МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра микроэлектроники и общей физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета
_____ И.С. Огнев
(подпись)

«17» мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
«Разностные уравнения»

Направление подготовки
03.03.03 Радиофизика

Направленность (профиль)
Телекоммуникационные системы и технологии

Форма обучения
очная

Программа одобрена
на заседании кафедры
от «25» апреля 2022 года, протокол № 6

Программа одобрена НМК
физического факультета
протокол № 5 от «11» мая 2022 года

Ярославль

1. **Цели освоения дисциплины**

Дисциплина обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования и содействует формированию мировоззрения математика.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление студентов с основами теории функций комплексного переменного, её важнейшими понятиями, результатами и методами, а также подготовка студентов к изучению других дисциплин.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к относится к обязательной части Блока 1.

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины, используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	**Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)**	**Перечень планируемых результатов обучения**
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе педагогической деятельности математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	**ИД-ОПК-1.1** Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения	**<u>Знать:</u>** - основные понятия и результаты разностных уравнений; - методы решения важнейших задач.
	ИД-ОПК-1.2 Применяет математический аппарат, физические законы и теории для решения прикладных и теоретических задач, в том числе педагогической деятельности	**<u>Уметь:</u>** - реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач; - применять понятия, результаты и методы разностных уравнений в других разделах математики; **<u>Владеть навыками:</u>** - систематического и результативного применения аппарата разностных уравнений.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)* *Формы ЭО и ДОТ*
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Основные понятия. Линейные и нелинейные уравнения.	5	1	4				4	Задания для домашней работы
2	Линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.	5	2	6				4	Задания для домашней работы
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
3	Устойчивость. Основные понятия и теоремы.	5	1	5				4	Задания для домашней работы
4	Z-преобразования. Его применения для решений разностных уравнений.	5	2	4				4	Задания для домашней работы
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
5	Одномерные отображения. Локальные бифуркации.	5	3	8		4		8	Контрольная работа.
		5					0,3	7,7	Зачет
	Всего в 5 семестре 72 часа		**9**	**27**		**4**	**0,3**	**31,7**	
	в том числе с ЭО и ДОТ							***4***	

Содержание разделов дисциплины

Раздел 1.
Основные понятия. Линейные и нелинейные уравнения.

Раздел 2.
Линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел 3.
Устойчивость. Основные понятия и теоремы.

Раздел 4.
Z-преобразования. Его применения для решений разностных уравнений.

Раздел 5.
Одномерные отображения. Локальные бифуркации.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии: **Электронный учебный курс «Разностные уравнения» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимся и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTex;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Бахвалов Н. С. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.. [Т.1], Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. / Н.С.Бахвалов; М -во высш. и среднего спец. образования СССР - М.: Наука, 1973. - 631 с. 101 экз
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 9-е изд. , электрон. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 636 с. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001018360.html

б) дополнительная литература:

1. Бурд В. Ш. Введение в динамику одномерных отображений [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов. / В. Ш. Бурд; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та - Ярославль: ЯрГУ, 2006. - 103 с. http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20060201.pdf
2. Бурд В. Ш. Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов. / В. Ш. Бурд; науч. ред. С. Д. Глызин; рец. А. В. Проказников; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та - Ярославль: ЯрГУ, 2009. - 155 с. http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090230.pdf
3. Романко, В. К. Разностные уравнения : учебное пособие / Романко В. К. - 4-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 115 с. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001017950.html

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор:
Доцент кафедры микроэлектроники и общей физики, к. физ.-мат. наук, доцент Куликов Д.А.

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Разностные уравнения»

Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1_1
(в части умения решений разностных уравнений, умения исследовать устойчивость положений равновесия систем разностных уравнений)

Контрольная работа № 1

1. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0,\ y_0 = 4,\ y_1 = 5$$

2. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = 1,\ y_0 = y_1 = y_2 = 0.$$

3. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$$

4. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = n,\ y_0 = y_1 = y_2 = 0.$$

5. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 0,\ y_0 = 1,\ y_1 = 0$$

6. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n,\ y_0 = 1,\ y_1 = 0.$$

7. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+3} - y_n = 0,\ y_0 = y_1 = 0,\ y_2 = 1$$

8. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 5y_n = 12n + 1,\ y_0 = y_1 = 1.$$

9. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$$

10. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 3^n,\ y_0 = 1,\ y_1 = 0.$$

11. Решить линейное однородное уравнение:

$$y_{n+4} + y_n = 0,\ y_0 = y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = 1$$

12. Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 3n + 2,\ y_0 = y_1 = -1.$$

1. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\ f(n) = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = -\frac{1}{2}x_n - x_n^2$$

6. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\ f(n) = \cos\tfrac{\pi}{2}n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = \frac{3}{4}x_n - x_n^3$$

9. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\ f(n) = \sin\tfrac{\pi}{2}n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = 2 + 2x_n - x_n^2$$

12. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\ f(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = \frac{1}{2}x_n - x_n^4$$

15. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\ f(n) = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

17. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = 2 - x_n^2$$

18. Решить линейную неоднородную систему:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ f(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

19. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия:

$$x(n+1) = Ax(n),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Найти состояние равновесия и исследовать их устойчивость: $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$f(x_n) = (1 + \frac{\pi}{4})x_n - x_n \operatorname{arctg} 2x_n$$

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:
- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Свойства и методы решений линейных разностных уравнений.
2. Запись решений в случаях простых корней, комплексных корней, кратных корней.
3. Линейные однородные и неоднородные системы разностных уравнений.
4. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия.
5. Устойчивость периодических решений систем разностных уравнений.
6. Z-преобразования.
7. Одномерные отображения.
8. Двумерные отображения.

Критерии оценивания ответов на вопросы билета (математика)

Критерий	Пороговый уровень (на «удовлетворительно»)	Продвинутый уровень (на «хорошо»)	Высокий уровень (на «отлично»)
Соответствие ответа вопросу	Хотя бы частичное (*не относящееся к вопросу не подлежит проверке*)	Полное	Полное
Полнота ответа	Вопрос билета раскрыт на 50 и более %	Ответ почти полный, без ошибок, не хватает отдельных элементов и тонкостей	Ответ полный и без ошибок
Наличие при-	Имеются отдельные	Много примеров	Есть практически ко

Критерий	Пороговый уровень (на «удовлетворительно»)	Продвинутый уровень (на «хорошо»)	Высокий уровень (на «отлично»)
меров	примеры		всем утверждениям
Леммы и теоремы	Допускается не более 3-х ошибок в формулировках на материале 1 вопроса. Часть лемм и теорем доказаны.	Приведены в полной строгой формулировке и большинство – доказаны.	Приведены в полной строгой формулировке и доказаны.
Метод доказательства	Любой корректный, приводящий к правильному результату	Выбран наилучший метод	Выбран наилучший метод, указаны причины выбора

Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка.

Уровень сформированности компетенции оценивается как средний по совокупности параметров, в роли которых выступают оценки за: контрольные работы и ответы на вопросы билета в соответствии с критериями, приведёнными в п. 1 и 2.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Разностные уравнения»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «разностные уравнения» являются практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным математическим и физическим задачам и отработка навыков работы с методами и теоремами разностных уравнений.

Для успешного освоения дисциплины важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

В течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде двух контрольных работ. Кроме этого проводятся консультации по разбору материала, который вызывает затруднения.

Изучение дисциплины заканчивается зачётом. Оценка выставляется по результатам сформированности компетенции, обеспечиваемой дисциплиной. Уровень сформированности компетенции оценивается как средний по совокупности параметров, в роли которых выступают: оценки за контрольные работы и за ответы на вопросы билета в соответствии с критериями, приведёнными в рабочей программе.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в рабочей программе, и электронно-библиотечные системы, подписка на которые предоставлена через ЯрГУ, список и инструкцию по использованию которых можно найти по адресу: http://www.lib.uniyar.ac.ru/content/resource/net_res(1).php .

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

1. Личный кабинет (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения online доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.