

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра радиотехнических систем

Л. Н. Казаков
А. В. Ходунин
Д. Э. Палей

Решение задач по курсу «Теория колебаний»

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальности Радиофизика и электроника

Ярославль 2011

УДК 537.86
ББК В 236.35я73р
К 14

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года

Рецензент
кафедра радиотехнических систем
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Казаков, Л. Н. Решение задач по курсу «Теория колебаний» : методические указания / Л. Н. Казаков, А. В. Ходунин, Д. Э. Палей; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 88 с.

К 14

Методические указания предназначены для практического закрепления вопросов, рассматриваемых на лекциях по дисциплине «Теория колебаний». По основным разделам дисциплины приведены теоретические сведения, необходимые для решения задач, рассмотрены примеры решения типовых задач, приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010801.65 Радиофизика и электроника (дисциплина «Основы теории колебаний», блок СД), очной и заочной форм обучения.

УДК 537.86
ББК В 236.35я73р

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова,
2011

Предисловие

Предлагаемый сборник представляет собой методические указания по решению задач по дисциплине «Теория колебаний», включенной в учебные планы подготовки студентов, обучающихся по специальности 010801.65 Радиофизика и электроника и направлению 010801.62 Радиофизика. Указания будут также полезны при изучении дисциплины «Устройства формирования и генерирования сигналов», включенной в учебные планы подготовки студентов, обучающихся по специальности 210302.65 Радиотехника и направлению 210302.62 Радиотехника.

В указаниях значительное внимание уделено методике решения типовых задач. 1-й раздел посвящен вопросам построения математических моделей в форме дифференциальных уравнений. В 2, 3-м разделах рассматриваются вопросы устойчивости с применением методов Ляпунова. В разделах 4–7 – основные типы задач, направленные на применение качественных методов, метода гармонической линеаризации, метода Ван-дер-Поля, метода разрывных колебаний. В 8, 9-м разделах приведены задачи по неавтономным системам соответственно с внешним воздействием и параметрического типа.

Л. Н. Казаковым подготовлены разделы 1–2, 8; А. В. Ходуниным – раздел 4, Д. Э. Палеем – 3, 5–7, 9.

1. Способы математического описания колебательных систем

1.1. Основные теоретические сведения

Большинство радиотехнических систем можно представить в виде соединений конечного (или бесконечного) набора типовых элементов (емкости, индуктивности, сопротивления и т. д.). Сигнал на выходе этих элементов зависит от сигнала на входе по известному закону, который можно описать в виде дифференциального уравнения или оператора.

Например, напряжение на индуктивности зависит от тока через нее как

$$u_L = L di_L/dt. \quad (1.1)$$

Ток через емкость зависит от напряжения как

$$i_C = C du_C / dt. \quad (1.2)$$

Введем оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. В этом случае соотношения (1.1) (1.2) между током и напряжением можно представить в символической форме:

$$u_L = L p i_L; i_C = C p u_C. \quad (1.3)$$

Если принять величину Lp за символическое сопротивление индуктивности, а Cp – за символическую проводимость емкости, то (1.3) есть запись закона Ома в символической форме.

Формально полагая оператор p алгебраической величиной, можно применять к нему операции умножения и деления и таким образом получать уравнения различных радиотехнических систем. Пусть на вход системы поступает сигнал $x(t)$, на выходе наблюдается сигнал $y(t)$. Используя операторный метод для линейной системы, можно записать

$$y(t) = W(p)x(t) \quad (1.4)$$

Оператор $W(p)$ называют передаточной функцией системы, а выражение (1.4) – символической записью дифференциального уравнения системы.

Более строго передаточную функцию можно определить через преобразование Лапласа. Изображение по Лапласу функции времени $f(t)$ определяется следующим образом:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (1.5)$$

где $s = \sigma + j\omega$ комплексная величина.

Если найти изображения входного и выходного сигнала

$$X(s) = L[x(t)]$$

$$Y(s) = L[y(t)],$$

то передаточная функция определяется как отношения изображений выходного и входного сигнала при нулевых начальных условиях.

$$W(s) = Y(s)/X(s) \quad (1.6)$$

В изображениях Лапласа комплексная величина часто обозначается также буквой p , так же, как и оператор дифференцирования. Следует различать модели и уравнения, записанные в операторной форме и через преобразование Лапласа. В первом случае в уравнения вида (1.4) входят функции времени. Если

используется преобразование Лапласа, то в выражении (1.6) рассматриваются изображения по Лапласу всех сигналов.

1.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Необходимо получить дифференциальное уравнение последовательного колебательного контура относительно напряжения на емкости, найти передаточную функцию для выходного сигнала – напряжение на емкости (рис. 1.1).

По закону Ома, сумма падений напряжений на всех элементах контура равна входному напряжению.

$$E(t) = u_R + u_L + u_C$$

Запишем в операторной форме

$$E(t) = Ri(t) + Lpi(t) + i(t)/pC = (R + Lp + 1/Cp) \cdot i(t)$$

или

$$i(t) = E(t) / (R + Lp + 1/Cp).$$

Напряжение на емкости

$$u_C = \frac{i(t)}{pC}, \quad u_C = \frac{E(t)}{pC(R + Lp + \frac{1}{pC})}, \quad u_C = \frac{E(t)}{LCp^2 + RCp + 1}. \quad (1.7)$$

Из последнего выражения очевидным образом можно записать передаточную функцию. Учитывая, что $u_C = W(p)E(t)$, из (1.7) получим:

$$W(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

Домножим в (1.7) правую и левую части на $LCp^2 + RCp + 1$

$$(LCp^2 + RCp + 1) \cdot u_C = E(t).$$

В итоге получим следующее ДУ:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E(t)$$

Введем обозначения: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота контура;

$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ – добротность контура; $2\delta = \frac{1}{Q}$ – декремент затухания.

Часто удобно бывает перейти к новому безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$.

$$\frac{d^2 u_C}{d\tau^2} + R\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{d\tau} + u_C = E.$$

В этом случае итоговое ДУ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2 u_C}{d\tau^2} + 2\delta \frac{du_C}{d\tau} + u_C = E.$$

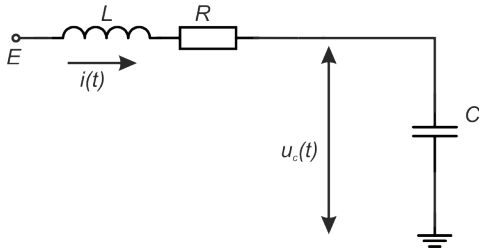


Рис. 1.1

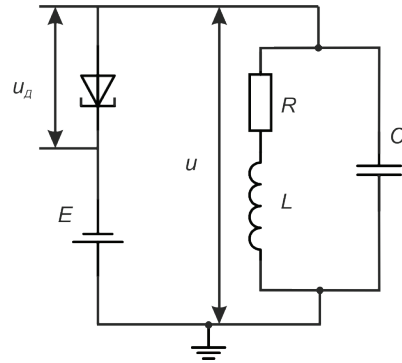


Рис. 1.2

Пример 2. Необходимо получить дифференциальное уравнение генератора на туннельном диоде (рис. 1.2).

Падение напряжения на всех элементах цепи должно равняться внешней ЭДС, т. е. $u_d + u_k = E$.

Напряжение на контуре u_k можно представить в виде $u_k(t) = R(p) \cdot i(t)$, где $R(p)$ сопротивление контура, записанное в операторной форме $R(p) = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}$.

Ток через контур $i(t)$ равен току через туннельный диод $i(t) = i_d(u_d)$, который в свою очередь нелинейно зависит от напряжения на диоде u_d .

Таким образом:

$$u_d - E = -\frac{(Lp + R) \cdot i(u_d)}{LCp^2 + RCp + 1}. \quad (1.8)$$

Перейдем к новой переменной $u = u_d - E$. Для функции $i_d(u_d)$ переход к $i_d(u)$ равносильен сдвигу начала координат вправо на величину E . Подставим выражение для u в (1.8) и получим:

$$(LCp^2 + RCp + 1) \cdot u(t) + (Lp + R) \cdot i(u) = 0.$$

Пример 3. Дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки частоты (рис. 1.3). Фазовый дискриминатор

(фазовый детектор) сравнивает фазы входного сигнала и сигнала подстраиваемого генератора (ПГ). Сигнал ошибки равен разности фаз этих сигналов

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{вх}}(t) - \varphi_{\text{пг}}(t). \quad (1.9)$$

Напряжение на выходе фазового детектора нелинейно зависит от сигнала ошибки:

$$u_{\text{фд}}(t) = EF(\varphi), \quad (1.10)$$

где E – максимальное напряжения с выхода ФД, $F(\varphi)$ – нелинейная характеристика фазового детектора (максимальное значение ее равно единице).

Далее сигнал с выхода фазового детектора поступает на вход фильтра и управляет частотой перестраиваемого генератора

$$\begin{aligned} u_{\text{пг}}(t) &= K(p) \cdot u_{\text{фд}}(t) \\ \Delta w_{\text{пг}}(t) &= S_y \cdot u_{\text{пг}}(t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\Delta w_{\text{пг}}(t)$ – приращение частоты генератора, обусловленное сигналом $u_{\text{пг}}(t)$, $K(p)$ – коэффициент передачи фильтра, S_y – крутизна характеристики генератора.

Т. к. частота – это производная от полной фазы, то значение фазы ПГ от времени можно представить в виде

$$w_{\text{пг}}(t) = p\varphi_{\text{пг}}(t). \quad (1.12)$$

В свою очередь $w_{\text{пг}}(t)$ можно представить в виде:

$$w_{\text{пг}}(t) = w_{\text{пг0}} + \Delta w_{\text{пг}}(t),$$

где $w_{\text{пг0}}$ – частота ПГ в отсутствие входного воздействия.

Объединяя (1.9)–(1.12), получим:

$$w_{\text{пг0}} + S_y K(p) EF(\varphi) = p (\varphi_{\text{вх}}(t) - \varphi(t)) \quad (1.13)$$

Учтем, что $p\varphi_{\text{вх}}(t) = w_{\text{вх}}(t)$ – частота входного сигнала.

В итоге получим

$$p\varphi(t) + S_y K(p) EF(\varphi) = w_{\text{вх}}(t) - w_{\text{пг0}} \quad (1.14)$$

или

$$p\varphi(t) + \Omega_y F(\varphi) = \Omega_n, \quad (1.15)$$

где Ω_y – *полоса удержания*, постоянная, имеющая размерность частоты и равная максимальному отклонению частоты ПГ от значения $w_{\text{пг0}}$, за счет сигнала с выхода фазового детектора;

Ω_n – *начальная расстройка* – величина, равная отклонению частоты входного сигнала от значения $w_{\text{пг0}}$.

1.3. Задачи

1. Получить дифференциальное уравнение последовательного колебательного контура относительно: а) напряжения на индуктивности; б) тока в контуре.

2. Получить дифференциальное уравнение параллельного колебательного контура (с последовательной схемой замещения) относительно: а) тока через емкость; б) тока через индуктивность; в) напряжения на контуре.

3. Получить дифференциальное уравнение параллельного колебательного контура (с параллельной схемой замещения) относительно: а) тока через емкость; б) тока через индуктивность; в) тока через сопротивление; г) напряжения на контуре.

4. Получить передаточную функцию для параллельного колебательного контура (с последовательной схемой замещения) для входного воздействия – внешний ток и выходного сигнала: а) ток через емкость; б) ток через индуктивность; в) напряжения на контуре.

5. Получить дифференциальное уравнение связанных контуров относительно: а) тока i_1 в первом контуре; б) тока i_2 во втором контуре; с) напряжения u_1 на первом контуре; г) напряжения u_2 на втором контуре (рис. 1.4).

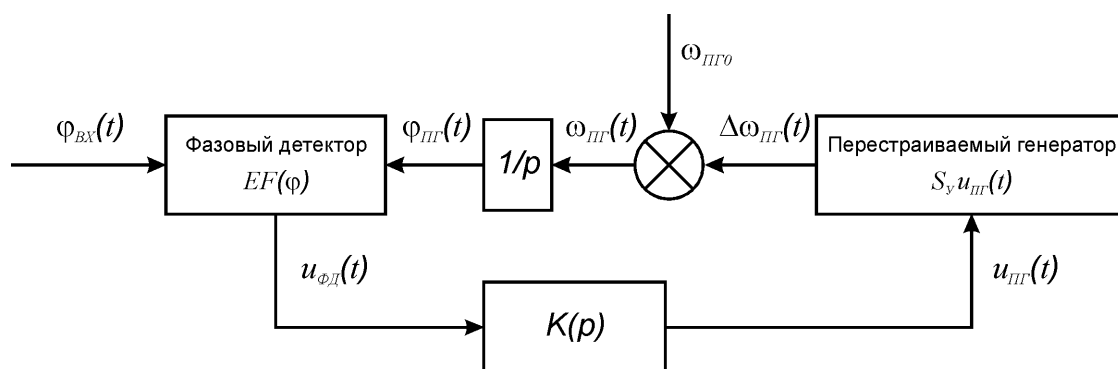


Рис. 1.3

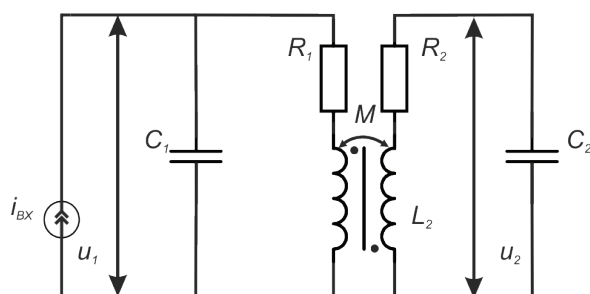


Рис. 1.4

6. Получить дифференциальное уравнение колебательного контура с положительной обратной связью. Считать ток стока транзистора линейно зависящим от напряжения на затворе $i(u) = Su$ (рис. 1.5).

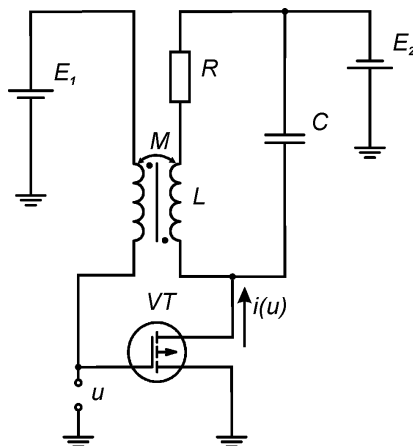


Рис. 1.5

7. Получить дифференциальное уравнение генератора на туннельном диоде. Зависимость тока диода от напряжения на диоде показана на рис. 1.6.

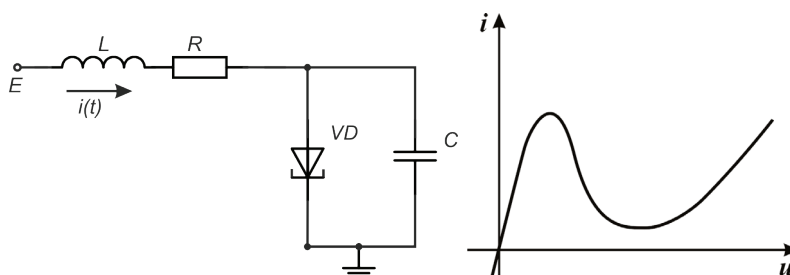


Рис. 1.6

8. Получить дифференциальное уравнение генератора на двух туннельных диодах (рис. 1.7).

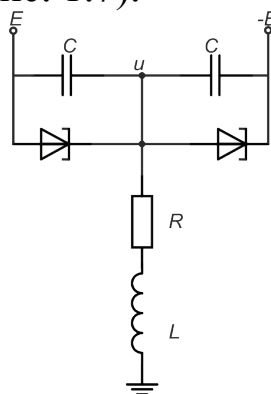


Рис. 1.7

9. Получить дифференциальное уравнение транзисторного генератора. Записать уравнение: а) в общем виде $i = i(u)$; б) для нелинейной характеристики вида $i(u) = \alpha u - \beta u^3$; в) для нелинейной характеристики вида $i(u) = \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5$ (рис. 1.5).

10. Получить дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки частоты (рис. 1.3) для следующих фильтров в цепи управления: а) $K(p) = 1/Tr$; б) $K(p) = 1/(1+Tr)$.

2. Исследование устойчивости состояний равновесия вторым методом Ляпунова

2.1. Основные теоретические сведения

Второй метод Ляпунова – это универсальный метод, позволяющий исследовать устойчивость решений ДУ, а также применимый для решения широкого круга задач динамики (исследование ограниченности решений, исследование периодических режимов и т. д.).

Рассмотрим применение этого метода на примере автономной динамической системы, описываемой системой ДУ первого порядка:

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}). \quad (2.2)$$

Пусть система имеет состояние равновесия $\vec{x} = \vec{x}_0$. Без потери общности будем считать, что оно находится в начале координат $\vec{x}_0 = 0$. Пусть в некоторой области состояния равновесия $\|\vec{x}\| \leq H$, решение (2.1) подчиняется теореме Коши о существовании и единственности решения.

Сформулируем основные определения [1, 2]:

Определение 2.1. Состояние равновесия \vec{x}_0 системы (2.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать другое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех решений $\vec{x}(t)$ системы (2.1), для которых в начальный момент времени $t = t_0$ выполняется условие

$$\|x(t_0)\| \leq \delta,$$

при всех $t \geq t_0$ будет справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Если такое δ указать невозможно, то решение неустойчиво.

Устойчивость по Ляпунову означает, что система не удаляется от состояния равновесия с течением времени.

Определение 2.2. Состояние равновесия \vec{x}_0 системы (2.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво в смысле определения 2.1 и можно указать число $\delta > 0$, такое что для всех решений $\vec{x}(t)$, для которых в начальный момент времени $t = t_0$ выполняется условие $\|x(t_0)\| \leq \delta$, будет справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x(t)\|) = 0. \quad (2.4)$$

Обратите внимание, что выполнения одного только условия (2.4) для асимптотической устойчивости недостаточно. Асимптотическая устойчивость по Ляпунову означает, что система с течением времени приближается к состоянию равновесия и никогда не покидает его сколь угодно малой окрестности.

Определение 2.3. Состояние равновесия \vec{x}_0 системы (2.1) называется *асимптотически устойчивым в большом* (в области H), если оно устойчиво и условие (2.4) выполняется при любых начальных состояниях $\vec{x}(t)$ из области H . Область H называется при этом областью притяжения точки \vec{x}_0 .

Определение 2.4. Состояние равновесия \vec{x}_0 системы (2.1) называется *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво и условие (2.4) выполняется для всех $\vec{x}(t)$ (область H – все фазовое пространство).

Введем в рассмотрение функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые в окрестности $h \leq H$ состояния равновесия системы (2.1) $\vec{x}_0 = 0$ обладают следующими свойствами: 1) $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – однозначная функция; 2) частные производные $dV(x_k, y)/dx_k$ ($k=1..n$) непрерывны; 3) $V(0) = 0$.

Определение 2.5. Функция $V(\vec{x})$, обладающая свойствами 1, 2, 3, называется *знакоопределенной* (положительно определенной или отрицательно определенной) в области h , если в этой

области V принимает значения только одного знака и обращается в ноль только в начале координат.

Определение 2.6. Функция $V(\vec{x})$, обладающая свойствами 1, 2, 3, называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной) в области h , если в этой области $V(\vec{x})$ принимает значения только одного знака, но обращается в ноль не только в начале координат.

Примеры: 1. $V(x,y)=x^2+y^2$ функция, положительно определенная во всем фазовом пространстве; 2. $V(x,y)=9-x^2-y^2$ функция, положительно определенная в круге радиуса 3; 3. $V(x,y)=(x-y)^2$ – знакопостоянная положительная функция во всем фазовом пространстве.

Определение 2.7. Производной функции $V(x,y)$ по времени, взятой в силу системы (2.1), будем называть производную $\frac{dV(x,y)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dV}{dx_k} \frac{dx_k}{dt}$, где производные $\frac{dx_k}{dt}$ будут заменены соответствующими им правыми частями системы (2.1), т. е.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} \cdot F_1(x,y) + \frac{dV}{dx_2} \cdot F_2(x,y) + \dots + \frac{dV}{dx_n} \cdot F_n(x,y). \quad (2.5)$$

Для исследования устойчивости систем будем применять следующие теоремы [1, 2]:

Теорема 2.1 (первая теорема Ляпунова). Если для системы (2.1) можно найти знакоопределенную функцию $V(\vec{x})$, производная которой по времени, составленная в силу этой системы, есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V , или тождественно равна нулю, то нулевое решение системы (2.1) устойчиво.

Теорема 2.2 (вторая теорема Ляпунова). Если для системы (2.1) можно найти знакоопределенную функцию $V(\vec{x})$, производная которой по времени, составленная в силу этой системы, есть функция также знакоопределенная, знака, противоположного с V , то нулевое решение системы (2.1) устойчиво асимптотически.

Теорема 2.3 (об асимптотической устойчивости). Пусть $V(\vec{x})$ – положительно определенная функция и пусть в ограниченной области

$$V(\vec{x}) < A, A = \text{const} > 0, \quad (2.6)$$

производная $dV(\vec{x})/dt$ – отрицательно определенная функция.

Тогда начало координат – асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.1), и каждое решение этой системы, начинающееся в области (2.6), неограниченно приближается к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

Эта теорема позволяет определить алгоритм исследования асимптотической устойчивости системы в большом (в некоторой области H) [1]: 1) выбор функции Ляпунова $V(\vec{x})$, нахождение производной $dV(\vec{x})/dt$, определение областей фазового пространства, где $V(\vec{x})$, $dV(\vec{x})/dt$ – знакоопределенные функции разных знаков; 2) построение пересечения этих областей H_v ; 3) нахождение замкнутой поверхности $V(\vec{x}) = C$, $C = \text{const}$ максимальных размеров, целиком лежащей в области пересечения H_v . Найденная поверхность будет ограничивать область притяжения стационарного состояния.

Теорема 2.2 (об асимптотической устойчивости в целом). Если для системы (2.1) можно найти функцию $V(\vec{x})$, подчиняющуюся во всем фазовом пространстве требованиям второй теоремы Ляпунова, и если

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} (V(\vec{x})) = \infty, \quad (2.7)$$

то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 2.5 (теорема Барбашина и Красовского). Теоремы 2.2–2.4 остаются в силе, если производная $dV(\vec{x})/dt$ не знакоопределенная, а только знакопостоянная функция (знака, противоположного с $V(\vec{x})$), но совокупность точек фазового пространства, где $dV(\vec{x})/dt = 0$, не содержит целых фазовых траекторий системы (2.1), отличных от тривиального решения.

Другими словами, не существует нетривиального решения $\vec{x}(t)$ системы (2.1), для которого равенство $dV(\vec{x})/dt = 0$ возможно при всех t .

Теорема 2.6 (теорема Четаева). Пусть в некоторой окрестности Ω начала координат заданы область Ω_1 и функция $V(\vec{x})$ такие, что: 1) функция $V(\vec{x})$ и ее первые частные

производные непрерывны в Ω_1 ; 2) $V(\vec{x})=0$ на той части границы области Ω_1 , которая лежит внутри Ω ; 3) функции $V(\vec{x})$ и $dV(\vec{x})/dt$ положительны в Ω_1 ; 4) начало координат является граничной точкой Ω_1 . Тогда положение равновесия $\vec{x}=0$ системы (2.1) неустойчиво (см. рис. 2.1).

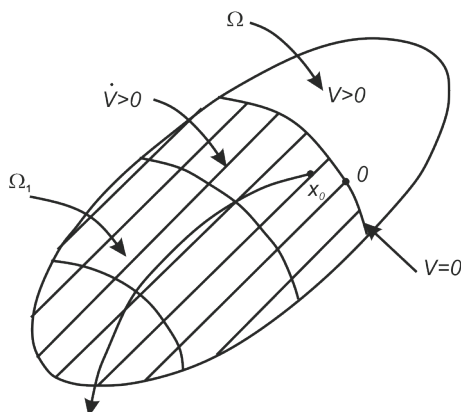


Рис. 2.1

Четкого и однозначного алгоритма подбора функции Ляпунова не существует. Функция $V(\vec{x})$ должна удовлетворять условиям теорем об устойчивости, должна быть знакоопределенной. Более того, выбор различных $V(\vec{x})$ для одной и той же системы может дать различные оценки области притяжения состояния равновесия.

Обратите внимание, что функцию Ляпунова можно выбирать с точностью до произвольного отличного от нуля коэффициента. Величина такого коэффициента не влияет на вопрос определения устойчивости.

Существует несколько стандартных приемов подбора функции Ляпунова.

Форма четной степени

Если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ представляют собой полиномы относительно x , y , то часто удобно бывает искать функцию Ляпунова в виде формы четной степени относительно этих переменных. В общем виде:

$$V(x,y) = ax^m + by^n, \quad (2.8)$$

где n, m — четные числа, не равные нулю ($n, m = \pm 2k, k=1,2,3,\dots$).

Такая функция удовлетворяет всем условиям, накладываемым на функцию Ляпунова ($V(x,y)$: положительно определена во всем фазовом пространстве, кроме начала координат $(0,0)$, где она обращается в ноль).

Выбор коэффициентов a, b и показателей степеней m, n определяется из условий на производную и выражения (2.5). Для доказательства устойчивости необходимо найти такие a, b, m, n , чтобы $d(x,y)/dt$ обращалась в ноль в начале координат и была знакопостоянная, отрицательная. Соответственно для асимптотической устойчивости $V(x,y)$ должна быть знакоопределенная отрицательная (см. примеры 1,3).

Логарифм от одного из слагаемых

Часто для исключения из производной переменных в нечетной степени удобно включить в функцию Ляпунова натуральный логарифм от одного из слагаемых, входящих в правые части (2.1) (см. пример 2).

Рассмотрим решение типовых задач на примере автономной динамической системы с одной степенью свободы, описываемой ДУ второго порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Исследовать устойчивость состояния равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = -5y - x^3 \\ \dot{y} = 2x - y^3 \end{cases} \quad (2.10)$$

Будем искать функцию Ляпунова $V(x,y)$ в виде (2.8):
 $V(x,y) = ax^m + by^n$

Выражение для производной $V(x,y)$, согласно (2.5), будет иметь вид:

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{dV(x,y)}{dx} \cdot P(x,y) + \frac{dV(x,y)}{dy} \cdot Q(x,y)$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = (a \cdot m \cdot x^{m-1}) \cdot (-5y - x^3) + (b \cdot n \cdot y^{n-1}) \cdot (2x - y^3)$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = -5 \cdot a \cdot m \cdot y \cdot x^{m-1} - a \cdot m \cdot x^{m+2} + 2 \cdot b \cdot n \cdot y^{n-1} x - b \cdot n \cdot y^{n+2}$$

Для доказательства устойчивости (неустойчивости) необходимо, чтобы: производная содержала только четные степени x , y ; коэффициенты при четных степенях были одного знака – отрицательные (положительные).

Таким образом, слагаемые с нечетными степенями необходимо сократить. Это значит, что в выражении $-5 \cdot a \cdot m \cdot y \cdot x^{m-1} + 2 \cdot b \cdot n \cdot y^{n-1} x = 0$ необходимо вначале приравнять показатели степеней при x , y , а затем и коэффициенты при слагаемых. Это приводит нас к следующему набору условий:

$$a > 0; b > 0;$$

$$x^{m-1} = x, \text{ или } m=2$$

$$y = y^{n-1}, \text{ или } n=2$$

$$-5am + 2bn = 0 \text{ или (при } n, m=2), \text{ т.е. } 5a=2b \text{ или } a=2, b=5.$$

В итоге функцию Ляпунова можно выбрать следующим образом:

$$V(x, y) = 2x^2 + 5y^2.$$

При таком выборе производная $\frac{dV(x, y)}{dt} = -4x^4 - 10y^4 < 0$ знакоопределенная отрицательная и, согласно теореме 2.2, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 2. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 1\right]x = 0.$$

Перейдем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y^3 - (y^2 + 1)x \end{cases} \quad (2.11)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \ln(1 + y^2),$$

в этом случае

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = -\frac{2y^4}{1 + y^2}.$$

Очевидно, что $V(x,y)$ – положительно определенная функция, а ее производная – знакопостоянная отрицательная функция на всей плоскости x, y . Условие (2.7) выполнено: $V(x,y) \rightarrow \infty$ при $x^2+y^2 \rightarrow \infty$. Производная dV/dt обращается в ноль на оси $y=0$ плоскости (x,y) . Вместе с тем на этом множестве нет целых фазовых траекторий системы (2.11) (состояний равновесия), отличных от точки $x=y=0$. На основании теорем 2.4 и 2.5 заключаем, что решение $x=y=0$ асимптотически устойчиво.

Пример 3. Исследуйте асимптотическую устойчивость нулевого решения.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases} \quad (2.12)$$

Будем искать функцию Ляпунова в общем виде $V(x,y) = ax^m + by^n$ (m, n – четные, положительные числа).

Тогда

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = amx^{m-1}(2y^3 - x^5) + bny^{n-1}(y^5 - y^3 - x)$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = 2amx^{m-1}y^3 - amx^{m+4} + bny^{n+4} - bny^{n+2} - bny^{n-1}x.$$

Найдем такие a, b, m, n , чтобы сократились слагаемые с нечетными степенями x, y , т. е.:

$$2amx^{m-1}y^3 - bny^{n-1}x = 0.$$

Вначале приравняем показатели степеней x, y : $m-1=1$; $n-1=3$, отсюда получим $m = 2, n = 2$. Далее приравняем коэффициенты: $2am=bn$ или с учетом полученных значений m, n – $4a = 4b$.

Т. е. функцию Ляпунова можно выбрать в виде:

$$V(x,y) = (x^2+y^4)/2.$$

При таком выборе $dV/dt = -x^6 - y^6 + y^8$.

Производная отрицательно определена в области $|y| < 1$, следовательно, (2.12) является асимптотически устойчивой. Область притяжения состояния равновесия определяется поверхностью $x^2+y^4=1$.

Пример 4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2 \\ \dot{y} = ay^5 + by^3 + 2yx^3 \end{cases} \quad a>0, b>0. \quad (2.13)$$

Для исследования воспользуемся теоремой Четаева (теорема 2.6). Выберем функцию Ляпунова вида: $V(x,y) = -x^2 + y$.

Ее производная в силу системы (2.13) равна $\frac{dV(x,y)}{dt} = ax^5 + by^3$, т. е. $dV/dt > 0$ при $y > 0$. Согласно теореме 2.6, определим область Ω как $y > 0$, а область Ω_1 как $y > x^2$, тогда: функция $V(\vec{x})$ и ее первые частные производные непрерывны в Ω_1 ; $V(\vec{x}) = 0$ на границе Ω_1 ($y = x^2$); функции $V(\vec{x})$ и $dV(\vec{x})/dt$ положительны в Ω_1 ; состояние равновесия находится на границе этой области; начало координат является граничной точкой Ω_1 .

Состояние равновесия $\vec{x} = 0$ системы (2.13) неустойчиво см. рис. 2.2).

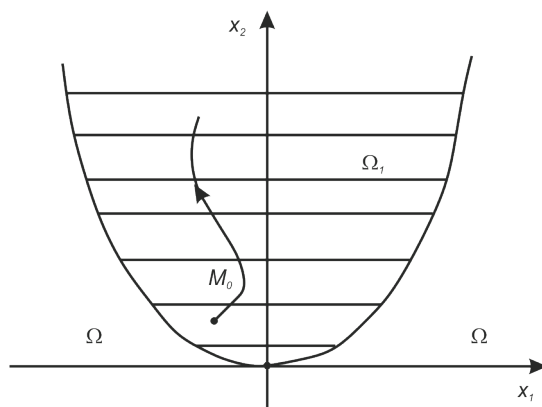


Рис. 2.2

Пример 5. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1x(1+x) + b_1(y-x) \\ \dot{y} = -a_2y(1+y) + b_2(x-y) \end{cases} \quad a_1 > 0, b_1 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0. \quad (2.14)$$

1-й способ решения: Выберем $V(x,y) = b_2x^2/2 + b_1y^2/2$. Тогда $dV/dt = -a_1b_2x^2(1+x) - b_1b_2(x-y)^2 - a_2b_1y^2(1+y)$. Функция $V(x,y)$ – положительно определенная во всей фазовой плоскости (x,y) и $dV(x,y)/dt$ – отрицательно определенная в области

$$1+x > 0; 1+y > 0. \quad (2.15)$$

Система асимптотически устойчива. Область притяжения состояния равновесия определяется кривой $V(x,y) = C_{max}$, ограничивающей максимальную площадь и целиком лежащей в области (2.15). Уравнение $V(x,y) = C_{max}$ имеет вид $x^2 + b_1 y^2 / b_2 = 1$ (см. рис. 2.3).

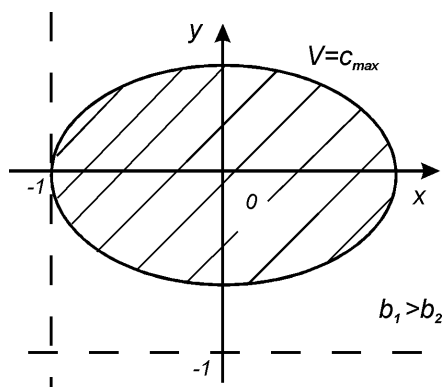


Рис. 2.3

2-й способ решения. Выберем

$V(x, y) = b_2[x - \ln(1+x)] + b_1[y - \ln(1+y)]$. $V(x, y)$ – положительно определена в области $1 + x > 0$; $1 + y > 0$.

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = -a_1 b_2 x^2 - a_2 b_1 y^2 + \frac{b_1 b_2 (y-x)^2}{(1+x)(1+y)},$$

$dV/dt < 0$ так же в области $1 + x > 0$; $1 + y > 0$.

Область притяжения состояния равновесия в этом случае определяется неравенствами $1 + x > 0$; $1 + y > 0$ и существенно больше, чем в первом варианте (см. рис. 2.4). Следовательно, функция Ляпунова выбрана удачнее.

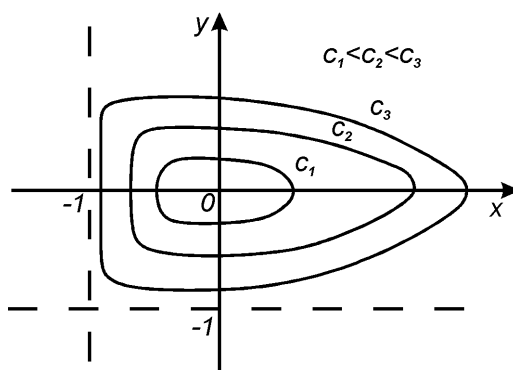


Рис. 2.4

2.3. Задачи

Задание: являются ли приведенные функции знакоопределенными, знакопостоянными, в какой области?

1. $V(x,y)=x^2+y^4$;
2. $V(x,y)=x^2+y^4-y^6$;
3. $V(x,y)=x^2y^2$;
4. $V(x,y)=(x-y)^2$;
5. $V(x,y)=x^2+y^4-xy$;
6. $V(x,y)=1-\cos(x)$;
7. $V(x,y)=1-\cos(xy)$;
8. $V(x,y)=x\cdot|x|+y\cdot|y|$;
9. $V(x,y)=x^2\cdot|x|+y^2\cdot|y|$.

Задание: исследуйте устойчивость нулевого решения в большом и целом.

10. $\dot{x} = -axy^4$; $\dot{y} = byx^4$; $a > 0, b > 0$;
11. $\dot{x} = ax^3 + by$; $\dot{y} = -cx + dy^3$; $ad > 0, bc > 0$;
12. $\dot{x} = y - 3x - x^3$; $\dot{y} = 6x - 2y$;
13. $\dot{x} = -ay - bx^{2n+1}$; $\dot{y} = cx - dy^{2m+1}$; $a, b, c, d > 0$, m, n – натуральные числа;
14. $b\dot{x} = 2y - ax - x^5$; $\dot{y} = -3x - y^5$; $a, b > 0$;
15. $\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0$;
16. $\ddot{x} + \dot{x}^3 + (\dot{x}^2 + 1)x = 0$;
17. $\ddot{x} + h\dot{x} + \varphi(x) = 0$; $h = \text{const}$, $\varphi(0) = 0$, $x\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$;
18. $\dot{x} = x^3 + 2xy^2$; $\dot{y} = yx^2$;
19. $\dot{x} = -y - xy^4$; $\dot{y} = x + x^2y^3$;
20. $\dot{x} = -ay + ax\sqrt{x^2 + y^2}$; $\dot{y} = ax + ay\sqrt{x^2 + y^2}$;
21. $\dot{x} = -(ax + by)(1 + x)$; $\dot{y} = x - y$; $a, b > 0$;
22. $\dot{x} = -a_1x(1 + x) + b_1(y - x)$; $\dot{y} = -a_2y(1 + y) + b_2(x - y)$; $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$.

Задание: докажите неустойчивость нулевого решения, используя теорему Четаева.

23. $\dot{x} = -x - xy$; $\dot{y} = y^3 - x^2$;
24. $\dot{x} = x - xy^4$; $\dot{y} = y - x^2y^3$;
25. $\dot{x} = ay^3 + bx^5$; $\dot{y} = ax^3 + by^5$; $b > 0$;
26. $\dot{x} = x^3 + 2xy^2$.

3. Исследование устойчивости динамических систем по первому приближению

3.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим динамическую систему, определяемую системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.1)$$

Пусть $\vec{x}_0 = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}\}$ – состояние равновесия системы. Тогда, согласно (3.1), $F_k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = 0$. Пусть функции F_k вблизи \vec{x}_0 могут быть разложены в ряд Тейлора:

$$F_k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_n - x_{n0}) + \tilde{F}_k; \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.2)$$

где \tilde{F}_k ($k = 1, \dots, n$) – слагаемые, содержащие степени $(x_k - x_{k0})$ ($k = 1..n$) не ниже второго порядка. Учтем это и запишем (3.1), заменив F_k в правых частях на разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_n - x_{n0}) + \tilde{F}_k; \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.3)$$

Введем новые переменные

$$\xi_k = x_k - x_{k0}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Обозначим производные F_k по x_j : $p_{kj} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}; \quad (j, k = 1, \dots, n)$.

В (3.3) отбросим нелинейные члены \tilde{F}_k . Т. к. $d\xi_k/dt = dx_k/dt$, заменим в левой части производную dx_k/dt на производную $d\xi_k/dt$. Тогда, с учетом (3.3) (3.4), вблизи состояния равновесия система (3.1) представляется в виде:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = p_{k1}\xi_1 + p_{k2}\xi_2 + \dots + p_{kn}\xi_n; \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.5)$$

Система (3.5) называется системой *первого приближения* или *линеаризованной* системой. Переход от исходного уравнения (3.1) к системе (3.5) называется *линеаризацией* в окрестности состояния равновесия.

Уравнение

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

называется *характеристическим* уравнением линеаризованной системы.

Существуют следующие теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 3.1. Если все корни характеристического уравнения (3.6) линеаризованной системы (3.5) имеют отрицательные действ-

вительные части, то состояние равновесия \vec{x}_0 системы (3.1) асимптотически устойчиво, каковы бы ни были нелинейные члены F_k ($k=1, \dots, n$).

Теорема 3.2. Если среди корней характеристического уравнения (3.6) линеаризованной системы (3.5) имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то состояние равновесия \vec{x}_0 системы (3.1) неустойчиво при любом выборе нелинейных членов F_k ($k=1, \dots, n$).

Теорема 3.3. Если характеристическое уравнение (3.6) линеаризованной системы (3.5) не имеет корней с положительными действительными частями, но имеет корни с действительными частями, равными нулю, то вопрос об устойчивости состояния равновесия решается именно нелинейными членами F_k ($k=1, \dots, n$).

Таким образом, если характеристическое уравнение (3.6) не имеет нулевых корней, то линейное приближение позволяет однозначно ответить на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Критерий Гурвица

Представим (3.6) в виде:

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.7)$$

где a_0, \dots, a_n – коэффициенты, зависящие от параметров системы. Не теряя общности, положим, что $a_0 > 0$.

Теорема 3.4. Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней уравнения (3.7) является положительность всех главных миноров матрицы Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

В главной диагонали матрицы Гурвица стоят коэффициенты полинома (3.7) в порядке возрастания от a_1 до a_n . В строках поочередно располагаются коэффициенты с нечетными и

четными индексами. Недостающие коэффициенты (с индексами большими n или меньшими нуля) в матрице заменяются нулями.

Из теоремы 3.4 следует, что состояние равновесия будет устойчиво, если будут выполняться неравенства:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (3.9)$$

В частных случаях критерий Гурвица примет вид:

1) для уравнения второго порядка ($n = 2$):

$$a_0 > 0, a_2 > 0, a_2 > 0 \quad (3.10)$$

2) для уравнения третьего порядка ($n = 3$):

$$a_0 > 0, a_2 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3.11)$$

3) для уравнения третьего порядка ($n = 3$):

$$a_0 > 0, a_2 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3.12)$$

3.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найдите состояния равновесия и исследуйте их устойчивость для динамической системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}. \quad (3.13)$$

1) *Состояния равновесия.* Приравниваем производные в (3.13) к нулю и после несложных вычислений получаем, что в системе возможны два состояния равновесия: $P_1(1, 2)$; $P_2(2, 1)$.

2) *Характеристическое уравнение.* Согласно (3.5) и (3.6), возьмем поочередно производные по x и y от обоих уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) = P(x, y) \\ \dot{y} = xy - 2 = Q(x, y) \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-1-\lambda & x-1 \\ y & x-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

3) *Корни характеристического уравнения в особых точках.* Подставим в (3.14) значения координат состояния равновесия. Для $P_1(1, 2)$ получим:

$$D(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение имеет корень $\lambda = 1$ (действительная часть корня больше нуля). Согласно теореме 3.2. точка P_1 неустойчива. Аналогично подставим в (3.14) значения координат состояния равновесия $P_2(2,1)$ и получим:

$$D(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0. \quad (3.16)$$

Уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ (действительная часть корня $\lambda_{1,2} = 1 + \sqrt{2}$ больше нуля). Согласно теореме 3.2, точка P_2 неустойчива.

Пример 2. При каких значениях σ, Δ нулевое состояние равновесия ДУ

$$\alpha \ddot{z} + \sigma \dot{z} + \Delta z = 0, \quad \alpha \neq 0. \quad (3.17)$$

будет устойчиво?

Из критерия Гурвица (3.9) (3.10) следует, что система (3.17) устойчива, когда σ, α, Δ имеют один знак. Т. е. $\sigma, \Delta > 0$ при $\alpha > 0$ или $\sigma, \Delta < 0$ при $\alpha < 0$.

3.3. Задачи

Задание: в плоскости параметров a, b выделить область, соответствующую устойчивому состоянию равновесия.

1. $a\lambda + b = 0;$

5. $a\lambda^3 + b\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;$

2. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0;$

6. $\lambda^3 + (b+3)\lambda^2 + 3a\lambda + a+b = 0;$

3. $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0;$

7. $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda + 1 = 0;$

4. $a\lambda^2 - 2\lambda + b = 0;$

8. $\lambda^4 + a\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0.$

Задание: получите условия устойчивости нулевого решения

$$9. \begin{cases} \dot{x} = [f(x) - b]x + y \\ \dot{y} = bx - y \\ \dot{z} = az - cx \end{cases} \quad 10. \begin{cases} \dot{x} = ax - y - y^6 \\ \dot{y} = a \sin(y) - z \\ \dot{z} = az - x \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = -\sin(ax) + b(y - x) \\ \dot{y} = a(1 - e^y) + b(x - y) + c(z - y); \quad b > 0, c > 0 \\ \dot{z} = -az + c(y - z) \end{cases}$$

Задание: получите модель лампового генератора в виде дифференциального уравнения. В плоскости параметров $R, h = \sqrt{L_0/L}$ постройте область возбуждения из нулевых начальных

условий (сеточным током и реакцией анодного напряжения пренебречь).

12. Выполните задание для генератора с контуром в цепи анода (рис. 3.1); **13.** Выполните задание для генератора с контуром в цепи сетки (рис. 3.2); **14.** Выполните задание для генератора с контуром в цепи катода (рис. 3.3); **15.** Получите модель генератора на туннельном диоде в виде дифференциального уравнения. Найдите условия устойчивости состояния равновесия на падающем участке вольт-амперной характеристики диода в плоскости параметров $G_{\text{диф}}$, R (рис. 3.4).

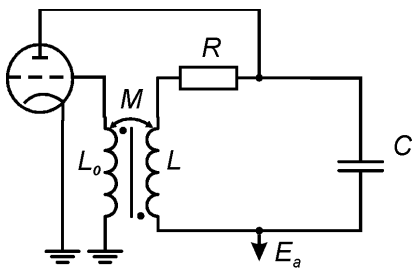


Рис. 3.1

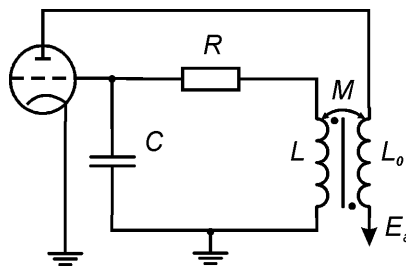


Рис. 3.2

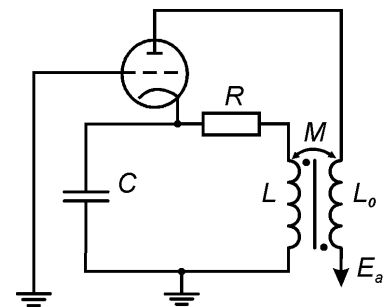


Рис. 3.3

16. Получите модель генератора на двух туннельных диодах в виде дифференциального уравнения. Найдите условия устойчивости состояния равновесия на падающем участке вольт-амперной характеристики диода в плоскости параметров $G_{\text{диф}}$, R . Считайте, что диоды идентичны (рис. 3.5).

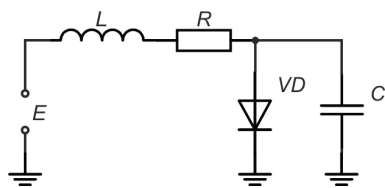


Рис. 3.4

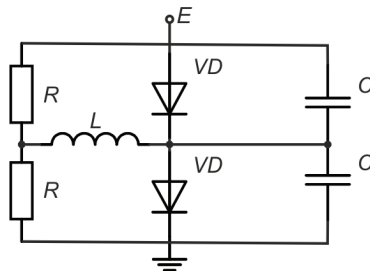


Рис. 3.5

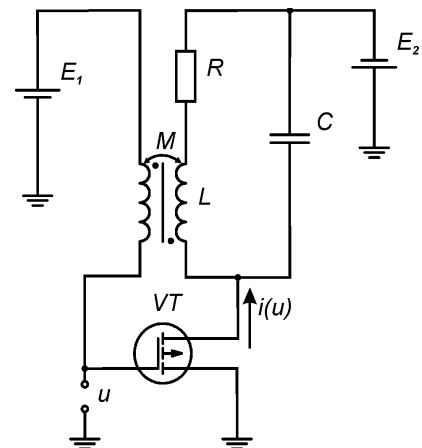


Рис. 3.6

Задание: найдите область самовозбуждения генератора на полевом транзисторе (рис. 3.6), описываемого уравнением

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{di(u)}{dt}.$$

17. Постройте область самовозбуждения в пространстве параметров R, M ; **18.** Постройте область самовозбуждения в пространстве параметров RC, MS_0 , где $S_0 = \left. \frac{di(u)}{dt} \right|_{u=0}$; **19.** Постройте область самовозбуждения в пространстве параметров C, S_0 , где $S_0 = \left. \frac{di(u)}{dt} \right|_{u=0}$.

4. Качественное исследование колебательных систем на фазовой плоскости

4.1. Основные теоретические сведения

Метод фазовой плоскости применяется для исследования линейных и нелинейных автономных систем, описываемых обычными дифференциальными уравнениями (ОДУ), в основном первого и второго порядков. Если дано ОДУ n -го порядка в виде

$$x_1^{(n)} - f(x_1^{(n-1)}, \dots, \ddot{x}_1, \dot{x}_1, x_1) = 0, \quad (4.1)$$

где $x_1^{(n)}$ – n -я производная от переменной x_1 , то необходимо перейти к системе, состоящей из n ОДУ первого порядка, с помощью замены

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = x_3; \quad \dots; \quad \dot{x}_{n-1} = x_n; \quad \dot{x}_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1). \quad (4.2)$$

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с одной степенью свободы общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (4.3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости (x, y – декартовы координаты) и имеющие в этой области непрерывные производные порядка не ниже первого. Область G может быть как неограниченной, так и ограниченной. Если переменные x, y имеют конкретный (физический, биологический или иной) смысл, то G может быть полуплоскостью или квадрантом.

Методика исследования нелинейной системы (4.3) сводится к
1) нахождению всех состояний равновесия из

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

2) линеаризации системы (4.3) в окрестности каждого из состояний равновесия и определению типа состояния равновесия из линейного уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x}{dt} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{A_{0i}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{A_{0i}} \cdot \Delta y \\ \frac{d\Delta y}{dt} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{A_{0i}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{A_{0i}} \cdot \Delta y \end{cases}, \quad (4.5)$$

где частные производные берутся в точке i -го состояния равновесия $A_{0i}(x_{0i}, y_{0i})$, а новые переменные определены как

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_{0i} \\ \Delta y = y - y_{0i} \end{cases}; \quad (4.6)$$

3) применению метода изоклин и / или решению интегрального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (4.7)$$

Определение 4.1. Изоклиной принято называть геометрическое место точек, в которых касательные ко всем интегральным кривым имеют одинаковый наклон.

4) применению второго метода Ляпунова;

5) применению критериев Дюлака, Бендинсона и пр.

Критерий Дюлака для односвязной области

Теорема 4.1. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна вместе с первыми частными производными в некоторой односвязной области G на фазовой плоскости системы (4.3). И пусть выражение

$$D = \frac{\partial F(x, y)P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)Q(x, y)}{\partial y} \quad (4.8)$$

в той же области G не меняет знака и не равно тождественно нулю. Тогда в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

Частным случаем критерия Дюлака, когда $F(x, y) \equiv 1$, является критерий Бендинсона.

Критерий Бендинсона для односвязной области

Теорема 4.2. Пусть в некоторой односвязной области G на фазовой плоскости системы (4.3) выражение

$$D = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$$

не меняет знака и не равно тождественно нулю. Тогда в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

Каждый из пунктов методики имеет свои особенности, которые будут раскрываться в предложенных ниже примерах. В случае простой системы можно проводить укороченное исследование, включающее лишь часть из пунктов.

4.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Провести разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории и исследовать типы состояний равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y) = P(x, y) \\ \dot{y} = 2x - y = Q(x, y) \end{cases} \quad (4.9)$$

1. Данная система имеет два состояния равновесия $A_{01}(0, 0)$ и $A_{02}(0.5, 1)$.

2. При линеаризации системы (4.9) в окрестности первого состояния равновесия следует выполнить замену $x \rightarrow \Delta x = x - 0 = x$ и аналогично $y \rightarrow \Delta y$. В результате получим:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \Delta x(1 - \Delta y) \approx \Delta x \\ \Delta \dot{y} = 2\Delta x - \Delta y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ соответствует неустойчивая точка типа седло.

Для второй точки равновесия можно записать

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{A_{02}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bigg|_{(0.5, 1)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ имеет два корня $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm i\sqrt{3}/2$, соответствующие устойчивому фокусу.

3. Применим метод изоклин к интегральному уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x(1-y)}$: а) определим изоклины горизонтальных касательных, для которых $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = 2x$ — изоклина горизонтальных касательных — линия, которую фазовые траектории пересекают строго горизонтально;

б) из условия $\frac{dx}{dy} = 0$ получаем два уравнения изоклин вертикальных касательных $x = 0$ и $y = 1$. Графически полученные результаты показаны на рис. 4.1.

Замечание. Фазовые траектории не могут пересекать (попадать из одной открытой полуплоскости в другую) изоклину $x = 0$.

Действительно, если предположить противное, что существует точка пересечения, то в этой точке $\dot{x} = 0$ и, следовательно, никакого изменения по координате x не будет происходить, что и свидетельствует об отсутствии пересечения в указанном смысле.

Для более точного построения можно находить иные изоклины, для которых, например, $dy/dx = \pm 1$ и пр.

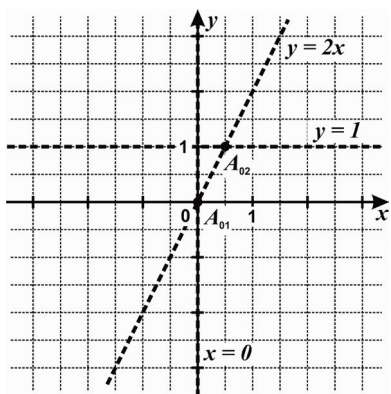


Рис. 4.1

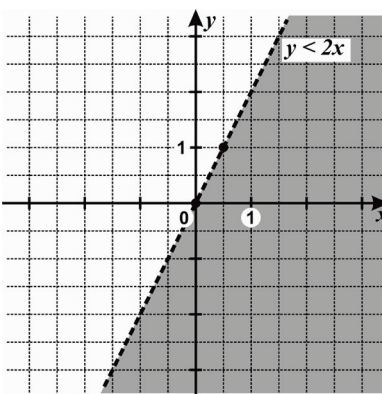


Рис. 4.2

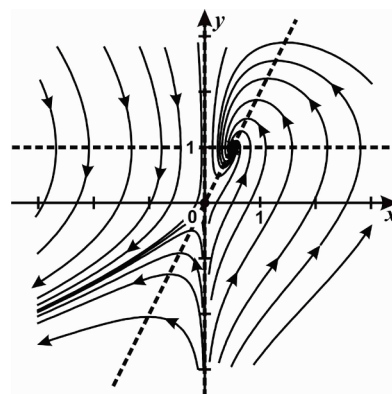


Рис. 4.3

Полезно найти области фазового пространства, в которых фазовые траектории направлены в сторону возрастания переменной y («вверх»). Для этого необходимо решить неравенство $\dot{y} > 0$. Решением неравенства является полуплоскость $2x > y$. Следует выполнить аналогичные рассуждения для переменной x . Результаты исследования представлены на рис. 4.2.

Проведенного исследования достаточно для построения фазового портрета системы (см. рис. 4.3).

Пример 2. Провести разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории и исследовать типы состояний равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y + 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases} \quad (4.10)$$

1. Система уравнений $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$ является нелинейной,

но решить её не составляет труда, если начать со второго

уравнения. Если $x = 0$ система (4.10) имеет состояние равновесия $A_{01}(0,1)$, а при $y = 0$ система уравнений не имеет действительных решений, то есть $A_{01}(0,1)$ – единственное состояние равновесия.

2. При линеаризации системы (4.10) в окрестности состояния равновесия следует выполнить замену $x \rightarrow \Delta x = x - 0 = x$ и $y \rightarrow \Delta y = y - 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{A_{01}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & x \end{pmatrix} \bigg|_{(0,1)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Если бы изначально система (4.10) была линейной, то можно было бы однозначно заключить, что особая точка является центром. *В данном случае требуется провести дополнительное исследование!*

Теорема 4.3 (теорема Ляпунова). Пусть $x = y = 0$ состояние равновесия системы (4.3) и пусть корни характеристического уравнения, составленного для него, чисто мнимые. Тогда необходимое и достаточное условие того, что точка $x = y = 0$ является центром, заключается в существовании аналитического интеграла системы (4.3) в окрестности этой точки.

Применительно к задаче (4.2) вопрос о нахождении аналитического интеграла для интегрального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y + 1} \quad (4.11)$$

является нетривиальным! Теорема Ляпунова эффективно применима к случаю интегрального уравнения с разделяющимися переменными. Поэтому воспользуемся достаточным условием.

Для наличия у системы (4.3) особой точки типа центр достаточно (но не необходимо), чтобы интегральные кривые уравнения (4.7) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую особую точку.

Сделаем замену переменного в (4.11) $x \rightarrow -x$:

$$\frac{dy}{d(-x)} = \frac{-xy}{(-x)^2 - y + 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y + 1}.$$

Откуда ось Oy является осью (проходящей через состояние равновесия) симметрии интегральных кривых уравнения (4.11), а следовательно, $A_{01}(0,1)$ – точкой типа центр.

3. Применим метод изоклин к интегральному уравнению (4.11).

а) определим изоклины горизонтальных касательных, для которых $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$ и $y = 0$ – изоклины горизонтальных касательных. Линию $y = 0$ фазовые траектории пересекать не могут (пояснения см. в примере 4.1);

б) из условия $\frac{dx}{dy} = 0$ получаем уравнение изоклины вертикальных касательных $y = x^2 + 1$.

Определим направления фазовых траекторий для горизонтальных направлений, решив неравенство $\dot{x} > 0$, и аналогично – для вертикальных направлений. Графически полученные результаты показаны на рис. 4.4. Фазовый портрет с учетом проведенного исследования представлен на рис. 4.5.

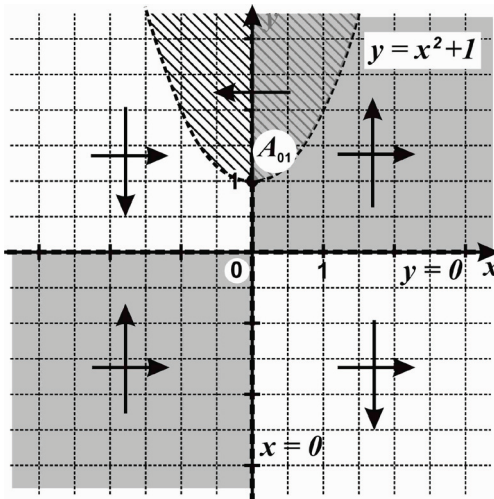


Рис. 4.4

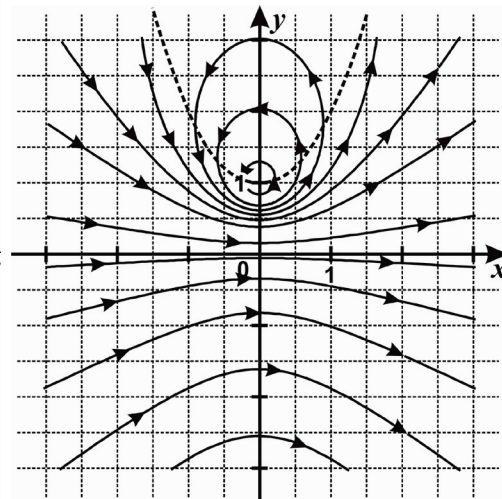


Рис. 4.5

4.3. Задачи

Задание: провести разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории и исследовать типы состояний равновесия для следующих систем:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = -x(3 + y) \\ \dot{y} = 4y(1 + x) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -x(3 - y) \\ \dot{y} = 4y(1 - x) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3 \cdot x \cdot y \\ \dot{y} = x^4 + 2y^2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2 \\ \dot{y} = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y - 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(1 + x^4) - y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2) - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = (y - 1)x \\ \dot{y} = x + y + y^2 \end{cases}$$

Задание: провести разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории. Выяснить, существуют ли предельные циклы в системах.

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = x^2(1 + y^2) \\ \dot{y} = x + y \end{cases}.$$

5. Исследование динамических систем методом Ван-дер-Поля

5.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим динамическую систему, определяемую системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu p(x, y) \\ \dot{y} = -x + \mu q(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

Пусть μ – малый положительный параметр. ($0 < \mu < 1$). При $\mu = 0$ система (5.1) переходит в линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (5.2)$$

Решение (5.2) имеет вид:

$$x = R\cos(t+\theta); y = -R\sin(t+\theta) \quad (5.3)$$

или в другой форме:

$$x = a\cos(t)+b\sin(t); y = -a\sin(t)+b\cos(t). \quad (5.4)$$

Решения в форме записи (5.3) и (5.4) эквивалентны, первая переходит во вторую при подстановке $a = R\cos(\theta)$, $b = -R\sin(\theta)$. Соответственно (R, θ) или (a, b) постоянные, определяемые начальными условиями.

Пусть теперь $\mu \neq 0$, но достаточно мало ($\mu \ll 1$). Будем искать решение уравнения (5.1) в том же виде (5.3), но положим, что R, θ – некоторые неизвестные пока функции времени. Переменные R, θ называют *переменными Ван-дер-Поля*, а уравнение (5.3) связывает исходные переменные x, y с новыми переменными R, θ . Аналогично, если искать решение через a, b , то система (5.4) связывает *переменные Ван-дер-Поля* a, b с исходными переменными x, y (см. рис. 5.1).

Из уравнений (5.3) и (5.4) видно, что плоскость (a, b) вращается с постоянной фазовой скоростью, равной единице, относительно плоскости (x, y) вокруг общего начала координат. А некоторая неподвижная в плоскости (a, b) точка с координатами $a = R\cos(\theta)$, $b = -R\sin(\theta)$ прочерчивает в плоскости (x, y) окружность.

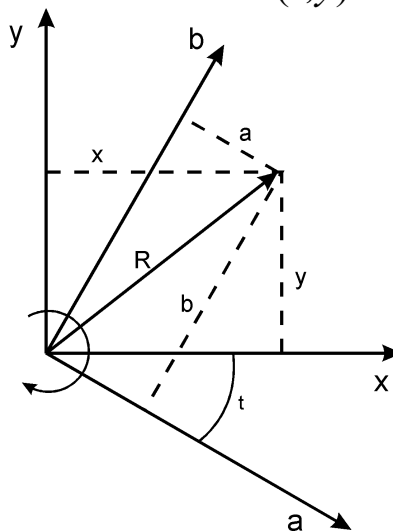


Рис. 5.1

Укороченные уравнения

Можно показать, что при малом значении μ производные по времени переменных Ван-дер-Поля dR/dt и $d\theta/dt$ (или da/dt и db/dt) имеют порядок малости μ , т. е. изменение их за период исходного колебания мало [1, 2]. Это позволяет перейти от (5.1) к системе *укороченных уравнений*, в которой используются усредненные по периоду значения производных. Процесс усреднения и вывода укороченных уравнений подробно рассмотрен в литературе [1, 2, 7, 8].

В результате усреднения получаются следующие системы дифференциальных уравнений. Для переменных R, θ

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p^* \cos \xi - q^* \sin \xi] d\xi \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi R} \int_0^{2\pi} [p^* \sin \xi + q^* \cos \xi] d\xi \end{cases} \quad (5.5)$$

Функции $p(x,y), q(x,y)$ из уравнения (5.1) переходят в $p^* = p(R \cos \xi, -R \sin \xi), q^* = q(R \cos \xi, -R \sin \xi)$ системы (5.5) после замены аргументов (5.3) и перехода к новой переменной $\xi = t + \theta$ (на одном периоде переменные θ, R можно считать постоянными, в силу этого $d\xi = dt$). Таким образом:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p(R \cos(t+\theta), -R \sin(t+\theta)) = p(R \cos \xi, -R \sin \xi) = p^* \\ q(x,y) &= q(R \cos(t+\theta), -R \sin(t+\theta)) = q(R \cos \xi, -R \sin \xi) = q^* \end{aligned} \quad (5.6.)$$

Аналогично, для переменных a, b укороченные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p^* \cos \xi - q^* \sin \xi] d\xi \\ \frac{db}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p^* \sin \xi + q^* \cos \xi] d\xi, \end{cases} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} p^* &= p(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi), \\ q^* &= q(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi). \end{aligned}$$

В итоге от исходной системы (5.1) выполнен переход к существенно более простой системе (5.5) или (5.7). Чтобы показать это, представим (5.5) в виде:

$$\begin{cases} \dot{R} = \mu \Phi(R) \\ \dot{\theta} = \mu \Psi(R) \end{cases}, \quad (5.8)$$

где $\Phi(R)$, $\Psi(R)$ – интегралы в правых частях уравнений (5.5). Обе правые части (5.8) зависят только от R . Первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. После того как $R(t)$ будет найдено и подставлено во второе, может быть вычислено и $\theta(t)$.

Состояния равновесия укороченных уравнений

Рассмотрим состояния равновесия системы (5.8)

$$\dot{R} = \mu \Phi(R) \quad (5.9)$$

Т. к. уравнение содержит только R , то корни уравнения $\Phi(R) = 0$ и есть состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия $R = R_k$ будет определяться знаком производной $d\Phi/dR$ в этой точке. Оно будет устойчиво, если $\Phi'_R(R_k) < 0$, и неустойчиво, если $\Phi'_R(R_k) > 0$. Стационарное состояние (5.9) в исходной системе соответствует, согласно (5.3), колебаниям с постоянной амплитудой.

Изменение R в зависимости от времени можно найти, если непосредственно проинтегрировать (5.9)

$$\mu(t - t_0) = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\Phi(R)}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим второе уравнение (5.8). Возможны два варианта.

Вариант 1: $\Psi(\theta) \equiv 0$. В этом случае решение системы укороченных уравнений (5.8):

$$R = R(t), \quad \theta = \theta_0 = \text{const}. \quad (5.11)$$

Каждому корню $R = R_k$ уравнения $\Phi(R) = 0$ в исходной системе будет соответствовать колебание с постоянной амплитудой и частотой.

$$x = R_k \cos(t + \theta_0); \quad y = -R_k \sin(t + \theta_0). \quad (5.12)$$

В фазовом пространстве исходной системы это будет предельный цикл, устойчивый для устойчивых стационарных состояний (5.9) и неустойчивый – для неустойчивых.

Вариант 2: $\Psi(\theta) \neq 0$. Рассмотрим $d\theta/dt$ в стационарном состоянии системы (5.9), т. е. при $R = R_k = \text{const}$. В этом случае $d\theta/dt = \mu\Psi(R_k) = \text{const}$ или

$$\theta = \mu\Psi(R_k)t + \theta_0. \quad (5.13)$$

При переходе к исходной системе в стационарном режиме получим:

$$x = R_k \cos([1 + \mu\Psi(R_k)]t + \theta_0); y = -R_k \sin([1 + \mu\Psi(R_k)]t + \theta_0). \quad (5.14)$$

Это также колебания с постоянной амплитудой, но, в отличие от (5.12), с дополнительной добавкой по частоте $\Delta\omega = \mu\Psi(R_k)$.

Рассмотрим несколько примеров анализа динамических систем с помощью метода Ван-дер-Поля.

5.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Получить укороченные уравнения, выяснить устойчивость предельных циклов для уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \quad (5.15)$$

1) *Вывод укороченных уравнений.* Введем новую переменную $y = dx/dt$ и от (5.15) перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu y(1 - x^2) \end{cases} \quad (5.16)$$

Будем искать решение в виде (5.3). Соответственно функции p^* и q^* в (5.5), с учетом (5.6), запишутся следующим образом: $p^* \equiv 0$, $q^* = y(1 - x^2) = -R \sin \xi (1 - R^2 \cos^2 \xi)$.

Подставим эти значения в систему (5.5)

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R \sin \xi (1 - R^2 \cos^2 \xi) \sin \xi] d\xi \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{2\pi R} \int_0^{2\pi} [R \sin \xi (1 - R^2 \cos^2 \xi) \cos \xi] d\xi \end{cases}. \quad (5.17)$$

Вычислим интегралы, после несложных преобразования получим:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\mu R}{2} - \frac{\mu R^3}{8}, \\ \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases}, \quad (5.18)$$

т. е. $\Phi(R) = \frac{R}{8}(4 - R^2)$, $\Psi(R) = 0$.

2) *Поиск стационарных состояний системы.* Стационарные состояния системы (5.18) определяются уравнением $\Phi(R) = \frac{\mu R}{8}(4 - R^2) = 0$; $R_1 = 0$, $R_2 = 2$. Следовательно, в исходной системе (5.15) будет два предельных цикла: один – нулевая точка в начале координат, второй – предельный цикл $R_2 = 2$.

3) *Исследование устойчивости стационарных состояний.* Найдем производную $\Phi'_R = 1/2 - 3R^2/8$. Состояние равновесия $R_1 = 0$ будет неустойчиво, т. к. $\Phi'_R(0) = 1/2 > 0$. Состояние $R_2 = 2$ будет устойчиво, т. к. $\Phi'_R(2) = -1 < 0$. Соответственно в исходной системе будет существовать неустойчивое нулевое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл радиуса 2.

Пример 2. Получите укороченные уравнения, исследуйте устойчивость стационарных состояний, постройте диаграммы бифуркаций для генератора (в предположении, что характеристику транзистора можно аппроксимировать полиномом третьей степени).

$$i(u) = \alpha u - \beta u^3, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (5.19)$$

1) *Вывод математической модели.* Дифференциальное уравнение, описывающее работу генератора, будет иметь вид:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{di(u)}{dt} \quad (5.20)$$

Перейдем в (5.20) к новому времени $\tau = \omega_0 t$ и введем обозначения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\delta = r\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{Q}, \quad R_K = \frac{L}{rC}, \quad k = \frac{M}{L}, \quad R_1 = kR_K \quad (5.21)$$

С учетом этого получим:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\delta \frac{du}{d\tau} + u = \delta R_1 \frac{di(u)}{d\tau}. \quad (5.22)$$

2) *Вывод укороченных уравнений.* Введем новую переменную $y=du/d\tau$. Учтем, что $i(u)=\alpha u - \beta u^3$, следовательно, $\frac{di(u)}{d\tau} = (\alpha - 3\beta u^2) \frac{du}{d\tau}$. Перейдем от (5.23) к системе уравнений (точкой обозначим дифференцирование по τ):

$$\begin{cases} \dot{u} = y \\ \dot{y} = -u + \delta y (R_1 \alpha - 1 - 3R_1 \beta u^2) \end{cases} \quad (5.23)$$

Решение будем искать в виде (5.3). Медленно меняющуюся амплитуду обозначим через U : $x = U \cos(t + \theta)$; $y = -U \sin(t + \theta)$.

Соответственно функции p^* и q^* в (5.5), с учетом (5.23), примут вид:

$$\begin{aligned} p^* &\equiv 0 \\ q^* &= y(R_1 \alpha - 1 - 3\beta R_1 u^2) = -U \sin \xi (R_1 \alpha - 1) - 3\beta R_1 U^2 \cos^2 \xi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Подставим эти значения в систему (5.5), возьмем интегралы и получим систему укороченных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{\delta} \frac{dU}{d\tau} = R_1 \left[\alpha U - \frac{3}{4} \beta U^3 \right] - U \\ \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

3) *Поиск стационарных состояний системы.* Стационарные состояния системы (5.25) определяются первым уравнением системы (5.25): $\Phi(U) = R_1 \left[\alpha U - \frac{3}{4} \beta U^3 \right] - U = 0$. Несложно видеть,

что решением будет: $U_1=0$, $U_{2()} = \sqrt{\frac{4}{3\beta} \left(\alpha - \frac{1}{R_1} \right)}$. Нулевое состояние равновесия U_1 существует всегда, состояние U_2 — только при выполнении условия $R_1 \alpha > 1$ и соответствует предельному циклу.

4) *Исследование устойчивости стационарных состояний.* Найдем производную $\Phi'_U = R_1 \alpha - 1 - 9\beta U^2/4$. Состояние равновесия $U_1=0$ будет устойчиво при $R_1 \alpha < 1$, т. к. при выполнении этого условия $\Phi'_U(U_1) < 0$. Состояние $U_2=2$ будет существовать при $R_1 \alpha > 1$ и всегда будет устойчиво, т. к. $\Phi'_R(U_2) = \frac{2(1 - R_1 \alpha)}{R_1} < 0$ в этой области параметров.

Соответственно при $R_1\alpha > 1$ в исходной системе будет существовать неустойчивое нулевое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл.

5) *Построение диаграммы бифуркаций.* Диаграмма бифуркаций показывает зависимость амплитуды предельного цикла и его устойчивость от параметра(ов) системы. В данном случае построим такую диаграмму, как зависимость $U_{ст}$ от R_1 . Устойчивое состояние будем отмечать кружком, неустойчивое – крестиком (рис. 5.2).

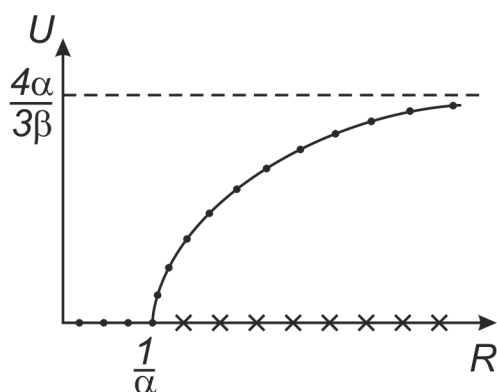


Рис. 5.2

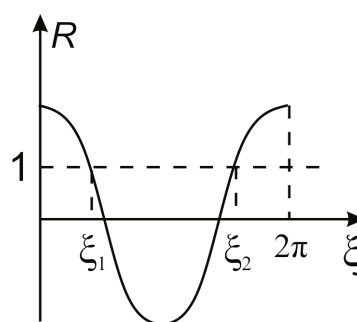


Рис. 5.3

При R_1 , близких к нулю, в системе существует только одно устойчивое состояние равновесия, с увеличением R_1 в точке $R_1=1/\alpha$ происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла. Нулевое состояние равновесия при этом становится неустойчивым.

Пример 3. Получите укороченные уравнения, исследуйте зависимость частоты колебаний от амплитуды для системы:

$$\dot{x} + x = \mu f(x), \quad 0 < \mu \ll 1 \quad (5.26)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

1) *Вывод укороченных уравнений.* Введем новую переменную $y = dx/dt$ и от (5.15) перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu f(x) \end{cases} \quad (5.27)$$

Будем искать решение в виде (5.3). Соответственно функции p^* и q^* в (5.5), с учетом (5.6), запишутся следующим образом:

$$p^* \equiv 0, \quad q^* = f(x) = f(R \cos \xi).$$

Подставим эти значения в систему (5.5)

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-f(\cos \xi) \sin \xi] d\xi \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{2\pi R} \int_0^{2\pi} [-f(R \cos \xi) \cos \xi] d\xi \end{cases} \quad (5.28)$$

Чтобы взять интегралы рассмотрим изменение $f(\cos \xi)$ при изменении переменной ξ от 0 до 2π (рис. 5.3).

При $R < 1$ $f(R \cos \xi) \equiv 0$. Если $R > 1$, то на периоде существует два значения — ξ_1 и ξ_2 , при которых $\cos \xi = 1/R$: $\xi_1 = \arccos(1/R)$, $\xi_2 = 2\pi - \arccos(1/R)$.

В диапазоне значений ξ от нуля до ξ_1 $R \cos \xi > 1$ и, следовательно, $f(R \cos \xi) = 1$. Далее в интервале $[\xi_1, \xi_2]$ $R \cos \xi < 1$ и $f(R \cos \xi) = 0$. На последнем промежутке $[\xi_2, 2\pi]$ — $f(R \cos \xi) = 1$. Возьмем интегралы (5.28), учитывая значения функции $f(R \cos \xi)$ на периоде. Первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(\cos \xi) \sin \xi] d\xi &= \int_0^{\xi_1} \sin \xi d\xi + \int_{\xi_2}^{2\pi} \sin \xi d\xi = \\ &= \cos \xi \Big|_0^{\xi_1} + \cos \xi \Big|_{\xi_2}^{2\pi} = \cos \xi_1 - \cos \xi_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Т. е. амплитуда колебаний R не изменяется с течением времени, а ее значение зависит только от начальных условий ($dR/dt = 0$, следовательно, $R(t) = R(0) = \text{const}$).

Второй интеграл (5.28):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(\cos \xi) \cos \xi] d\xi &= \int_0^{\xi_1} \cos \xi d\xi + \int_{\xi_2}^{2\pi} \cos \xi d\xi = \\ &= \sin \xi \Big|_0^{\xi_1} + \sin \xi \Big|_{\xi_2}^{2\pi} = \sin \xi_1 - \sin \xi_2 = 2 \sin \xi_1 = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \xi_1}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Учитывая, что $\xi_1 = \arccos(1/R)$, из (5.28) (5.30) найдем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\mu}{\pi R} \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}}.$$

Учитывая вид $f(x)$, можно записать:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega = \begin{cases} 0; & R < 1 \\ -\frac{\mu}{\pi R} \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}}; & R \geq 1 \end{cases}$$

Построим график зависимости приращения частоты от амплитуды колебаний (см. рис. 5.4):

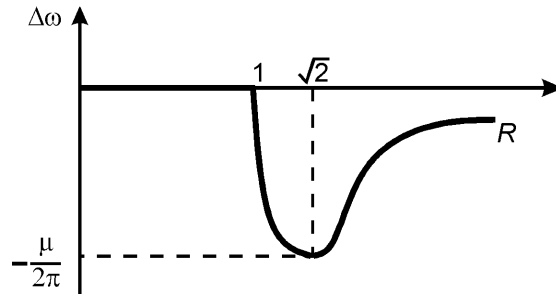


Рис. 5.4

5.3. Задачи

Задание: найти зависимость амплитуды колебаний от параметра α , построить диаграммы бифуркаций, определить устойчивые и неустойчивые ветви бифуркационной кривой (полагаем, что $0 < \mu \ll 1$):

1. $\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} [x - \alpha(x - x^3)];$ 2. $\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} [x - \alpha(x + x^3 - x^5)];$

3. $\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} [x - \alpha x^3 + x^5];$ 4. $\ddot{x} + x = -\mu [\dot{x} - \alpha(\dot{x} - \dot{x}^3)];$

5. $\ddot{x} + x = -\mu \left[\dot{x} - \frac{\alpha \dot{x}}{1 + x^2} \right];$ 6. $\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} \{ x - 2[x - \alpha - (x - \alpha)^3] \}.$

Задание: найти зависимость частоты колебаний от амплитуды для системы, описываемой уравнением вида $\ddot{x} + x = \mu f(x)$, $0 < \mu \ll 1$, где функция $f(x)$ задана следующими уравнениями:

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ x-1, & \text{при } x > 1 \end{cases};$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ x, & \text{при } x > 1 \end{cases};$

9. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < -1 \\ x, & \text{при } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases};$ 10. $f(x) = x^3;$ 11. $f(x) = x^3 - x^5;$ 12. $f(x) = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$

13. Найти зависимость частоты колебаний груза, подвешенного на нерастяжимой нити, от амплитуды. Полагать, что угол откло-

нения $\varphi < \pi/2$. Потерями энергии на трение пренебречь; **14.** Найти зависимость частоты колебаний от амплитуды в колебательном контуре с нелинейной индуктивностью (рис. 5.5). Потокосцепление и ток в катушке связаны соотношением $Li = \Phi + \alpha\Phi^3$ (потерями энергии пренебречь); **15.** Найти зависимость амплитуды колебаний в автогенераторе на полевом транзисторе (рис. 5.6), при условии, что ток стока зависит от напряжения на затворе по закону: $i = \alpha u - \beta u^3$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$). Построить диаграмму бифуркаций, найти ее устойчивую и неустойчивую ветви; **16.** Найти зависимость амплитуды колебаний в автогенераторе на полевом транзисторе (рис. 5.6), при условии, что ток стока зависит от напряжения на затворе по закону: $i = \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$). Построить диаграмму бифуркаций, найти ее устойчивую и неустойчивую ветви.

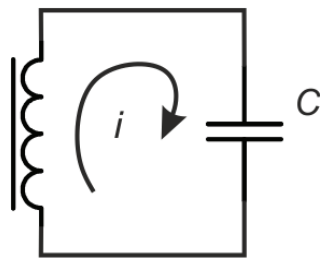


Рис 5.5

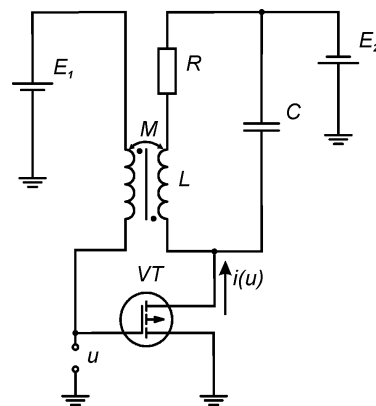


Рис. 5.6

6. Разрывные колебания в системах с одной степенью свободы

6.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим динамическую систему, определяемую системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (6.1)$$

Пусть μ – малый положительный параметр ($0 < \mu \ll 1$), а функции $F(x, y)$, $Q(x, y)$ ограничены и дифференцируемы в интересующей нас области фазового пространства. В этом случае система (6.1) может быть разбита на две подсистемы, описывающие быстрые и медленные движения [1, 6].

Перейдем к новому времени $\tau = t/\mu$, в этом случае (6.1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = F(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} = \mu Q(x, y) \end{cases} \quad (6.2)$$

Пусть μ стремится к нулю. Рассмотрим точки фазового пространства вне кривой $F(x, y) = 0$. В этом случае $dx/d\tau \gg dy/d\tau$ и, следовательно, изменение координаты x происходит значительно быстрее изменения координаты y . Иными словами, вдоль координаты x происходят *быстрые* движения. Система (6.2) для быстрых движений может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = F(x, y_0) \\ y = y_0 = \text{const} \end{cases} \quad (6.3)$$

Фазовые траектории быстрых движений расположены на линиях, параллельных оси x . Направление быстрых движений определяется знаком производной $dx/d\tau$, т. е. знаком функции $F(x, y)$.

Для точек, принадлежащих кривой $F(x, y) = 0$, в системе происходят *медленные* движения, т. к. поведение системы в этом случае определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{d\tau} = \mu Q(x, y) \end{cases} \quad (6.4)$$

Медленное движение происходит вдоль кривой $F(x, y) = 0$, а его направление зависит от знака производной $dx/d\tau$ или от знака $Q(x, y)$. Если $Q(x, y) > 0$, то движение идет в сторону возрастания координаты y , если $Q(x, y) < 0$ – в сторону убывания систем.

Каждую точку кривой $F(x, y) = 0$ можно рассматривать как некоторое состояние равновесия *быстрых* движений для системы (6.3). Устойчивость такого состояния равновесия при заданном

значении координаты $y = y_1$ определяется знаком производной $\partial F(x, y_1)/\partial x$ в точке $x = x_1$, принадлежащей кривой медленных движений ($F(x_1, y_1) = 0$). Если

$$\partial F(x, y_1)/\partial x|_{x=x_1} < 0, \quad (6.5)$$

то точка (x_1, y_1) на кривой медленных движений устойчива и быстрые движения приводят систему в ее окрестность. И наоборот, если

$$\partial F(x, y_1)/\partial x|_{x=x_1} > 0, \quad (6.6)$$

то (x_1, y_1) неустойчива и быстрые движения направлены в стороны от $F(x, y) = 0$. Соответственно множество точек кривой $F(x, y) = 0$, для которых выполняется условие (6.5), образует устойчивую область F^+ , в которую траектории быстрых движений приводят систему. Множество точек, для которых выполняется условие (6.6), образует неустойчивую область F^- .

Состояния равновесия системы находятся на пересечениях кривых $F(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. Состояние равновесия (x_0, y_0) будет устойчиво, если находится в F^+ (быстрые движения приводят систему в область медленных движений) и система (6.4) в точке (x_0, y_0) устойчива.

Если вся кривая $F(x, y) = 0$ представляет собой область F^+ , то все быстрые движения приводят систему в область медленных движений и для исследования поведения (6.1) на больших промежутках времени достаточно рассмотреть уравнения (6.4).

Разрывный предельный цикл

Пусть кривая $F(x, y) = 0$ состоит из чередующихся участков F^+ и F^- . Пусть медленное движение из области F^+ приводит систему на ее границу с областью F^- . На границе F^+ и F^- изображающая точка срывается в область быстрых движений и двигается до тех пор, пока не достигнет области медленных движений. Далее процесс может повториться. Если возникает замкнутая фазовая траектория, состоящая из чередующихся участков быстрых и медленных движений, то она называется *разрывным предельным циклом* (см. рис. 6.1) [1].

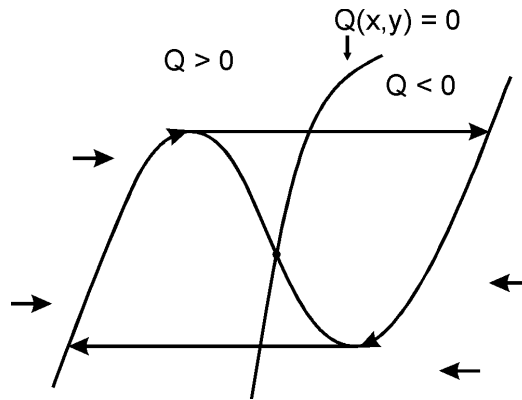


Рис. 6.1

Исследование системы в фазовом пространстве

Анализ движений в системе удобно проводить графически в фазовом пространстве, используя следующий алгоритм: 1) в фазовом пространстве необходимо построить кривую медленных движений $F(x,y) = 0$; 2) кривая $F(x,y) = 0$ разделяет области различного направления быстрых движений. Определяем области фазового пространства, где $F(x,y) > 0$ (быстрые движения в сторону увеличения x) и где $F(x,y) < 0$ (быстрые движения в сторону уменьшения x); 3) строим кривую $Q(x,y) = 0$. Она разделяет области движения вдоль кривой медленных движений. Там, где $Q(x,y) > 0$, координата y возрастает, соответственно, где $Q(x,y) < 0$, координата y убывает; 4) находим состояния равновесия – точки пересечения кривых $Q(x,y) = 0$ и $F(x,y) = 0$. Исследуем их устойчивость. Если состояние равновесия устойчиво, то и быстрые, и медленные движения приводят систему в его окрестность; 5) находим на кривой медленных движений границы областей F^+ и F^- . Проверяем, возможен ли срыв в область быстрых движений. Если возможен, то из каждой такой точки строим фазовую траекторию, проверяем, не является ли она разрывным предельным циклом.

6.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Проведите разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории, полагая, что $0 < \mu < 1$.

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{dt} = x(1-x^2) - y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

1) Кривая медленных движений $F(x, y) = x(1-x^2) - y = 0$. Или $y = x - x^3$.

2) $F(x, y) < 0$ над кривой $x(1-x^2) - y = 0$, следовательно, быстрые движения над кривой справа налево.

$F(x, y) > 0$ под кривой $x(1-x^2) - y = 0$, следовательно, быстрые движения под кривой слева направо.

3) Строим кривую $Q(x, y) = 0$ или $x = 0$. Она совпадает с осью ординат. Определяем знак производной dy/dt , при $x > 0$ движения вдоль кривой медленных движений ведут в сторону увеличения y . При $x < 0$ – в сторону уменьшения y .

4) В системе существует единственное состояние равновесия $(0, 0)$. Оно неустойчиво, т. к. и быстрые и медленные движения выводят изображающую точку из его окрестности.

5) На кривой медленных движений существуют области F^+ и F^- . Любое медленное движение из области F^+ приводит изображающую точку на границу с областью F^- . Строим фазовую траекторию из точки срыва и убеждаемся, что в системе возможен разрывный предельный цикл (рис. 6.2).

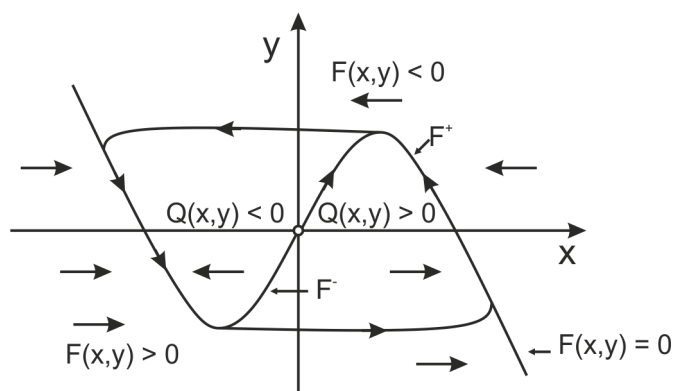


Рис. 6.2

Пример 2. Проведите разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории, полагая, что $0 < \mu \ll 1$.

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{dt} = x(1-x^2) - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

1) Кривая медленных движений $F(x,y) = x(1-x^2) - y = 0$. Или $y = x - x^3$.

2) $F(x,y) < 0$ над кривой $x(1-x^2) - y = 0$, следовательно, быстрые движения над кривой справа налево.

$F(x,y) > 0$ под кривой $x(1-x^2) - y = 0$, следовательно, быстрые движения под кривой слева направо.

3) Строим кривую $Q(x,y) = 0$ или $y = x/2$. Она совпадает с осью ординат. Определяем знак производной dy/dt , при $x > 2y$ (под прямой $y = x/2$) движения вдоль кривой медленных движений ведут в сторону увеличения y , при $x < 2y$ (над прямой $y = x/2$) – в сторону уменьшения y .

4) В системе существует три состояния равновесия $(0,0)$ $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/8})$ $(-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/8})$. Ноль неустойчив, т. к. принадлежит области F^- . Остальные два состояния устойчивы, т. к. фазовые траектории приводят изображающую точку в их окрестность.

5) На кривой медленных движений существуют области F^+ и F^- . Медленных движений, приводящих изображающую точку из области F^+ на границу с областью F^- , не существует. Замкнутые фазовые траектории отсутствуют (рис. 6.3).

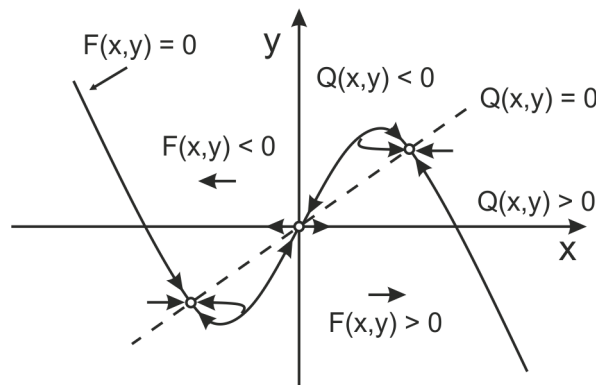


Рис. 6.3

6.3. Задачи

Задание: проведите разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории, исследуйте возможность разрывных автоколебаний ($0 < \mu < 1$):

$$1. \begin{cases} \mu \dot{x} = x(1-x^2) - y; \\ \dot{y} = x - ay \end{cases}; \quad a \neq 0; \quad 2. \begin{cases} \mu \dot{x} = -x - y - kf(x); \\ \dot{y} = x \end{cases};$$

$f(x) = -x + x^3/3$; $k = \text{const}$; 3. Груз массой m , укрепленный на пружине с жесткостью k , лежит на ленте конвейера, движущейся со скоростью v (рис. 6.4). Сила трения между грузом и лентой конвейера – функция относительной скорости (рис. 6.5). Рассмотрите поведение системы на фазовой плоскости $(x, \dot{x} - v)$. Примите $m \ll 1$.

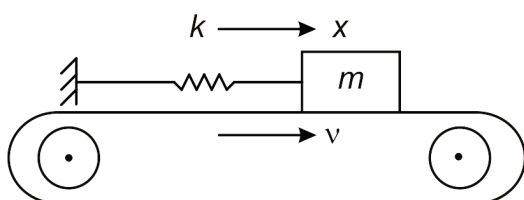


Рис. 6.4

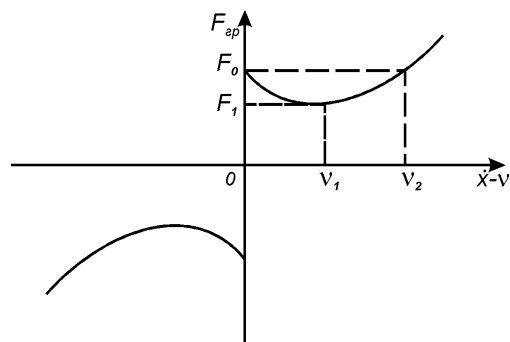


Рис. 6.5

$$4. \begin{cases} \mu \dot{x} = -y - x(2 - 3x^2 + x^4); \\ \dot{y} = x \end{cases}; \quad 5. \begin{cases} \mu \dot{x} = -y - x(x^2 - 5)(x^2 - 1); \\ \dot{y} = x \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} \mu \dot{y} = -y[x^2 + 2(y+1)(y-5)] \\ \dot{x} = x(y-1) \end{cases}, \quad x \geq 0, y \geq 0;$$

$$7. \begin{cases} \mu \dot{y} = -y[x^2 + 2(y+1)(y-5)] \\ \dot{x} = x(xy-1) \end{cases}, \quad x \geq 0, y \geq 0;$$

$$8. \begin{cases} \mu \dot{y} = y[1 - y^2 - (x-y)^2] \\ \dot{x} = 3y - x \end{cases}, \quad y \geq 0; \quad 9. \begin{cases} \mu \dot{y} = y[1 - y^2 - (x-y)^2] \\ \dot{x} = 3y - x \end{cases}, \quad y \geq 0;$$

10. Рассмотрите на фазовой плоскости (u, i) возможные качественно различные разбиения траектории для генератора на туннельном диоде (рис. 6.6), для которого $\mu = CR^2/L \ll 1$.

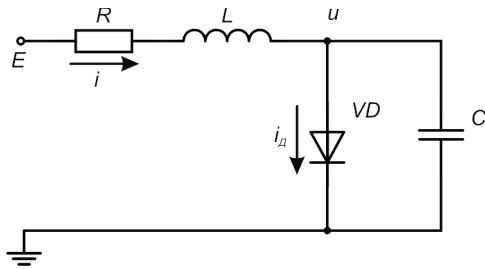


Рис. 6.6

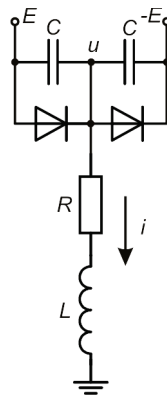


Рис. 6.7

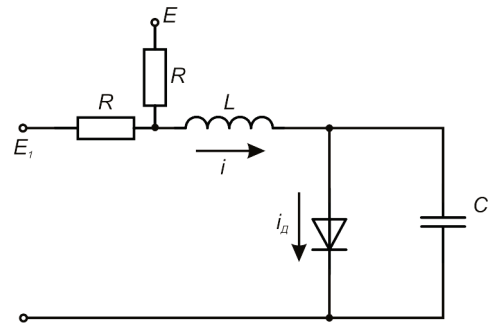


Рис. 6.8

11. Рассмотрите на фазовой плоскости (u, i) возможные качественно различные режимы работы генератора на двух туннельных диодах, для которого выполняется условие $\mu = CR^2/L \ll 1$ (рис. 6.7); **12.** Рассмотрите на фазовой плоскости (u, i) поведение спусковой схемы, собранной на туннельном диоде (рис. 6.8), при условии, что $\mu = CR^2/L \ll 1$, $E_1 = \text{const.}$ Зависимость $E(t)$ приведена на рис. 6.9. Каким условиям должны удовлетворять величины E_1 , E_0 , τ_1 , τ_2 , чтобы на произвольный в некоторых пределах импульс система откликнулась одинаковым импульсом?; **13.** Рассмотрите на фазовой плоскости поведение лампового генератора (рис. 6.10) при $\mu = L/R^2C \ll 1$, анодный ток зависит только от напряжения на сетке (рис. 6.11).

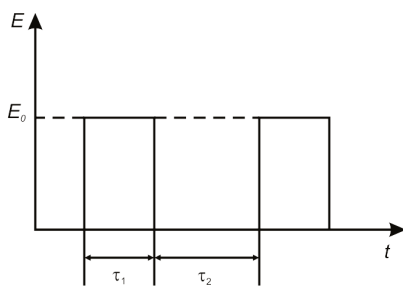


Рис. 6.9

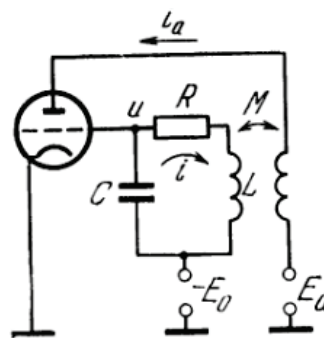


Рис. 6.10

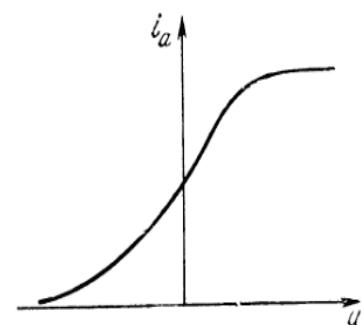


Рис. 6.11

7. Метод гармонической линеаризации

7.1. Основные теоретические сведения

Коэффициенты гармонической линеаризации

Рассмотрим нелинейное выражение вида

$$y = F(x, px) \quad (7.1)$$

Оператор p – дифференцирование по времени. Пусть входной сигнал $x = x(t)$ является гармоническим

$$x = A_0 + A \sin(\tau), \quad \tau = \omega t. \quad (7.2)$$

Тогда

$$px = A \omega \cos(\tau). \quad (7.3)$$

Выражение (7.1) в этом случае также является периодической функцией времени. Разложим правую часть (7.1) в ряд Фурье:

$$y = F_0 + F_{1C} \cos \tau + F_{1S} \sin \tau + \dots \text{ (высшие гармоники)}. \quad (7.4)$$

Вычислим $\cos \tau$ и $\sin \tau$ из (7.2), (7.3) и подставим в (7.4):

$$y = F_0 + q(A_0, A, \omega)x + \frac{q'(A_0, A, \omega)}{\omega} px + \dots \text{ (высшие гармоники)}. \quad (7.5)$$

Коэффициенты $q(A, \omega)$, $q'(A, \omega)$ называются *коэффициентами гармонической линеаризации*. Они определяются формулами:

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin \tau, A \omega \cos \tau) \sin \tau d\tau, \quad (7.6)$$
$$q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin \tau, A \omega \cos \tau) \cos \tau d\tau.$$

Постоянная составляющая F_0 соответственно:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin \tau, A \omega \cos \tau) d\tau. \quad (7.7)$$

В результате для гармонического входного воздействия осуществлен переход от нелинейной модели (7.1) к линейному относительно первой гармоники $x(t)$ уравнению (7.5). Такой переход называется *гармонической линеаризацией нелинейности*.

Характеристическое уравнение гармонической линеаризации

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением вида:

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (7.8)$$

Такая модель описывает, например, нелинейную систему автоматического регулирования (рис. 7.1).

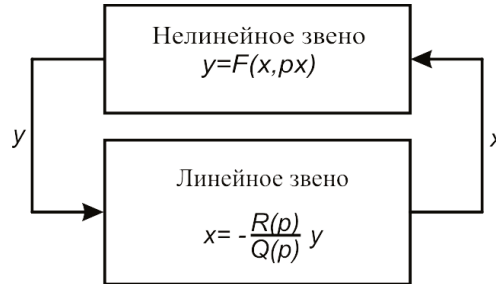


Рис. 7.1

Будем считать, что решение (7.8) близко к гармоническому синусоидальному, и будем искать его в виде (7.2), (7.3):

$$x \approx A_0 + A \sin \omega t; \quad \dot{x} \equiv px \approx A \omega \cos \omega t. \quad (7.9)$$

Подставим (7.9) в (7.8), $F(x, px)$ заменим на выражение (7.5), отбросим слагаемые с высшими гармониками и получим:

$$Q(0)A_0 + R(0)F_0 + Q(p)A \sin \omega t + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) A \sin \omega t = 0. \quad (7.10)$$

Приравняем слагаемые, содержащие и не содержащие $A \sin \omega t$,

$$Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0,$$

$$Q(p)A \sin \omega t + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) A \sin \omega t = 0. \quad (7.11)$$

Первое уравнение (7.11) описывает баланс постоянных составляющих. Второе можно представить в виде:

$$Q(p)x^* + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) x^* = 0, \quad x^* = A \sin \omega t. \quad (7.12)$$

Рассмотрим теперь решения (7.12). Если в системе возникнут собственные незатухающие колебания амплитуды $A = A_0$ с постоянной частотой, то коэффициенты q, q' в установившемся режиме будут постоянными. Вместе с тем для существования периодического решения уравнение (7.12)

$$D(\lambda) \equiv Q(\lambda) + R(\lambda) \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda \right) = 0 \quad (7.13)$$

должно иметь пару чисто мнимых корней. Уравнение (7.13) называется *характеристическим уравнением гармонически линеаризованной системы*.

Таким образом, если (7.13) допускает решения с корнями $\lambda = \pm j\omega$, то в системе возможны стационарные гармонические колебания. Постоянные составляющие колебаний можно определить из первого уравнения (7.11).

Устойчивость периодических решений

Предположим, что в системе (7.12) возможны колебания и величины A , A_0 , ω определены. Необходимо решить вопрос об устойчивости полученного решения. Не теряя общности, положим $A_0 = 0$. Пусть в некоторый начальный момент времени периодическое решение $x = A \sin \omega t$ получило малые возмущения амплитуды ΔA и частоты $\Delta \omega$. Это приводит к тому, что $x = x(t)$ принимает вид

$$x(t) = (A + \Delta A) e^{\xi t} \sin(\omega + \Delta \omega)t, \quad (7.14)$$

описывающий переходной процесс вблизи гармонического колебания.

Для устойчивости необходимо, чтобы ΔA и ξ имели разные знаки (при положительных ΔA амплитуда должна уменьшаться, при отрицательных ΔA – увеличиваться). Переход к (7.14) означает переход от чисто мнимых корней к комплексным корням

$$\lambda_{1,2} = \xi \pm j(\omega + \Delta \omega). \quad (7.15)$$

Заменим в (7.13) λ на выражение (7.15), A заменим на $A + \Delta A$, найдем мнимую и действительную части $D(\lambda)$ и получим: $\text{Re}(D(\lambda)) = \Psi_1 = 0$, $\text{Im}(D(\lambda)) = \Psi_2 = 0$.

Полагая ΔA , $\Delta \omega$, ξ малыми величинами, разложим функции Ψ_1 , Ψ_2 в ряд Тейлора вблизи периодического решения (полагаем, что производные берутся при ΔA , $\Delta \omega$, $\xi = 0$) и ограничимся линейными слагаемыми.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial A} \right)_0 \Delta A + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right)_0 \xi &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial A} \right)_0 \Delta A + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right)_0 \xi &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Далее можно исключить из полученных уравнений $\Delta\omega$ и учесть, что ΔA и ξ должны иметь разные знаки. В итоге получится следующее условие [1]:

$$\left(\frac{\Psi'_{1A}}{\Psi'_{1\omega}} - \frac{\Psi'_{2A}}{\Psi'_{2\omega}}\right) : \left(\frac{\Psi'_{1\xi}}{\Psi'_{1\omega}} - \frac{\Psi'_{2\xi}}{\Psi'_{2\omega}}\right) > 0. \quad (7.17)$$

7.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Проанализировать методом гармонической линеаризации уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (7.18)$$

1. *Характеристическое уравнение.* Раскроем в (7.18) скобки и получим:

$$\ddot{x} + \mu x^2 \dot{x} - \mu \dot{x} + x = 0,$$

$$Q(p) = p^2 - \mu p + 1, \quad R(p) = 1, \quad F(x, \dot{x}) = \mu x^2 \dot{x}.$$

Вычислим по формуле (7.7) значение F_0 :

$$F_0 = \frac{\mu A \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau (A_0 + A \sin \tau)^2 d\tau = 0. \quad (7.19)$$

Из (7.19) и первого уравнения (7.11) следует, что $A_0 = 0$. Вычислим далее коэффициенты гармонической линеаризации (7.6). Получим:

$$q = 0; \quad q' = \mu \omega A^2 / 4 \quad (7.20)$$

Учитывая (7.20), запишем характеристическое уравнение (7.13):

$$D(\lambda) \equiv Q(\lambda) + R(\lambda) \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda \right) = \lambda^2 + \frac{\mu}{4} (A^2 - 4) \lambda + 1 = 0. \quad (7.21)$$

2. *Поиск гармонических решений.* Заменяем в (7.21) λ на $j\omega$. Тогда:

$$D(j\omega) = -\omega^2 + 1 + j\omega \frac{\mu}{4} (A^2 - 4) = 0. \quad (7.22)$$

Приравняем мнимую и действительные части $D(j\omega)$ к нулю: $\text{Re}[D(j\omega)] = 1 - \omega^2 = 0$, $\text{Im}[D(j\omega)] = \omega \frac{\mu}{4} (A^2 - 4) = 0$, откуда получим, что периодическому решению соответствуют:

$$A = 2, \quad \omega = 1 \quad (7.23)$$

3. *Устойчивость решения.* Подставим в (7.21) решение в виде $\lambda = \xi + j(1 + \Delta\omega)$ и заменим $A = 2 + \Delta A$. Найдем действительную и мнимую части полученного характеристического уравнения и разложим их в ряд Фурье (7.16). Производные будем брать в невозмущенном состоянии ($\Delta A, \Delta\omega, \xi = 0$). После преобразований получим:

$$\Psi'_{1\omega} \Delta\omega = -2\Delta\omega = 0,$$

$$\Psi'_{2A} \Delta A + \Psi'_{2\xi} \xi = \mu \Delta A + 2\xi = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $\Delta\omega = 0$. Из второго хорошо видно, что ΔA и ξ имеют разные знаки, при $\mu > 0$.

7.3. Задачи

Задание: исследовать методом гармонической линеаризации следующую систему: $(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + F(x) = 0$.

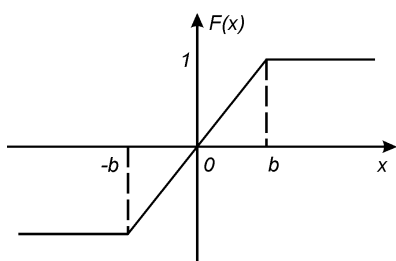


Рис. 7.2

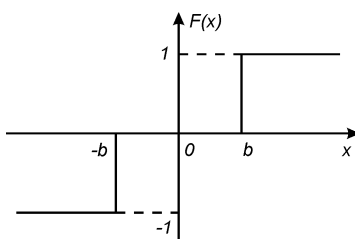


Рис. 7.3

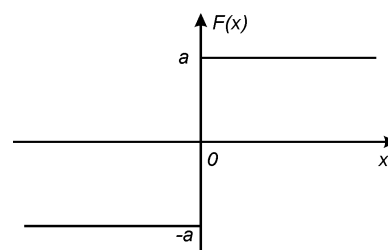


Рис. 7.4

1. Нелинейность $F(x)$ имеет вид (рис. 7.2); 2. Нелинейность $F(x)$ имеет вид (рис. 7.3); 3. Нелинейность $F(x)$ имеет вид (рис. 7.4); 4. Исследуйте методом гармонической линеаризации динамическую систему, описываемую уравнением $\ddot{x} + x = \mu(-\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^3)$; 5. Найдите периодические режимы в системе: $\ddot{x} + x = -\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^3 - \gamma \dot{x}^5$, $\beta < 0, \gamma > 0$. Исследуйте устойчивость полученных решений.

8. Гармоническое воздействие на колебательные системы

8.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим неавтономную динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \varphi(x) = Y \cos(\omega_2 t), \quad (8.1)$$

где $\varphi(x)$ – нелинейная функция, $h – const$, правая часть описывает гармоническое внешнее воздействие. В системе (8.1) возможны в общем случае периодические и непериодические движения различных типов [1, 2, 7, 8].

Рассмотрим возникающие в системе вынужденные гармонические колебания с частотой внешнего воздействия ω_2 (или частотой, близкой к ней). Введем параметр $\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}$ относительную расстройку, характеризующий разность частот собственных колебаний системы ω_0 и частоты внешнего воздействия ω_2 . Найдем зависимость амплитуды установившихся колебаний от относительной частотной расстройки ξ – *резонансную кривую*. Исследуем устойчивость установившихся движений. Пусть (8.1) можно привести к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t), \quad (8.2)$$

где μ – малый параметр ($0 < \mu \ll 1$). В этом случае для анализа системы применим метод Ван-дер-Поля. Рассмотрим детально ход исследования на примере.

8.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Построить резонансные кривые, исследовать устойчивость установившихся режимов для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -h x^3 + Y \cos(\omega_2 t), \quad (8.3)$$

где $0 < h \ll 1$ – малый параметр; собственная частота системы и частота входного воздействия близки, т. е. относительная расстройка $\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} \ll 1$; амплитуда входного воздействия

$Y \ll 1$. Будем искать резонансную кривую в виде зависимости амплитуды установившихся колебаний от относительной расстройки.

1. *Получение укороченных уравнений.* Перейдем в (8.3) к безразмерному времени $\tau = \omega_2 t$, выполним следующие замены

$\beta' = \frac{h}{\omega_2^2}$, $\sigma = \frac{Y}{\omega_2^2}$, $\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}$ в результате перейдем к уравнению

$$\ddot{x} + x = \xi x - \beta' x^3 + \sigma \cos(\tau). \quad (8.4)$$

Будем считать ξ , β' , σ малыми (ξ , β' , $\sigma \ll 1$). Несложно видеть, что (8.4) имеет форму (8.2). Это позволяет воспользоваться методом Ван-дер-Поля. Будем искать решение в виде:

$$\begin{cases} x = u(\tau) \cos \tau + v(\tau) \sin \tau \\ \dot{x} = -u(\tau) \sin \tau + v(\tau) \cos \tau \end{cases}, \quad (8.5)$$

где $u(\tau)$, $v(\tau)$ – переменные Ван-дер-Поля (медленные функции времени). Запишем с учетом (8.4), (5.7) укороченные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - \beta' x^3 + \sigma \cos \tau) \sin \tau d\tau \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - \beta' x^3 + \sigma \cos \tau) \cos \tau d\tau \end{cases}. \quad (8.6)$$

Подставим (8.5) в (8.6), вычислим интегралы и после несложных преобразований получим систему укороченных уравнений:

$$\begin{cases} 2 \frac{du}{d\tau} = -\xi v + \beta v(u^2 + v^2) = P(u, v) \\ 2 \frac{dv}{d\tau} = \xi u - \beta u(u^2 + v^2) + \sigma = Q(u, v) \end{cases}, \quad (8.7)$$

где $\beta = \frac{3\beta'}{4}$. Заметим, что в результате мы получили систему автономных дифференциальных уравнений. В правой части (8.7) время в явном виде отсутствует.

2. *Уравнение резонансной кривой.* Найдём состояния равновесия (u_0, v_0) системы (8.7). Они определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\xi v_0 + \beta v_0(u_0^2 + v_0^2) \\ 0 = -\xi u_0 + \beta u_0(u_0^2 + v_0^2) - \sigma \end{cases} \quad (8.8)$$

Домножим первое уравнение на u_0 , второе – на v_0 и сложим. Получим

$$v_0 \sigma = 0, \text{ или } v_0 = 0. \quad (8.9)$$

Аналогично домножим первое уравнение v_0 , второе – на u_0 и сложим. Далее перенесем σu_0 вправо и получим:

$$\beta(u_0^2 + v_0^2)^2 - \xi(u_0^2 + v_0^2) = \sigma u_0. \quad (8.10)$$

Пусть $\rho = u_0^2 + v_0^2$ квадрат амплитуды вынужденных колебаний. Возведем обе части (8.10) в квадрат и с учетом (8.9) получим:

$$\rho(\beta\rho - \xi)^2 = \sigma^2. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.12) и есть искомая зависимость амплитуды вынужденных колебаний от σ – нормированной амплитуды входного воздействия и ξ – относительной расстройки частот входного воздействия Ω и частоты собственных колебаний системы ω_0 .

3. *Построение резонансных кривых.* Построим в плоскости (ξ, ρ) семейство графиков $\rho = \rho(\xi)$ для различных значений σ . Для этого выразим ξ из (8.11)

$$\xi = \beta\rho \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}}. \quad (8.12)$$

Для построения этой кривой в плоскости (ξ, ρ) построим кривые $\xi = \beta\rho$ и $\xi = \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}}$ (рис. 8.1); сложив абсциссы этих кривых, получим резонансные кривые, изображенные на рис. 8.2.

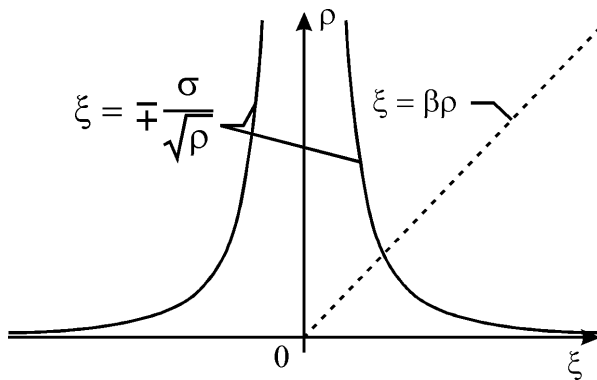


Рис. 8.1

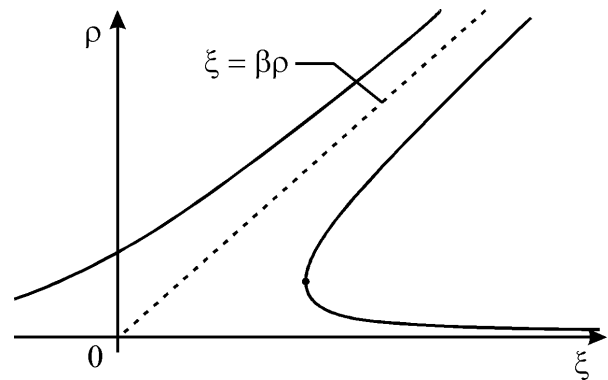


Рис. 8.2

4. *Исследование устойчивости ветвей резонансных кривых.* Линеаризуем (8.7) вблизи состояния равновесия (u_0, v_0) , получим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 2\beta v_0 u_0 - \lambda & -\xi + \beta u_0^2 + 3\beta v_0^2 \\ \xi - 3\beta u_0^2 - \beta v_0^2 & -2\beta v_0 u_0 - \lambda \end{vmatrix} = D(\lambda). \quad (8.13)$$

С учетом того, что $v_0 = 0$ и $\rho = u_0^2$, (8.13) можно записать:

$$\lambda^2 = (\xi - 3\beta\rho)(\beta\rho - \xi). \quad (8.14)$$

Несложно видеть, что при выполнении условия

$$\beta\rho < \xi < 3\beta\rho \quad (8.15)$$

корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (8.14) будут действительные и разного знака. Т. е. особая точка состояния равновесия будет иметь тип – седло и соответственно будет неустойчива. При остальных значениях ξ корни (8.14) чисто мнимые, что соответствует особой точке типа центр. В исходной системе (8.4) будут устойчивые колебания с постоянной амплитудой.

Для определения устойчивых и неустойчивых ветвей резонансной кривой в плоскости $O\xi\rho$ проведем лучи $\xi = 3\beta\rho$ и $\xi = \beta\rho$. Точки резонансной кривой, расположенные внутри угла, образованного этими лучами, неустойчивы (соответствуют седлам), а остальные участки резонансной кривой устойчивы (отвечают центрам – устойчивым положениям равновесия укороченной системы) (см. рис. 8.3)

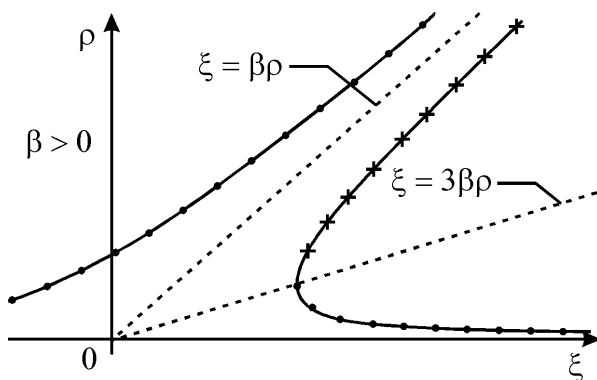


Рис. 8.3

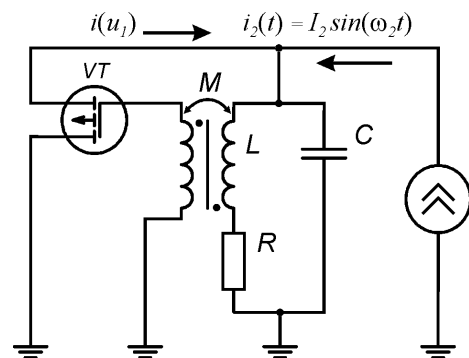


Рис. 8.4

Автоколебательные системы при периодическом внешнем воздействии

Рассмотрим автоколебательную динамическую систему, на которую воздействует внешняя периодическая сила, описываемую дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} - f(x, \dot{x})\dot{x} + \omega_0^2 x = Y \cos(\omega_2 t), \quad (8.16)$$

где $f(x, \dot{x})$ – нелинейная функция, ω_0 – *const* частота собственных колебаний системы в отсутствие внешнего воздействия. Правая часть описывает гармоническое внешнее воздействие [1, 7]. Рассмотрим возникающие в системе вынужденные гармонические колебания на примере LC генератора.

Пример 2. Построить резонансные кривые, исследовать устойчивость установившихся режимов для LC генератора (рис. 8.4). Считать, что в рабочей точке транзистор имеет характеристику $i(u_1) = Su_1 - \beta u_1^3$, где u_1 – напряжение на затворе (напряжение обратной связи), а внешний ток изменяется по закону $i_2(t) = I_2 \sin \omega_2 t$. Уравнение генератора будет иметь вид:

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + (RC - MS + 3M\beta u_1^2) \frac{du_1}{dt} + u_1 = MI_2 \omega_2 \cos \omega_2 t. \quad (8.17)$$

1. *Получение укороченных уравнений.* Перейдем к безразмерному времени $\bar{t} = \omega_2 t$. Учтем, что $RC - MS > 0$ (т. к. выполнены условия самовозбуждения генератора), введем новые обозначения и сделаем замены переменных:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad a = \frac{MS - RC}{LC \omega_2} > 0, \quad \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} = 1 - \xi',$$

$$x = \frac{u_1}{u_0}, \quad u_0^2 = \frac{MS - RC}{3M\beta}, \quad \sigma' = \frac{MI_2}{\omega_2 u_0 LC}.$$

Будем считать величины a, ξ', σ' малыми ($a \ll 1, \xi' \ll 1, \sigma' \ll 1$), уравнение (8.17) в этом случае сводится к уравнению с малым параметром вида

$$\frac{d^3 x}{d\bar{t}^2} + x = \xi' x + a(1 - x^2) \frac{dx}{d\bar{t}} + \sigma' \cos \tau = \mu f(x, \dot{x}, \tau), \quad (8.18)$$

где $\mu \ll 1$, $f(x, \dot{x}, \tau)$ – ограниченная функция. Это позволяет анализировать (8.18) методом Ван-дер-Поля. Как и в предыдущем

примере будем искать решение в виде (8.5). С учетом (8.18) укороченные уравнения (8.6) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\bar{\tau}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi'x + a(1-x^2)\dot{x} + \sigma' \cos \tau) \sin \tau d\tau \\ \frac{d\bar{v}}{d\bar{\tau}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi'x + a(1-x^2)\dot{x} + \sigma' \cos \tau) \cos \tau d\tau \end{cases}.$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u^2-v^2) - \xi v = P(u,v) \\ \frac{dv}{d\tau} = v(1-u^2-v^2) - \xi u + \sigma = Q(u,v) \end{cases} \quad (8.19)$$

$$u = \bar{u}/2, \quad v = \bar{v}/2, \quad \sigma = \sigma'/2a, \quad \xi = \xi'/a, \quad \tau = a\bar{\tau}/2.$$

2. *Уравнение резонансной кривой.* Найдем состояния равновесия (u_0, v_0) системы (8.19). Они определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} u_0(1-u_0^2-v_0^2) - \xi v_0 = 0 \\ v_0(1-u_0^2-v_0^2) - \xi u_0 + \sigma = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

Введем переменную $\rho = u_0^2 + v_0^2$ – квадрат половины амплитуды установившихся колебаний. Умножим первое уравнение (8.20) на u_0 , второе – на v_0 и сложим. Получим

$$v_0 = -\rho(1-\rho)/\sigma. \quad (8.21)$$

Далее домножим первое уравнение (8.20) на $-v_0$, второе на u_0 и опять сложим, получим

$$u_0 = -\xi\rho/\sigma. \quad (8.22)$$

Возведем в квадрат (8.21), (8.22) и сложим их. В результате получим уравнение для "резонансной кривой":

$$\rho(1-\rho)^2 + \xi^2\rho = \sigma^2. \quad (8.23)$$

3. *Построение резонансных кривых.* Построим в плоскости (ξ, ρ) семейство графиков $\rho = \rho(\xi)$ для различных значений σ . Проанализируем его в зависимости от величины частотной расстройки ξ . Отметим следующие особенности (8.23): 1) кривые симметричны относительно оси ρ , т.к. не зависят от знака частотной расстройки; 2) кривые имеют неоднозначный характер, одному значению частотной расстройки из некоторой области

соответствует несколько значений ρ ; 3) при отсутствии внешнего воздействия ($\sigma^2 = 0$) кривая (8) на плоскости ξ, ρ распадается на две части. Одна из них (см. рис. 8.5) вырождается в точку с координатами $(1, 0)$, вторая – в прямую $\rho = 0$. Для малых σ^2 резонансные кривые по-прежнему будут состоять из двух пересекающихся частей. Первая напоминает эллипс с центром в точке $(1, 0)$ и приближенно описывается выражением $(1 - \rho)^2 + \xi^2 \rho = \sigma^2$. Вторая представляет собой гиперболу и приближенно описывается выражением $\rho = \sigma^2 / (1 + \xi^2)$. Дальнейший рост σ^2 приведет к увеличению размеров эллипсоидной кривой и подъему гиперболы; 4) при $\sigma^2 = 4/27$ произойдет слияние двух частей резонансной кривой (рис. 8.4, пунктирные линии) и образуется единая петлеобразная кривая. Точка смыкания лежит на оси ординат и соответствует значению $\rho = 1/3$ (рис. 8.6).

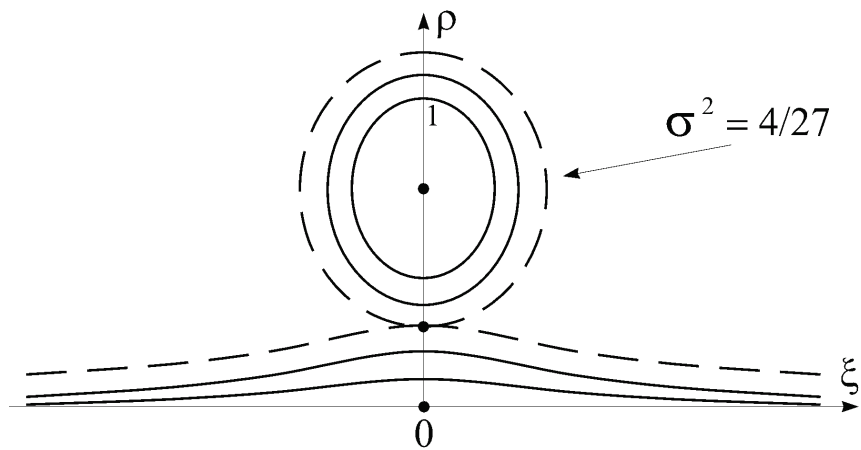


Рис. 8.5

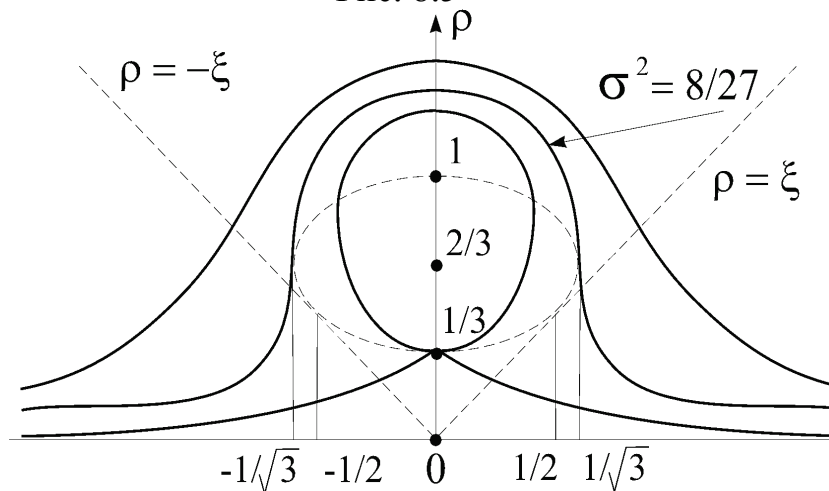


Рис. 8.6

4. *Исследование устойчивости ветвей резонансных кривых.* Линеаризуем (8.19) вблизи состояния равновесия (u_0, v_0) , получим характеристическое уравнение системы:

С учетом того, что $\rho = u_0^2 + v_0^2$, после несложных преобразований получим

Необходимое и достаточное условие устойчивости – положительность коэффициентов (8.25), т. е.

Для анализа типа особых точек необходимо составить дискриминант уравнения (8.26) $\Delta = (2\rho - 1)^2 - \xi^2 - (1 - \rho)(1 - 3\rho) = \rho^2 - \xi^2$ и проанализировать свободное слагаемое в (8.25) $C = (1 - \rho)(1 - 3\rho) + \xi^2$.

При $C < 0$ тип особой точки – седло. При $C > 0$, $\Delta > 0$ – устойчивый или неустойчивый узел. При $C > 0$, $\Delta < 0$ – устойчивый или неустойчивый фокус. Подробное разбиение плоскости (ξ, ρ) показано на рис. 8.7. Детальный анализ резонансной кривой подобной системы приведен в [1, 7].



Уравнение синхронизации

Будем искать установившиеся решение (8.17) в виде:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \psi_1(t)), \quad (8.27)$$

где U_1 , ψ – укороченные координаты. Получим систему укороченных уравнений во второй форме [1, 2, 7]

$$\begin{cases} T_I \frac{dU_I}{dt} + U_I = R_I I_a \\ T_I \frac{d\psi_I}{dt} U_I = -R_I I_p \end{cases}, \quad (8.28)$$

где I_a, I_p – амплитуды синфазной напряжению $u_I(t)$ и квадратурной составляющих тока первой гармоники, втекающего в LC -контур (включая ток внешнего источника); R_I – резонансное сопротивление контура, приведенное к управляющему входу транзистора; $T_I = \frac{2Q}{\omega_0}$ – постоянная времени LC -контура, обратная полосе прозрачности.

Пример 3. Найдем максимальную частоту входного воздействия, при которой возможна синхронизация генератора внешним сигналом.

Пусть $\tau_2 = \omega_2 t + \psi_2$ – полная фаза входного колебания, $\tau_1 = \omega_0 t + \psi_1(t)$ – полная фаза сигнала на выходе генератора. Введем новую переменную, равную разности полных фаз входного воздействия и напряжения генератора

$$\varphi(t) = \tau_2 - \tau_1 = (\omega_2 - \omega_0)t + \psi_2 - \psi_1(t) = \Omega_H t + \psi_2 - \psi_1(t). \quad (8.29)$$

Разность фаз $\varphi(t)$ полностью характеризует степень отличия частоты внешнего сигнала и сигнала генератора. В частности, режим синхронизации будет характеризоваться значением $\varphi(t) = \text{const}$, так как при равенстве частот двух сигналов разность их полных фаз будет постоянной величиной.

Учтем, что $\psi_2 = \text{const}$ не оказывает влияние на процессы в генераторе, возьмем производную от обеих частей (8.29) и подставим значение $\frac{d\psi_1(t)}{dt}$ из второго уравнения (8.28)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_n - \frac{d\psi_1(t)}{dt}. \quad (8.30)$$

Представим входной ток в следующем виде

$$i_2(t) = I_2 \sin \omega_2 t = I_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) = I_2 \cos \tau_2 = I_2 \cos(\tau_1 + \varphi) = I_2 \cos \tau_1 \cos \varphi - I_2 \sin \varphi \sin \tau_1. \quad (8.31)$$

Будем считать, что квадратурная составляющая тока первой гармоники на выходе транзистора отсутствует. В этом случае полная квадратурная составляющая определится выражением (8.31) и будет иметь вид $I_p = -I_2 \sin \varphi$. С учетом этого уравнение (8.30) примет окончательный вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_n - \frac{R_1 I_2}{T_1 U_1} \sin \varphi. \quad (8.32)$$

Уравнение (8.32) является *уравнением синхронизации* и полностью определяет процесс установления частоты в генераторе. Зависимость амплитуды колебаний генератора U_1 от его текущего состояния (первое уравнение укороченной системы (8.28)) значительно затрудняет точный анализ решения (8.32). Чтобы упростить задачу, сделаем предположение, что изменения амплитуды незначительны, что вполне соответствует действительности при небольшом входном воздействии. В этом случае коэффициент при $\sin \varphi$ будет постоянным и уравнение (8.32) принимает окончательный вид известного уравнения фазовой синхронизации первого порядка (уравнения бесфильтровой системы фазовой синхронизации) [7]

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_n - \Omega_y \sin \varphi, \quad (8.33)$$

где через $\Omega_y = \frac{R_1 I_2}{T_1 U_1}$ обозначена по аналогии с системами фазовой синхронизации полоса удержания, физический смысл которой состоит в максимальных расстройках по частоте, которые способна обрабатывать система.

Проанализируем возможные режимы (8.33), для этого воспользуемся графическим построением решения на плоскости $\frac{d\varphi}{dt}, \varphi$. Для положительной расстройки Ω_n такое решение приведено на рис. 8.8.

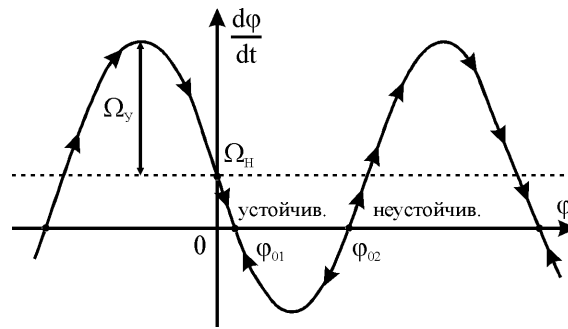


Рис. 8.8

Точки пересечения построенной кривой оси абсцисс соответствуют равновесным состояниям. В соответствии с (8.33) данные точки можно найти из уравнения равновесных состояний

$$\sin \varphi_0 = \frac{\Omega_H}{\Omega_y}, \quad (8.34)$$

откуда

$$\varphi_{01} = \arcsin \frac{\Omega_H}{\Omega_y} \pm 2\pi n, \varphi_{02} = \pi - \arcsin \frac{\Omega_H}{\Omega_y} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.35)$$

Согласно (8.34), состояние равновесия существует при условии

$$\left| \frac{\Omega_H}{\Omega_y} \right| \leq 1, \quad (8.36)$$

что подтверждает физический смысл полосы удержания Ω_y , определяющей максимальные отрабатываемые системой частотные расстройки.

Рассмотрим вопрос локальной устойчивости равновесных состояний. Для этого можно линеаризовать уравнение (8.33) в окрестности точек $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ и по стандартной схеме исследовать устойчивость нулевого решения или воспользоваться графическим решением (рис. 8.8). После несложного анализа получим, что точка φ_{01} будет всегда устойчивой, а точка φ_{02} — неустойчивой.

Далее, анализируя графическое решение, ответим на вопрос об устойчивости в целом состояния синхронизма. Легко заметить, при выполнении условия (8.36), где бы ни находилась система в начальный момент времени, рано или поздно она

окажется в окрестности устойчивого равновесного состояния. Это означает, что оно обладает устойчивостью в целом. В этом случае полоса захватывания определится следующим равенством

$$2\Omega_z = 2\Omega_y = \frac{2R_1 I_2}{T_1 U_1}. \quad (8.37)$$

Путем несложных преобразований (8.37) может быть сведено к выражению:

$$2\Omega_z = \frac{\omega_0}{Q} \frac{U_2}{U_1}. \quad (8.38)$$

Амплитуду U_1 можно получить из первого уравнения системы (8.28). Однако учитывая ее незначительное изменение при малых входных воздействиях, для расчетов можно ограничиться значением амплитуды колебаний автономного генератора.

8.3. Задачи

Задание: Построить резонансные кривые – зависимость амплитуды установившихся колебаний от относительной расстройки ξ . Провести их разбиение на ветви, соответствующие различным типам состояния равновесия. Считать, что дифференцирование ведется по безразмерному времени $\tau = \Omega t$, Ω – частота входного воздействия, ω_0 – частота собственных колебаний системы, $\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$ – относительная расстройка, $\xi, \sigma, \alpha, \beta > 0$ и $\xi, \sigma, \alpha, \beta \ll 1$.

1. $\ddot{x} + (1 - \xi)x = -\beta x^3 + \sigma \cos(\tau)$; 2. $\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + (1 - \xi)x = \sigma \cos(\tau)$;
3. $\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + (1 - \xi)x + \beta x^3 = \sigma \cos(\tau)$;
4. $\ddot{x} - \alpha(1 - x^2 + \beta x^4)\dot{x} + (1 - \xi)x = \sigma \cos(\tau)$;
5. $\ddot{x} + (1 - \xi)x = -\alpha \dot{x} - \beta x^3 + \sigma \cos(\tau)$; 6. Получить резонансную кривую (АЧХ) колебательного контура, с нелинейной индуктивностью. Считать что потокосцепление связано с током через индуктивность по формуле $f(\Phi) = \Phi + \alpha \Phi^3$, потери в контуре малы ($\delta = R\sqrt{C/L} \ll 1$), частота внешней силы близка к собственной частоте контура (рис. 8.9).

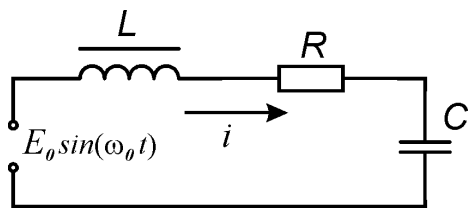


Рис. 8.9

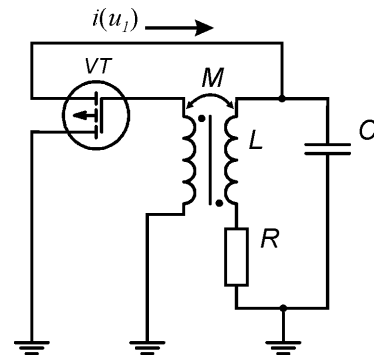


Рис. 8.10

7. Получить резонансную кривую (АЧХ) колебательного контура, описанного в задаче 8.6. Полагать, что входное воздействие близко к утроенной собственной частоте контура $3\omega_0 \approx \omega_2$; **8.** Получить резонансную кривую (АЧХ) колебательного контура, описанного в задаче 8.6. Полагать, что входное воздействие близко к собственной частоте контура, деленной на три $\omega_0 \approx 3\omega_2$; **9.** Построить резонансные кривые, исследовать устойчивость установившихся режимов для LC генератора (рис. 8.10). Считать, что в рабочей точке транзистор имеет характеристику $i(u) = Su - \eta u^2 - \beta u^3$ (u – напряжение на затворе), а частота внешнего воздействия близка к половине частоты собственных колебаний генератора $\omega_0 \approx 2\omega_2$; **10.** Построить резонансные кривые, исследовать устойчивость установившихся режимов для LC генератора (рис. 8.8). Считать, что в рабочей точке транзистор имеет характеристику $i(u) = Su - \eta u^2 - \beta u^3$ (u – напряжение на затворе), а частота внешнего воздействия близка к удвоенной частоте собственных колебаний генератора $2\omega_0 \approx \omega_2$; **11.** Построить векторную диаграмму напряжений и токов синхронизируемого генератора (рис. 8.4) при условии $\omega_2 > \omega_0$; **12.** Построить векторную диаграмму напряжений и токов синхронизируемого генератора (рис. 8.4) при условии $\omega_2 < \omega_0$; **13.** Построить векторную диаграмму напряжений и токов синхронизируемого генератора (рис. 8.4) при условии $\omega_2 > \omega_0$ и $\left| \frac{\Omega_n}{\Omega_y} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; **14.** Построить векторную диаграмму напряжений и токов синхронизируемого гене-

ратора (рис. 8.4) при условии $\omega_2 < \omega_0$ и $\left| \frac{\Omega_n}{\Omega_y} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; **15.** Получить выражение для полосы захвата, используя векторные диаграммы напряжений и токов синхронизируемого генератора.

9. Параметрические колебания

9.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим динамическую систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t), \quad (9.1)$$

где $a(t)$ – коэффициенты, зависящие от времени и описывающие изменение параметров системы. Динамическая система вида (9.1) называется параметрической. Если параметры $a_n(t)$ периодические, с некоторым периодом T , то в системе возможно возникновение колебательных движений. Такое явление называется *параметрическим возбуждением колебаний*, а сами колебания – *параметрическими*.

Наиболее распространенными и изученными моделями параметрических систем являются системы вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad (9.2)$$

где $p(t)$ – периодическая функция времени. Такое уравнение получило название *уравнение Хилла*. Частный случай (9.2), когда $p(t)$ изменяется по гармоническому закону:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + m \cos(\omega_H t))x = 0, \quad (9.3)$$

называется *уравнением Матвея*.

Если коэффициенты (9.1) периодические периода T , то в общем виде можно доказать, что (9.1) имеет решение, которое воспроизводит себя через период T с точностью до некоторого постоянного множителя ρ , т. е.:

$$x_j(t + T) = \rho x_j(t), j = 1, \dots, n \quad (9.4)$$

Для системы n -го порядка существует n различных ρ_n , которые определяются из условия периодичности (9.4) и называются *характеристическими числами* [1]. Общее решение (9.1) при этом имеет вид:

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^n C_k \Phi_{jk} e^{\lambda_k t}, j=1, \dots, n, \quad (9.5)$$

где C_k – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями; Φ_{jk} – периодические функции периода T ; λ_k – характеристические показатели, связанные с *характеристическими числами* ρ_k следующим образом:

$$\rho_k = e^{\lambda_k T}. \quad (9.6)$$

Решения вида (9.5) называются *решениями Флоке*.

Рассмотрим подробнее основные свойства параметрических систем на примере колебательного контура с переменной емкостью.

Качественный анализ параметрических колебаний в контуре (накачка энергии в контур)

Рассмотрим колебательный контур без потерь, емкость которого модулируется прямоугольными импульсами (рис 9.1). Ограничимся случаем, когда отклонение емкости от среднего значения мало:

$$\Delta C / C_0 \ll 1. \quad (9.7)$$

Будем считать, что емкость меняется мгновенно и соответственно собственная частота колебаний в контуре также изменяется мгновенно от ω_{\max} до ω_{\min} :

$$\omega_{\max} = \omega_p + \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_0 - \Delta C)}} \approx \omega_p \left(1 + \frac{C_0}{2\Delta C} \right) \quad (9.8)$$

$$\omega_{\min} = \omega_p + \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_0 + \Delta C)}} \approx \omega_p \left(1 - \frac{C_0}{2\Delta C} \right).$$

Здесь $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ – резонансная частота контура с постоянной емкостью. Введем обозначения: $\tau = \omega_p t$ – безразмерное время; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C_0}}$ – характеристическое сопротивление; $u_\rho = \frac{u}{\rho}$ – нормированное напряжение.

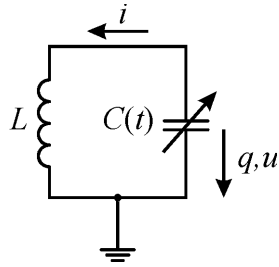


Рис. 9.1

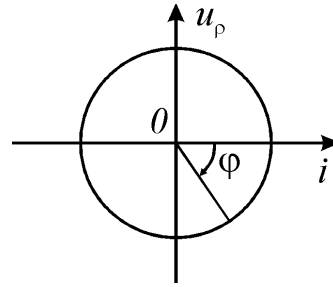


Рис. 9.2

В указанных обозначениях колебания в контуре без потерь, при постоянном значении емкости, описываются уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{du_{\rho}}{d\tau} = -i \\ \frac{di}{d\tau} = u_{\rho} \end{cases}. \quad (9.9)$$

Фазовое пространство системы (9.9) представляет собой набор концентрических окружностей, по одной из которых движется изображающая точка (рис. 9.2). Амплитуда колебаний зависит от энергии, запасенной в контуре:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (9.10)$$

U, I – значения амплитуды колебаний напряжения и тока в контуре. Движение происходит по часовой стрелке с угловой скоростью равной 1.

Для контура, емкость которого изменяется по прямоугольному закону, на протяжении каждого полупериода постоянства емкости справедливы формулы (9.9) и фазовый портрет (рис. 9.2).

Т. к. мы считаем изменение емкости мгновенным, то заряд q на конденсаторе и ток i через индуктивность не успевают измениться. Заряд и напряжение на конденсаторе связаны соотношением $q = Cu$. Таким образом, при мгновенном изменении емкости C и неизменном значении заряда q происходит мгновенное изменение напряжения u на конденсаторе, и фазовый портрет системы деформируется по оси u_{ρ} . При возрастании емкости на $2\Delta C$ получим уменьшение координаты u_{ρ} :

$$\Delta u_{\rho+} = \frac{q}{\rho(C_0 + \Delta C)} - \frac{q}{\rho(C_0 - \Delta C)} \approx -\frac{q}{\rho C_0} \left(\frac{\Delta C}{C_0} \right) = -u_{\rho} \left(\frac{\Delta C}{C_0} \right). \quad (9.11)$$

Соответственно при уменьшении емкости на $2\Delta C$ будет справедливо:

$$\Delta u_{\rho-} = \frac{q}{\rho(C_0 - \Delta C)} - \frac{q}{\rho(C_0 + \Delta C)} \approx \frac{q}{\rho C_0} \left(\frac{\Delta C}{C_0} \right) = u_{\rho} \left(\frac{\Delta C}{C_0} \right). \quad (9.12)$$

В (9.11) и (9.12) напряжение u_{ρ} равно мгновенному значению напряжения в момент соответствующего скачка емкости.

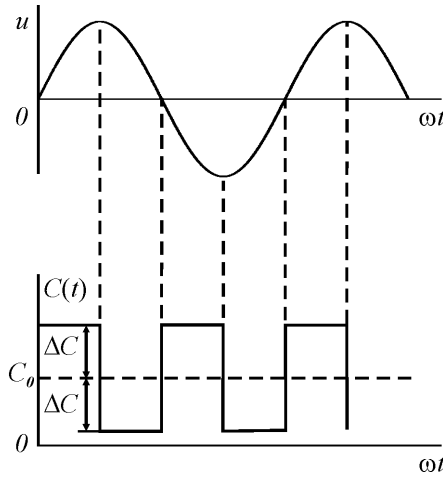


Рис. 9.3

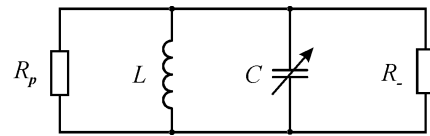


Рис. 9.4

Пусть отрицательные скачки емкости совпадают по фазе с максимумом и минимумом напряжения в контуре, а положительные происходят, когда напряжение в контуре равно нулю (рис. 9.3). В этом случае, согласно (9.12), при каждом отрицательном скачке емкости происходит увеличение координаты u_{ρ} на величину $\Delta u_{\rho-} = u_{\rho} \Delta C / C_0$. При положительных скачках ничего не происходит, т. к. в эти моменты $u_{\rho} = 0$ и, согласно (9.11), $\Delta u_{\rho+} = 0$.

За один период колебаний происходит приращение амплитуды тока на величину:

$$\Delta I = 2I \frac{\Delta C}{C_0}. \quad (9.13)$$

Это соответствует увеличению энергии в контуре на величину:

$$\Delta I = \frac{L(I + 2I \Delta C / C_0)^2}{2} - \frac{LI^2}{2} = 4W \frac{\Delta C}{C_0}. \quad (9.14)$$

Таким образом, за счет модуляции емкости в контур *накачивается энергия* и происходит возрастание амплитуды

колебаний. Это явление получило название *параметрический резонанс*. Частота модуляции емкости при этом в два раза больше частоты собственных колебаний. Эту частоту называют *частотой накачки*.

Параметрические колебания в контуре с потерями (модуляция прямоугольными импульсами)

Если в контуре с постоянной емкостью есть затухание, то амплитуда тока за каждый период уменьшается на величину:

$$\Delta_r I = \frac{\pi}{Q} I, \quad (9.15)$$

где $Q = \rho/r$ – добротность контура. За счет рассмотренной ранее модуляции емкости в контур поступает энергия, увеличивающая амплитуду колебаний. Итоговое изменение амплитуды за период определяется следующим образом:

$$\Delta I = \Delta_c I - \Delta_r I = \left(\frac{2\Delta C}{C_0} - \frac{\pi}{Q} \right) I = \frac{\pi}{Q_{\text{ЭК}}} I, \quad (9.16)$$

где $Q_{\text{ЭК}}$ – эквивалентная добротность, учитывающая модуляцию емкости:

$$Q_{\text{ЭК}} = \frac{Q}{1 - \frac{2\Delta C}{\pi C_0} Q}. \quad (9.17)$$

Увеличение добротности контура при параметрическом изменении емкости можно моделировать, заменяя переменный конденсатор параллельным соединением постоянной емкости C_0 и отрицательного сопротивления R (рис. 9.4).

Значение R можно получить, используя следующие соотношения:

$$\frac{R_p R_-}{R_p + R_-} = R_{\text{ЭК}} = \rho Q_{\text{ЭК}} = \frac{\rho Q}{1 - \frac{2\Delta C}{\pi C_0} Q} = \frac{R_p}{1 - \frac{2\Delta C}{\pi C_0} Q}. \quad (9.18)$$

Разделим числитель и знаменатель в (9.18) на R и получим:

$$R_- = -\frac{R_p}{Q \frac{2\Delta C}{\pi C_0}} = \rho \frac{1}{\frac{2\Delta C}{\pi C_0}}. \quad (9.19)$$

Таким образом, параметрическое изменение емкости позволяет *увеличить* коэффициент усиления (при соответствующем соотношении фаз колебаний в контуре и изменения параметра).

Проанализируем выражение (9.16). До тех пор пока $\Delta I = \Delta_c I - \Delta_r I > 0$, свободные колебания в контуре затухают и контур служит параметрическим усилителем. При $\Delta I = \Delta_c I - \Delta_r I < 0$ амплитуда колебаний будет возрастать, т. к. поступающая в контур энергия превысит потери, т. е. будет наблюдаться *параметрический резонанс*. Из (9.16) следует, что параметрический резонанс при модуляции емкости прямоугольными импульсами наступает при выполнении условия:

$$m > m_{кр} = \frac{\pi}{2Q}, \quad (9.20)$$

где $m = \Delta C/C$ – глубина модуляции.

Параметрические колебания в контуре с потерями (гармоническая модуляция емкости)

На практике чаще всего изменение емкости происходит по закону, близкому к гармоническому. Очевидно, что наиболее выгодным является случай, когда наиболее быстрое уменьшение емкости происходит при максимальной амплитуде напряжения, а наиболее быстрое увеличение, когда напряжение равно нулю.

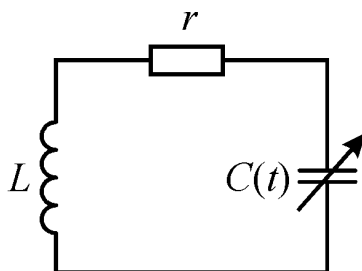


Рис. 9.5

Рассмотрим вначале случай, когда частота изменения емкости ровно в два раза больше частоты колебаний в контуре (рис. 9.5). Пусть в контуре протекает ток:

$$i(t) = I \cos \omega t, \quad (9.21)$$

а емкость зависит от времени следующим образом:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 - m \sin(2\omega t + \psi_0)}, \quad (9.22)$$

где ψ_0 – начальная фаза. Найдем потери, расходуемые на r и $C(t)$. Заряд на емкости равен:

$$q(t) = \int i(t) dt = \frac{I}{\omega} \sin(\omega t), \quad (9.23)$$

Напряжение на емкости, согласно (9.22) и (9.23),

$$u(t) = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{1}{\omega C_0} \sin(\omega t) (1 - m \sin(2\omega t + \psi_0)). \quad (9.24)$$

Учтем, что $\frac{1}{\omega C_0} = \rho$ – характеристическое сопротивление контура, и разложим произведение синусов. В итоге получим:

$$u(t) = I\rho \sin(\omega t) + I\rho \frac{m}{2} \cos(3\omega t + \psi_0) - I\rho \frac{m}{2} \cos(\omega t + \psi_0). \quad (9.25)$$

Средняя мощность, расходуемая в цепи за период $T=2\pi/\omega$, равна:

$$P = \frac{1}{2} I^2 r + \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt. \quad (9.26)$$

Подставим в (9.26) выражения для тока и напряжения (9.21) и (9.25) и получим:

$$P = \frac{I^2}{2} \left(r - \frac{m\rho}{2} \cos(\psi_0) \right) = P_0 \left(1 - \frac{mQ}{2} \cos(\psi_0) \right), \quad (9.27)$$

где P_0 – потери энергии за период в контуре с постоянной емкостью. Из (9.27) следует, что мощность, выделяемая током, и, следовательно, потери энергии зависят от знака $\cos(\psi_0)$. Наименьшие потери достигаются при $\cos(\psi_0) = 1$ ($\psi_0 = 0$)

$$P_{\min} = P_0 (1 - mQ/2). \quad (9.28)$$

В этом случае за счет изменения емкости в контур поступает энергия. При $\cos(\psi_0) = -1$ ($\psi_0 = \pi$) потери энергии максимальны – параметрическая модуляция забирает энергию. При $\cos(\psi_0) = 0$ ($\psi_0 = \pi/2$) потери и поступление энергии в течение периода за счет изменения емкости равны.

Так же, как и ранее, можно смоделировать параметрическую емкость конденсатором с постоянной емкостью и отрицательным сопротивлением $r = m\rho \cos(\psi_0)/2$.

Согласно (9.27), (9.28), при $\cos(\psi_0) = 1$ и выполнении условия

$$m > m_{KP} = \frac{2}{Q}, \quad (9.29)$$

поступающая в контур энергия превысит потери, т. е. (9.29) определяет границу параметрического резонанса. Если сравнить это выражение с (9.20), то можно убедиться, что замена модуляции прямоугольными импульсами на гармоническую приводит к увеличению m_{KP} .

Параметрическое усиление колебаний

Т. к. параметрическая модуляция емкости контура может привести к уменьшению потерь (увеличению добротности), то параметрический контур можно использовать в качестве усилителя. Рассмотрим параметрический контур с внешним воздействием (рис. 9.6). Сопротивление R_p учитывает все потери. Входное воздействие:

$$e(t) = E \cos(\omega_{BX} t) \quad (9.30)$$

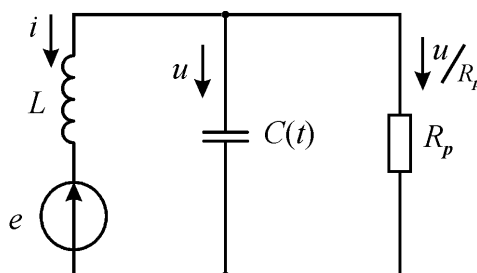


Рис. 9.6

Пусть емкость изменяется по закону:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \sin(2\omega_H t + \psi_0)}.$$

Коэффициент модуляции считаем малым ($m \ll 1$). Обозначим $\omega_p^2 = 1/\sqrt{LC_0}$ – резонансную частоту контура с постоянной емкостью. Будем считать, что частота накачки примерно равна удвоенной частоте входного сигнала $\omega_H \approx 2\omega_{BX}$.

$$\xi = (\omega_{BX}^2 - \omega_p^2)/\omega_{BX}^2 \ll 1.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие колебания в контуре, имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -i - \frac{u}{R_p} = -i - \frac{q}{R_p C(t)} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{u - e(t)}{L} = \frac{q}{LC(t)} - \frac{e(t)}{L}\end{aligned}\quad (9.31)$$

Учтем, что $\frac{1}{R_p C_0} = \frac{\omega_p}{Q}$,

$$\frac{1}{R_p C(t)} = \frac{1}{R_p C_0} (1 + m \sin(2\omega_H t + \psi_0)) = \frac{\omega_p}{Q} - \frac{m\omega_p}{Q} \sin(2\omega_H t + \psi_0) \approx \frac{\omega_p}{Q}.$$

Введем обозначения $\psi(t) = (\omega_H - 2\omega_{\text{вх}})t - \psi_0$, $\sigma = E/L\omega_{\text{вх}}^2$. Т. к. колебания в контуре происходят на частоте внешнего воздействия, перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega_{\text{вх}} t$.

В итоге получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + q = -\frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \xi q - m q \sin(2\tau + \psi(\tau)) + \sigma \cos(\tau), \quad (9.32)$$

Правую часть (9.32) можно представить в виде ограниченной функции с малым параметром $\mu F(q, \dot{q}, \tau)$, следовательно, (9.32) описывает систему, близкую к консервативной. Применим для анализа метод медленно меняющихся амплитуд. Будем искать решение в виде:

$$q = R \cos(\tau + \theta), \quad \dot{q} = -R \sin(\tau + \theta). \quad (9.33)$$

Учтем, что $\psi(\tau)$ является медленно меняющейся (т. к. $\omega_H \approx 2\omega_{\text{вх}}$, на периоде можно положить $\psi(\tau) = \text{const}$), и после несложных расчетов получим укороченные уравнения:

$$2 \frac{dR}{d\tau} = R \left(-\frac{1}{Q} + \frac{m}{2} \cos(2\theta - \psi(\tau)) \right) - \sigma \sin(\theta) \quad (9.34)$$

$$2 \frac{d\theta}{d\tau} = -\xi - \frac{m}{2} \sin(2\theta - \psi(\tau)) - \frac{\sigma}{R} \cos(\theta)$$

Из первого уравнения (9.34) можно получить эквивалентную добротность контура:

$$\frac{1}{Q_{\text{эк}}} = \frac{1}{Q} - \frac{m}{2} \cos(2\theta - \psi(\tau)). \quad (9.35)$$

Аналогично рассмотренному ранее случаю (смотри выражение 9.27), добротность зависит от фазовых соотношений и, более того, может меняться с течением времени в зависимости от $\psi(\tau)$. Возможны два режима: синхронный и асинхронный.

Синхронный режим

В синхронном режиме частота накачки равна удвоенной частоте входного сигнала $\omega_H = 2\omega_{вх}$. Вследствие этого $\psi(\tau) = \psi_0 = \text{const}$ и (9.35) принимает вид:

$$\frac{1}{Q_{ЭК}} = \frac{1}{Q} - \frac{m}{2} \cos(2\theta + \psi_0). \quad (9.36)$$

Эквивалентная добротность зависит от глубины модуляции m и, в зависимости от значения $\cos(2\theta + \psi_0)$ может принимать значения как более, так и менее добротности контура с постоянной емкостью. Максимального значения $Q_{ЭК}$ достигает при $\cos(2\theta + \psi_0) = 1$:

$$\frac{1}{Q_{ЭК}} = \frac{1}{Q} - \frac{m}{2}. \quad (9.37)$$

Это выражение аналогично формуле (9.29), полученной при качественном анализе энергетических соотношений в контуре. Увеличение добротности можно моделировать, заменяя переменный конденсатор параллельным соединением постоянной емкости C_0 и отрицательного сопротивления R_- . Значение R_- можно получить, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{R_p R_-}{R_p + R_-} = R_{ЭК} = \rho Q_{ЭК} = \frac{2\rho Q}{2 - mQ} = \frac{R_p}{1 - \frac{mQ}{2}}, \text{ отсюда получим} \\ R_- = -\frac{2R_p}{mQ} = -\frac{2\rho}{m} = -\frac{2}{mC_0\omega_p}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Очевидно, что при выполнении условия $|R_-| > |R_p|$ потери энергии меньше энергии, накачиваемой в контур. Система становится неустойчивой, и возникает явление параметрического резонанса.

Прирост коэффициента усиления можно выразить через добротности:

$$K_H = \frac{Q_{ЭК}}{Q}. \quad (9.39)$$

Выражение (9.39) определяет, во сколько раз увеличивается коэффициент усиления контура при параметрической модуляции в синхронном режиме.

Асинхронный режим

В асинхронном режиме частота накачки не равна удвоенной частоте входного сигнала $2\omega_{\text{вх}} = \omega_H + \Delta\omega$. Вследствие этого фаза

$$\psi(t) = (\omega_H - 2\omega_{\text{вх}})t - \psi_0 = \Delta\omega t - \psi_0.$$

непрерывно меняется. Соответственно $Q_{\text{эфф}}$ модулируется с частотой $\Delta\omega$

$$\frac{1}{Q_{\text{ЭК}}} = \frac{1}{Q} - \frac{m}{2} \cos\left(2\theta - \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{вх}}} \tau + \psi_0\right). \quad (9.40)$$

В интервалы времени, когда $\cos\left(2\theta - \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{вх}}} \tau + \psi_0\right) < 0$, эффективная добротность уменьшается.

Параметрическая генерация колебаний

Рассмотрим колебательный контур с переменной емкостью (рис. 9.7).

Сопротивление R_p учитывает все потери. Пусть емкость изменяется по закону:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \sin(2\omega_H t + \psi_0)}.$$

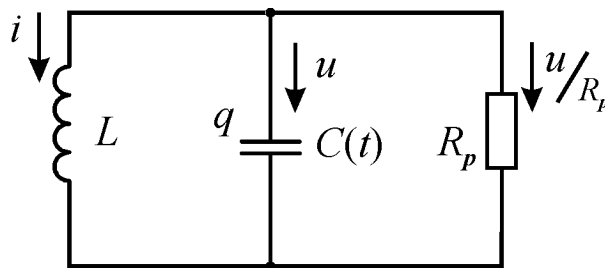


Рис. 9.7

Коэффициент модуляции считаем малым ($m \ll 1$). Обозначим $\omega_p^2 = 1/\sqrt{LC_0}$ резонансную частоту контура с постоянной емкостью. Будем считать, что частота накачки примерно равна удвоенной резонансной частоте $\omega_H \approx 2\omega_p$. Введем обозначение $\omega_2 = \omega_H/2$ и определим относительную частотную расстройку в виде

$$\xi = \frac{\omega_2}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_p^2}{\omega_p \omega_2} \approx \frac{2}{\omega_p} (\omega_2 - \omega_p) \ll 1. \quad (9.41)$$

Дифференциальные уравнения, описывающие колебания в контуре, имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -i - \frac{u}{R_p} = -i - \frac{q}{R_p C(t)} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{u}{L} = \frac{q}{LC(t)}.\end{aligned}\tag{9.42}$$

Учтем, что $\frac{1}{R_p C_0} = \frac{\omega_p}{Q}$,

$$\frac{q}{R_p C(t)} = \frac{q}{R_p C_0} (1 + m \sin(2\omega_H t)) = \frac{\omega_p}{Q} - \frac{m\omega_p}{Q} \sin(2\omega_H t) \approx \frac{\omega_p}{Q}.$$

Перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega_H t$.

В итоге получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + q = -\frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \xi q - m q \sin(2\tau).\tag{9.43}$$

Правую часть (9.43) можно представить в виде ограниченной функции с малым параметром $\mu F(q, \dot{q}, \tau)$, следовательно, для анализа этого уравнения применим метод Ван-дер-Поля. Будем искать решение в виде:

$$q = R \cos(\tau + \theta), \quad \dot{q} = -R \sin(\tau + \theta).\tag{9.44}$$

После несложных расчетов получим укороченные уравнения:

$$2 \frac{dR}{d\tau} = -\frac{R}{Q} + \frac{Rm}{2} \cos(2\theta)\tag{9.45}$$

$$2 \frac{d\theta}{d\tau} = -\xi - \frac{m}{2} \sin(2\theta).$$

Качественный анализ (9.45) показывает, что для возбуждения колебаний в контуре за счет параметрического изменения емкости должно выполняться условие:

$$m > \frac{2}{Q} \sqrt{1 + Q^2 \xi^2}.\tag{9.46}$$

При точной настройке частоты накачки на резонансную частоту контура $\omega_H = 2\omega_p$ выражение (9.46) переходит в (9.29), полученное ранее при анализе энергетических соотношений в контуре.

9.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Пусть дан параметрический усилитель, эквивалентная схема которого приведена на рис. 9.8. Характеристика

нелинейной емкости параметрического усилителя показана на рис. 9.9. Напряжение смещения, определяющее положение рабочей точки на характеристике $E_c = -2\text{В}$. Амплитуда гармонического напряжения накачки $U_H = 1\text{В}$. Данные колебательного контура: резонансная частота $f_p = 10^7\text{Гц}$; индуктивность $L = 2.5\text{МкГн}$; внутренняя проводимость источника сигнала $G_i = 3.75 \cdot 10^{-2}\text{Ом}^{-1}$. Проверьте устойчивость усилителя при шунтировании контура нагрузочной проводимостью $G_H = G_i$.

Решение: 1. Из рисунка следует, что амплитуда изменения емкости под воздействием напряжения накачки при $E_c = -2\text{В}$ равна $\Delta C = 4\text{пФ}$; 2. Среднее значение полной емкости контура $C_0 = 1/L\omega_p^2 \approx 0.1 \cdot 10^{-9}\text{Ф} = 100\text{пФ}$; 3. Глубина модуляции емкости $m = \Delta C/C = 0.04$; 4. Согласно (9.38), отрицательная проводимость, учитывающая влияние параметрической модуляции, $G_- = \frac{1}{R_-} = \frac{mC_0\omega_p}{2} = 1.25 \cdot 10^{-4}\text{Ом}^{-1}$; 5. Суммарная проводимость источника сигнала и нагрузки равна $G_H + G_i = 2G_H = 7.5 \cdot 10^{-2}\text{Ом}^{-1}$. Т. к. $2G_H > G_-$, параметрический усилитель устойчив.

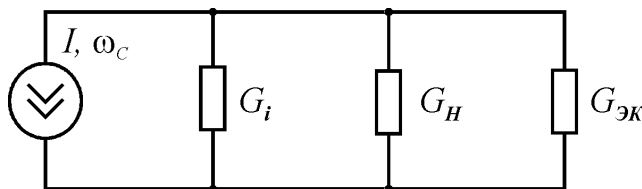


Рис. 9.8

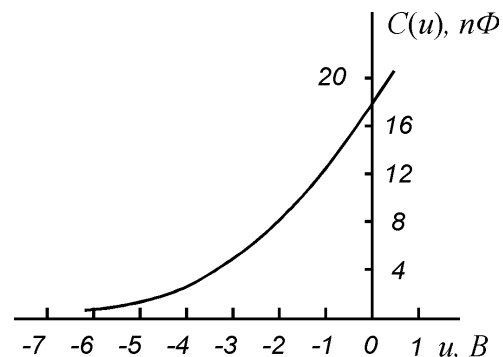


Рис. 9.9

Пример 2. В колебательном контуре параметрического генератора емкость $C(t)$ изменяется по гармоническому закону с частотой $f_H = 2 \cdot 10^7\text{Гц}$. Среднее значение емкости $C_0 = 100\text{пФ}$. Сопротивление потерь контура $R = 20\text{Ом}$. Определить минимальное значение глубины модуляции m_{\min} , при котором возможна параметрическая генерация, для точной настройки контура на частоту $f_H/2$ и при расстройке 50Гц .

Решение: 1. Минимальное значение коэффициента модуляции определим из (9.46): $m_{\min} = \frac{2}{Q} \sqrt{1 + Q^2 \xi^2}$;

2. $Q = \frac{1}{\omega_p r C_0} = \frac{1}{2\pi f_p r C_0} \approx 80$ – добротность контура; 3. При точной настройке $f_H = f_H/2$ и $m_{\min} = 2/Q = 0.025$; 4. При расстройке частот вычисление дает результат $m_{\min} = 0.032$.

9.3. Задачи

1. Определить полосу пропускания контура параметрического усилителя при наличии и отсутствии напряжения накачки. Коэффициент модуляции емкости $m = 0.05$, общая проводимость потерь контура $G_H = G_i = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$, резонансная частота $\omega_p = 2 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$, емкость контура в отсутствие напряжения накачки $C_0 = 50 \text{ пФ}$. Усилитель работает в синхронном режиме.

2. Определить коэффициент усиления параметрического усилителя при следующих данных: проводимость нагрузки в сумме с проводимостью потерь контура составляют $G = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$, контур настроен на частоту $\omega_p = 2 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$, емкость контура $C_0 = 300 \text{ пФ}$, а коэффициент модуляции емкости $m = 0.05$.

3. Одноконтурный параметрический усилитель представлен эквивалентной схемой (рис. 9.8), G_i , G_H – проводимости, учитывающие источник сигнала и потери в контуре усилителя, G_c – проводимость, учитывающая влияние накачки. Частота усиливаемого сигнала $f_c = 1.0 \text{ МГц}$, внутренняя проводимость источника сигнала и проводимость нагрузки равны $G_H = G_i = 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$. Емкость контура в отсутствие напряжения накачки $C_0 = 500 \text{ пФ}$.

Найти критическое значение коэффициента модуляции емкости, при достижении которого усилитель переходит в режим генерации.

4. Емкость колебательного контура параметрического усилителя изменяется по закону; добротность контура в отсутствие накачки $Q = 80$, контур настроен на частоту $\omega_p = \omega_H/2$. Определить прирост коэффициента усиления за счет параметрической модуляции.

5. Параметры колебательного контура параметрического усилителя следующие: добротность $Q = 90$, емкость $C_0 = 250$ пФ, индуктивность $L = 150$ мкГн. Частота накачки $f_H = 2f_p$, где f_p – резонансная частота контура.

Определить максимально допустимую амплитуду ΔC вариации емкости, при которой усилитель сохраняет устойчивость.

6. В одноконтурном параметрическом генераторе, работающем на варикапе, характеристика которого приведена на рис. 9.10, напряжение смещения равно $E_{см} = -2$ В. Параметры колебательного контура: $L = 2 \cdot 10^{-6}$ Гн, $C = 190$ пФ, сопротивление потерь $R_k = 1$ Ом. Определить критическое значение коэффициента модуляции емкости $m_{Cкр}$ и амплитуду напряжения генератора накачки.

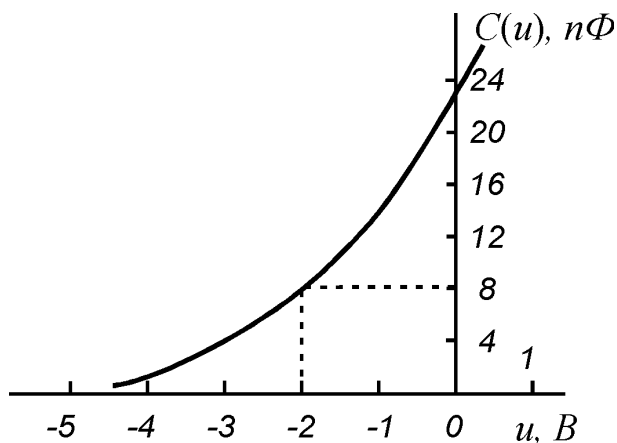


Рис. 9.10

7. Контур параметрического генератора, работающего в синхронном режиме, настроен на частоту $\omega_p = \omega_H/2$ и состоит из индуктивности $L = 100 \cdot 10^{-6}$ Гн, параметрической емкости $C(t) = 10^3 \cdot (1 + m_c \cdot \cos \omega_H t)$, пФ, и активного сопротивления потерь $R_k = 2$ Ом. Определить критическое значение коэффициента модуляции емкости.

8. Определить диапазон значений коэффициента модуляции параметра реактивного элемента, при котором возможно возбуждение колебаний в параметрическом контуре, настроенном на частоту $\omega_p = \omega_H/2$. Задана добротность контура $Q = 100$.

Список литературы

1. Горяченко, В. Д. Элементы теории колебаний / В. Д. Горяченко. – М.: Высшая школа, 2001. – 396 с.
2. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Анищенко, В. С. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова. – М.: Интеллект, 2009. – 312 с.
4. Трубецков, Д. И. Линейные колебания и волны: учеб. пособие для вузов / Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнев. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
5. Кузнецов, А. П. Линейные колебания и волны: сб. задач / А. П. Кузнецов и др. – М.: Физматлит, 2001. – 128с.
6. Сборник задач по теории колебаний / под ред. Л. В. Постникова. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. LC-генератор при периодическом внешнем воздействии: метод. указания / сост. Л. Н. Казаков. – Ярославль: ЯрГУ, 1998. – 28 с.
8. Резонанс в колебательной системе с нелинейной восстанавливающей силой: метод. указания / сост. Л. Н. Казаков. – Ярославль: ЯрГУ, 1998. – 19 с.

Приложение

Прямое преобразование Лапласа для некоторых элементарных функций

Наименование	Оригинал	Изображение Лапласа
δ -функция	$\delta(t)$	1
Идеальное запаздывание	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$
Единичная функция	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
Степенная функция	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p + \alpha}$
Экспонента со смещением	$\frac{1}{a}(1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
Синусоида	$\sin(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
Косинусоида	$\cos(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

Оглавление

Предисловие	3
1. Способы математического описания колебательных систем.....	3
1.1. Основные теоретические сведения	3
1.2. Примеры решения типовых задач.....	5
1.3. Задачи	8
2. Исследование устойчивости состояний равновесия вторым методом Ляпунова	10
2.1. Основные теоретические сведения	10
2.2. Примеры решения типовых задач.....	15
2.3. Задачи	20
3. Исследование устойчивости динамических систем по первому приближению	20
3.1. Основные теоретические сведения	20
3.2. Примеры решения типовых задач.....	23
3.3. Задачи	24
4. Качественное исследование колебательных систем на фазовой плоскости.....	26
4.1. Основные теоретические сведения	26
4.2. Примеры решения типовых задач.....	28
4.3. Задачи	33
5. Исследование динамических систем методом Ван-дер-Поля	33
5.1. Основные теоретические сведения	33
5.2. Примеры решения типовых задач.....	37
5.3. Задачи	42

6. Разрывные колебания в системах с одной степенью свободы.....	43
6.1. Основные теоретические сведения	43
6.2. Примеры решения типовых задач.....	47
6.3. Задачи	49
7. Метод гармонической линеаризации.....	51
7.1. Основные теоретические сведения	51
7.2. Примеры решения типовых задач.....	54
7.3. Задачи	55
8. Гармоническое воздействие на колебательные системы	56
8.1. Основные теоретические сведения	56
8.2. Примеры решения типовых задач.....	56
8.3. Задачи	67
9. Параметрические колебания	69
9.1. Основные теоретические сведения	69
9.2. Примеры решения типовых задач.....	80
9.3. Задачи	82
Список литературы.....	84
Приложение. Прямое преобразование Лапласа для некоторых элементарных функций.....	85

Учебное издание

Казаков Леонид Николаевич
Ходунин Александр Викторович
Палей Дмитрий Эзрович

Решение задач по курсу «Теория колебаний»

Методические указания

Редактор, корректор М. В. Никулина
Верстка Е. Л. Шелехова

Подписано в печать 23.07.11. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 3,87.
Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

**Л. Н. Казаков
А. В. Ходунин
Д. Э. Палей**

Решение задач по курсу «Теория колебаний»

