МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейные операторы в конечномерных пространствах

Направление подготовки (специальности)
10.03.01 Информационная безопасность

Направленность (профиль)
«Безопасность компьютерных систем»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Линейные операторы в конечномерных пространствах» являются основы теории векторных пространств, линейных преобразований, векторных пространств со скалярным произведением и линейных преобразований в них, а также основ линейной геометрии.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.02 «Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах» относится к вариативной части Блока 1 и является курсом по выбору. Она использует знания и умения, полученные студентами при изучении курсов алгебры и геометрии. Знания, полученные при изучении данного курса, задействуются практически во всех математических курсах и курсах профессиональной подготовки. Это дискретная математика, криптографические методы защиты информации, теория функций комплексного переменного, теория кодирования, алгебраические методы в кодировании, теория чисел, физика, электротехника, методы программирования, теория вероятностей и математическая статистика, криптографические протоколы, технологии многомерного анализа данных, дополнительные вопросы защищённости компьютерных систем.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Код компетенции	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**И-УК-1_4** Обладает основными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике информационно-аналитической работы в этих областях	**Знать:** основные понятия, методы, результаты линейной алгебры
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-3 Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	**И-ОПК-3.8** умеет распознать математические структуры, возникающие в задачах профессиональной деятельности, конструировать, анализировать объекты и выполнять вычисления, формулировать требования к свойствам математических объектов, необходимым для решения профессиональной задачи	**Уметь:** распознавать структуры векторного пространства, евклидова пространства, эрмитова пространства, распознавать, конструировать и исследовать линейные отображения, интерпретировать условия задачи в терминах линейной алгебры и подбирать адекватный задаче метод решения. **Владеть навыками:** линейно-алгебраических вычислений в матричной и координатной формах.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Векторное пространство	3	4	4				6	Задание для самост. работы № 1. Самостоят.работа № 1
2	Гомоморфизмы векторных пространств	3	8	8		2		8	Задание для самост. работы № 2. Самостоят.работа № 2
3	Линейные операторы	3	8	10		3		10	Задание для самост. работы № 3. Самостоят.работа № 3
4	Билинейные и квадратичные формы	4	4	4				4	Задание для самост. работы № 5.
5	Векторные пространства с дополнительной структурой	4	4	4		2		6	Задание для самост. работы № 6. Самостоят.работа № 4
6	Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением	4	4	2				2	Задание для самост. работы № 7.
						2	0,5	33,5	экзамен
	Всего		**32**	**32**		**10**	**0,5**	**69,5**	**144**

Содержание разделов

1. Векторное пространство.

1.1. Понятие векторного пространства: определение и примеры векторных пространств над бесконечными и конечными полями. Линейная зависимость и ее свойства.

1.2. Подпространство. Объединение, сумма и пересечение подпространств. Линейная оболочка подмножества векторов векторного пространства.

1.3. Базис и размерность. Два определения размерности векторного пространства. Размерности и базисы суммы и пересечения подпространств.

1.4. Координаты вектора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Вычисление координат вектора при смене базиса.

1.5. Прямая сумма подпространств. Прямое дополнение к подпространству.

2. Гомоморфизмы векторных пространств.

2.1. Линейное отображение (гомоморфизм) векторных пространств. Примеры линейных отображений. Изоморфизм векторных пространств. Классификация конечномерных векторных пространств. Базис как изоморфизм.

2.2. Матрица линейного отображения векторных пространств в паре базисов. Ее изменение при смене базисов.

2.3. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерии инъективности, сюръективности и биективности линейного отображения. Ранг произведения двух матриц.
2.4. Факторпространство. Изоморфность всех прямых дополнений к данному подпространству.

3. Линейные операторы.

3.1. Понятие эндоморфизма векторного пространства (линейного оператора). Матрица линейного оператора в базисе. Подобие матриц. Понятие алгебры над полем. Алгебра линейных операторов данного векторного пространства. Ее изоморфизмы на алгебру квадратных матриц.
3.2. Полиномы от линейного оператора и минимальный полином линейного оператора. Вычисление минимального полинома линейного оператора.
3.3. Инвариантные подпространства линейного оператора. Примеры линейных операторов, обладающих и не обладающих собственными инвариантными подпространствами. Матрица линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством. Проекторы. Фактороператор и его матрица.
3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический полином линейного оператора и его инвариантность. Теорема Гамильтона – Кэли.
3.5. Корневые подпространства линейного оператора, их основные свойства. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
3.6. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Жорданов базис.

4. Билинейные и квадратичные формы.

4.1. Полилинейное отображение. Полилинейная форма. Билинейная форма. Векторное пространство билинейных форм на данном векторном пространстве. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Матрица билинейной формы в выбранном базисе и ее преобразование при смене базисов. Конгруэнтность матриц.
4.2. Квадратичные формы. Канонический и нормальный (в вещественном случае) виды матрицы квадратичной формы. Знакоопределенность и невырожденность, сигнатура и ранг. Эквивалентность квадратичных форм. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

5. Векторные пространства с дополнительной структурой.

5.1 Евклидовы пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Его следствия. Ортогональность. Ортонормированный базис. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональная группа.
5.3. Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы и пространства. Неравенство Коши – Буняковского в эрмитовом случае. Ортонормированный базис в эрмитовом пространстве. Равенство Парсеваля.
5.4. Унитарные матрицы и унитарная группа.

6. Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением.

6.1. Линейные операторы и θ-линейные формы. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Классы эрмитовых и косоэрмитовых операторов.
6.2. Матрица сопряженного и самосопряженного оператора. Критерий равенства операторов.
Собственные значения и теорема о канонической форме эрмитова оператора. Приложения эрмитовых операторов в физике.
6.3. Приведение квадратичной формы к главным осям. Матричная формулировка. Одновременная диагонализируемость пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.
6.4. Канонический вид унитарного и ортогонального операторов.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики. На этой лекции вскрываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний. На практических занятиях студенты решают поставленные перед ними задачи под руководством (контролем) преподавателя. Обсуждение процесса решения задачи и оценка правильности полученного результата (постановки задачи, выбора метода ее решения, проверка полученного результата и т.д.) в ходе практического занятия производится коллективно студентами под руководством преподавателя.

Консультации – групповые занятия, являющиеся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты в решении задач, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

– для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации
- программы Microsoft Office, издательская система LaTex;

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:
для поиска учебной литературы:
- электронные каталоги Научной библиотеки ЯрГУ им. П.Г. Демидова (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_one_find.php)
- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_one_find.php)
- Электронная картотека «Книгообеспеченность» (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)
- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next")

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Тимофеева, Н. В., Линейная алгебра. Современная алгебра [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / Н. В. Тимофеева ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2012, 114с. Доступен по адресу: http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120204.pdf

2. Тимофеева Н. В., Линейная алгебра. Современная алгебра. Часть 2: учеб. пособие для вузов / Н. В. Тимофеева ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2017, 135с. Доступен по адресу: http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20170206.pdf

б) дополнительная литература

1. *Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник для вузов.: в 3 ч. Ч. II: Линейная алгебра / А. И. Кострикин; М-во общего и спец. образования РФ - М.: МЦНМО, 2020, 367 с. Доступен по адресу: https://e.lanbook.com/book/146750*

2. Кострикин, А. И., Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие для вузов / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - 2-е изд., перераб., М., Наука, 1986, 302с

3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре:Учебное пособие. –13-е изд., стер. --- СПб.: Изд-во «Лань», 2010. --- 480 с. ---(Учебники для вузов. Специальная литература)

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (каталог) (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).

2.Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://www.edu.ru (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке http://window.edu.ru/library).
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru).

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа,с практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;

-помещения для самостоятельной работы;

-помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в аудитории для практических занятий больше либо равно списочному составу группы обучающихся.

Автор :

профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м.н. _____________ Тимофеева Н.В.

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах»

Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

Индикатор И-ОПК-3.8

Все номера заданий даны по книге И.В. Проскурякова (п. 2 дополнительной литературы) Там же имеются ответы и указания к решению.
Задание для самостоятельной работы к теме 1 «Векторное пространство»
1279, 1281, 1282,1283, 1284, 1288 — 1292, 1299, 1303, 1304, 1313, 1318, 1321, 1322, 1323.
Задание для самостоятельной работы к теме 2 «Гомоморфизмы векторных пространств» 1436, 1439, 1440, 1442, 1443, 1446, 1449,1453.
Задание для самостоятельной работы к теме 3 «Линейные операторы» 1468, 1473, 1474, 1478, 1480, 1483, 1499, 1527, 1532 –1535.
Задание для самостоятельной работы к теме 5 «Билинейные и квадратичные формы» 1178, 1179, 1185, 1186, 1189, 1192, 1202, 1214, 1216
Задание для самостоятельной работы к теме 6 «Векторные пространства с дополнительной структурой» 1357,1358, 1362, 1363, 1366, 1371, 1372
Задание для самостоятельной работы к теме 7 «Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением» 1542, 1546, 1555, 1557, 1572, 1576, 1578, 1586,1587,1588
Самостоятельная работа № 1 «Векторное пространство» 1278, 1300, 1321
Самостоятельная работа № 2 «Гомоморфизмы векторных пространств» 1444, 1452б
Самостоятельная работа № 3 «Линейные операторы» 1467, 1534
Самостоятельная работа № 4 «Векторные пространства с дополнительной структурой» 1360, 1367

Оценивание самостоятельных работ №№ 1 – 4 проводится по шкале, приведенной в таблице п. 3.2

1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Задание **экзамена** состоит из билета, содержащего 2 теоретических вопроса (см. приведенный ниже список), и задачи (см. приведенный далее список), которую студент получает случайным образом наряду с билетом. Студенту могут быть заданы дополнительные вопросы (в рамках вопросов билета или на тему задачи) с целью выявить уровень понимания изученного материала.

Список вопросов экзамена (И-УК-1_4)

1. Линейные векторные пространства. Определение и примеры. Линейная оболочка. Подпространства векторного пространства.
2. Пересечение и сумма подпространств. Цепи подпространств.

3. Прямая сумма. Прямое дополнение.
4. Размерность и базис линейного векторного пространства. Теорема о монотонности размерности. Матрица перехода от базиса к базису.
5. Изоморфизм векторных пространств. Смежные классы и факторпространство.
6. Линейные отображения и линейные операторы. Задание линейных отображений матрицами. Размерность пространства линейных отображений из одного пространства в другое.
7. Минимальный многочлен линейного оператора.
8. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.
9. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа.
10. Ранг линейного оператора. Подобие матриц. Критерии невырожденности линейного оператора.
11. Характеристический многочлен. Примеры. След и определитель как инварианты.
12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
13. Оператор с простым спектром. Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора.
14. Факторпространство и фактороператор.
15. Теорема Гамильтона – Кэли.
16. Жорданова клетка. Корневые подпространства. Теорема о жордановой нормальной форме (без доказательства).
17. Билинейные отображения. Полилинейные отображения. Задание билинейных отображений матрицами. Связь между матрицами билинейного отображения в различных базисах. Симметрические и кососимметрические билинейные формы.
18. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма. Приведение симметрических билинейных форм к каноническому виду. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
19. Закон инерции квадратичных форм. Метод Якоби приведения невырожденной квадратичной формы к каноническому виду.
20. Нормальный вид квадратичной формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.
21. Евклидовы пространства. Неравенство Коши – Буняковского в евклидовом пространстве. Его следствия.
22. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта.
23. Изоморфизм евклидовых пространств.
24. Эрмитовы формы и пространства. Неравенство Коши – Буняковского в эрмитовом пространстве.
25. Ортонормированный базис в эрмитовом пространстве. Равенство Парсеваля. Унитарные матрицы и унитарная группа.
26. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Классы эрмитовых и косоэрмитовых операторов.
27. Матрица сопряженного и самосопряженного оператора. Критерий равенства операторов.
28. Теорема о канонической форме эрмитова оператора.

Список задач экзамена (И-ОПК-3.8)

Задача 1.

Выяснить, какие из совокупностей многочленов степени не выше n над полем F образуют линейное векторное пространство. а) многочлены, имеющие корень в заданных двух точках a и b; б) многочлены, у которых сумма всех коэффициентов равна нулю. В случае положительного ответа найти размерность и базис.

Задача 2.

Найти размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$: $a_1 = (1,0,1,1), a_2 = (1,0,0,1), b_1 = (0,1,1,1), b_2 = (1,1,1,1)$.

Задача 3.

Доказать, что сумма подпространств L и M векторного пространства V равна пересечению всех подпространств, содержащих и L, и M.

Задача 4.

Найти число всех базисов n-мерного пространства V над полем из q элементов, содержащих заданный ненулевой вектор.

Задача 5.

Является ли подпространством линейного векторного пространства многочленов от одной переменной над полем F: а) множество всех многочленов не содержащих четных степеней переменной x; б) множество многочленов четной степени?

Задача 6.

Пусть размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения. Что можно сказать об этих подпространствах?

Задача 7.

Пусть $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ --- множество многочленов от n переменных над полем F. Какова размерность подпространства этого пространства, состоящего из однородных многочленов степени k?

Задача 8.

Пусть U, V, W - подпространства векторного пространства. Докажите, что $(U+W)\cap(W+V)\cap(V+U)=[(W+V)\cap U]+[(V+U)\cap W]$.

Задача 9.

Пусть V - векторное пространство размерности 4 над полем из пяти элементов. Сколько существует вырожденных операторов из V в V?

Задача 10.

Пусть оператор A действует на множестве квадратных матриц размерности 2 умножением на фиксированную матрицу размера 2. Найти матрицу этого оператора в пространстве всех квадратных матриц размерности 2.

Задача 11.

Пусть матрица A перестановочна с любой квадратной матрицей размера 5. Что можно сказать о ее жордановой нормальной форме?

Задача 12.

Пусть квадратная матрица состоит из одних единиц. Какова ее жорданова нормальная форма?

Задача 13.

Пусть матрица A обладает свойством $A^4 = I$, где I --- единичная матрица. Что можно сказать о ее жордановой нормальной форме?

Задача 14.

Пусть λ - собственное значение матрицы A. Верно ли, что у матрицы f(A), где f-многочлен одной переменной, имеется собственное значение f(λ)?

Задача 15.

Верно ли, что оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю?

Задача 16.

Доказать, что если оператор A невырожденный, то операторы A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы.

Задача 17.

Когда минимальный полином матрицы равен $\lambda^2 - 1$? Перечислить все такие матрицы размера 4.

Задача 18.

Пусть три вектора a, b, c линейно независимы. Будут ли линейно независимы следующие векторы: а) $a, a+b, a-b-c$; б) $a-b, b-c, c-a$; с) $a+b-2c, 2a-b+c, -a+2b+c$?

Задача 19.

Найти жорданову нормальную форму матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 20.

Найти жорданов базис матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 21.

Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через a_1, a_2, a_3: $a_1 = (2,3,5), a_2 = (3,7,8), a_3 = (1,-6,1), b = (7,-2,\lambda)$.

Задача 22.

Найти размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов

$a_1 = (1,2,1), a_2 = (1,1,-1), a_3 = (1,3,3)$ и $b_1 = (1,2,2), b_2 = (2,3,-1), b_3 = (1,1,-3)$.

Задача 23.

Найти матрицу линейного оператора, заданного в пространстве вещественных квадратных матриц размера 2 транспонированием: $X \mapsto X^t$. В качестве базиса выбрать матричные единицы $E_{ij} = (e_{kl} = 1$ при $k = i, l = j; e_{kl} = 0$ в противном случае $)$.

Задача 24.

Найти ядро и образ оператора, заданного в пространстве вещественных квадратных

матриц размера 2 умножением на фиксированную матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ справа.

Задача 25.

Найти нормальный вид квадратичной формы $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду.

Задача 26.

Какими значениями ранга и сигнатуры характеризуются те классы вещественно эквивалентных квадратичных форм, для которых форма f эквивалентна форме $-f$? Ответ обоснуйте.

Задача 27.

Найти число классов эквивалентности над полем вещественных чисел для форм от n переменных, имеющих заданную сигнатуру s.

Задача 28.

Пусть A и B -- самосопряженные операторы на унитарном пространстве V. Если для любого $x \in V$ выполнено $(Ax \mid x) = (Bx \mid x)$, то $A = B$. Доказать.

Задача 29.

Доказать, что если линейные операторы A и B перестановочны, то $\ker A$ и $\operatorname{im} B$ инвариантны относительно оператора A.

Задача 30.

Найти матрицу симметрической части билинейной формы

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_1 .$$

Задача 31.

Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли в области вещественных чисел следующие формы:

$f(x,y)=2x_1y_2-3x_1y_3+x_2y_1$ и $g(x,y)=x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2+3x_1y_3-3x_3y_1$.

Задача 32.

Не разыскивая линейного преобразования, найти канонический вид квадратичной формы $q=2x^2+3y^2-z^2+2xy+2xz$.

Задача 33.

Выяснить, какие из следующих квадратичных форм эквивалентны в области вещественных чисел: $f=x^2-yz,\ \ g=xy-z^2,\ \ h=xy+z^2$.

Задача 34.

Найти размерность пространства (косо)симметрических билинейных форм на векторном пространстве размерности n.

Задача 35.

Найти ортогональную проекцию вектора x на линейное подпространство L, если x=(4,2,3,1), L=<(1,1,1,1), (1,2,2,1), (2,3,3,2)>.

Задача 36.

Пусть V -- евклидово трехмерное пространство, такое, что $||x||^2=(x|x)=3x^2+2y^2+z^2-4xy-2xz+2yz$. Найти все векторы, ортогональные вектору x=(1,2,3).

Задача 37.

Найти базис ортогонального дополнения M подпространства L, натянутого на систему векторов a=(1,0,1,2), b=(2,1,2,3), c=(0,1,-2,1).

Задача 38.

Пусть L -- подпространство евклидова пространства V. Показать, что любой вектор $x\in V$ однозначно представим в виде x=y+z, где $y\in L$, z ортогонален любому вектору из L.

Задача 39.

Пусть L и M -- подпространства евклидова пространства V и dim L < dim M. Докажите, что в M найдется ненулевой вектор, ортогональный любому вектору из L.

Задача 40.

Найти векторы, дополняющие систему векторов a_1=(2,3,5,-2), a_2=(3,-7,3,0) до ортогонального базиса. Скалярное произведение считать стандартным.

Задача 41.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов: (2,1,3,-1), (7,4,3,-3), (1,1,-1,0), (5,7,7,8).

Вопросы и задачи для самопроверки:

1. Являются ли векторными пространствами следующие множества с указанными на них операциями? А) все многочлены с вещественными коэффициентами Б) многочлены с вещественными коэффициентами и ненулевыми свободными членами
2. Какие из операций над подпространствами всегда приводят к подпространствам? А) сумма Б) объединение В) пересечение
3. Является ли данная система векторов линейно независимой?
   А) $a_1 = (2,3,5), a_2 = (1,-1,0), a_3 = (0,0,1), a_4 = (1,0,0)$
   Б) $a_1 = (2,0,0), a_2 = (2,2,0), a_3 = (0,0,1)$
4. Найдите ранг линейного оператора, заданного матрицей $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
5. Найдите собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. А) Выпишите матрицу билинейной формы $f(x,y) = x_1 y_1 - 2x_2 y_1$, определенной на двумерном векторном пространстве. Б) Укажите ранг этой билинейной формы.
7. А) Напишите уравнения ортогонального дополнения к подпространству, натянутому на векторы $a_1 = (1,-1,0,0), a_2 = (0,2,3,0)$. Скалярное произведение считайте стандартным. Б) Укажите какой-нибудь базис этого ортогонального дополнения.
8. Применив процесс Грама – Шмидта в порядке следования векторов, постройте ортонормированный базис подпространства, натянутого на векторы $a_1 = (3,0,0,0), a_2 = (2,-1,0,0), a_3 = (0,-1,-1,0)$.

Правильные ответы: 1:А да, Б нет, 2: А,В, 3: А нет Б да, 4: 3, 5: 1,0, 6: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, ранг равен 1, 7: $x_1 - x_2 = 0, 2x_2 + 3x_3 = 0$. Искомым базисом является любая линейно независимая система из двух решений этой системы уравнений, 8. $e_1 = (\pm 1,0,0,0), e_2 = (0,\pm 1,0,0), e_3 = (0,0,\pm 1,0)$ (возможны вариации знаков в любом порядке).

Каждой задаче присвоено 2 балла. В задачах, содержащих 2 пункта, каждому пункту присвоен 1 балл. 10-13 баллов – «удовлетворительно», 14-16 – «хорошо», 17-18 – «отлично».

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

– владение минимальным набором навыков и умений по программе дисциплины;
– знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
– владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
– способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
– знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

– использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
– владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении профессиональных задач;
– способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
– умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку.

Высокий уровень (общие характеристики):

– точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
– безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении профессиональных задач;
– способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
– умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку.

Описание процедуры выставления оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

На экзамене студент получает путем случайного выбора экзаменационный билет (содержащий 2 теоретических вопроса) и задачу. Выполнение экзаменационного задания оценивается по следующей схеме: каждому пункту испытания (первый вопрос, второй вопрос, задача) соответствует 3 балла. Сформированность компетенции оценивается в каждом задании (3 – высокий уровень, 2 – продвинутый, 1 – пороговый, 0 – ниже порогового). 8-9 баллов – «отлично», 6-7 – «хорошо», 4-5 – «удовлетворительно», менее 4 – «неудовлетворительно».

Оценивание ответов на вопросы билета

Показатели	Критерии
Ответы по вопросам билета	-Корректно изложены необходимые понятия и результаты

	-Приведены математически корректные доказательства основных результатов

Оценивание решения задачи (по решенной задаче экзамена проводится собеседование со студентом)

Показатели	**Критерии**
Выбор метода решения	-Выбор метода решения -Обоснование метода
План решения	-Последовательность операций по решению -Корректность обоснования плана решения
Осуществление решения	-Получение результата -Корректное использование терминологии и символики

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины
«Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс линейной алгебры является содержательно насыщенным и весьма объемным. Поэтому он требует от студента систематических усилий.

При изучении теории необходим разбор студентом лекционного материала дома с применением литературы и выделением мест, требующих пояснения при следующем контакте с преподавателем.

Задачный материал по линейной алгебре подразделяется на две большие группы. Первую группу составляют задачи сугубо вычислительной направленности; их цель – наработка владения вычислительными алгоритмами линейной алгебры. Эти алгоритмы несложны и при добросовестной работе студента не вызывают затруднений. Вторую группу составляют «теоретические» задачи. Это либо задачи на доказательство утверждений, либо задачи на вычисление, алгоритмом решения которых студент на данный момент не располагает, и в задание входит как раз построение этого алгоритма. Задачи обоих видов часто вызывают затруднения, и поэтому студенту рекомендуется приступать к выполнению домашнего задания заранее, чтобы у него было достаточно времени на размышление и возможность вернуться к решению задачи позднее. Задачный материал берется преимущественно из сборника И.В.Проскурякова.

В конце обоих семестров изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса, плюс задача, которую студент получает случайным образом из фиксированного набора. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Линейная алгебра» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.