

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**  
Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Компьютерные технологии в математических дисциплинах**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Компьютерные технологии в математических дисциплинах» обеспечивает приобретение знаний и умений, связанных с разработкой программного обеспечения для решения профессиональных задач в области прикладной математики.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с вычислительными математическими методами, используемыми в рамках различных математических дисциплин, демонстрация их реализации и применения.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору и относится к вариативной части Блока I. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Компьютерные технологии в математических дисциплинах», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и дипломных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
ПК-2: Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования	ИД-ПК-2.1: Владеет современными методами разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	<b>Владеет:</b> современными методами разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования
	ИД-ПК-2.2: Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	<b>Умеет:</b> разрабатывать и реализовывать алгоритмы математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования  <b>Знает:</b> основные математические методы различных областей вычислительной математики,

	ИД-ПК-2.3: Имеет практический опыт разработки и реализации алгоритмов на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	особенности их реализации и применения.
--	--	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины «Компьютерные технологии в математических дисциплинах» составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины и их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в акад. часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Методы математической статистики.	8	2		2				
2	Теория проверки гипотез.	8	2		2				
3	Основы корреляционного анализа.	8	2		2				
4	Основы регрессионного анализа.	8	2		2				
5	Методы аппроксимации.	8	2		2				
6	Нелинейная регрессия.	8	2		2				
7	Методы решения задач оптимизации.	8	2		2				
8	Линейное программирование.	8	2		2				
9	Методы решения дифференциальных уравнений.	8	2		2				
10	Методы вычислительной геометрии.	8	2		2				
						4	1,8		Зачёт
	Всего		20		20	4	1,8		

#### Содержание разделов дисциплины:

1. Методы математической статистики.
  - 1.1. Оценка параметра распределения случайной величины
  - 1.2. Метод максимального правдоподобия.
  - 1.3. Метод моментов.
2. Теория проверки гипотез.
  - 2.1. Виды гипотез.
  - 2.2. Нулевая и альтернативная гипотеза.
  - 2.3. Статистические критерии: параметрические и непараметрические.
  - 2.4. Критерии согласия Пирсона и Манна-Уитни.
  - 2.5. Критерий Колмогорова-Смирнова.

- 3. Основы корреляционного анализа.**
  - 3.1. Выборочный коэффициент корреляции.
  - 3.2. Т-критерий Стьюдента.
- 4. Основы регрессионного анализа.**
  - 4.1. Линейная регрессия.
  - 4.2. Парная линейная регрессия.
  - 4.3. Множественная линейная регрессия.
- 5. Методы аппроксимации.**
  - 5.1. Интерполяция многочленами: линейная (билинейная), интерполяция многочленами по Ньютону и Лагранжу, сплайны и кривые Безье.
- 6. Нелинейная регрессия.**
  - 6.1. Сведение к задаче линейной регрессии (в некоторых частных случаях).
  - 6.2. Полиномиальная регрессия.
  - 6.3. Сведение к задаче поиска экстремума в общем случае.
- 7. Методы решения задач оптимизации.**
  - 7.1. Поиск экстремума скалярной функции.
  - 7.2. Поиск экстремума многомерной функции: градиентный спуск, методы второго порядка.
- 8. Линейное программирование.**
  - 8.1. Формулировка известных задач в форме задачи ЛП.
  - 8.2. Методы решения задачи ЛП.
- 9. Методы решения дифференциальных уравнений.**
  - 9.1. Постановка задачи Коши.
  - 9.2. Численное решение задачи Коши.
  - 9.3. Метод Эйлера (явный и неявный).
  - 9.4. Методы Рунге-Кутты.
- 10. Методы вычислительной геометрии.**
  - 10.1. Облако точек, генерация сеток, триангуляция Делоне, диаграмма Вороного,  $\alpha$ -shapes.
  - 10.2. Сглаживание полигональной сетки.

**5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине:** активные и интерактивные формы проведения занятий.

**6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:
- Операционная система Microsoft Windows;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).
- Набор средств для анализа данных Anaconda (<https://www.anaconda.com>), включающий следующие инструменты (свободно распространяемое ПО):
- стандартная библиотека языка программирования Python 3;

- библиотеки NumPy и SciPy, содержащие реализации математических методов, применяемых при анализе данных;
- графическая библиотека Matplotlib;
- интерактивная среда разработки Jupyter Notebook.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система «БУКИ-NEXT» (АБИС «Буки-Next»).

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов, — М.: Наука, 1989.

### **б) дополнительная литература**

1. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1986.
2. Боровков А.А. Математическая статистика: Учебник. — Спб.: Издательство «Лань», 2010.
3. Левин А.Ю., Майоров В.В., Мячин М.Л. О логике математической статистики. — ЯрГУ, 2003.
4. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. — М.: Дело, 2007.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения лабораторных работ;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения;
- помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

старший преподаватель В.В. Алексеев

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Компьютерные технологии в математических дисциплинах»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания по теме № 1 «Методы математической статистики»**

1.1 Рассмотрим выборку размера 10 из пуассоновского распределения с параметром  $\theta$ :  
 $\{1, 4, 3, 2, 3, 0, 1, 1, 0, 5\}$ .

Вычислите оценку максимального правдоподобия для  $\theta$ .

1.2 Дана выборка размера  $n$  из нормального распределения  $N(\mu, \sigma)$ . Запишите логарифмическую функцию правдоподобия и найдите ML-оценки параметров  $\mu$  и  $\sigma$ . Найдите смещения этих оценок.

**Задания по теме № 2 «Теория проверки гипотез»**

2.1 Сгенерировать 100 псевдослучайных чисел на отрезке  $[0; 6]$  (встроенной функцией генерации псевдослучайных чисел). Проверить гипотезу о равномерном распределении на  $[0; 6]$ .

2.2 Сгенерировать 400 псевдослучайных чисел на отрезке  $[0; 6]$  (встроенной функцией генерации псевдослучайных чисел), каждое возвести в квадрат. Проверить гипотезу о равномерном распределении квадратов на  $[0; 36]$ .

2.3 Для выборки из задания 2.2 проверить гипотезу о том, что квадраты распределены с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{\sqrt{t}}{6}, & 0 \leq t \leq 36; \\ 1, & t > 36. \end{cases}$$

**Задания по теме № 3 «Основы корреляционного анализа»**

3.1 Исследуйте зависимость средней продолжительности жизни птиц и количества яиц в кладке.

	средняя продолжительность жизни	среднее кол-во яиц в кладке
Аист белый	20	3
Беркут	23	2
Воробей (домовый)	1,5	6
Ворон	12	5
Голубь	4	2
Дятел	9	6
Дрозд черный	2,5	5
Журавль серый	12	2
Лебедь-шипун	20	6
Ополовник	1	12
Филин	10	3

3.2 Известны результаты биатлонной эстафеты. Оцените зависимость между временем прохождения дистанции и точностью стрельбы.

Team	Shooting	Time
Швеция	0+6	1:11:03.9
Россия	1+7	+12.0
Германия	0+6	+37.4
Норвегия	2+8	+50.7
Италия	0+5	+1:33.1
Франция	2+10	+2:13.0
Украина	1+6	+3:00.2
Чехия	1+8	+3:02.1
Австрия	3+7	+4:03.7
Канада	0+8	+4:30.4
США	2+9	+4:47.4
Китай	1+5	+5:07.6
Беларусь	5+16	+5:30.5
Польша	1+10	+6:08.2

#### Задания по теме № 4 «Основы регрессионного анализа»

4.1 Даны две выборки

$X = \{3.1, 2.6, 4.5, 2.5, 4.5, 2.7, 3.9, 4.8, 4.5, 3.2, 3.3, 4.1, 3.1, 2.7, 4.2, 4.5, 3.5, 4.9, 2.9, 3.7\}$

$Y = \{4.5, 3.6, 7.0, 3.8, 6.5, 4.0, 6.1, 7.2, 6.7, 4.5, 5.1, 6.1, 4.5, 4.5, 6.2, 6.9, 5.2, 7.5, 4.3, 5.5\}$

$X$  – результаты замеров ширины,  $Y$  – результаты замеров длины листовой пластины некоторого вида орхидей.

(а) Составьте уравнение линейной регрессии  $Y$  по  $X$ .

(б) Проверьте значимость уравнения регрессии и отдельных его коэффициентов.

#### Задания по теме № 5 «Методы аппроксимации»

5.1 Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x$  в точках  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

(а) Постройте интерполяционный многочлен  $P(x)$  по точкам  $(x_i, f(x_i))$  и постройте его график на отрезке  $[0, 7]$ .

(б) Вычислите интегралы  $\int_0^7 P(x)dx$  и  $\int_0^7 f(x)dx$ .

5.2 Постройте кривую Безье и В-сплайн, сглаживающие набор точек из предыдущей задачи.

### Задания по теме № 8 «Линейное программирование»

8.1 Свести транспортную задачу, заданную следующей таблицей, к задаче линейного программирования. Написать компьютерную программу, решающую данную задачу ЛП.

Объём производства	Объём потребления			
	30	10	15	15
20	5	2	1	4
40	1	3	8	2
10	2	7	6	4

8.2 Реализовать поиск решения задачи при помощи встроенных функций Microsoft Excel.

### Задания по теме № 9 «Методы решения дифференциальных уравнений»

9.1 Решить аналитически систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = -x + 2y - e^t \cos t. \end{cases}$$

9.2 Построить решение численно, построить траектории в фазовом пространстве для аналитического и численного решения при различных начальных условиях.

### Задания по теме № 10 «Методы вычислительной геометрии»

10.1 Докажите, что описанная окружность любого треугольника триангуляции Делоне не содержит других вершин.

10.2 Рассмотрим диаграмму Вороного, построенную по набору точек и отрезков. Докажите, что она состоит из отрезков, лучей и участков квадратичных парабол.

10.3 Дано множество точек на плоскости, каждой соответствует положительное число (высота данной точки над уровнем моря). Постройте триангуляцию Делоне по данному множеству точек, а также билинейной интерполяцией функции высоты постройте графическую модель рельефа поверхности.



## **Список вопросов к зачёту**

1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. Случайная величина, выборка, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
2. Оценка неизвестного параметра случайной величины (постановка задачи), Метод максимального правдоподобия. Метод моментов.
3. Статистическая гипотеза. Виды гипотез. Нулевая и альтернативная гипотеза. Критерии проверки гипотез: параметрические и непараметрические. Критерий согласия Пирсона. Критерий согласия Колмогорова-Смирнова.
4. Выборочный коэффициент корреляции. Т-критерий Стьюдента.
5. Линейная интерполяция. Интерполяция многочленами (по Ньютону и Лагранжу).
6. Линейная регрессия. Парная линейная регрессия. Множественная линейная регрессия. Нелинейная регрессия (постановка задачи).
7. Поиск экстремума скалярной функции. Поиск экстремума многомерной функции: градиентный спуск, методы второго порядка.
8. Линейное программирование. Формулировка известных задач в форме задачи ЛП. Методы решения задачи ЛП.
9. Постановка задачи Коши. Численное решение задачи Коши. Метод Эйлера (явный и неявный).
10. Определение и алгоритмы построения триангуляции Делоне и диаграммы Вороного.

## **Правила выставления оценки на зачёте.**

По окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено». Зачёт включает в себя теоретический вопрос, на подготовку к ответу даётся не менее 1 часа.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, успешно сдавшему практические задания по каждой теме в ходе семестра, а также у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне, либо не сдавшему практические задания в ходе семестра.

Уровни сформированности компетенций оцениваются согласно критериям, приведённым ниже.

**Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень (общие характеристики):**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;

- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- **владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- **способность самостоятельно** применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- **усвоение основной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **знание** базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- **самостоятельная работа** на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, **достаточный уровень культуры** исполнения заданий.

#### **Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- **достаточно** полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- **владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- **способность** самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- **усвоение основной и дополнительной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **умение ориентироваться в базовых** теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- **самостоятельная работа** на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, **высокий уровень культуры** исполнения заданий.

#### **Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать **обоснованные** выводы;
- **безупречное владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- **способность** самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- **полное и глубокое усвоение основной и дополнительной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **умение ориентироваться в основных** теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- **активная самостоятельная работа** на практических и лабораторных занятиях, **творческое** участие в групповых обсуждениях, **высокий уровень культуры** исполнения заданий.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины**  
**«Компьютерные технологии в математических дисциплинах»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Компьютерные технологии в математических дисциплинах» являются лекционные и лабораторные занятия. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Необходимый теоретический материал и примеры решения задач разбираются на занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам решения задач в семестре и собеседования по изученным в семестре теоретическим вопросам.