.9	1.4	2.36	3.5
0.01	4543	0.54	0.9	1.4	2.31	3.4

Ж.6 Таблица 6. Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений для типовых выражений

№ п/п	Выражение для приближённого значения величины x	Абсолютная погрешность dx	Относительная погрешность dx
1	$x = a + b$	$\Delta x = \Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b}$
2	$x = a - b$	$\Delta x = \Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$
3	$x = a \cdot b$	$x \cdot \Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
4	$x = \frac{a}{b}$	$\Delta x = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
5	$x = a^n$	$\Delta x = na^{n-1}\Delta a$	$\frac{\Delta x}{x} = n\frac{\Delta a}{a}$
6	$x =^n \sqrt{a}$	$\Delta x = \frac{\Delta a}{na^{n-1}}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}\frac{\Delta a}{a}$
7	$x = \sin\alpha$	$\Delta x = \cos\alpha\Delta\alpha$	$\frac{\Delta x}{x} = \operatorname{ctg}\alpha\Delta\alpha$
8	$x = \cos\alpha$	$\Delta x = \sin\alpha\Delta\alpha$	$\frac{\Delta x}{x} = \operatorname{tg}\alpha\Delta\alpha$
9	$x = \operatorname{tg}\alpha$	$\Delta x = \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta\alpha}{\cos 2\alpha}$
10	$x = \operatorname{ctg}\alpha$	$\Delta x = \frac{\Delta\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}$

Приложение З

Единые требования к оформлению отчёта по лабораторным работам

ОТЧЁТ
подаётся каждым студентом индивидуально
и должен содержать:

1. Порядковый номер и наименование лабораторной работы.

2. Цель работы.

3. Перечень используемого оборудования с указанием основных параметров установок и приборов.

4. Основные теоретические сведения и расчетные формулы.

5. Функциональную и принципиальную схему лабораторной установки.

6. Предварительные расчеты, выполненные при подготовке к выполнению работы (где это требуется по описанию работы).

7. Содержание работы (порядок выполнения).

8. Ход выполнения работы:

   (a) таблицы с результатами вычислений;

   (b) графики экспериментальных и расчетных зависимостей.

   Примечание: графики вычерчиваются на миллиметровой бумаге или с помощью компьютера и вклеиваются в отчет. На каждом графике строятся только те зависимости, которые предусмотрены соответствующим пунктом описания. Особое внимание следует обратить на рациональный выбор масштабов по осям координат. Графики экспериментальных зависимостей следует выполнять так, чтобы были ясно видны точки снятых отсчетов. Поскольку получаемые точки имеют некоторый разброс, то кривые следует проводить между ними, сообразуясь с физическими закономерностями.

9. Оценку ошибок измерений и вычислений.

10. Краткие выводы: критические сопоставления результатов эксперимента и теоретических положений, объяснения расхождений между ними (в случае их наличия).

11. Список используемой литературы.

Литература

1. Алексеев, В. П Механика. Физический практикум. Измерительный цикл : учебное пособие для вузов / В. П. Алексеев [и др.] – Ярославль : ЯрГУ, 2012. – 111 с.

2. Касандрова, О. Н. Обработка результатов наблюдений / О. Н. Касандрова, В. В. Лебедев. – М. : Наука, 1970. – 104 с.

3. Зайдель, А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений / А. Н. Зайдель. – М. : Наука, 1967. – 88 с.

4. Щиголев, Б. Н. Математическая обработка наблюдений / Б. Н. Щиголев. – М. : Физматгиз, 1962. – 344 с.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1 : Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2014. – 544 с.

6. Савельев, И. В. Курс общей физики (Т. 1. Механика) / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2021. – 340 с.

7. Хайкин, С. Э. Физические основы механики / С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1971 - 752 с.

8. Каленков, С. Г. Практикум по физике. Механика / С. Г. Каленков. – М. : Высшая школа, 1990. – 110с.

9. Майсова, Н. Н. Практикум по курсу общей физики / Н. Н. Майсова. – М. : Высшая школа, 1970. – 448 с.

10. Иверонова, В. И. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / В. И. Иверонова. – М. : Наука, 1967. – 352 с.

11. Дьяконов, В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ / В. П. Дьяконов. – М. : Наука, 1989. – 240 с.

12. Дьяконов, В. П. MATLAB: учебный курс / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс. 2020. – 453 с.

13. Поршнев, С. В. MATLAB 7: основы работы и программирования : учебник / С. В. Поршнев. – М. : Бином-Пресс, 2011. – 320 с.

Оглавление

Учебное издание

Алексеев Вадим Петрович
Кузнецов Павел Александрович
Московский Сергей Борисович
Неменко Евгений Олегович
Папорков Владимир Аркадьевич
Рудь Николай Алексеевич
Рыбникова Елена Владимировна

Механика
Физический практикум.
Обработка результатов прямых и косвенных измерений

Практикум

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор, верстка Е. О. Неменко

Подписано в печать 14.07.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 4,4. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 5 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, г. Ярославль, ул. Советская, 14.