

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Практикум по дифференциальным уравнениям**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Математика и компьютерные науки»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с идеями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дисциплина «Практикум по дифференциальным уравнениям» содействует фундаментализации образования, формированию культуры аналитических вычислений в рамках цикла аналитических дисциплин.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Практикум по дифференциальным уравнениям» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика II». Дисциплина «Практикум по дифференциальным уравнениям» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин «Математический анализ», «Алгебра». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Практикум по дифференциальным уравнениям», используются при изучении общепрофессиональных дисциплин «Методы вычислений», «Уравнения математической физики», ряда специальных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с математическим моделированием и динамическими системами.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Универсальные компетенции</b>		
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	<b>ИД-УК-1.2</b> Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– основные методы интегрирования дифференциальных уравнений.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– применять основные методы интегрирования дифференциальных уравнений для решения практических задач.</li></ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– построения математических моделей прикладных задач, описываемых дифференциальными уравнениями.</li></ul>

Общепрофессиональные компетенции		
<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	<b>ИД-ОПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– теоремы существования решений начальной задачи;</li> <li>– теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров;</li> <li>– общие свойства линейных систем дифференциальных уравнений;</li> <li>– теоремы об устойчивости по первому приближению.</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами;</li> <li>– исследовать устойчивость решений таких уравнений.</li> </ul>
	<b>ИД-ОПК-1.2</b> Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	<b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– дифференцировать решения по начальным условиям и параметрам.</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– качественного исследования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.</li> </ul>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		

1.	Уравнения с разделяющимися переменными.	3		1				1	
2.	Однородные уравнения.	3		1				1	
3.	Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати.	3		3				3	
4.	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.	3		1		1		1	Контрольная работа №1
5.	Построение последовательных приближений к решению задачи Коши.	3		1				1	
6.	Уравнения, не разрешенные относительно производной.	3		1				1	
7.	Уравнения, допускающие понижение порядка.	3		1				1	
8.	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера. Метод вариации произвольных постоянных.	3		2				2	
9.	Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Формула Остроградского–Лиувилля.	3		2				2	
10.	Линейные системы с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.	3		3		1		3	Контрольная работа №2
							0,3	1,7	Зачет
	<b>Итого за 3 семестр 36 часов</b>			<b>16</b>		<b>2</b>	<b>0,3</b>	<b>17,7</b>	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								
11.	Устойчивость решений. Устойчивость в линейных системах. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.	4		6		1		6	
12.	Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Построение функций Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами.	4		6		1		6	

13.	Устойчивость многочленов. Критерий Рауса –Гурвица. Частотный критерий Михайлова.	4		3				4	
14.	Особые точки. Фазовая плоскость линейной двумерной автономной системы. Классификация особых точек.	4		7		1		7	
15.	Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров, входящих в правые части, дифференцируемость по параметрам. Метод малого параметра.	4		7		1		7	
16.	Краевые задачи. Функция Грина.			3				4	Контрольная работа №3
							0,3	1,7	Зачет
	<b>Итого за 4 семестр 72 часа</b>			<b>32</b>		<b>4</b>	<b>0,3</b>	<b>35,7</b>	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								
	<b>ИТОГО 108 часов</b>			<b>48</b>		<b>6</b>	<b>0,6</b>	<b>53,4</b>	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:
  - программы Microsoft Office;
  - издательская система LaTeX;
  - Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
2. С.Д. Глызин, П.Н. Нестеров. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2016. 192 с.
3. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 253 с.

### **б) дополнительная литература**

1. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
2. А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 239 с.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

доцент кафедры математического  
моделирования, к.ф.-м.н. А.В. Секацкая



**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Практикум по дифференциальным уравнениям»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

**Контрольная работа №1**

**1 Вариант**

1. Найти общее решение:  $\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{t^3+x+1}$ .
2. Найти общее решение:  $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$ .
3. Найти общее решение:  $y' - y \cot x = 2x \sin x$ .
4. Найти общее решение:  $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}$ .
5. Найти общее решение:  $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ .

**2 Вариант**

1. Найти общее решение:  $\dot{x} = \frac{(1+x)^2}{t(x+1)-t^2}$ .
2. Найти общее решение:  $(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0$ .
3. Найти общее решение:  $y' \cos x + y \sin x = 1$ .
4. Найти общее решение:  $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0$ .
5. Найти общее решение:  $x dx + y dy + x dy - dx = 0$ .

**3 Вариант**

1. Найти общее решение:  $xy^2(xy' + y) = 1$ .
2. Найти общее решение:  $y' = \frac{x+y-3}{y-x+1}$ .
3. Найти общее решение:  $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$ .
4. Найти общее решение:  $xy' - y^2 \ln x + y = 0$ .
5. Найти общее решение:  $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ .

**4 Вариант**

1. Найти общее решение:  $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$ .
2. Найти общее решение:  $(2x + 4y + 3)y' - x - 2y - 1 = 0$ .
3. Найти общее решение:  $\dot{x} - x \cot x = 4 \sin t$ .
4. Найти общее решение:  $(x - y)ydx - x^2dy = 0$ .
5. Найти общее решение:  $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0$ .



### 5 Вариант

1. Найти общее решение:  $\dot{x} = \frac{t}{x}e^{2t} + x$ .
2. Найти общее решение:  $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ .
3. Найти общее решение:  $\dot{x} - 2x = te^{2t} \sin t$ .
4. Найти общее решение:  $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}$ .
5. Найти общее решение:  $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$ .

### 6 Вариант

1. Найти общее решение:  $y' - y = \sin x$ .
2. Найти общее решение:  $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$ .
3. Найти общее решение:  $y' + y = (x + 1)e^{-x} \cos x$ .
4. Найти общее решение:  $y' = \frac{y^2}{(y-x)x}$ .
5. Найти общее решение:  $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ .

### 7 Вариант

1. Найти общее решение:  $y' = \frac{x+y}{1-y-x}$ .
2. Найти общее решение:  $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$ .
3. Найти общее решение:  $xy' - 2y = x^3 \cos x$ .
4. Найти общее решение:  $(y^2 + x^2 + 1)y' + xy = 0$ .
5. Найти общее решение:  $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$ .

### 8 Вариант

1. Найти общее решение:  $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}$ .
2. Найти общее решение:  $(4x + 2y + 1)y' + 8x + 4y + 1 = 0$ .
3. Найти общее решение:  $\dot{x} - x \tan t = \frac{1}{\cos^3 t}$ .
4. Найти общее решение:  $2y'x \ln x + y = xy^{-1} \cos x$ .
5. Найти общее решение:  $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$ .

### 9 Вариант

1. Найти общее решение:  $\dot{x} + te^t x = e^{(1-t)e^t}$ .
2. Найти общее решение:  $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$ .
3. Найти общее решение:  $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$ .
4. Найти общее решение:  $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$ .
5. Найти общее решение:  $ydx - (y^2 + x)dy = 0$ .

### 10 Вариант

1. Найти общее решение:  $(x - t)tdx - x^2 dt = 0$ .
2. Найти общее решение:  $y' = -\frac{2x+3y-5}{3x+2y-5}$ .
3. Найти общее решение:  $y' + 2y = xe^{-2x} \cos x$ .
4. Найти общее решение:  $y^2 dx + (x - y)xdy = 0$ .
5. Найти общее решение уравнения:  $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$ .

## Контрольная работа №2

### 1 Вариант

1. Найти общее решение:  $y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2}$ .
2. Найти общее решение:  $y'' + y = 4 \cos x$ .
3. Найти общее решение:  $y''' + 2y'' + y' = x + e^{-x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$ .

### 2 Вариант

1. Найти общее решение:  $\ddot{x} - x = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}$ .
2. Найти общее решение:  $y'' + 2y' + 17y = e^{-x}(1 + \sin 4x)$ .
3. Найти общее решение:  $y''' + 2y'' = x + xe^{-2x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### 3 Вариант

1. Найти общее решение уравнения:  $\ddot{x} + x = \frac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}}$ .
2. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x} \sin 3x$ .
3. Найти общее решение уравнения:  $y''' + 8y = x + xe^{-2x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

### 4 Вариант

1. Найти общее решение уравнения:  $y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}}$ .
2. Найти общее решение уравнения:  $y'' - 4y' + 5y = (x + 1)e^{-2x} \sin x$ .
3. Найти общее решение уравнения:  $y^{IV} + 4y'' = x + e^{-2x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + 2y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - 2x = e^{2t}. \end{cases}$$

### 5 Вариант

1. Найти общее решение уравнения:  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^3}$ .
2. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} + \sin 3x$ .
3. Найти общее решение уравнения:  $y^{IV} - 4y'' = x + e^{-2x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 t}$ .

### 6 Вариант

6. Найти общее решение уравнения:  $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{4t^2 - 4t - 1}{4t\sqrt{t}}$ .
7. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' + 17y = e^{-x} + \sin 4x$ .
8. Найти общее решение уравнения:  $y''' + 2y'' = (x + 1)e^{-2x}$ .
9. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
10. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$ .

### 7 Вариант

1. Найти общее решение уравнения:  $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$ .
2. Найти общее решение уравнения:  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = te^{-2t} \sin 3t$ .
3. Найти общее решение уравнения:  $y''' - 8y = x + (x + 1)e^{2x}$ .
4. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .
5. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ .

### 8 Вариант

11. Найти общее решение уравнения:  $y'' + y = \frac{2+x^2}{x^3}$ .
12. Найти общее решение уравнения:  $y'' - 4y' + 5y = (x + 1)e^{-2x} \sin x$ .
13. Найти общее решение уравнения:  $y^{IV} - 4y'' = x + e^{2x}$ .
14. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
15. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$ .

### 9 Вариант

16. Найти общее решение уравнения:  $x^2 y'' - xy' - 3y = \frac{1}{x}$ .
17. Найти общее решение уравнения:  $y'' - 2y' + y = (x + 2)e^x + 1$ .
18. Найти общее решение уравнения:  $y''' + y' = x \sin x$ .

19. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .
20. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

### 10 Вариант

21. Найти общее решение уравнения:  $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$ .
22. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' - 3y = (x + 1)(e^x + 1)$ .
23. Найти общее решение уравнения:  $y''' + 4y'' = x \cos 2x$ .
24. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .
25. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 11 Вариант

26. Найти общее решение уравнения:  $(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x$ .
27. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' + 10y = e^x \sin 3x$ .
28. Найти общее решение уравнения:  $y''' + 8y = x(1 + e^{-2x})$ .
29. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
30. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$ .

### 12 Вариант

31. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$ .
32. Найти общее решение уравнения:  $y'' - 4y' + 5y = (x + 1) \sin x$ .
33. Найти общее решение уравнения:  $y^{IV} + 4y'' = (x + 1)e^{-2x}$ .
34. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
35. Найти общее решение системы:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

## Контрольная работа №3

### 1 Вариант

1. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  устойчив многочлен:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + b.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - e^{x+y} - \cos x, \\ \dot{y} = \ln(1 + \sin(2x - 3y)). \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$\dot{x} + x - e^{x-t} = 0, \quad x(0) = 0, \quad 0 \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$t\ddot{x} - \dot{x} = f(t), \quad \dot{x}(1) = 0, \quad x(2) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$$

## 2 Вариант

1. Система  $\dot{x} = Ax$  ( $x \in R^5$ ) имеет частное решение, у которого известны только две координаты:  $x_1 = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ ,  $x_2 = e^{-t} + \cos 2t$ . Устойчиво ли нулевое решение?

2. Найти все положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$$

Для соответствующей линеаризованной на состоянии равновесия системы указать тип особой точки.

3. Для решения уравнения:

$$y' + y^2 - \frac{6}{x} = 0, \quad y(1) = 1 + 3$$

найти  $\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0}$ .

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \quad \dot{x}(0) = x(1) + \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

## 3 Вариант

1. Для уравнения:

$$\dot{x} = x \sin^3 t$$

найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость. Если положение равновесия является асимптотически устойчивым — отметить это.

2. Найти все положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x}, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

Для соответствующей линеаризованной на состоянии равновесия системы указать тип особой точки.

3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$y'' + 2y' + (1 + y^2)y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, \quad 0 \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$\ddot{x} + 4x = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

#### 4 Вариант

1. Выяснить, устойчиво ли решение задачи Коши:

$$\dot{x} = t(x - 1), \quad x(1) = 2.$$

2. Исследовать на устойчивость особые точки системы и определить их тип

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = 1 - y^2. \end{cases}$$

3. Для решения уравнения

$$\dot{x} + x - 1 + \sin(t - x) = 0, \quad x(0) = \text{найти } \left. \frac{\partial x}{\partial} \right|_{=0}.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$t^2 \ddot{x} - 2x = f(t), \quad x(1) = 0, \quad x(2) + 2\dot{x}(2) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

#### 5 Вариант

1. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  устойчив многочлен:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + as^2 + bs + 6.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x - 2y)^{-1} - 1, \\ \dot{y} = \cos x - e^{2x-y}. \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$\ddot{x} + (4 + (t + x^2))x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad 0 \lll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$t\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \quad x(1) = 0, \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow +\infty.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x. \end{cases}$$

### 6 Вариант

1. Найти положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + (y - x)^2, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x + 3y}, \\ \dot{y} = 1 - e^{2x+y}. \end{cases}$$

3. Для решения уравнения:

$$y' = x + \sin y, \quad y(0) = 2 \quad \text{найти} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial} \right|_{=0}.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$\ddot{x} - x = f(t), \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow \pm\infty.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

### 7 Вариант

1. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:

$$\dot{x} = \frac{x^2}{t^2 + 1}.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(-2x + y), \\ \dot{y} = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x - 3y}. \end{cases}$$

3. Для решения уравнения:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = t x, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = 2 + 3.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$x + 2\ddot{x} - 3x = f(t), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

### 8 Вариант

1. Система  $\dot{x} = Ax$  ( $x \in R^4$ ) имеет частное решение, у которого известны только две координаты:  $x_1 = \sin t + 2 \cos t$ ,  $x_2 = \cos 2t$ . Устойчиво ли нулевое решение?
2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2.5xe^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x. \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$\ddot{x} = 2x - 2x^3, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad 0 \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$\ddot{x} = f(t), \quad x(0) = \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

### 9 Вариант

1. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  устойчив многочлен:

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tan(-2x + y), \\ \dot{y} = 1 - \sqrt[3]{1 - x + y}. \end{cases}$$



3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$\dot{x} = tx^3 + x^2, \quad x(0) = 1, \quad 0 \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$t^2 \ddot{x} - 2x = f(t), \quad x(1) = 0, \quad x(2) + 2\dot{x}(2) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$$

## 10 Вариант

1. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  устойчив многочлен:

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2 + 5\lambda + 7.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(-3x + 4y), \\ \dot{y} = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x + 3y}. \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения:

$$y' + y - 1 + \sin(x - y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad 0 \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x), \quad y(0) \text{ ограничено}, \quad y(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

## 2. Правила выставления оценки на зачете

От студентов требуется обязательное посещение практических занятий, выполнение домашних работ, а также написание контрольных работ на оценку не ниже «удовлетворительно».

Оценка «зачтено» выставляется при выполнении следующих условий:

- правильно решено не менее 30% заданий из контрольной работы;
- выполнено не менее 50% домашних работ;
- процент пропусков не достигает значения выше 50.

Оценка «не зачтено» выставляется при выполнении следующих условий:

- правильно решено менее 30% заданий из контрольной работы;
- выполнено менее 50% домашних работ;
- процент пропусков занятий составляет более 50.