МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» являются изучение методов вычислительной геометрии и экстремальных задач, связанных с геометрическими фигурами. Основное внимание уделяется выпуклым фигурам, часто встречающимся в приложениях и обладающими многими специфическими свойствами..

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» относится к основной части образовательной программы и входит в модуль «Геометрия и топология».

Для освоения этой дисциплины студенты должны владеть аппаратом математического анализа, элементами аналитической геометрии и линейной алгебры, иметь представление о выпуклых множествах и выпуклых функциях многих переменных, знать основные положения теории экстремальных задач.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	**Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)**	**Перечень планируемых результатов обучения**
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**И-УК-1.1** Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Уметь - самостоятельно работать с научной литературой;
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-2 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	**И-ОПК_2.2** Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой.	Знать: - основные теоремы теории экстремальных задач; - методы решения классических задач вариационного исчисления. Уметь: - формулировать практические задачи в терминах теории экстремальных задач; - оптимально выбирать метод решения задачи; - представлять решение задачи в форме, удобной для программирования и интегрирования в программный продукт.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)* Формы ЭО и ДОТ *(при наличии)*
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Выпуклые множества. Овыпукление. Крайние точки. Опорные функции	8	4	4		1		18	
2.	Расстояние между выпуклыми множествами. Проекция и антипроекция на выпуклое множество	8	4	4		1	0.1	18	
3.	Радиус Чебышёва. Определение. Свойства. Способы вычисления	8	4	4		1	0.1	18	
4.	Вписанный круг. Определение. Свойства. Способ вычисления	8	4	4		1	0.1	17.7	
	Всего за семестр	**108**	**16**	**16**		**4**	**0.3**	**71.7**	**Зачет**
	ИТОГО	**108**	**16**	**16**		**4**	**0.3**	**71.7**	

Содержание разделов дисциплины

1. Выпуклые множества

1.1. Даётся определение выпуклого множества. Устанавливаются свойства выпуклых множеств. Приводятся примеры выпуклых множеств.

1.2. От произвольного подмножества линейного пространства можно перейти к его овыпуклению, определяемому как пересечение всех выпуклых множеств содержащих исходное множество. Данное определение неконструктивно. Уже на плоскости операция овыпукления нетривиальна. В настоящее время известны достаточно эффективные алгоритмы овыпукления конечных подмножеств плоскости. В пространствах более высоких размерностей ситуация заметно хуже, здесь имеется немало проблем, доступных пониманию любого студента.

1.3. Наша интуиция хорошо работает на плоскости, хуже в трёхмерном пространстве и отказывает нам в пространствах более высоких размерностей. Здесь оказывается полезным перейти к опорным функциям выпуклых множеств. Этот переход позволяет свести геометрические проблемы к аналитическим задачам, для решения которых имеется готовый математический аппарат: алгебра и математический анализ.

2. Расстояние между выпуклыми множествами

2.1. Чаще всего для определения расстояния между выпуклыми множествами используется метрика Хаусдорфа. Для получающегося таким образом метрического пространства оказываются справедливыми положения классического анализа. Например, верна теорема Бляшке о компактности, представляющая обобщение классической теоремы Вейерштрасса. Важным является выражение расстояния D(A,B) между выпуклыми множествами A,B через опорные функции этих множеств.

2.2. В численном анализе часто возникает задача о нахождении в выпуклом множестве Q элемента b , наиболее близкого к элементу a, не принадлежащего множеству Q. При этом элемент b называют проекцией a на множество Q. В курсе предлагается рассказать о некоторых результатах, связанных с проектированием.

2.3. Антипроекцией элемента a на множество Q называется элемент c из Q, наиболее удалённый от элемента a. Задача о нахождении антипроекции сравнительно мало изучена, она несомненно представляет интерес.

3. Радиус Чебышёва

3.1 Радиус Чебышёва множества A называют наименьший из радиусов шаров B, содержащих множество A. Соответствующее число обозначают символом R(A). Если Q - выпуклая оболочка множества A, то R(A) = R(Q), поэтому для нахождения радиуса Чебышёва множества A достаточно научиться решать две задачи : построения выпуклой оболочки Q множества A, нахождение радиуса Чебышёва для выпуклого множества Q. Устанавливаются и другие свойства радиуса Чебышёва.\

3.2. В случае конечного множества A задачу о нахождении R(A) рассматривал английский математик Сильвестр. Его исследования сыграли существенную роль в истории нелинейного программирования. Им доказана эквивалентность задачи о нахождеиии R(A) некоторой задаче квадратичного программирования.

3.3. Если A – подмножество плоскости. то найдётся треугольник T с вершинами в множестве A, для которого R(A) = R(T). Этот результат (следствие теоремы Хелли) можно использовать для фактического нахождения R(A) в случае конечного множества A . В общем случае данный способ неэффективен, однако если число элементов A невелико подобный метод нахождения R(A) вполне приемлем.

4. Вписанный круг

4.1. Пусть A – плоский выпуклый многоугольник. Среди содержащихся в A кругов существует наибольший по площади, он и называется вписанным в многоугольник A/ Существование вписанного следует из теоремы Вейерштрасса. Единственности может и не быть, достаточно рассмотреть прямоугольник, отличный от квадрата.

4.2 Задача о вписанном круге легко сводится к задаче линейного программирования с тремя неизвестными. В результате получаем не только значение радиуса вписанного круга, но и координаты его центра.

4.3 Соответствующие построения могут быть обобщены на многогранники с любым числом измерений. Вместо кругов можно рассматривать произвольные овалы – центрально-симметричные выпуклые и ограниченные тела.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- издательская система LaTex;
- Adobe Acrobat Reader;
- Wolfram Mathematica;
- GNU Octave;
- Maxima;
- https://www.wolframcloud.com/

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М. Наука, 1967.
2. Климов В.С., Бычкова Т.Г., Ухалов А.Ю. Конечномерная оптимизация. Ярославль: ЯрГУ, 2008.

б) дополнительная литература

1. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию . М. Наука, 1969
2. Климов В.С. Дополнительные главы математического анализа. Ярославль: ЯрГУ, 2013.
3. Климов В.С. , Ухалов А.Ю. Решение задач математического анализа с использованием компьютерной математики. Ярославль: ЯрГУ, 2014.

в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)

https://reference.wolfram.com/language/?source=nav

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- компьютерные классы для проведения практических занятий.

Автор:

Профессор кафедры
математического анализа, д.ф.-м.н. В. С. Климов

Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование»

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

Задачи для самостоятельного решения (И-УК-1.1, И-ОПК_2.2)

1. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S, найти прямоугольник : 1) с наименьшим периметром; 2) с наименьшей диагональю.
2. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R/
3. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку A(1;2) и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.
4. Найти наименьшую длину отрезка, который делит равносторонний треугольник со стороной a на две равновеликие фигуры.
5. Задачи на простые многоугольники

a) На плоскости XOY заданы точки P[i](x[i],y[i]) (I = 1,…,n]. Построить простой многоугольник, граница которого есть замкнутая линия, проходящая через точки P[i].
b) Найти площадь (центроид, моменты инерции) простого многоугольника, заданного своими вершинами, проходимыми против часовой стрелки.
c) Найти расстояние от точки P[0](x[0],y[0]) до границы простого многоугольника.
d) Триангуляция простого многоугольника.
e) Построение выпуклой оболочки простого многоугольника

Таблицы T[j] (j =1,2,3), задающие координаты (x[i];y[i]) (I = 1,…,10)

T[1] =

x	0	2	10	15	11	13	6	7	3	4
y	0	-3	-2	-1	3	5	4	0	2	4

T(2) =

x	0	2	6	9	12	15	12	9	5	4
y	0	-4	-2	-3	-1	-2	3	2	5	1

T[3] =

x	0	2	2	4	4	6	6	10	8	1
y	0	0	2	2	0	2	0	4	7	5

6. Определить углы треугольника ABC с наибольшей площадью, если задана длина его основания BC и известно, что угол BAC равен φ.

В предлагаемых далее задачах 7 - 14 Q – выпуклая оболочка семи точек P[i] плоскости OXY, координаты которых (x[i];y[i]) (i = 1, …,7) приведены в таблице

i	1	2	3	4	5	6	7

x[i]	4	-2	1	2	4	8	7
y[i]	-3	0	5	2	1	2	6

7. Изобразить множество Q; указать множество вершин многоугольника Q/
8. Найти периметр, диаметр и площадь многоугольника Q.
9. Найти опорную функцию многоугольника Q.
10. Найти проекцию и антипроекцию на Q точки P[0] = (20; -2).
11. Найти радиус Чебышёва R(Q).
12. Найти круг максимальной площади, содержащийся в многоугольнике Q.
13. Найти центр масс многоугольника Q , считая её плотность всюду равной 1.
14. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

Требования для получения зачета

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Учебный план по дисциплине «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» достаточно разнообразен. Для успешного усвоения дисциплины представляется важным сочетание теоретических познаний и решения достаточно большого количества задач. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Теоретический материал с достаточной полнотой изложен в двух учебно-методических пособиях автора, одно из которых написано совместно с доцентами кафедры математического анализа Бычковой Т.Г. и Ухаловым А.Ю.

Каждый студент получает индивидуальное задание. Возникающие при выполнении задания вопросы обсуждаются либо в аудитории, либо на консультациях. В конце семестра студенты сдают зачет. По данной дисциплине есть три учебно-методических пособия преподавателей ЯрГУ с соответствующими рекомендациями по изучению разделов дисциплины. Поэтому данное приложение достаточно кратко.