

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Алгоритмы на графах**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.



### 1. Цели освоения дисциплины

Основной целью освоения дисциплины является формирование у студентов математической культуры, знакомство с аппаратом теории графов и основными алгоритмами на графах, применение известных алгоритмов для решения прикладных задач, проведения анализа полученных результатов. Задача курса познакомить студентов с современными методами построения и анализа алгоритмов.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является дисциплиной по выбору. Она должна служить выработке у обучающихся умения решать задачи алгоритмического плана, умения находить эффективные алгоритмы решения прикладных задач.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-3</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники.	<b>ПК-3.2</b> Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции).  <b>ПК-3.3</b> Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами,	<b>Знать:</b> основные понятия, задачи и алгоритмы теории графов.  <b>Уметь:</b> анализировать и находить эффективные алгоритмы решения задач оптимизации на графах, как точные алгоритмы, так и эвристические алгоритмы  <b>Владеть навыками:</b> применения алгоритмов оптимизации на графах

	<p>поддерживающими создание программного продукта</p> <p><b>ПК-3.4</b> Имеет практический опыт применения указанных выше методов и технологий</p>	
--	---	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение	5	1						
2	Алгоритмы поиска	5	3	2				5	Задания для самостоятельной работы
3	Деревья. Построение остовного дерева минимальной стоимости	5	2	2				5	Задания для самостоятельной работы
4	Задача о кратчайшем пути	5	2	2		2		5	Задания для самостоятельной работы
5	Алгоритмы сортировки	5	2	2				4	Задания для самостоятельной работы
6	Независимость и покрытия	5	2	2				4	Задания для самостоятельной работы
7	Обходы	5	2	2				4,7	Задания для самостоятельной работы
8	Планарность	5	1	2		2		4	Задания для самостоятельной работы
9	Раскраски	5	1	2				4	Задания для

									самостоятельной работы
							0,3	35,7	Зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,3</b>	<b>35,7</b>	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								

### Содержание разделов дисциплины:

#### 1. Введение

Граф, подграф, клика, пустой граф, к-дольный граф, цикл. Изоморфизм графов. Мультиграф. Псевдограф, орграф. Степень вершины. Операции над графами. Способы представления графа в памяти компьютера. Связность. К-связные компоненты.

#### 2. Алгоритмы поиска

Поиск в ширину. Его применение. Поиск в глубину. Задача отыскания всех двухсвязных компонент графа. Алгоритм ее решения.

#### 3. Деревья

Построение остова минимальной стоимости. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима.

#### 4. Задача о кратчайшем пути

Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Флойда нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин.

#### 5. Алгоритмы сортировки

Алгоритм сортировки на основе бинарного дерева. Алгоритмы поиска в деревьях. Сбалансированные двоичные деревья. AVL-деревья, красно-черные деревья: вставка, удаление, поиск элемента. Трудоемкость. Оценка максимальной и средней высоты сбалансированного дерева с  $n$  узлами. Сферы применения. Деревья двоичного поиска. Методы поиска во внешней памяти на основе деревьев. В-деревья: вставка, удаление, поиск элемента.

#### 6. Независимость и покрытия

Задача о максимальном независимом множестве и ее связь с теорией кодирования. Понятие NP-полноты. Алгоритм аппроксимации Боппана-Халлдорсона. Наибольшие паросочетания и задача о назначениях. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе. Алгоритм построения совершенного паросочетания минимального веса в двудольном взвешенном графе.

#### 7. Обходы

Эйлеровы циклы и эйлеровы графы. Критерий существования эйлеровых путей и циклов в неориентированных и ориентированных графах. Алгоритм Флери построения эйлерова цикла. Гамильтоновы циклы и гамильтоновы графы. Теорема Поша (без доказательства) о достаточных условиях существования гамильтонова цикла. Задача коммивояжера. Эвристические алгоритмы ее решения.

#### 8. Планарность

Критерии планарности (без доказательства). Алгоритм укладки графа на плоскости.

#### 9. Раскраски

Задача составления расписаний, распределения оборудования. Алгоритм последовательной раскраски. Раскраска планарных графов.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

**Электронный учебный курс «Алгоритмы на графах» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;

- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Дольников, В. Л. Основные алгоритмы на графах: текст лекций. / В. Л. Дольников, О.П.~Якимова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та - Ярославль: ЯрГУ, 2011. - 78 с.
2. Иванов, Б. Н. Дискретная математика и теория графов : учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 177 с. <https://urait.ru/bcode/497014>

### **б) дополнительная литература**

1. Дольников В.Л., Полякова О.П. Теория графов. Алгоритмы на графах: учебное пособие. Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2003. 116 с.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20030281.pdf>
2. Емеличев Е.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 385 с.
3. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ. Учеб.пособие. / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. - М.: МЦНМО, 2001. - 955с.
4. Кристофидес, Н. Теория графов: Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 434 с.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

### **в) ресурсы сети «Интернет»**

- 1.Электронные каталоги НБ ЯрГУ [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- 2.Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Доцент кафедры алгебры  
и математической логики, к. ф.-м. н.      М.Е. Сорокина

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Методы и средства криптографической защиты информации»**

**Фонд оценочных средств**



**для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

(данные задания выполняются студентом самостоятельно)

**Задания по теме № 2 «Алгоритмы поиска»:**

Модифицировать алгоритм поиска в глубину для поиска мостов. Написать соответствующую программу на языке C++. Использовать задание графа матрицей смежности.

**Задания по теме № 3 «Деревья»:**

Разработать алгоритм решения следующей задачи и реализовать его на языке C++. Имеется  $N$  городов. Для каждой пары городов  $(i, j)$  можно построить дорогу, соединяющую эти два города и не заходящие в другие города. Стоимость такой дороги  $A(i, j)$ . Вне городов дороги не пересекаются. Требуется найти самую дешевую систему дорог, позволяющую попасть из любого города в любой другой. Результаты задать таблицей  $B$ , где  $B[i, j]=1$  тогда и только тогда, когда дорогу, соединяющую города  $i$  и  $j$ , следует строить.

**Задания по теме № 4 «Задача о кратчайшем пути»:**

Разработать эффективный алгоритм для поиска самого дешевого пути в графе со взвешенными вершинами (стоимостью пути от вершины  $s$  к вершине  $t$  является сумма весов всех вершин, входящих в путь) и реализовать его на языке C++.

**Задания по теме № 5 «Алгоритмы сортировки»:**

- 1) Нарисовать полное двоичное дерево двоичного поиска с ключами  $\{1, 2, \dots, 15\}$ . Добавить NIL-листья и покрасить вершины тремя способами так, чтобы получившиеся красно-черные деревья имели черную высоту 2, 3 и 4.
- 2) Нарисовать красно-черные деревья, которые получаются при последовательном добавлении к пустому дереву ключей 41, 38, 31, 12, 19, 8.

**Задания по теме № 6 «Независимость и покрытия»:**

Написать реализацию алгоритма поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе.

**Задания по теме № 7 «Обходы»:**

Реализовать на выбранном языке программирования алгоритм, решающий задачу китайского почтальона.

**Задания по теме № 8 «Планарность»:**

- 3) По критерию Понтрягина – Куратовского обосновать непланарность данного графа.
- 4) Выяснить, являются ли планарными данные графы. В случае положительного ответа применить к графу алгоритм укладки на плоскость.

**Задания по теме № 9 «Раскраски»:**

Найти для данного графа хроматическое число и соответствующую этому числу раскраску.

### **Правила оценки самостоятельной работы**

Выполнение задания по каждой теме оценивается в 1 балл и учитывается при выставлении зачета.

## **2. Список вопросов и заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Правила выставления зачета**

На зачете проверяется сформированность компетенции ПК-3, (индикаторы ПК-3.2, ПК-3.3, ПК-3.4).

Для получения зачета студенту необходимо набрать не менее 6 баллов за выполнение заданий.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Алгоритмы на графах»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Алгоритмы на графах» являются лекции, на которых осуществляется не только знакомство студентов с основными понятиями и алгоритмами дисциплины, но и строгое обоснование данных алгоритмов, а также анализ их сложности. Также студентам демонстрируется реализация алгоритмов на одном из языков программирования.

На практических занятиях, которые предусмотрены по всем разделам дисциплины, происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и примерам графов, а также обсуждение реализации конкретных задач на языке программирования.

Необходимым условием освоения компетенций дисциплины «Алгоритмы на графах» является самостоятельная работа, большая часть которой заключается в самостоятельной разработке алгоритмов для решения задач, которые являются модификацией разобранных на лекционных и практических занятиях, и их реализации на выбранном языке программирования. При необходимости по наиболее трудным вопросам проводятся дополнительные консультации. Выполнение заданий самостоятельной работы проверяется преподавателем и учитывается при выставлении зачета. Полный список заданий для самостоятельной работы по темам (разделам) дисциплины приведен в ЭУК в LMS Moodle «Алгоритмы на графах». Вопросы, возникающие в процессе или по итогам выполнения этих заданий, можно задать на консультациях и практических занятиях или в форуме (чате) в ЭУК в LMS Moodle.

Для самостоятельной работы, в том числе и повтора разобранных на лекциях и практических занятиях материала, рекомендуется использовать материалы, выложенные в ЭУК в LMS Moodle «Алгоритмы на графах».

В конце изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет выставляется при наборе необходимого количества баллов по итогам самостоятельной работы.