

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Основания математики**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Основания математики» (Б1.В.ДВ.02.02) относится к вариативной части Блока 1 и является дисциплиной по выбору.

Она знакомит слушателей с аксиоматическим подходом к построению математических теорий, прививает математическую строгость умозаключений и полезна при изучении любых математических дисциплин, особенно «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Геометрия и топология», «Теория чисел», «Теория групп», «Топология», «Теория вероятностей» и «Математическая логика», «Современная геометрия», «Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии». Курс также имеет связи с философией.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	<b>ПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий <b>ПК-1.2</b> Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике <b>ПК-1.3</b> Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	<b>Знать</b> принципы построения аксиоматических теорий, понятие аксиомы, теоремы, следствия системы аксиом, определения, понятия непротиворечивости, совместности, независимости системы аксиом <b>Уметь</b> анализировать несложный математический текст на предмет корректности определений и умозаключений <b>Иметь представление</b> о формальных и неформальных теориях, истинности и доказуемости, об аксиоматических системах геометрий Евклида, Гильберта, Лобачевского, абсолютной геометрии, аксиомах эквивалентности, порядка, коммутативного кольца, поля, аксиоматическом построении поля действительных чисел, аксиомах метрики и аксиомах меры <b>Иметь опыт</b> работы с аксиоматиками абсолютной геометрии, эквивалентности, порядка, коммутативного кольца и поля, метрики и меры

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа	СР	

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
1-2	<i>Введение: математика и её место в системе научного знания. Ранняя аксиоматика: «Начала» Евклида</i>	1	2	2				8	Беседы на семинарах, обсуждения примеров
3-4	<i>Элементарная геометрия Д. Гильберта. Непротиворечивость, совместность, независимость системы аксиом. Истинность и доказуемость</i>	1	3	3		2		16	Беседы на семинарах, обсуждения примеров Задание для самостоятельной работы № 1
5-7	<i>Аксиомы порядка. Аксиомы конгруэнтности. Аксиомы непрерывности и связанные с ними логические проблемы. Аксиома параллельных. Евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия</i>	1	4	4		2		20	Беседы на семинарах, обсуждения примеров
8-9	<i>Аксиомы предшествования (линейный порядок). Аксиомы эквивалентности</i>	1	4	4				14	Беседы на семинарах, обсуждения примеров
10-11	<i>Аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля. Упорядоченные поля и аксиоматика поля действительных чисел. Метрика и мера.</i>	1	3	3				12	Беседы на семинарах, обсуждения примеров Задание для самостоятельной работы № 2
							0,3	1,7	зачёт
	<b>ИТОГО</b>		16	16		4	0,3	71,7	108

#### Содержание разделов

**1. Введение: математика и её место в системе научного знания.** Абстрагирование и идеализация как источники математических понятий. Независимость математических выводов от опыта и области явлений: отличие математики от естественных и общественных наук. Индукция и дедукция. Универсальность математических знаний. Истинность/ложность математических высказываний. Контрпримеры. Что такое аксиоматический метод построения математической теории.

**2. Ранняя аксиоматика: «Начала» Евклида.**

**3. Элементарная геометрия Д. Гильберта.** Аксиомы связи. Примеры теорем и доказательств. Неопределяемые и определяемые понятия.

**4. Непротиворечивость, совместность, независимость системы аксиом. Истинность и доказуемость.** Модель системы аксиом. Геометрия тетраэдра как модель системы аксиом связи. Примеры дискретных геометрий. Следствия системы аксиом и теоремы аксиоматической теории. Всякая теорема аксиоматической теории является следствием её аксиом. Понятие о формальных и неформальных языках и аксиоматических теориях.

**5. Аксиомы порядка. Аксиомы конгруэнтности.** Понятия отрезка и луча. Существование луча. Угол. Построение целочисленных точек числовой прямой.

**6. Аксиомы непрерывности и связанные с ними логические проблемы.** Аксиомы Архимеда и Кантора, их связь с понятием натурального ряда. Аксиома Дедекинда.

**7. Аксиома параллельных. Евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия.** Пятый постулат Евклида и эквивалентные ему утверждения. Некоторые результаты геометрии Лобачевского. Геометрия Евклида и модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Абсолютная геометрия.

**8. Аксиомы предшествования (линейный порядок).** Строгий и нестрогий порядки. Строгий и нестрогий линейные порядки. Линейно упорядоченное множество.

**9. Аксиомы эквивалентности.** Разбиение и смежные классы. Построение рациональных чисел из натуральных. Богатые и бедные аксиоматические теории.

**10. Аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля. Упорядоченные поля и аксиоматика поля действительных чисел.** Единственность единичного элемента в коммутативном кольце. Кольца вычетов. Единственность в поле элемента, обратного к данному. Примеры полей. Типы сечений в линейно упорядоченных множествах. Аксиома Дедекинда. Построение действительных чисел как бесконечных десятичных дробей. Существование и единственность поля действительных чисел. Существование и единственность в математике.

**11. Метрика и мера.** Аксиомы метрики, метрическая функция и метрическое пространство. Мера, конечная и счётная аддитивности. Класс измеримых подмножеств. Аксиомы измеримости.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? – Ижевск: Изд. Дом «Удмуртский университет», 2000. 100 с.

<https://knigogid.ru/books/997053-chto-takoe-aksiomaticheskii-metod/toread>

<https://klex.ru/s0e>

### **б) дополнительная литература**

1. Вейль Г. Математическое мышление. Пер. с англ. и нем. под ред. Б.В.Бирюка и А.Н. Паршина. М.: Наука, 1989. 400 с.

2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики (Сер.: Математическая логика и основания математики). Пер. с нем. под ред С.И. Адяна. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 556с.

3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств арифметики (Сер.: Математическая логика и основания математики). Пер. с нем. под ред С.И. Адяна. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 652с.

4. Ковалёв С.П., Родин А.В. Аксиоматический метод в современной науке и технике: прагматические аспекты// Epistemology & Philosophy of Science. 2016. Т. XLVII

<https://cyberleninka.ru/article/n/aksiomaticheskii-metod-v-sovremennoy-nauke-i-tehnike-pragmaticheskie-aspekty/viewer>

4. Ружа И. Основания математики. Пер. с нем. Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1981. 352с.

5. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств (Библиотека «Математические просвещение»). М.: Изд-во МЦНМО, 2009. 59с.

[https://math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/034\\_uspensky.pdf](https://math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/034_uspensky.pdf)

### **в) ресурсы сети Интернет**

Аксиоматический метод: Электронная философская энциклопедия [интернет-ресурс]

[https://elenph.org/individual?uri=https://litvinovg.pro/text\\_structures%23elenphArticle/w2phtml\\_2020\\_T\\_9\\_shalak\\_aksiomaticheskii\\_metod](https://elenph.org/individual?uri=https://litvinovg.pro/text_structures%23elenphArticle/w2phtml_2020_T_9_shalak_aksiomaticheskii_metod)

Беклемишев Л. FAQ: Аксиоматический метод. 6 фактов о проблеме математических доказательств, программе Гильберта и смысле в математике [интернет-ресурс]

<https://postnauka.ru/faq/31113>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м.н. Н.В. Тимофеева

Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
« Основания математики »  
*наименование дисциплины*

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

**Задание для самостоятельной работы № 1 (ИД-ПК-1.1, ИД-ПК-1.3)**

1. Используя аксиомы связи, докажите, что 1) каждая точка лежит на некоторой прямой, 2) каждая прямая лежит на некоторой плоскости.
2. Постройте определения следующих понятий: данный луч принадлежит данной прямой, полуплоскость, ребро полуплоскости, данный луч принадлежит данной полуплоскости.
3. Сформулируйте теорему о существовании полуплоскости, аналогичную приведённой в лекции теореме о существовании луча.
4. В геометрии девяти точек перечислите все пары непересекающихся прямых.

**Задание для самостоятельной работы № 2 (ИД-ПК-1.2, ИД-ПК-1.3)**

1. Докажите, что эквивалентность дробей согласована со сложением и умножением (определение согласованности даётся).
2. Решите уравнение  $6x=4$  в кольце вычетов по модулю 10. Решите то же самое уравнение в кольце вычетов по модулю 7. Решите уравнение  $2x=7$  в кольце вычетов по модулю 10.
3. В геометрии девяти точек введите декартовы координаты, используя поле вычетов по модулю 2. Напишите уравнения всех прямых в этой геометрии. Найдите условие параллельности прямых в построенной «аналитической геометрии девяти точек».
4. Постройте плоскость над полем вычетов по модулю 2, аналогичную «аналитической геометрии девяти точек» и обычной аналитической геометрии на вещественной плоскости. Сколько точек в полученной вами геометрии? Сколько прямых? Нарисуйте модель этой геометрии и выпишите уравнения всех прямых в ней.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

**Зачёт** выставляется по итогам сдачи студентами **заданий для самостоятельной работы и собеседования** по темам курса.

Круг вопросов для **собеседования (ИД-ПК-1.1)** к зачёту даётся содержанием тем курса. Акцент делается на общелогические и гносеологические вопросы и современные аксиоматики.

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины**  
**« Основания математики »**  
*наименование дисциплины*

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Основания математики» являются лекции. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам, а также обсуждения важных аспектов теории и разбор примеров.

Во время изучения курса важно обращать внимание на построение определений, аксиом, теорем, доказательств, следить за условиями применимости тех или иных утверждений. Это вырабатывает навык математически строгих рассуждений и поможет не совершать ошибок при изучении других математических курсов. Задачи разнообразны по содержанию, трудности и типологии. Полезно как решать задачи самим, так и анализировать готовые решения, отслеживая корректность умозаключений. Кроме того, очень полезно участвовать в обсуждениях как во время лекций, так и на семинарах.

Для получения зачёта необходимо отчитаться по заданиям для самостоятельной работы и пройти собеседование по теории.