Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. А. Бондаренко, А. Н. Морозов, А. В. Николаев

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебное пособие

Ярославль
ЯрГУ
2017

УДК 004.412(072)
ББК В152.1я73
Б81

Рекомендовано
Редакционно издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2017 года.

Рецензенты:
Д. О. Бытев, д-р техн. наук, проф., завкафедрой прикладной математики
и вычислительной техники ЯГТУ;
кафедра математического анализа, теории и методики обучения математике
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского.

Бондаренко, Владимир Александрович.
Б81 Метрические пространства : учебное пособие / В. А. Бондаренко,
А. Н. Морозов, А. В. Николаев ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова.
– Ярославль : ЯрГУ, 2017. – 109 с.

ISBN 978-5-8397-1125-9

Учебное пособие содержит основные понятия и факты теории метрических пространств. Значительная часть материала посвящена различным приложениям теоремы о пополнении, теоремы Бэра, принципа Банаха о неподвижной точке. В частности, подробно рассматривается метод кодирования изображений IFS, представляющий до сих пор теоретический и практический интерес для исследователей.

Пособие предназначено для студентов старших курсов, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

УДК 004.412(072)
ББК В152.1я73

ISBN 978-5-8397-1125-9

Оглавление

Введение

Теория метрических пространств – поразительный пример того, как вроде бы незамысловатые понятия – в данном случае понятие «расстояния», или «метрики», приводят к глубоким и неожиданным результатам.

К числу таких результатов можно отнести теорему о пополнении, которая позволяет, например, коротким путём добраться до знаменитых лебеговых пространств. Теорема Бэра о категориях даёт возможность убедиться в существовании непрерывной на отрезке функции, которая не имеет производной ни в одной точке.

Упомянутые факты подробно излагаются в первой части книги. Следует особо отметить, что на изложение этой части повлияли лекции профессора Петра Петровича Забрейко, одного из основателей математического направления в Ярославском государственном университете, прочитанные им в далёкие 1970-е годы.

Во второй части рассматриваются принцип сжимающих отображений Банаха и некоторые важные его приложения. Рассуждение с помощью этого понятия позволяет легко доказать одну из ключевых теорем для дифференциальных уравнений о существования и единственности решения задачи Коши.

Данный принцип является математическим фундаментом «Метода фрактального сжатия графической информации», который в 90-е годы прошлого века вызвал фурор в рядах специалистов невероятными коэффициентами уменьшения объёма хранимых данных о некоторых изображениях. Полностью возможности этого метода не раскрыты до сих пор.

Часть материала книги приводится в форме упражнений, без раздумий над которыми чтение не представляет смысла. Для некоторых из них в конце книги приводятся пояснения – подсказки, пользоваться которыми стоит только тогда, когда собственные попытки не приведут к успеху.

Глава 1

Метрические пространства – определение и примеры

1.1. Определение метрического пространства

Определение 1.1.1. Пусть X – некоторое множество, а функция $\rho = \rho(x, y)$, где $x, y \in X$, принимает действительные значения и удовлетворяет следующим условиям – *аксиомам метрики*:

а) для любых $x, y \in X$ значение $\rho(x, y)$ неотрицательно и $\rho(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $x = y$;

б) для любых $x, y \in X$ выполняется равенство $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

в) для любых $x, y, z \in X$ выполняется *неравенство треугольника*:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \tag{1.1}$$

Тогда пара (X, ρ) образует метрическое пространство, а функция $\rho = \rho(x, y)$ называется *метрикой*, или *расстоянием.*

Неравенство треугольника – одно из важнейших свойств расстояний. Название обусловлено тем, что с геометрической точки зрения оно утверждает, что длина любой стороны треугольника всегда не превосходит сумму длин двух его других сторон (рис. 1.1).

Первое определение метрического пространства, сохранившееся по существу до настоящего времени, было дано в 1906 году французским математиком Морисом Фреше в работе «О некоторых положениях функционального исчисления». Сам термин «метрическое пространство» впервые использовал Феликс Хаусдорф в своей книге «Теория множеств» [15].

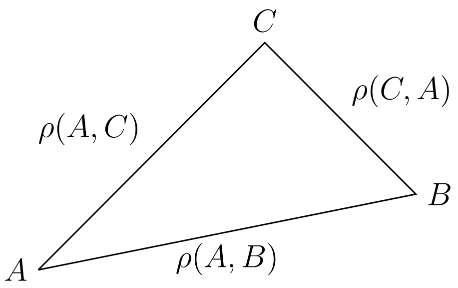


Рис. 1.1. Неравенство треугольника

1.2. Примеры метрических пространств

Пространство с дискретной метрикой. Пусть X – произвольное множество. Положим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ совпадает с } y, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Упражнение 1.2.1. Докажите, что формула (1.2) определяет метрику.

Пространство $\mathbb{R}^m$. Пусть m – натуральное число. Рассмотрим множество X всех упорядоченных наборов из m действительных чисел:

$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$$

и положим

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}. \tag{1.3}$$

Ясно, что для величины (1.3) выполнены аксиомы а) и б) метрики (проверьте!).

Упражнение 1.2.2. Докажите, что величина (1.3) удовлетворяет аксиоме в). (Пространство $\mathbb{R}^m$ является евклидовым пространством, простейшие свойства евклидовых пространств приводятся ниже, в разделе 1.3. В частности, одно из свойств – неравенство Коши-Буняковского-Шварца – позволяет легко доказать аксиому в).)

Метрическое пространство (X, ρ), где ρ определяется формулой (1.3), называется *m-мерным евклидовым пространством* и обозначается через $\mathbb{R}^m$.

Замечание 1.2.3. Если рассмотреть евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$, то величина (1.3) является прямым следствием известной *теоремы Пифагора*: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы (рис. 1.2).

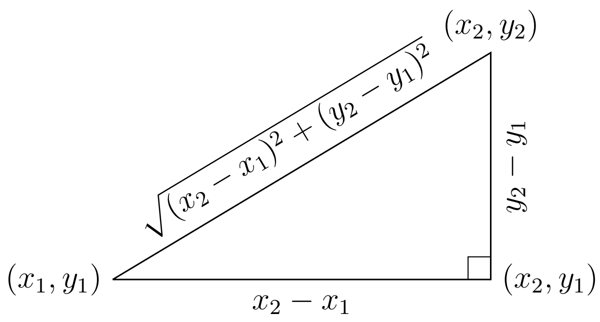


Рис. 1.2. Теорема Пифагора

Пространство $C[a; b]$. Рассмотрим в качестве X множество всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций и зададим величину $\rho = \rho(x, y)$ формулой

$$\rho(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| : \ a \le t \le b\}. \tag{1.4}$$

Упражнение 1.2.4. Докажите, что $\rho = \rho(x, y)$ является метрикой.

Пространство $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a; b]$. В качестве X также рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, а метрику определим с помощью формулы

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \tag{1.5}$$

Упражнение 1.2.5. Докажите, что формула (1.5) определяет метрику.

Метрики на пространствах $C[a; b]$ и $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a; b]$ имеют простой геометрический смысл: в первом случае за расстояние между функциями $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a; b]$ принимается максимальная по абсолютной величине разница между значениями функций (рис. 1.3), а во втором случае – площадь фигуры, ограниченной графиками функций (рис. 1.4).

Пространство $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$. Снова в качестве X рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, а метрику определим с помощью формулы

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2\, dt}. \tag{1.6}$$

Упражнение 1.2.6. Докажите, что формула (1.6) действительно задает метрику. (Пространство $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$ также является евклидовым, поэтому можно воспользоваться разделом 1.3.)

Пространство ℓ_∞. Пусть X – множество всех ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. Определим метрическое пространство ℓ_∞ как пару (X, ρ), где

$$\rho(x, y) = \sup\{|\xi_n - \eta_n| : \ n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.7}$$

Заметим, что это пространство иногда обозначается через m.

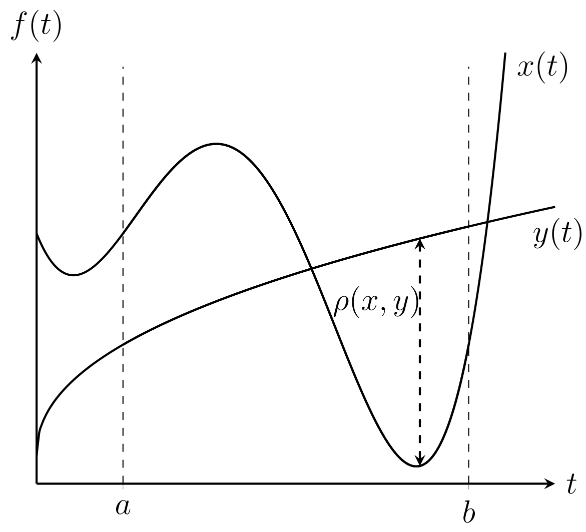


Рис. 1.3. Пример метрики (1.4) для функций $x(t)$ и $y(t)$

Упражнение 1.2.7. Докажите, что величина (1.7) удовлетворяет аксиомам метрики.

Пространства c и c_0. Эти метрические пространства являются подпространствами пространства ℓ_∞ и состоят из сходящихся числовых последовательностей (c) и из бесконечно малых последовательностей (c_0), соответственно. Метрика в этих пространствах задается формулой (1.7).

Пространство ℓ_2. Определим еще одно пространство, состоящее из числовых последовательностей. Теперь в множество X включаются все последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2.$$

Метрику зададим формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \eta_k)^2}. \tag{1.8}$$

Упражнение 1.2.8. Докажите, что величина (1.8) является метрикой. (Здесь также можно использовать евклидовость l_2 и раздел 1.3.)

Расстояние Хэмминга. Зафиксируем натуральное m и рассмотрим в качестве X множество всех двоичных строк длины m ($X = \{0, 1\}^m$). Пусть x, y – некоторые строки из X, определим метрику $\rho(x, y)$ как число позиций, по которым строки x и y различны. Например,

$$\rho(10001, 10011) = 1 \text{ и } \rho(11001, 11110) = 3.$$

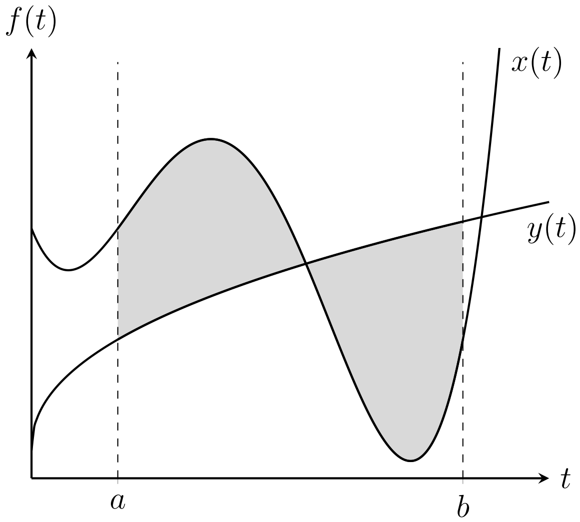


Рис. 1.4. Пример метрики (1.5) для функций $x(t)$ и $y(t)$

Упражнение 1.2.9. Докажите, что расстояние Хэмминга является метрикой.

В более общем случае расстояние Хэмминга применяется для строк одинаковой длины любых q-ичных алфавитов и служит характеристикой (или мерой) различия объектов одинаковой размерности. Расстояние Хэмминга имеет важное применение в биоинформатике. Для нуклеиновых кислот (ДНК и РНК) возможность гибридизации двух полинуклеотидных цепей с образованием вторичной структуры — двойной спирали — зависит от степени комплементарности нуклеотидных последовательностей обеих цепей. При увеличении расстояния Хэмминга количество водородных связей, образованных комплементарными парами оснований, уменьшается и, соответственно, уменьшается стабильность двойной цепи. Начиная с некоторого граничного расстояния Хэмминга гибридизация становится невозможной.

Метрика графа. Рассмотрим неориентированный связный граф $G = (V, E)$. Определим расстояние $\rho(x, y)$ между вершинами x, y графа G как число рёбер в кратчайшем пути между этими вершинами (который также называется геодезической графа). Метрика, определённая на множестве точек в терминах расстояния в графе, называется *метрикой графа.*

Пример метрики графа приведен на рис. 1.5. В качестве меток вершин указано расстояние от «самой верхней» вершины до всех остальных.

Упражнение 1.2.10. Докажите, что множество вершин неориентированного связного графа и функция расстояния образуют метрическое пространство.

Упражнение 1.2.11. Пусть $X = \mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел. Какие из следующих функций $\phi = \phi(x, y)$ определяют метрику в X:

1) $\phi(x, y) = (x - y)^2$;

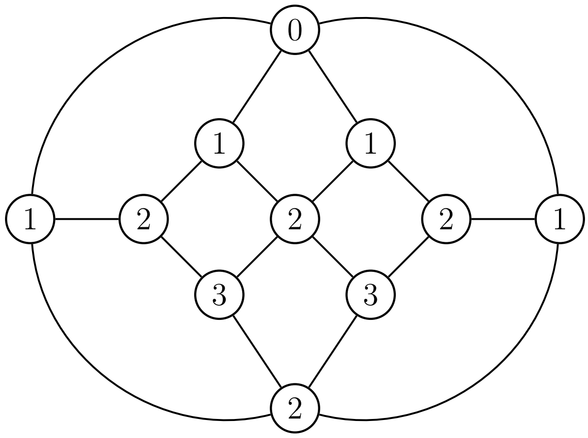


Рис. 1.5. Пример расстояний в графе

2) $\phi(x, y) = |x - y|^{\frac{1}{2}}$;

3) $\phi(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$;

4) $\phi(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$?

Опишите все функции ψ одной действительной переменной, для которых величина $\psi(|x - y|)$ является метрикой.

Упражнение 1.2.12. Рассмотрим в качестве X множество всех интегрируемых на отрезке $[a; b]$ функций. Положим

$$\phi(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Является ли ϕ метрикой в X?

Упражнение 1.2.13. Пусть k – натуральное число. Обозначим через X множество всех k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций $x = x(t)$. Пусть

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a;b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a;b]} |x'(t) - y'(t)| + \ldots + \max_{t \in [a;b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|.$$

Докажите, что ρ – метрика в X. Это метрическое пространство (X, ρ) обозначается через $C^k[a; b]$.

Упражнение 1.2.14. Пусть $p \geq 1$. Положим

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Докажите, что ρ – метрика в множестве X всех непрерывных на $[a; b]$ функций. Для пространства (X, ρ) можно использовать обозначение $\mathcal{L}^p_{\text{непр}}[a; b]$.

Упражнение 1.2.15. Для произвольного $p \geq 1$ рассмотрим множество X числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty.$$

Докажите, что величина

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

служит метрикой. Соответствующее пространство обозначается через ℓ_p.

Определение 1.2.16. *Ультраметрическое пространство* – это особый случай метрического пространства, в котором метрика удовлетворяет *усиленному неравенству треугольника*:

$$\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) \leq \max_{z \in X} \{\rho(x, z), \rho(y, z)\}.$$

Такую метрику называют *ультраметрикой.*

Проще говоря, в ультраметрическом пространстве нельзя получить большее расстояние, складывая меньшие, то есть не соблюдается «принцип Архимеда»: если имеются две величины, a и b, и a меньше b, то, взяв a слагаемых достаточное количество раз, можно превзойти b.

Ультраметрические пространства имеют ряд интересных свойств:

- всякий треугольник является равнобедренным, причём если не все его стороны равны, то одна – короче, чем две других (см. рис. 1.6);
- всякая точка шара является его центром;
- если два шара имеют общую точку, то либо они совпадают, либо один целиком содержит другой.

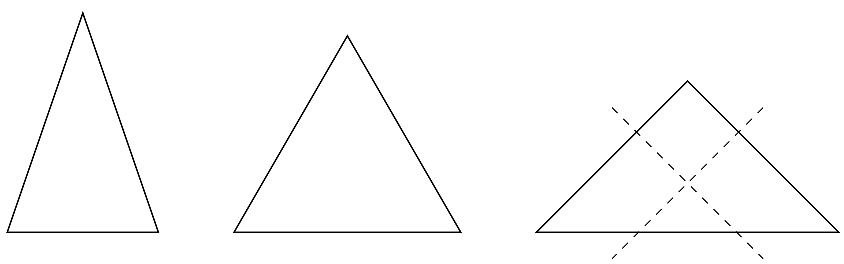


Рис. 1.6. Треугольники в ультраметрическом пространстве

Упражнение 1.2.17. Какие из метрических пространств, описанных в этом разделе, являются ультраметрическими?

1.3. Нормированные пространства. Евклидовы пространства

Важную категорию метрических пространств образуют нормированные пространства. Приведем определения.

Определение 1.3.1. Пусть $\mathbb{E}$ – векторное пространство, на котором определена действительная функция $\|x\|$, удовлетворяющая условиям:

а) $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{E}$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

б) для любого $x \in \mathbb{E}$ и для любого действительного λ выполняется равенство

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ;$$

в) для любых $x, y \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, .$$

Тогда величина $\|x\|$ называется *нормой*.

Определение 1.3.2. Векторное пространство, на котором задана норма, называется *нормированным пространством*.

Если $\mathbb{E}$ – нормированное пространство, то величина $\rho(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой.

Упражнение 1.3.3. Докажите это утверждение.

Определение 1.3.4. Пусть $\mathbb{E}$ – векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Действительная функция $\langle x, y \rangle$ (также используется обозначение $x \cdot y$) называется *скалярным произведением*, если выполняются следующие условия:

а) *симметричность*: для любых векторов $x, y \in \mathbb{E}$:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \, ;$$

б) *билинейность*: для любых векторов $x, y, z \in \mathbb{E}$ и для любого действительного числа λ:

$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \, ;$$

в) *положительная определённость*: для любого вектора $x \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Определение 1.3.5. Векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, на котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым пространством*.

Теорема 1.3.6. Для любых двух элементов евклидова пространства выполняется неравенство

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}, \tag{1.9}$$

которое называется *неравенством Коши-Буняковского-Шварца.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, тогда для любого действительного t выполняется

$$0 \leq \langle tx + y, tx + y\rangle = t^2 \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle . \tag{1.10}$$

Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена в (1.10) неположителен. Отсюда вытекает неравенство (1.9). □

Евклидово пространство можно превратить в нормированное, если положить $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; такая норма называется *евклидовой.* Условия а) и б) из определения 1.3.1 выполняются очевидным образом, а условие в) вытекает из следующей цепочки:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2 \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 .$$

Обратимся к пространствам $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$ и ℓ_2.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ скалярное произведение определяется равенством

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Из теоремы 1.3.6 и из упражнения следует, что формула (1.3) определяет метрику (проверьте!).

В пространстве $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$ скалярное произведение определяется равенством

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt, \tag{1.11}$$

а в пространстве ℓ_2 – равенством

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k. \tag{1.12}$$

Упражнение 1.3.7. Убедитесь, что величины (1.11) и (1.12) удовлетворяют условиям а) – в) определения 1.3.4 скалярного произведения.

Упражнение 1.3.8. Воспользуйтесь неравенством Коши-Буняковского-Шварца для доказательства неравенства треугольника в пространствах $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$ и ℓ_2.

Упражнение 1.3.9. Верно ли, что существует такое скалярное произведение над $\mathbb{R}^2$, что для соответствующей нормы

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$$

для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?

Упражнение 1.3.10. Докажите, что если $\mathbb{E}$ – евклидово векторное пространство, то

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

для всех $x, y \in \mathbb{E}$.

Замечание 1.3.11. Отметим, что в силу описанных свойств (определение 1.3.4) скалярное произведение и евклидово векторное пространство определяются над полем действительных чисел.

Определение 1.3.12. Скалярное произведение в векторном пространстве $\mathbb{L}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, для которого свойство симметричности заменено на *эрмитовость*: для любых векторов $x, y \in \mathbb{L}$

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle},$$

называется *эрмитовым скалярным произведением.*

Определение 1.3.13. Векторное пространство над полем комплексных чисел с определенным на нём эрмитовым скалярным произведением называется *унитарным пространством.*

В пространстве $\mathbb{C}^m$ эрмитово скалярное произведение определяется как

$$\langle x, y\rangle = x^T\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i\bar{y}_i.$$

Упражнение 1.3.14. Следом квадратной матрицы (обозначение $\operatorname{tr} A$) называется сумма элементов главной диагонали матрицы, то есть $\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$.

Докажите, что функция

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^T\bar{Y})$$

удовлетворяет свойствам эрмитова скалярного произведения в пространстве комплексных матриц размера $m \times n$.

Упражнение 1.3.15. Докажите, что если $\mathbb{L}$ – унитарное векторное пространство, то

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 i - \|x-iy\|^2 i}{4}$$

для всех $x, y \in \mathbb{L}$.

1.4. Сходимость в метрических пространствах

Напомним, что *последовательностью* называется функция, заданная на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

Определение 1.4.1. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$ в метрическом пространстве (X, ρ) назовем *сходящейся* к x_0, если числовая последовательность $\rho(x_n, x_0)$ стремится к нулю, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для любого $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. В этом случае используются привычные записи: $\lim x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$, а элемент x_0 называют *пределом* последовательности.

Упражнение 1.4.2. Докажите, что из условий $x_n \to x_0$ и $x_n \to y_0$ следует, что $x_0 = y_0$.

Упражнение 1.4.3. Пусть $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Докажите, что тогда $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$.

Упражнение 1.4.4. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = \sqrt[n]{1 + t^n}$$

в пространстве $C[0; 2]$?

Упражнение 1.4.5. Сходится ли последовательность

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$$

в пространстве ℓ_1?

Упражнение 1.4.6. Сходится ли последовательность

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$$

в пространстве ℓ_3?

Определение 1.4.7. *Открытым шаром* с центром в точке x_0 и радиусом r $(r > 0)$ называется множество

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \ \rho(x, x_0) < r\},$$

аналогично определяется *замкнутый шар*:

$$\bar{S}(x_0, r) = \{x \in X : \ \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

Упражнение 1.4.8. Пусть $S(x_1, r_1)$ и $S(x_2, r_2)$ – два открытых шара в X, причём $S(x_1, r_1) \subseteq S(x_2, r_2)$. Следует ли из этого, что $r_1 \leq r_2$?

Для понимания того, как различные метрики изменяют характеристики пространства, полезно рассмотреть следующий пример. Выберем в качестве множества X двумерную плоскость, то есть множество

$$X = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

и рассмотрим манхэттенскую, евклидову и однородную метрики:

$$\rho_1((x_a, y_a), (x_b, y_b)) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|,$$
$$\rho_2((x_a, y_a), (x_b, y_b)) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2},$$
$$\rho_\infty((x_a, y_a), (x_b, y_b)) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}.$$

На рис. 1.7 показано, как для каждой из метрик будет выглядеть сфера единичного радиуса с центром в начале координат:

$$\{x \in X \mid \rho(x, 0) = 1\}.$$

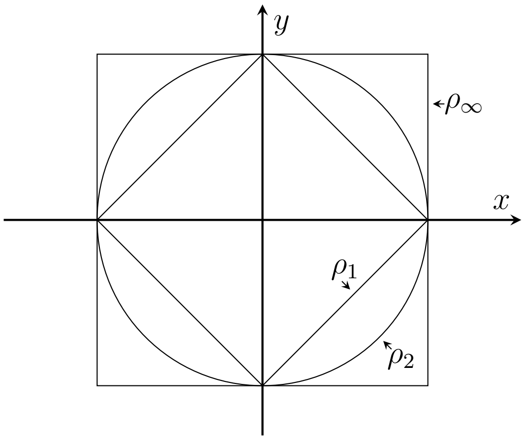


Рис. 1.7. Единичные сферы для метрик ρ_1, ρ_2 и ρ_∞

В качестве другого интересного примера можно рассмотреть пространство $C[a; b]$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| : \ a \leq t \leq b\}.$$

Пример отрытого шара приведен на рис. 1.8. Этот шар включает все непрерывные функции, графики которых на отрезке $[a; b]$ попадают в серую полосу. На первый взгляд кажется, что рис. 1.8 неверен. Однако нетрудно убедиться, что серая полоса имеет постоянную высоту для любой точки $t \in [a; b]$.

Упражнение 1.4.9. Пусть множество X не пусто и ρ – ультраметрика на X (определение 1.2.16). Пусть S – открытый шар в (X, ρ). Докажите, что каждая точка $x \in S$ является центром шара S.

Упражнение 1.4.10. Пусть (X, ρ) – ультраметрическое пространство. Пусть $S(x_1, r_1)$ и $S(x_2, r_2)$ – два открытых шара в (X, ρ). Докажите, что если шары пересекаются, то один из них содержится в другом:

$$S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ S(x_1, r_1) \subseteq S(x_2, r_2) \text{ или } S(x_2, r_2) \subseteq S(x_1, r_1).$$

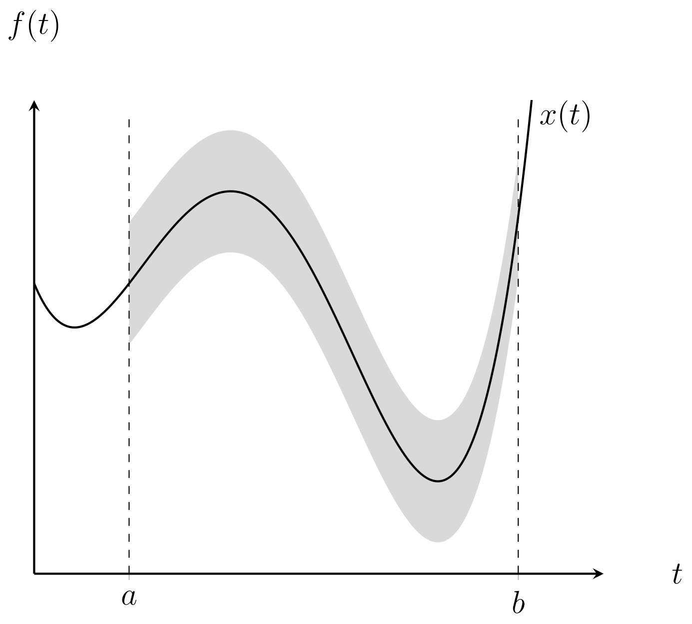


Рис. 1.8. Пример открытого шара в пространстве $C[a;b]$

Определение 1.4.11. Множество Y ($Y \subseteq X$) называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

Упражнение 1.4.12. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена (то есть ограничено множество ее значений).

Определение 1.4.13. Множество Y ($Y \subseteq X$) называется *открытым*, если для каждой его точки найдется открытый шар с центром в этой точке, который содержится в Y. (Иначе говоря, каждая точка открытого множества является *внутренней*.)

Определение 1.4.14. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $Y \subseteq X$. Точка $x \in x_0$ называется *точкой прикосновения* множества Y, если существует последовательность $x_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к x_0. Совокупность всех точек прикосновения множества Y называется его *замыканием* и обозначается $\bar{Y}$.

Определение 1.4.15. Множество $Y(Y \subseteq X)$ называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Упражнение 1.4.16. Докажите, что открытый шар – открытое множество, а замкнутый шар – замкнутое множество.

Упражнение 1.4.17. Докажите, что объединение открытых множеств – открытое множество, а пересечение замкнутых множеств – замкнутое множество.

Упражнение 1.4.18. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств – открыто, а объединение конечного набора замкнутых множеств – замкнуто.

Упражнение 1.4.19. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Докажите, что для любого открытого шара $S \subseteq X$ найдется замкнутый шар $\bar{S} \subseteq X$, что $S \subseteq \bar{S}$ и для любого замкнутого шара $\bar{S} \subseteq X$ найдется открытый шар $S \subseteq X$, что $\bar{S} \subseteq S$ (радиусы всех шаров положительны).

Упражнение 1.4.20. Покажите, что квадрат

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x, y \in (-1; 1)\}$$

является открытым множеством.

Упражнение 1.4.21. Покажите, что множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 |\ x + z^2 \sin(x + y) \geq z\}$$

является замкнутым множеством.

Упражнение 1.4.22. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ), где $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и

$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Покажите, что множество

$$\{(x_1, x_2) \in X |\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

является открытым.

Глава 2

Полные и неполные метрические пространства. Теорема о пополнении

2.1. Фундаментальные последовательности

Определение 2.1.1. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для любых $n, m \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Фундаментальную последовательность называют также *сходящейся в себе* (говорящее название!).

Почти очевидно, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной (докажите!). Бросается также в глаза внешнее сходство условия фундаментальности и условия сходимости (сравните определения 1.4.1 и 2.1.1). Поэтому можно рассчитывать, что из фундаментальности последовательности следует ее сходимость. К сожалению, это не так: существуют такие метрические пространства, в которых некоторые фундаментальные последовательности не сходятся. Классический пример такого рода представляет собой пространство (X, ρ), где X – множество всех рациональных чисел, а $\rho(x, y) = |x - y|$. Если рассмотреть иррациональное число a, представить его в виде бесконечной десятичной дроби и задать x_n как конечную дробь с первыми n десятичными знаками числа a, то составленная таким образом числовая последовательность фундаментальна (докажите!), но не сходится в нашем пространстве: число a ему не принадлежит. Таким образом, возможная причина того, что в каких-то пространствах находятся фундаментальные, но не сходящиеся последовательности, связана с недостатком элементов в этих пространствах. Так, когда множество рациональных чисел дополнили иррациональными, мы добились того, что всякая фундаментальная последовательность стала сходящейся (вспомните знаменитый критерий Коши из матанализа). Здесь есть повод для размышлений, чем мы и займемся ниже в этом разделе.

2.2. Полные и неполные пространства

Определение 2.2.1. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Пространства, которые не являются полными, имеют очень серьезный дефект, затрудняющий их применение. Для примера представим себе ситуацию, когда приходится искать решение некоторой сложной системы. Для этого используем итерационный метод, позволяющий заменять нашу систему близкими, но более простыми системами, решать которые мы умеем. Получаем последовательность решений приближенных систем, которая, как мы надеемся, поможет найти решение исходной системы. Основанием для этого служит то, что расстояние между приближенными решениями стремится к нулю, и это мы успешно доказали. Но рано радоваться: с самого начала мы выбрали неполное пространство и наши «приближения» ни к чему не приближаются. Подобная ситуация возникла уже в древние времена, когда люди задумались об отношении длины окружности к диаметру. На протяжении веков изобретались хитроумные способы находить приближенные значения этой величины, но искомое значение, которое относительно недавно (каких-то триста лет назад) удостоилось отдельной греческой буквы π в качестве имени, найти не удавалось – ведь искали среди рациональных чисел, а там прореха из-за неполноты и как раз на месте π. И только после введения в математический обиход иррациональных чисел все встало на свои места. Сказанное наталкивает на два важных вопроса. Во-первых, следует выяснить, какие из пространств, приведенных в разделе 1, являются полными, и, во-вторых, что делать, если метрическое пространство оказалось неполным.

Проведем анализ примеров пространств из раздела 1.

Теорема 2.2.2. Пространство с дискретной метрикой является полным для любого множества X.

Доказательство. Действительно, если x_n – фундаментальная последовательность, то из определения 2.1.1 вытекает, что для $\varepsilon = 1$ найдется такой номер n_1, что $\rho(x_n, x_k) < 1$ при $n, k \geq n_1$. Из формулы (1.2) следует, что при таких n, k $\rho(x_n, x_k) = 0$ и, следовательно, $x_n = x_{n_1}$ при всех $n \geq n_1$. Поэтому последовательность x_n сходится: $\lim x_n = x_{n_1}$. □

Теорема 2.2.3. Пространство $\mathbb{R}^m$ является полным.

Доказательство. Полнота $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ следует из упомянутого в п. 2.1 критерия Коши для числовых последовательностей. Для произвольного m доказательство полноты можно провести так. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_m^n)$. Из условия фундаментальности следует, что каждая координатная последовательность ξ_i^n, $i = 1, 2, \ldots, m$; $n \in \mathbb{N}$, также фундаментальна в $\mathbb{R}$ и, следовательно, сходится: $\xi_i^n \to \xi_i^0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что $x_n \to x_0$, где $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0)$ (проверьте!). □

Теорема 2.2.4. Пространство $C[a;b]$ является полным.

Вопрос о полноте пространства $C[a;b]$ фактически изучается в основном курсе математического анализа в разделе «Равномерно сходящиеся функциональные последовательности». Учитывая важность пространства $C[a;b]$ в теоретическом и прикладном отношениях, приведем подробное доказательство его полноты.

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $x_n = x_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \le t \le b$) из пространства $C[a;b]$ и докажем, что она сходится.

Запишем условие фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n, k \ge n_\varepsilon$$
$$\rho(x_n, x_k) = \max\{|x_n(t) - x_k(t)| : \; a \le t \le b\} < \varepsilon,$$

или, в эквивалентном виде,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n, k \ge n_\varepsilon$$
$$\forall t \in [a;b] \; |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном $t \in [a;b]$ числовая последовательность $x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна в $\mathbb{R}$ и, по критерию Коши, сходится. Определим на отрезке $[a;b]$ функцию значений пределов

$$x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \;\; a \le t \le b.$$

Используя предельный переход при $k \to \infty$ в условии (2.1), получим

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \ge n_\varepsilon \; \forall t \in [a;b]$$
$$|x_n(t) - x_0(t)| \le \varepsilon. \tag{2.2}$$

Покажем теперь, что функция $x_0 = x_0(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то есть содержится в $C[a;b]$. Для произвольных $t_0, t \in [a;b]$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| \le |x_0(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x_0(t_0)|. \tag{2.3}$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$, рассмотрим n_ε из условия (2.2) и положим $n = n_\varepsilon$. Тогда из (2.2) и (2.3) при любых $t_0, t \in [a;b]$ следует неравенство

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| \le |x_n(t) - x_n(t_0)| + 2\varepsilon. \tag{2.4}$$

Функция $x_n = x_n(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Поэтому для выбранных $t_0 \in [a; b]$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого при любом $t \in [a; b]$, удовлетворяющем условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|x_n(t) - x_n(t_0)| < \varepsilon.$$

С учетом (2.4) для таких t справедливо

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| < 3\varepsilon,$$

и, следовательно, функция x_0 непрерывна в точке t_0. Точка t_0 выбиралась на отрезке $[a; b]$ произвольно, поэтому $x_0 \in C[a; b]$.

Снова обратимся к условию (2.2), оно равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$$
$$\rho(x_n, x_0) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, $x_n \to x_0$. □

Теорема 2.2.5. Пространство ℓ_∞ ограниченных последовательностей является полным.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, где $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$ – ограниченная числовая последовательность. Фундаментальность x_n, $n \in \mathbb{N}$, означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n, k \geq \varepsilon$$
$$\sup\left\{\left|\xi_i^n - \xi_i^k\right| : \ i \in \mathbb{N}\right\} < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Из условия (2.5) вытекает, что для любого i числовая последовательность ξ_i^n, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна и сходится.

Рассмотрим числовую последовательность $x^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots)$, где

$$\xi_i^0 = \lim_{n\to\infty} \xi_i^n, \ i \in \mathbb{N}.$$

Выберем произвольно положительное ε, тогда из условия (2.5) следует, что найдется такое n_ε, что при всех $n, k \geq n_\varepsilon$ и для любого $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\xi_i^n - \xi_i^k\right| < \varepsilon.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\left|\xi_i^n - \xi_i^0\right| \leq \varepsilon \ (i \in \mathbb{N}).$$

Поэтому $\rho(x_n, x_0) \leq \varepsilon$ при всех $n \geq n_\varepsilon$, то есть $x_n \to x_0$. Итак, каждая фундаментальная в ℓ_∞ последовательность сходится. □

Для доказательства полноты пространств c и c_0 воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.2.6. Пусть (X,ρ) – полное метрическое пространство и пусть множество Y $(Y \subseteq X)$ замкнуто, тогда подпространство (Y,ρ) полно.

Доказательство. Если y_n, $n \in \mathbb{N}$, – фундаментальная последовательность, все члены которой принадлежат Y, то она сходится в пространстве (X,ρ): $y_n \to y_0$, а в силу замкнутости Y справедливо включение $y_0 \in Y$. $\square$

Теорема 2.2.7. Пространство c является полным.

Доказательство. Пространство c является подпространством полного пространства ℓ_∞. Поэтому, чтобы доказать полноту c, достаточно установить его замкнутость в ℓ_∞.

Следуя определению 1.4.15, рассмотрим последовательность y_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую условиям $y_n \in c$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ и $y_n \to y_0$. Покажем, что $y_0 \in c$, то есть числовая последовательность η_k^0, $k \in \mathbb{N}$, где $y_0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots)$, сходится. Для этого установим её фундаментальность. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Рассмотрим n, для которого $\rho(y_n, y_0) < \varepsilon$. Тогда для любых $k, l \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\left|\eta_k^0 - \eta_l^0\right| &\le \left|\eta_k^0 - \eta_k^n\right| + \left|\eta_k^n - \eta_s^n\right| + \left|\eta_s^n - \eta_s^0\right|, \\
\left|\eta_k^0 - \eta_l^0\right| &\le 2\rho(y_n, y_0) + \left|\eta_k^n - \eta_s^n\right| < 2\varepsilon + \left|\eta_k^n - \eta_l^n\right|.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Последовательность η_k^n, $k \in \mathbb{N}$, образующая элемент $y_n \in c$, сходится и, следовательно, фундаментальна. Поэтому существует такое k_ε, что при всех $k, l \ge k_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\eta_k^n - \eta_l^n| < \varepsilon$. Отсюда и из (2.6) вытекает, что $|\eta_k^0 - \eta_l^0| < 3\varepsilon$ при любых $k, l \ge k_\varepsilon$. $\square$

Теорема 2.2.8. Пространство c_0 является полным.

Доказательство. Пространство c_0 является подпространством полного пространства c. Поэтому, с учетом леммы 2.2.6, для доказательства полноты c_0 достаточно установить его замкнутость в c.

Предположим, что последовательность y_n, $n \in \mathbb{N}$, состоящая из элементов пространства c_0, сходится: $y_n \to y_0$. Остается убедиться в том, что $y_0 \in c_0$, то есть числовая последовательность η_k^0, $k \in \mathbb{N}$, где $y_0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots)$, стремится к нулю. Но это легко следует из неравенств

$$
\left|\eta_k^0\right| \le \left|\eta_k^0 - \eta_k^n\right| + \left|\eta_k^n\right| \le \rho(y_n, y_0) + \left|\eta_k^n\right|
$$

и из того, что $y_n = (\eta_1^n, \eta_2^n, \ldots) \in c_0$ (приведите детали рассуждения!). $\square$

Теорема 2.2.9. Пространство ℓ_2 является полным.

Доказательство. Пусть $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, – фундаментальная последовательность в ℓ_2, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n, k \geq n_\varepsilon$$
$$\rho(x_n, x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^n - \xi_i^k)} < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Для каждого k числовая последовательность ξ_k^n, $n \in \mathbb{N}$, очевидно сходится. Обозначим

$$\xi_k^0 = \lim_{n\to\infty} \xi_k^n.$$

Покажем, что

а) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^0)^2$ сходится, то есть $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots) \in \ell_2$;

б) $\rho(x_n, x_0) \to 0$, то есть $x_n \to x_0$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Из условия (2.7) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при всех $n, k \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^n - \xi_i^k)} < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Переходя в (2.8) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^n - \xi_i^0)} \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

Из свойств евклидовой нормы в $\mathbb{R}^m$ следует, что при любом $m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^0)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^n - \xi_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^n)^2}$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\xi_i^n)^2} + \varepsilon \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^n)^2} + \varepsilon.$$

Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^0)^2$ сходится; условие а) доказано.

Для доказательства б) достаточно в неравенстве (2.9) перейти к пределу при $m \to \infty$. □

Все метрические пространства, рассмотренные в этом разделе, оказались полными. Осталось проанализировать пространства $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a;b]$ и $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$.

Теорема 2.2.10. Пространство $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$ неполно.

Доказательство. Для простоты изложения будем считать, что $[a;b] = [-1;1]$; общности рассуждений это не нарушит.

Рассмотрим последовательность $x_n = x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывных на $[-1;1]$ функций:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \le t \le -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{при } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \le t \le 1, \end{cases}$$

(см. рис. 2.1).

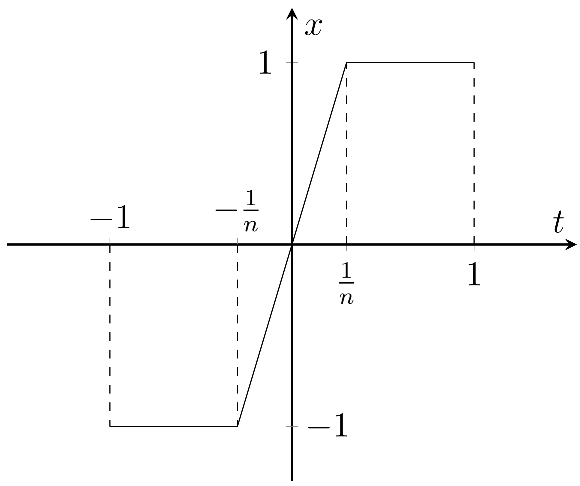


Рис. 2.1. График функции $x_n = x_n(t)$

Эта последовательность фундаментальна в $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[-1;1]$, так как

$$\rho^2(x_n, x_k) = \int_{-1}^{1} (x_n(t) - x_k(t))^2 dt \le 2\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right\} \to 0 \ (n, k \to \infty).$$

Докажем, что x_n, $n \in \mathbb{N}$, не сходится в пространстве $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[-1;1]$. Рассуждения проведем от противного. Предположим, что для некоторой непрерывной на $[-1;1]$ функции $x_0 = x_0(t)$ выполнено условие $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Из этого условия следует, что для любого отрезка $[\alpha;\beta]$, где $[\alpha;\beta] \subseteq [-1;1]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x_n(t) - y_n(t))^2 dt \to 0. \tag{2.10}$$

Рассмотрим $t_0 \in (0;1]$. Значение $x_0(t_0)$ равно 1, так как в противном случае, в силу непрерывности $x_0 = x_0(t)$, выполнялось бы

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists \alpha; \beta > 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$|x_0(t) - 1| \ge \varepsilon.$$

Но при достаточно больших n имеем $\frac{1}{n} < \alpha$, следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x_n(t) - y_n(t))^2 dt \geq \varepsilon^2(\beta - \alpha),$$

что противоречит (2.1).

Итак, $x_0(t) = 1$ при всех $t > 0$. Аналогично можно доказать, что $x_0(t) = -1$ при всех $t < 0$. Следовательно, функция $x_0 = x_0(t)$ разрывна в 0. Пришли к противоречию. □

Теорема 2.2.11. Пространство $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a;b]$ является неполным.

Доказательство. Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы 2.2.10. □

2.3. Пополнение метрического пространства

Обнаруженная нами неполнота пространств $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a;b]$ и $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$ служит поводом для серьёзного разговора. С одной стороны, эти пространства появились не на пустом месте. Так, изучение тригонометрических рядов, или гармонический анализ, естественным образом приводит к сходимости по метрике пространства $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$; напомним, что она называется *сходимостью в среднем квадратичном.* С другой стороны, это пространство обладает дефектом – неполнотой – который способен затруднить работу с пространством. Аналогичные ситуации могут возникать при конструировании новых метрических пространств. Поэтому возникает потребность в получении универсального метода, позволяющего превращать неполные пространства (X, ρ) в полные. Совсем грубо идею метода можно описать так: требуется «придумать» новые элементы, при добавлении которых к множеству X пространство станет полным. Вопрос заключается в том, где искать эти дополнительные элементы. Например, попытка пополнить $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$ интегрируемыми, в том числе и разрывными, функциями несостоятельна уже потому, что пострадает аксиома a) из определения метрического пространства (п. 1.1).

Универсальное решение обозначившейся проблемы содержит приведенная ниже теорема о пополнении. Предварительно сформулируем ряд определений.

Определение 2.3.1. Пусть (X, ρ) и (X', ρ') – метрические пространства. Они называются *изометричными*, если существует такое взаимно однозначное отображение $\phi : X \to X'$, что для любых $u, v \in X$ выполняется равенство

$$\rho(u, v) = \rho'(\phi(u), \phi(v)).$$

Определение 2.3.2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $Y \subseteq X$. Y называется *всюду плотным в* X, если его замыкание $\overline{Y}$ совпадает с X. Иначе говоря, любая окрестность каждой точки из X содержит хотя бы одну точку из Y.

Сформулируем теперь и докажем одну из важнейших теорем теории метрических пространств.

Теорема 2.3.3 (о пополнении метрического пространства)**.** Для любого метрического пространства (X, ρ) существует метрическое пространство (X', ρ'), обладающее следующими свойствами:

а) (X', ρ') полно;

б) X' содержит изометричное пространству X подпространство Y';

в) Y' всюду плотно в X'.

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим множество Φ всех фундаментальных в (X, ρ) последовательностей. В нем определим отношение эквивалентности: ϕ и ψ из Φ, где $\phi = (x_1, x_2, \ldots)$, $\psi = (y_1, y_2, \ldots)$, назовем эквивалентными, если

$$\lim \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Такие последовательности называются *конфинальными*; будем использовать обозначение: $\phi \sim \psi$.

Нетрудно убедиться в том, что это отношение обладает стандартными свойствами отношения эквивалентности:

а) $\forall \phi \in \Phi$ справедливо: $\phi \sim \phi$ (рефлексивность);

б) $\forall \phi, \psi \in \Phi$ из условия $\phi \sim \psi$ следует, что $\psi \sim \phi$ (симметричность);

в) $\forall \phi, \psi, \alpha \in \Phi$ из условий $\phi \sim \psi$ и $\psi \sim \alpha$ следует, что $\phi \sim \alpha$ (транзитивность),

которые вытекают из аксиом метрики (проверьте!).

Как известно из теории множеств, отношение эквивалентности разбивает множество Φ на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. Обозначим через X' совокупность этих классов эквивалентности. Для множества X' определим величину ρ' формулой

$$\rho'(x', y') = \lim \rho(x_n, y_n), \tag{2.11}$$

где $\phi = (x_1, x_2, \ldots) \in x'$, $\psi = (y_1, y_2, \ldots) \in y'$.

Докажем следующие утверждения.

Предел в формуле (2.11) **существует**. Действительно, из фундаментальности ϕ и ψ и из очевидных неравенств

$$\rho(x_n, y_y) \leq \rho(x_n, x_k) + \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, y_n),$$

$$\rho(x_k, y_k) \leq \rho(x_n, x_k) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_k, y_n)$$

вытекает неравенство

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_k, y_k)| \le \rho(x_n, x_k) + \rho(y_n, y_k),$$

из которого следует фундаментальность последовательности $\rho(x_n, y_n)$.

Предел в (2.11) не зависит от выбора конфинальных последовательностей в классах x' и y'. Пусть $\phi, \tilde{\phi} \in x'$ и $\psi, \tilde{\psi} \in y'$, где

$$\phi = (x_1, x_2, \ldots),\ \tilde{\phi} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots),\ \psi = (y_1, y_2, \ldots),\ \tilde{\psi} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots).$$

Тогда

$$\rho(x_n, y_y) \le \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \rho(\tilde{y}_n, y_n),$$
$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \le \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(\tilde{y}_n, y_n).$$

Поэтому

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \le \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(y_n, \tilde{y}_n),$$

откуда следует справедливость утверждения, так как правая часть последнего неравенства стремится к нулю.

Величина ρ' удовлетворяет аксиомам метрики. Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из того, что ρ – метрика.

Итак, определено новое метрическое пространство (X', ρ').

Шаг 2. Определим множество Y' в пространстве (X', ρ') следующим образом. Для каждого $x \in X$ рассмотрим стационарную последовательность $\phi = \phi(x) = (x_1, x_2, \ldots)$, где $x_n = x$ $(\forall n)$. Она, очевидно, фундаментальна и, следовательно, содержится в некотором классе $y' = y'(x) \in X'$. Положим

$$Y' = \{y' = y'(x) :\ x \in X\}.$$

Легко проверяется, что, во-первых, соответствие между X и Y', где $x \to y'(x)$, является взаимно-однозначным, и, во-вторых,

$$\forall u, v \in X\ \ \rho'(y'(u), y'(v)) = \rho(u, v).$$

Это означает, что пространства (X, ρ) и (Y', ρ') изометричны.

Шаг 3. Докажем, что подпространство (Y', ρ') всюду плотно в (X', ρ').

Выберем $x' \in X'$. Установим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists y' \in Y'$$
$$\rho'(y', x') < \varepsilon.$$

Пусть $\phi = (x_1, x_2, \ldots) \in x'$ и $\varepsilon > 0$. Так как ϕ фундаментальна, то

$$\exists n_\varepsilon \ \forall n, m \geq n_\varepsilon$$
$$\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Обозначим $x = x_{n_\varepsilon}$ и положим $y'(x) = y'$. Тогда

$$\rho'(y', x') = \lim \rho(x_n, x) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Шаг 4. Для завершения доказательства теоремы остается установить полноту пространства (X', ρ').

Выберем в X' фундаментальную последовательность x'_n, $n \in \mathbb{N}$, и докажем, что она сходится. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим такой $y'_n \in Y'$, для которого $\rho'(x'_n, y'_n) < \frac{1}{n}$; это возможно благодаря плотности Y' в X' (Шаг 3), и обозначим через x_n элемент из X, для которого $y'_n = y'(x_n)$ (см. Шаг 2). Положим $\phi = (x_1, x_2, \ldots)$ и покажем, что ϕ – фундаментальная последовательность в пространстве (X, ρ). Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_k) = \rho'(y'_n, y'_k) &\leq \rho'(y'_n, x'_n) + \rho(x'_n, x'_k) + \rho(x'_k, y'_k) \\ &< \frac{1}{n} + \rho(x'_n, x'_k) + \frac{1}{k}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Так как последовательность x'_n, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна, то из (2.12) вытекает и фундаментальность последовательности ϕ. Следовательно, ϕ содержится в некотором классе эквивалентности $x' \in X'$: $\phi \in x'$. Докажем, что

$$x' = \lim x'_n.$$

Оценим:

$$\rho'(x'_n, x') \leq \rho'(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, x') < \frac{1}{n} + \rho'(y'_n, x'). \tag{2.13}$$

Для величины $\rho'(y'_n, x')$ из (2.13) справедливо равенство

$$\rho'(y'_n, x') = \lim_{k \to \infty} \rho(x_n, x_k),$$

причём последний предел существует (см. Шаг 1).

Ещё раз обращаясь к фундаментальности ϕ, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n, k \geq n_\varepsilon$$
$$\rho(x_n, x_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно, $\rho'(y'_n, x') \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq n_\varepsilon$. И, наконец, при всех $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$n \geq \max\left\{n_\varepsilon, \frac{2}{\varepsilon}\right\},$$

из (2.13) следует, что

$$\rho'(x'_n, x') < \varepsilon.$$

□

Значение доказанной теоремы о пополнении трудно переоценить. Благодаря ей опасности, связанные с неполнотой пространства, принципиально устранимы. Таким образом, пополнение пространства $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a; b]$ – это классическое *лебегово пространство* $\mathcal{L}^2[a; b]$, которое может быть определено с использованием альтернативной конструкции, основанной на мере и интеграле Лебега [10].

Глава 3

Классификация Бэра метрических пространств

3.1. Последовательности вложенных замкнутых множеств

Определение 3.1.1. Диаметром ограниченного множества Y в метрическом пространстве (X, ρ) называется

$$\operatorname{diam} Y = \sup\{\rho(u, v) : \ u, v \in Y\}.$$

Теорема 3.1.2. Пусть Y_n, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность непустых замкнутых множеств в полном пространстве (X, ρ), для которой выполняются условия:

а) множества вложены, то есть $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

б) последовательность $d_n = \operatorname{diam} Y_n$ стремится к нулю.

Тогда существует единственная точка, принадлежащая множествам Y_n.

Доказательство. Выберем в каждом множестве Y_n по точке $y_n \in Y_n$. Получившаяся последовательность является фундаментальной, так как $\rho(y_n, y_k) \leq d_n$ при $k \geq n$ и $d_n \to 0$.

В силу полноты (X, ρ) последовательность y_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится. Её предел y_0 является точкой прикосновения каждого множества Y_n, и $y_0 \in Y_n$ благодаря замкнутости Y_n.

Итак, существование общей для всех множеств Y_n точки доказано. Единственность такой точки вытекает из следующего рассуждения. Если какая-нибудь точка z_0 также принадлежит всем Y_n, то $\rho(y_0, z_0) \leq d_n$ при любом n, и, следовательно, $z_0 = y_0$. □

Замечание 3.1.3. Последовательность замкнутых вложенных множеств в полном пространстве без предположения о том, что $d_n \to 0$, может не иметь общей точки.

Для подтверждения рассмотрим в пространстве $C[-1;1]$ множества Y_n, которые состоят из всех непрерывных на $[-1;1]$ функций $x = x(t)$, удовлетворяющих условиям (см. рис. 3.1):

$$\begin{cases} x(t) = -1 & \text{при } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ -1 \leq x(t) \leq \frac{1}{n}t & \text{при } -\frac{1}{n} \leq t \leq 0, \\ \frac{1}{n}t \leq x(t) \leq 1 & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ x(t) = 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

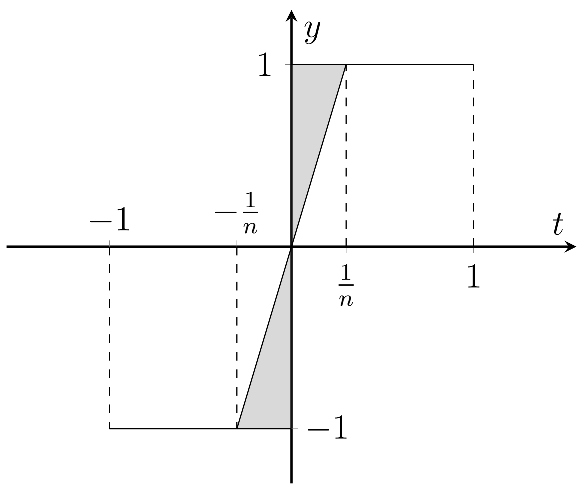


Рис. 3.1. К множеству функций Y_n

Каждое множество Y_n является замкнутым, так как если все функции $x_k = x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, сходящейся в $C[-1;1]$ последовательности содержатся в Y_n, то есть для них выполнены условия (3.1), то и для предельной функции эти условия тоже выполняются. Ясно также, что эти множества вложены: $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Однако пересечение всех множеств Y_n пусто, так как функция $x = x(t)$, удовлетворяющая условию (3.1) для каждого $n \in \mathbb{N}$, разрывна в точке 0.

Замечание 3.1.4. Частным случаем теоремы 3.1.2 служит известная *теорема о вложенных шарах*: последовательность $Y_n = \bar{S}(x_n, r_n)$ замкнутых вложенных шаров в полном метрическом пространстве, у которой $r_n \to 0$, имеет единственную общую точку. Для доказательства достаточно учесть, что

$$d = \operatorname{diam} \bar{S}(x_0, r) \leq 2r. \tag{3.2}$$

Упражнение 3.1.5. Может ли неравенство в (3.2) быть строгим?

Замечание 3.1.6. Теорема о вложенных шарах (замечание 3.1.4) обратима. Точнее, справедливо утверждение: если в метрическом пространстве (X, ρ) всякая последовательность $\bar{S}(x_n, r_n)$ замкнутых вложенных шаров, для которой $r_n \to 0$, имеет общую точку, то (X, ρ) полно.

Упражнение 3.1.7. Докажите это утверждение.

3.2. Классификация метрических пространств по Бэру

Выше рассматривалось понятие всюду плотного множества. В некотором смысле его противоположностью является *нигде не плотное множество.*

Определение 3.2.1. Множество Y, $Y \subseteq X$, в метрическом пространстве (X, ρ) называется *нигде не плотным*, если его замыкание $\overline{Y}$ не содержит ни одного открытого шара.

Последнее условие эквивалентно следующему: в любом открытом шаре S содержится открытый шар s, для которого $s \cap Y = \emptyset$ (докажите эквивалентность!).

Упражнение 3.2.2. Докажите, что если множество Y нигде не плотно в X, то его дополнение $X \backslash Y$ всюду плотно.

Упражнение 3.2.3. Верно ли, что дополнение $X \backslash Y$ всюду плотного в X множества Y нигде не плотно?

Упражнение 3.2.4. Является ли нигде не плотным в $C[a; b]$ множество всех постоянных функций? А множество всех алгебраических многочленов?

Упражнение 3.2.5. Пусть n_0 – фиксированное натуральное число и

$$L_{n_0} = \{x = (\xi_n) \in \ell_2 : \ \xi_n = 0 \text{ при } n > n_0\} .$$

Докажите, что множество L_{n_0} нигде не плотно в ℓ_2.

Определение 3.2.6. Метрическое пространство (X, ρ) называется *пространством первой категории по Бэру*, если X можно представить в виде объединения счётной совокупности нигде не плотных множеств. В противном случае (X, ρ) называется *пространством второй категории.*

Теорема 3.2.7 (Бэр)**.** Полное метрическое пространство является пространством второй категории.

Доказательство. Покажем, что если (X, ρ) – полное метрическое пространство, а Y_n, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность нигде не плотных множеств, то найдется точка $x_0 \in X$, для которой $x_0 \notin Y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Для этого построим последовательность $\bar{s}_n$ замкнутых вложенных шаров, обладающих свойствами:

а) последовательность r_n их радиусов стремится к нулю;

б) $\bar{s}_n \cap Y_n = \emptyset$ для любого n.

Тогда общая для всех шаров $\bar{s}_n$ точка x_0, которая существует благодаря теореме 3.1.2, будет искомой.

Итак, приступим к построению шаров $\bar{s}_n$. Сначала выберем произвольно открытый шар s_0. Так как множество Y_1 нигде не плотно в X, то найдется открытый шар σ_1, который содержится в s_0 и не пересекается с Y_1. Рассмотрим содержащийся в σ_1 замкнутый шар $\bar{s}_1$, радиус r_1 которого удовлетворяет неравенству $r_1 \leq 1$.

На следующем шаге проведем похожие построения. Берем s_1 – открытый шар, радиус и центр те же, что у шара $\bar{s}_1$. В нем содержится открытый шар σ_2, который не пересекается с Y_2. В σ_2 найдется замкнутый шар $\bar{s}_2$, радиус которого $r_2 \leq \frac{1}{2}$.

Продолжим построение для $n = 3, 4, \ldots$, в результате которых установим существование последовательности $\bar{s}_n$, $n \in \mathbb{N}$, замкнутых вложенных шаров со свойствами а) и б). □

Упражнение 3.2.8. Приведите пример убывающей последовательности всюду плотных множеств в пространстве $\mathbb{R}$, которые имеют нулевое пересечение.

Упражнение 3.2.9. С помощью теоремы Бэра докажите следующие утверждения:

а) множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно;

б) непрерывные функции, обладающие производной хотя бы в одной точке, образуют множество первой категории в пространстве $C[a; b]$.

3.3. Применение теоремы Бэра для доказательства существования непрерывной и нигде не дифференцируемой функции

В 1806 году великим французским физиком и математиком Андре-Мари Ампером была сформулирована гипотеза, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду, за исключением «исключительных и изолированных» значений аргумента [16]. Этот принципиальный вопрос о множестве точек, в которых непрерывная функция может быть недифференцируемой, на протяжении столетия привлекал внимание выдающихся ученых: Дюбуа-Реймона, Вейерштрасса, Римана, ван дер Вардена и др. Так, в 1861 году Риман привел своим слушателям в качестве контрпримера следующую функцию:

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Однако исследование дифференцируемости этой функции чрезвычайно сложно. Джозеф Гервер доказал, что эта функция все же имеет производную в некоторых рациональных точках, лишь в 1970 году [17]. В 1872 году Вейерштрасс построил пример функционального ряда, сумма которого непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция [20].

Следующая теорема устанавливает существование подобной функции.

Теорема 3.3.1. Для любого отрезка существует непрерывная на нём функция, которая не дифференцируема ни в одной точке отрезка.

Доказательство. Выберем произвольно отрезок $[a; b]$ и рассмотрим пространство $C[a; b]$ непрерывных функций, которое является полным.

Для каждого натурального n определим множество $Y_n \subseteq C[a; b]$ с помощью формулы

$$Y_n = \left\{ x \in C[a;b] : \ \exists t_0 \in [a;b] \ \forall h \ \left| \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{n} \right| \leq n \right\}. \tag{3.3}$$

Поясним смысл (3.3). Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $x = x(t)$ включается в множество Y_n в том и только том случае, если весь её график можно закрыть фигурой, заключённой между двумя прямыми с угловыми коэффициентами $k = n$ и $k = -n$, поместив точку пересечения этих прямых в какую-нибудь точку графика (см. рис. 3.2).

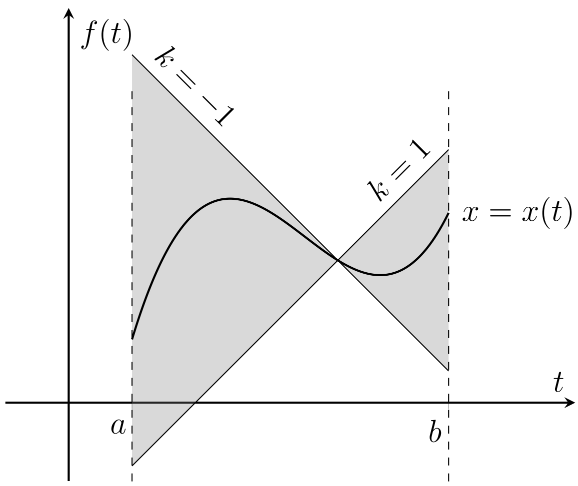


Рис. 3.2. Пример графика функции $x \in Y_1$

Сформулируем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 3.3.2. Если непрерывная функция $x = x(t)$ дифференцируема хотя бы в одной точке, то найдется такое $n \in \mathbb{N}$, для которого $x \in Y_n$.

Утверждение 3.3.3. Каждое из множеств Y_n нигде не плотно.

Из этих утверждений, с учётом теоремы 3.2.7 и полноты пространства $C[a;b]$, непосредственно следует справедливость обсуждаемой теоремы 3.3.1. Таким образом, осталось доказать утверждения 3.3.2 и 3.3.3.

Доказательство утверждения 3.3.2. Предположим, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция дифференцируема в точке t_0. Обозначим через n_1 натуральное число, для которого $|x'(t_0)| < n_1$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ при всех h, для которых $|h| \le \delta$ и $t_0 + h \in [a;b]$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \right| \le n_1. \tag{3.4}$$

Из непрерывности $x = x(t)$ на $[a;b]$ следует её ограниченность:

$$\exists M \ \forall t \in [a;b] \ |x(t)| \le M.$$

Обозначим через n_2 натуральное число, для которого

$$n_2 \ge \frac{1}{\delta}(|x(t_0) + M|),$$

и положим $n = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда неравенство в (3.3) при $|h| \le \delta$ выполняется в силу (3.4), а при $|h| \ge \delta$ оно также справедливо:

$$\left| \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \right| \le \frac{|x(t_0+h)| + |x(t_0)|}{h} \le n_2 \le n.$$

□

Доказательство утверждения 3.3.3. Выберем произвольно и зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в пространстве $C[a;b]$ шар $S = S(x_0, R)$, также выбранный произвольно. Начнем строить шар s, удовлетворяющий условиям

$$s \subseteq S, \ \ s \cap Y_n = \emptyset. \tag{3.5}$$

В качестве центра y_0 шара $s = (y_0, r)$ рассмотрим непрерывную ломаную, состоящую из конечного числа звеньев – отрезков, угловой коэффициент каждого из которых равен $2n$ или $-2n$. Кроме этого, потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho(x_0, y_0) = \max\{|x_0(t) - y_0(t)| : \ a \le t \le b\} \le \frac{1}{2}R. \tag{3.6}$$

Обозначим через l минимальную из длин звеньев ломаной и положим

$$r = \min\left\{\frac{1}{2}R, \frac{1}{12}l\right\}.$$

Покажем, что шар $s = s(y_0, r)$ удовлетворяет условиям (3.5). Первое из этих условий следует из того, что $r \le \frac{1}{2}$ и из (3.6). Для доказательства того, что $s \cap Y_n = \emptyset$ рассмотрим непрерывную на $[a;b]$ функцию $x = x(t)$ из шара s.

Выберем точку $Q = (t, x(t))$ на графике этой функции и проведём через неё две прямые с угловыми коэффициентами n и $-n$. Предположим, что $t \in [\alpha; \beta]$, где $[\alpha; \beta]$ – отрезок, соответствующий некоторому звену ломаной y_0 (см. рис. 3.3).

На этом рисунке длины отрезков AB и CD равны $2r$, отрезки AD и BC имеют длину, не меньшую l, пунктирная линия в параллелограмме $ABCD$ – это часть графика функции y_0, то есть выбранное звено ломаной, точки $(t, x(t))$ графика любой функции $x \in s$, соответствующие $t \in [\alpha; \beta]$, находятся в $ABCD$. Опираясь на сведения из курса геометрии средней школы нетрудно показать, что при $r \leq \frac{1}{12}l$ и при любом расположении точки Q в параллелограмме $ABCD$ хотя бы один из отрезков AB или CD окажется вне области, ограниченной прямыми, проходящими через точку Q с угловыми коэффициентами n и $-n$. (Проведите рассуждения!) Поэтому всякая функция x из s не принадлежит множеству Y_n, то есть $s \cap Y_n = \emptyset$. □

□

Упомянутым выше контрпримером к гипотезе Ампера является функция Вейерштрасса. Она задается на всей вещественной прямой единым аналитическим выражением:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где a – произвольное нечетное число, неравное единице, а b – положительное число, меньшее единицы. Этот функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n,$$

поэтому функция w определена и непрерывна при всех вещественных x. Отсутствие производной во всех точках при

$$ab \geq 1 \text{ и } a > 1$$

было установлено Харди [18].

График функции Вейерштрасса на отрезке $[-2; 2]$ приведен на рис. 3.4.

Ещё более простой пример принадлежит ван дер Вардену (1930):

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n},$$

где фигурные скобки означают взятие дробной части [19].

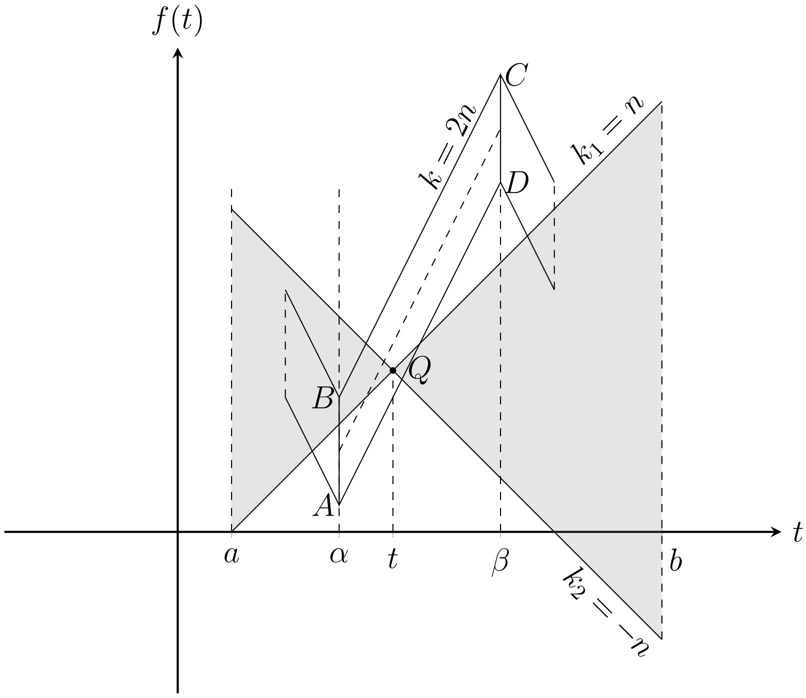


Рис. 3.3. Звено ломаной y_0

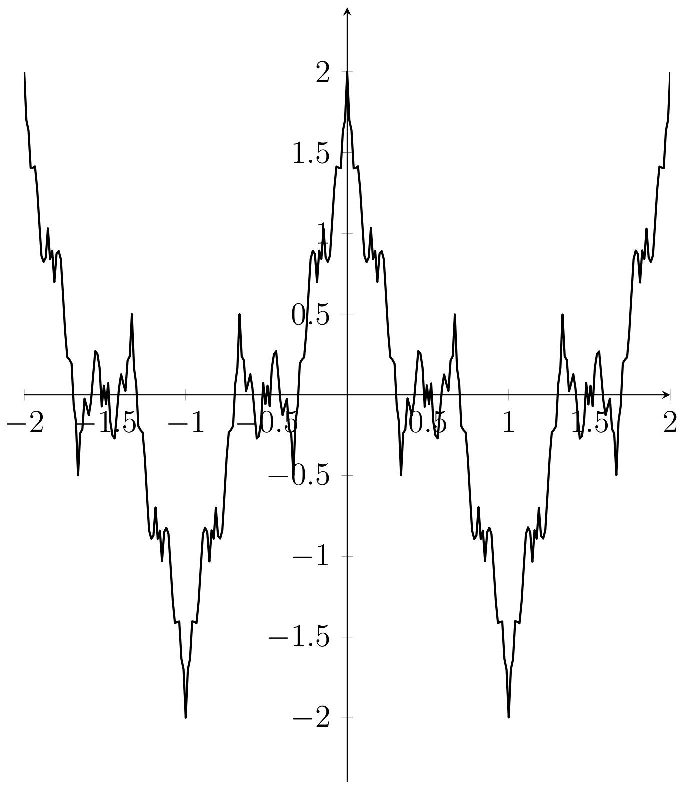


Рис. 3.4. Функция Вейерштрасса

Глава 4

Сепарабельные метрические пространства

4.1. Определение сепарабельного пространства

Определение 4.1.1. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепарабельным*, если оно содержит конечное или счётное множество Y, которое всюду плотно в X: $\bar{Y} = X$.

Упражнение 4.1.2. Докажите, что подпространство сепарабельного метрического пространства также сепарабельно.

Сепарабельность пространства указывает на некоторую простоту его устройства, служит основой для различных приближённых методов, позволяет использовать множество базисных элементов небольшой мощности и т. д. В этой связи важно выяснить, какие из пространств, рассмотренных в разделе 1, являются сепарабельными.

4.2. Примеры сепарабельных и несепарабельных метрических пространств

Теорема 4.2.1. Пространство с дискретной метрикой сепарабельно тогда и только тогда, когда множество X его элементов конечно или счётно.

Доказательство. Действительно, единственное всюду плотное множество в X – это само X. □

Теорема 4.2.2. Пространство $\mathbb{R}^m$ сепарабельно.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^1$, то есть в множестве действительных чисел, совокупность $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел образует счётное, всюду плотное подмножество. Для произвольного m эту роль выполняет множество

$$Y = \mathbb{Q}^m = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$$

(декартово произведение m множеств, каждое из которых есть $\mathbb{Q}$). $\square$

Упражнение 4.2.3. Докажите, что множество $Y = \mathbb{Q}^m$ счётно и всюду плотно в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 4.2.4. Пространство $C[a;b]$ является сепарабельным.

Доказательство. В качестве счётного и всюду плотного множества Y в этом пространстве можно рассмотреть совокупность всех непрерывных функций $y = y(t)$, удовлетворяющих условиям:

а) каждая функция $y \in Y$ является кусочно-линейной, то есть её графиком служит ломаная, состоящая из конечного множества отрезков (звеньев);

б) концами звеньев служат точки с рациональными координатами, а в точках a и b рациональны координаты $y(a)$ и $y(b)$.

Счётность Y следует из хорошо известных фактов теории множеств. Для доказательства того, что Y всюду плотно в $C[a;b]$, достаточно показать, что

$$\forall x \in C[a;b] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in Y$$
$$\rho(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| : \ a \leq t \leq b\} < \varepsilon.$$

Выберем произвольно $x \in C[a;b]$ и $\varepsilon > 0$. Так как функция $x = x(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке. Поэтому

$$\exists \delta > 0 \ \forall t, s \in [a;b]$$
$$|t - s| < \delta \ \Rightarrow \ |x(t) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Разобьём отрезок $[a;b]$ точками t_i $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b)$ так, чтобы

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \ |t_i - t_{i-1}| < \delta,$$

для каждого i выберем рациональное y_i, для которого выполняется неравенство

$$|y_i - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5},$$

и рассмотрим функцию $y = y(t)$ из множества Y, которая состоит из линейных звеньев на отрезках $[t_{i-1}; t_i]$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $y(t_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$.

Выберем точку $t \in [a;b]$ и обозначим через t_i ближайшую к ней справа точку разбиения. Тогда

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\le |x(t)-x(t_i)| + |x(t_i)-y(t_i)| + |y(t_i)-y(t)| \\
&< \frac{2}{5}\varepsilon + |y(t_i)-y(t)| \\
&\le \frac{1}{3}\varepsilon + |y(t_i)-y(t_{i-1})| \\
&\le \frac{2}{5}\varepsilon + |y(t_i)-x(t_i)| + |x(t_i)-x(t_{i-1})| + |x(t_{i-1})-y(t_{i-1})| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Точка t выбиралась произвольно, поэтому

$$\rho(x,y) = \max\{|x(t)-y(t)| :\ a \le t \le b\} < \varepsilon.$$

□

Упражнение 4.2.5. Докажите, что множество Y, состоящее из всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами, также счётно и в $C[a;b]$ всюду плотно.

Теорема 4.2.6. Пространства $\mathcal{L}^1[a;b]$ и $\mathcal{L}^2[a;b]$ сепарабельны.

Доказательство. Для доказательства сепарабельности этих пространств воспользуемся следующим рассуждением. Для непрерывных на $[a;b]$ функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ обозначим

$$\rho(x,y) = \max\{|x(t)-y(t)| :\ a \le t \le b\} \text{ – метрика в } C[a;b],$$

$$\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt \text{ – метрика в } \mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a;b],$$

$$\rho_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt} \text{ – метрика в } \mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b].$$

Очевидны неравенства

$$\rho_1(x,y) \le (b-a)\rho(x,y), \tag{4.1}$$

$$\rho_2(x,y) \le \sqrt{b-a}\,\rho(x,y), \tag{4.2}$$

из которых следует, что любое всюду плотное множество в $C[a;b]$ всюду плотно в $\mathcal{L}^1_{\text{непр}}[a;b]$ и $\mathcal{L}^2_{\text{непр}}[a;b]$, которые, в свою очередь, изометричны всюду плотным подпространствам пространств $\mathcal{L}^1[a;b]$ и $\mathcal{L}^2[a;b]$ соответственно. Таким образом, из сепарабельности пространства $C[a;b]$ вытекает сепарабельность $\mathcal{L}^1[a;b]$ и $\mathcal{L}^2[a;b]$. □

Теорема 4.2.7. Пространство ℓ_∞ несепарабельно.

Доказательство. Рассмотрим в ℓ_∞ множество Z, состоящее из всех последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, для которых $\xi_i \in \{0, 1\}$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Множество Z имеет мощность континуума (оно равномощно множеству всех действительных чисел из отрезка $[0; 1]$). Пусть теперь Y – всюду плотное множество в ℓ_∞. Для каждого $x \in Z$ рассмотрим $y = y(x) \in Y$, для которого $\rho(y, x) < \frac{1}{2}$. Пусть $x', x'' \in Z$ и $x' \neq x''$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 = \rho(x', x'') &\leq \rho(x', y(x')) + \rho(y(x'), y(x'')) + \rho(x'', y(x'')) \\ &< \frac{1}{2} + \rho(y(x'), y(x'')) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $y(x') \neq y(x'')$. Поэтому множество

$$\widetilde{Y} = \{y = y(x) \in Y : \ x \in Z\},$$

являющееся подмножеством Y, имеет мощность континуума. Следовательно, любое всюду плотное в ℓ_∞ множество несчётно. □

Теорема 4.2.8. Пространство c является сепарабельным.

Доказательство. Счётным всюду плотным множеством Y в этом пространстве служит, например, совокупность всех ограниченных последовательностей вида

$$y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_k, \xi_k, \ldots),$$

все члены ξ_i которых рациональны и, начиная с некоторого номера, имеют одно и то же значение:

$$\exists k \ \forall i \geq k \ \xi_i = \xi_k.$$

□

Теорема 4.2.9. Пространства c_0 и ℓ_2 также сепарабельны.

Доказательство. В обоих этих пространствах множество Y последовательностей $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, составленных из рациональных чисел, каждая из которых, начиная с некоторого номера, обращается в нуль:

$$\forall y \in Y \ \exists k \ \forall i \geq k \ \xi_i = 0,$$

является всюду плотным. □

Замечание 4.2.10. Пространство c_0 сепарабельно и как подпространство сепарабельного пространства c (см. упражнение 4.1.2).

Упражнение 4.2.11. Докажите, что пространство s всех числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

является сепарабельным метрическим пространством.

Глава 5

Предкомпактные и компактные метрические пространства

Одним из самых важных и полезных утверждений математического анализа служит *теорема Больцано-Вейерштрасса* о том, что всякая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^1$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Подобное утверждение может оказаться неверным, если вместо $\mathbb{R}^1$ (а также $\mathbb{R}^k$) рассматривать другие метрические пространства. Так, в пространстве ℓ_∞ ограниченная последовательность $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, у n-го члена которой единица располагается на n-м месте, а остальные – нули, не содержит сходящуюся подпоследовательность (докажите!).

Естественно возникает вопрос о том, какие свойства метрических пространств обеспечивают справедливость утверждений, подобных теореме Больцано - Вейерштрасса.

5.1. Основные определения. Обсуждение

Определение 5.1.1. Метрическое пространство называется *предкомпактным*, если любая последовательность в этом пространстве содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение 5.1.2. Метрическое пространство называется *компактным*, или *компактом*, если любая последовательность в этом пространстве содержит сходящуюся подпоследовательность.

Заметим, что в определениях 5.1.1 и 5.1.2 слова «метрическое пространство» можно заменить словами «множество в метрическом пространстве» или «подпространство метрического пространства». В любом случае смысл состоит в том, что часть метрического пространства рассматривается как самостоятельное пространство.

Сформулируем несколько утверждений, доказательство которых не составляет труда.

Утверждение 5.1.3. Компактное пространство является предкомпактным.

Утверждение 5.1.4. Предкомпактное пространство ограничено.

Утверждение 5.1.5. Компактное пространство полно.

Утверждение 5.1.6. Предкомпактное и полное пространство компактно.

Утверждение 5.1.7. Множество X, $X \subseteq \mathbb{R}^k$, предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Утверждение 5.1.8. Множество X, $X \subseteq \mathbb{R}^k$, компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Утверждение 5.1.9. Пространство (X, ρ) с дискретной метрикой предкомпактно тогда и только тогда, когда множество X конечно.

Утверждение 5.1.10. В пространствах $C[a;b]$, $\mathcal{L}^1[a;b]$, $\mathcal{L}^2[a;b]$, ℓ_∞, c, c_0, ℓ_2 каждый шар положительного радиуса непредкомпактен.

5.2. Критерий Хаусдорфа

В этом пункте рассматривается утверждение, которое во многих случаях помогает выяснить, предкомпактно или нет то или иное метрическое пространство.

Определение 5.2.1. Множество Y_ε в метрическом пространстве (X, ρ) называется *ε-сетью*, если

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y_\varepsilon$$
$$\rho(x, y) < \varepsilon.$$

Иначе говоря, объединение всех шаров $S(y, \varepsilon)$, где $y \in Y_\varepsilon$, содержит X.

Определение 5.2.2. Метрическое пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для любого положительного ε в X существует *конечная* ε-сеть.

Теорема 5.2.3 (Хаусдорф)**.** Метрическое пространство предкомпактно в том и только том случае, если оно вполне ограничено.

Доказательство. Предположим сначала, что пространство (X, ρ) вполне ограничено, и докажем его предкомпактность. Выберем произвольно последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\varepsilon_1 = 1$, рассмотрим конечную 1-сеть Y_1, тогда некоторый шар $S(y_1, 1)$, где $y_1 \in Y_1$, содержит бесконечно много членов последовательности x_n, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через n_1 номер, для которого $x_{n_1} \in S(y_1, 1)$.

Рассмотрим конечную $\frac{1}{2}$-сеть Y_2, тогда некоторый шар $S(y_2, \frac{1}{2})$, где $y_2 \in Y_2$, содержит бесконечно много членов последовательности x_n, $n \in \mathbb{N}$, из попавших в шар $S(y_1, 1)$. Обозначим через n_2 номер, для которого $n_2 > n_1$ и $x_{n_2} \in S(y_2, \frac{1}{2})$, и т. д.

На k-м шаге рассматривается конечная $\frac{1}{k}$-сеть Y_k, выбирается шар $S(y_k, \frac{1}{k})$, где $y_k \in Y_k$, который содержит бесконечно много членов последовательности x_n, $n \in \mathbb{N}$, попавших на предыдущем $(k-1)$-м шаге в $S(y_{k-1}, \frac{1}{k-1})$, и среди них рассматривается x_{n_k}, номер которого n_k больше, чем n_{k-1}.

Полученная таким образом последовательность x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$ является фундаментальной. Действительно, при любом $k \in \mathbb{N}$ и при любых $p, q \geq k$ имеем $x_{n_p} \in S(y_k, \frac{1}{k})$ и $x_{n_q} \in S(y_k, \frac{1}{k})$. Следовательно, $\rho(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq \frac{2}{k}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_ε, для которого $\frac{2}{k_\varepsilon} < \varepsilon$, поэтому при всех $p, q \geq k_\varepsilon$ $\rho(x_{n_p}, x_{n_q}) < \varepsilon$.

Теперь докажем обратное утверждение: предкомпактное пространство является вполне ограниченным. Рассуждение проведем от противного. Предположим, что пространство (X, ρ) предкомпактно, но не вполне ограничено. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ конечная ε_0-сеть не существует. Выберем произвольно $x_1 \in X$. Так как множество $\{x_1\}$, состоящее из одного элемента, не образует ε_0-сеть, то найдется $x_2 \in X$, для которого $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Множество $\{x_1, x_2\}$, состоящее из двух элементов, также не является ε_0 сетью. Поэтому найдется x_3, для которого $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0$ и $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon_0$, и т. д. В результате окажется, что в X существует последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая условию:

$$\forall k, n \ k \neq n \ \Rightarrow \ \rho(x_k, x_n) \geq \varepsilon_0.$$

Ясно, что у такой последовательности нет фундаментальной подпоследовательности. Это противоречит предкомпактности (X, ρ). □

5.3. Предкомпактные множества в некоторых пространствах

Следующее утверждение даёт критерий предкомпактности множеств в $C[a; b]$.

Теорема 5.3.1 (Арцел)**.** Для того чтобы множество X ($X \subseteq C[a; b]$) непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) X ограничено, то есть

$$\exists M \ \forall x \in X \ \forall t \in [a; b] \ |x(t)| \leq M;$$

б) функции $x = x(t)$ из X равностепенно непрерывны, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \forall t, s \in [a; b]$$
$$|t - s| < \delta \ \Rightarrow \ |x(t) - x(s)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Докажем, что множество X непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, удовлетворяющих условиям а) и б), вполне ограничено.

Выберем произвольно $\varepsilon_1 > 0$, положим $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_1$ и рассмотрим $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из условия б). Разобьём отрезок $[a;b]$ точками $t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b$ так, чтобы $t_{i-1} < t_i$ и $t_i - t_{i-1} < \delta$ для $i = 1, \dots, n$. Далее отрезок $[-M; M]$, где M – константа из условия а), также разобьём конечным множество точек

$$\{y_0 = -M, y_1, \dots, y_k = M\}$$

так, чтобы выполнялись неравенства $0 < y_j - y_{j-1} < \varepsilon$ при $j = 1, \dots, k$.

Обозначим через Y множество всех функций, которые удовлетворяют следующим условиям:

- $y = y(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;
- на каждом из отрезков $[t_{i-1}; t_i]$ $y(t)$ линейна;
- для любого i, $1 \le i \le n$, найдётся такое j, $1 \le j \le k$, что $y(t_i) = y_j$;
- если $y(t_{i-1}) = y_s$, то $y(t_i) \in \{y_{s-1}, y_s, y_{s+1}\}$.

Очевидно, что множество Y конечно. Покажем, что оно служит ε_1-сетью для множества X.

Выберем произвольно функции $x = x(t)$, $x \in X$. Рассмотрим функцию $y \in Y$, для которой

$$y(t_i) = y_j, \text{ если } x(t_i) \in (y_{j-1}, y_j],$$
$$y(t_i) = y_{j-1}, \text{ если } x(t_i) = y_{j-1},$$
$$i = 0, 1, \dots, n,$$

такая функция в Y найдётся.

Пусть $t \in [a;b]$. Рассмотрим i, для которого $t \in [t_{i-1}; t_i]$. Тогда

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - y(t_i)| + +|y(t_i) - y(t)| \le 3\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Отсюда следует, что $\rho(x, y) < \varepsilon_1$.

Необходимость. Предположим, что X, где $X \subseteq C[a;b]$, является предкомпактным. Тогда по теореме Хаусдорфа X вполне ограничено и, следовательно, ограничено. Поэтому условие а) выполнено.

Покажем, что и условие б) выполняется. Выберем $\varepsilon > 0$. Обозначим через Y конечную $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть множества X. Функции из множества Y непрерывны на $[a;b]$ и, по теореме Кантора, равномерно непрерывны на этом отрезке. Поэтому

$$\forall y \in Y\ \exists \delta_y > 0\ \forall t, s \in [a;b]$$
$$|t - s| < \delta_y \Rightarrow |y(t) - y(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обозначим: $\delta = \min\{\delta_y : \ y \in Y\}$; так как Y конечно, то $\delta > 0$.

Пусть теперь $x = x(t)$ – произвольная функция из X, $t, s \in [a; b]$ и $|t-s| < \delta$. Тогда

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - y(s)| + |y(s) - x(s)| < \varepsilon,$$

где $y \in Y$, для которой $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом, условие б) выполнено. □

Упражнение 5.3.2. Рассмотрим интегральный оператор $\Phi(x)$, который каждой непрерывной на $[a; b]$ функции $x = x(t)$ ставит в соответствие функцию $y = \Phi(x)$ с помощью формулы

$$y(t) = \int_a^t f[s, x(s)]ds,$$

где функция двух переменных $f = f(t, u)$ непрерывна при $a \leq t \leq b$ и $u \in \mathbb{R}$. Докажите, что каждое ограниченное в $C[a; b]$ множество X этот оператор преобразует в предкомпактное множество $\Phi(X)$.

Обратимся теперь к пространству ℓ_2 и рассмотрим в нём пример компактного множества Возьмём числовую последовательность a_n, $n \in \mathbb{N}$, для которой $a_n > 0$ при любом n и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

сходится. Определим множество X как совокупность $x \in \ell_2$, удовлетворяющую условию:

$$\forall n \ 0 \leq \xi_n \leq a_n, \text{ где } x = (\xi_1, \xi_2, \ldots). \tag{5.1}$$

Для этого множества часто используют название «*гильбертов кирпич*».

Теорема 5.3.3. Множество X компактно.

Доказательство. В соответствии с определением 5.1.2 достаточно установить, что множество X замкнуто и предкомпактно. Замкнутость X вытекает из следующего рассуждения. Если $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \to x$, то $\xi_i^n \to \xi_i$ при любом $i \in \mathbb{N}$, где $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$ и $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$; следовательно, выполняется условие 5.1 и $x \in X$.

Для доказательства предкомпактности множества X достаточно установить, учитывая теорему Хаусдорфа, что оно вполне ограничено.

Выберем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $k \in \mathbb{N}$, для которого

$$\sqrt{\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^k$ и определим в нём множество

$$X_k = \{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) : \ 0 \leq \xi_i \leq a_i, \ 1 \leq i \leq k\}.$$

Это множество ограничено в $\mathbb{R}^k$ и, следовательно, предкомпактно. Поэтому для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть Y_k. Используя Y_k, построим множество Y в ℓ_2:

$$Y = \{y = (\eta_1, \ldots, \eta_k, 0, 0, \ldots, 0) : \ \tilde{y} = (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in Y_k\}.$$

Множество Y конечно. Покажем, что оно образует ε-сеть для X. Выберем произвольно

$$x \in X, \ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

и положим

$$\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k).$$

Очевидно, что $\tilde{x} \in X_k$. Поэтому найдётся

$$\tilde{y} \in Y_k, \ \tilde{y} = (\eta_1, \ldots, \eta_k),$$

для которого

$$r(\tilde{x}, \tilde{y}) < \frac{\varepsilon}{2};$$

здесь r – евклидова метрика в $\mathbb{R}^k$.

Обозначим через y точку из ℓ_2 вида

$$y = (\eta_1, \ldots, \eta_k, 0, 0, \ldots, 0, \ldots). \tag{5.2}$$

Оценим расстояние между x и y:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - \eta_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} \xi_i^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon.$$

Множество точек y вида (5.2), как и множество Y, конечно, оно образует ε-сеть множества X, где $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно. Таким образом, X вполне ограничено. □

Упражнение 5.3.4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, A и B – непересекающиеся подмножества в X, причём A замкнуто, а B – компактно. Докажите, что $\rho(A, B) > 0$.

Упражнение 5.3.5. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, x_n, $n \in \mathbb{N}$, – сходящаяся последовательность в X. Обозначим через z её предел. Докажите, что подмножество $\{z\} \cup \{x_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ множества X компактно.

Упражнение 5.3.6. Определите, какие из приведённых ниже подмножеств $\mathbb{R}^2$ компактны:

а) $\{(x, y) | \ 2x^2 + y^2 = 1\}$,

б) $\{(x, y) | \ xy < 1\}$,

в) $\{(x, y)|\ e^x = \cos y\}$,

г) $\{(x, y)|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Упражнение 5.3.7. Приведите пример полного метрического пространства, в котором все «достаточно маленькие» замкнутые шары компактны, а все «большие» шары некомпактны.

Упражнение 5.3.8. Пусть (X, ρ) – вполне ограниченное метрическое пространство, а (X', ρ') – его пополнение. Всегда ли (X', ρ') будет компактным?

Упражнение 5.3.9. Докажите, что каждое компактное метрическое пространство сепарабельно.

Упражнение 5.3.10. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, которое можно представить в виде объединения счётного множества компактных подпространств. Докажите, что в таком случае (X, ρ) сепарабельно.

5.4. Компактность и покрытия

Курс анализа для математических специальностей обычно начинается с усвоения трёх принципиальных пунктов: понятия о множестве всех действительных чисел, теоремы Коши о его полноте и теоремы Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Ещё один фундаментальный факт математического анализа – лемма Гейне-Бореля о покрытии замкнутого ограниченного в $\mathbb{R}$ множества открытыми множествами – упоминается в стандартных курсах лишь вскользь. Ниже в этом разделе будет рассмотрена связь между компактностью пространств и их покрытиями открытыми множествами. Но начнём с упрощённого варианта леммы Гейне-Бореля.

Теорема 5.4.1. Пусть отрезок $[a; b]$ вложен в объединение I интервалов, то есть $[a; b]$ покрывается интервалами из I. Тогда найдётся конечное подмножество I_1 ($I_1 \subseteq I$) интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Предположим, что никакое конечное подмножество интервалов из I не покрывает наш отрезок. Разобьём $[a; b]$ пополам точкой $c = \frac{1}{2}(a + b)$, тогда хотя бы для одного из отрезков $[a; c]$ или $[c; b]$ конечного покрытия интервалами из I не существует, иначе для $[a; b]$ существовало бы конечное покрытие. Этот отрезок также разобьем пополам, выберем из двух половин тот отрезок, для которого нет конечного покрытия и т. д. В итоге получим систему вложенных отрезков, последовательность длин которых стремится к нулю, каждый из которых не может быть покрыт конечным набором интервалов из I. У этой последовательности отрезков имеется единственная общая точка; обозначим её через x_0, $x_0 \in [a; b]$. Она содержится хотя бы в одном интервале из I, пусть это $(\alpha; \beta)$: $(\alpha; \beta) \in I$, $x_0 \in (\alpha; \beta)$.

Отсюда следует, что все отрезки построенной последовательности, начиная с некоторого, содержатся в $(\alpha;\beta)$. Приходим к противоречию: каждый из этих отрезков покрывается одним интервалом из I, но по построению для каждого из них не существует конечного покрытия. $\square$

Упражнение 5.4.2. Останется ли справедливым утверждение теоремы 5.4.1, если вместо отрезка $[a;b]$ взять

а) произвольное множество $X \subseteq \mathbb{R}$,

б) произвольное ограниченное множество $X \subseteq \mathbb{R}$,

в) произвольное замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{R}$,

г) произвольное замкнутое и ограниченное множество $X \subseteq \mathbb{R}$?

Значительным обобщением доказанной теоремы 5.4.1 служит следующее утверждение.

Теорема 5.4.3. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Для того чтобы оно являлось компактным, необходимо и достаточно, чтобы любое покрытие I множества X открытыми множествами содержало конечное подпокрытие.

Доказательство. Докажем сначала *необходимость*, используя идею доказательства теоремы 5.4.1. Рассуждаем от противного. Предположим, что X компактно и покрытие $I = \{w\}$ множества X открытыми множествами w не содержит конечного подпокрытия. Напомним, что компактность пространства X означает, что оно предкомпактно (следовательно, вполне ограничено по теореме Хаусдорфа) и полно. Положим $\varepsilon = 1$ и рассмотрим конечную 1-сеть Y_1 множества X. Из определения ε-сети вытекает вложение

$$\bigcup_{y\in Y_1} \overline{S}(y,1) \supseteq X.$$

Поэтому пересечение с X хотя бы одного из замкнутых шаров $\overline{S}(y,1)$, где $y \in Y_1$, не может быть покрыто конечным набором множеств из I. Пусть это шар $\overline{S}(y_1,1)$ и пусть

$$X_1 = \overline{S}(y_1,1) \cap X.$$

Множество X_1, очевидно, вполне ограничено и замкнуто. Поэтому для него существует конечная $\frac{1}{2}$-сеть Y_2. Тогда найдётся такой шар $\overline{S}(y_2,\frac{1}{2})$, где $y_2 \in Y_2$, для которого множество

$$X_2 = \overline{S}\left(y_2,\frac{1}{2}\right) \cap X_1$$

не может быть покрыто конечным набором множеств из I.

Продолжим наши построения по аналогии. Рассмотрим на k-м шаге конечную $\frac{1}{2^k}$-сеть Y_k для множества Y_{k-1}, полученную на предыдущем $(k-1)$-м шаге. Выберем среди шаров $\overline{S}(y, \frac{1}{2^k})$, $y \in Y_k$, шар $\overline{S}(y_k, \frac{1}{2^k})$, для которого

$$X_k = \overline{S}\left(y_k, \frac{1}{2^k}\right) \cap X_{k-1}$$

не покрывается конечным набором множеств из I, и так далее.

Таким образом, построенная система множеств X_k, $k \in \mathbb{N}$, обладает следующими свойствами:

1) каждое множество X_k является замкнутым;

2) при любом $k \in \mathbb{N}$: $X_{k+1} \subseteq X_k$;

3) $\operatorname{diam} X_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

Из теоремы 3.1.2 следует существование общей для всех X_k точки, обозначим её x_0. Эта точка содержится хотя бы в одном множестве $w \in I$, и, в силу открытости w и благодаря условию 3), существует такой номер k_0, что $X_k \subseteq w$ при всех $k \geq k_0$. Приходим к противоречию, так как по построению каждое множество X_k не может быть покрыто конечным набором из I.

Докажем теперь *достаточность*. Предположим, что любое покрытие множества X открытыми множествами содержит конечное подпокрытие, и покажем, что пространство (X, ρ) является вполне ограниченным и полным.

Сначала установим полную ограниченность. Рассуждая от противного, допустим, что (X, ρ) не вполне ограничено. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого в X нет конечной ε-сети. Отсюда следует, что найдётся такая последовательность точек y_n, $n \in \mathbb{N}$, для которой $\rho(y_n, y_k) \geq \varepsilon$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, где $n \neq k$. Рассмотрим множество открытых шаров:

$$I_1 = \{S(y_n, \varepsilon) : \; n \in \mathbb{N}\},$$

а через Z обозначим объединение этих шаров:

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(y_n, \varepsilon).$$

Дополним множество I_1 множеством I_2, где

$$I_2 = \{S(y, \varepsilon) : \; y \in X \backslash Z\},$$

и положим $I = I_1 \cup I_2$.

Совокупность I открытых множеств (шаров) образует, очевидно, покрытие пространства X. Оно не содержит конечного подпокрытия, так как уже для последовательности y_n, $n \in \mathbb{N}$, придётся использовать все шары из бесконечного множества I_1. Пришли к противоречию.

Докажем полноту (X, ρ). Снова рассуждаем от противного, допуская, что некоторая фундаментальная последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, не сходится. Рассмотрим счётную совокупность множеств $I = \{w_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, положив

$$w_n = X \backslash \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}. \tag{5.3}$$

Покажем, что каждое множество w_n открыто. Если это не так, то есть существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого w_{n_0} неоткрыто, то некоторая точка $\xi \in w_{n_0}$ не является внутренней для w_{n_0}. Из этого следовало бы существование подпоследовательности x_{n_k}, для которой $\lim x_{n_k} = \xi$. А из простого неравенства

$$\rho(x_n, \xi) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, \xi)$$

и из фундаментальности x_n, $n \in \mathbb{N}$, вытекало бы условие $\lim x_n = \xi$, противоречащее предположению о том, что последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, не сходится.

Итак, множества (5.3) открыты. Легко убедиться, что выполняются условия:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} w_n, \tag{5.4}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \ X \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{k} w_n. \tag{5.5}$$

Таким образом, предположение о неполноте пространства (X, ρ) привело к существованию покрытия множества X открытыми множествами (условие (5.4)), которое не содержит конечного подпокрытия (условие (5.5)). Достаточность доказана. $\square$

Глава 6

Сжимающие отображения

6.1. Принцип сжимающих отображений

Пусть (X, ρ) – некоторое метрическое пространство. Однозначное отображение $F : X \to X$ будем называть *преобразованием* (множества X), то есть F – это правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in X$.

Определение 6.1.1. Преобразование F называется *сжимающим отображением* на (X, ρ), если существует такое число $0 \leq \alpha < 1$, что для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство

$$\rho\left(F(x_1), F(x_2)\right) \leq \alpha \cdot \rho\left(x_1, x_2\right).$$

Пример 6.1.2. Пусть $X = [a; b] \subset \mathbb{R}$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Для $[c; d] \subset [a; b]$, $[c; d] \neq [a; b]$ построим линейную функцию $F : [a; b] \to [c; d]$ (рис. 6.1).

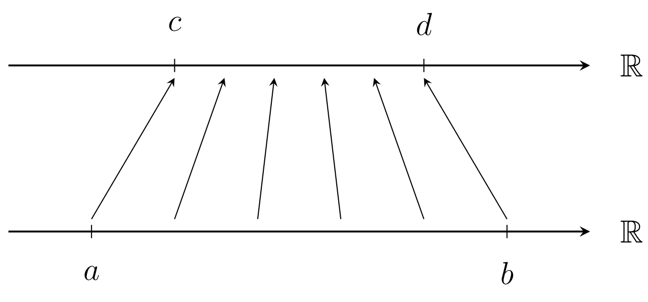


Рис. 6.1. Сжимающее отображение отрезка

Покажем, что F является сжимающим отображением на (X, ρ). Свойство $F : X \to X$ выполняется по построению. Для проверки свойства сжатия найдём формулу преобразования F (рис. 6.2).

Используя график функции (уравнение прямой, проходящей через точки (a, c) и (b, d)), приходим к соотношению

$$F(x) = \frac{d - c}{b - a} \cdot (x - a) + c.$$

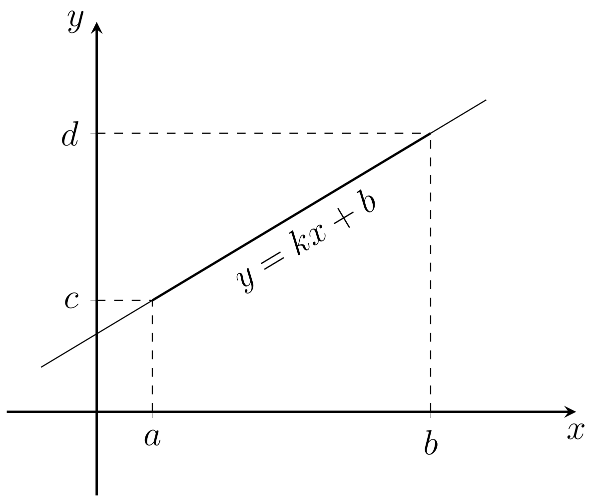


Рис. 6.2. Функция сжимающего преобразования отрезка

Получаем для любых $x_1, x_2 \in X$

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\frac{d-c}{b-a} \cdot (x_2 - a) - \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_1 - a)\right| = \frac{d-c}{b-a} \cdot |x_2 - x_1| \,.$$

По условию, $0 < \frac{d-c}{b-a} < 1$, следовательно, свойство сжатия выполняется.

Пример 6.1.3. Рассмотрим $X = \overline{S}(0,1)$ – замкнутый единичный круг на плоскости, – с евклидовой метрикой. Применим для наглядности запись

$$\rho_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\|.$$

Пусть F – преобразование плоскости вида

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

где $0 < \lambda, \mu < 1$.

Убедимся, что при подходящем выборе коэффициентов b и d преобразование F является сжимающим отображением на (X, ρ). Отметим сначала геометрический смысл этого преобразования. Его матрица переводит $\overline{S}(0,1)$ в эллипс с полуосями λ и μ по осям Ox и Oy соответственно (рис. 6.3). Затем осуществляется сдвиг эллипса на вектор (b, d). Поэтому если сдвиг не выведет результат за пределы $\overline{S}(0,1)$, то условие $F : X \to X$ выполняется.

Для проверки свойства сжатия запишем покоординатно преобразование F:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + b \\ \mu y + d \end{pmatrix}.$$

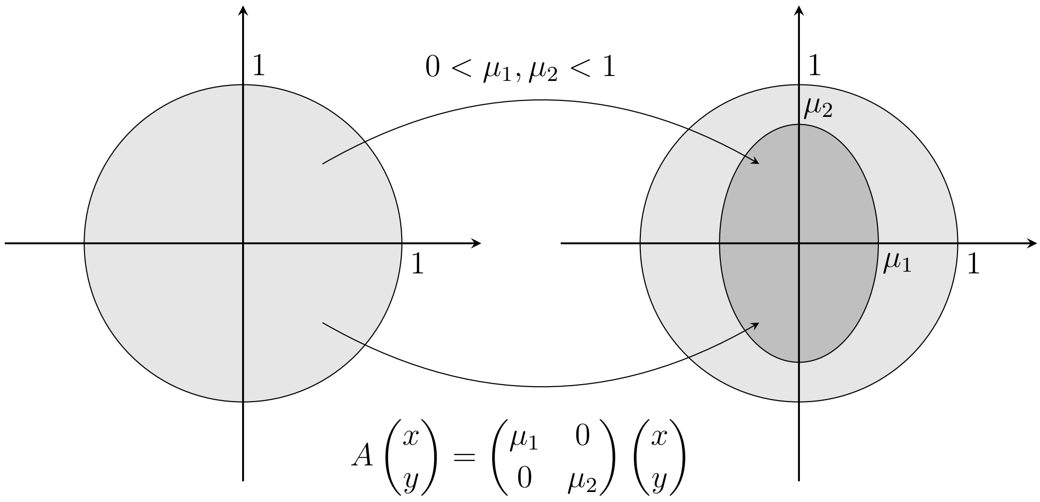


Рис. 6.3. Сжимающее отображение круга

Получается, что для любых (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X$

$$\begin{aligned} \left\| F\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{((\lambda x_1 + b) - (\lambda x_2 + b))^2 + ((\mu y_1 + d) - (\mu y_2 + d))^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 + \mu^2 \cdot (y_1 - y_2)^2} \\ &\leq \max\{\lambda, \mu\} \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Поскольку $0 < \lambda, \mu < 1$, то отображение является сжимающим. Отметим, как следует из рассуждения, (общий) коэффициент сжатия преобразования соответствует худшему встречающемуся на X сжатию, осуществляемому этим преобразованием.

Пример 6.1.4. Пусть $X = C[0; b]$ – множество всех непрерывных функций на отрезке $[0; b]$, где $0 < b < 1$, с равномерной метрикой

$$\rho(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| : \ 0 \leq t \leq b\}.$$

Определим F формулой

$$(F(x))(u) = \int_0^u x(t)dt.$$

Тогда F будет сжимающим отображением на (X, ρ). Действительно, условие $F : X \to X$ очевидно выполняется и при этом:

$$
\begin{aligned}
\rho\left(F(x), F(y)\right) &= \max_{0\le u\le b}\left|\int_0^u x(t)dt - \int_0^u y(t)dt\right| \\
&\le \max_{0\le u\le b}\int_0^u |x(t)-y(t)|\,dt \\
&= \int_0^b |x(t)-y(t)|\,dt \\
&\le \int_0^b \max_{0\le t\le b}|x(t)-y(t)|\,dt \\
&= b\cdot\rho(x,y).
\end{aligned}
$$

Поскольку $0 < b < 1$, то утверждение доказано.

Определение 6.1.5. Преобразование F называется *непрерывным на элементе* (*в точке*) $x_* \in X$, если для любой сходящейся к x_* последовательности x_n, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $F(x_n)$ сходится к $F(x_*)$.

Другими словами, непрерывным в x_* является преобразование, для которого на этом элементе имеется перестановочность знаков преобразования и предела:

$$x_n \to x_* \Rightarrow \lim F(x_n) = F(x_*) = F(\lim x_n).$$

Очевидно, что сжимающее преобразование является непрерывным на каждом элементе X.

Определение 6.1.6. Элемент $x_* \in X$ называется *неподвижным элементом* (*неподвижной точкой*) преобразования F, если $F(x_*) = x_*$.

Иначе говоря, неподвижные элементы F – это решения уравнения $F(x) = x$ в множестве X.

Теорема 6.1.7 (Теорема Банаха о неподвижной точке)**.** Каждое сжимающее отображение, действующее в полном метрическом пространстве, имеет в нём единственный неподвижный элемент.

Замечание 6.1.8. Теорема Банаха о неподвижной точке также часто носит название «*принципа сжимающих отображений*».

Доказательство. Пусть F – некоторое сжимающее отображение на полном пространстве (X, ρ).

Возьмём произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, по правилу

$$x_1 = F(x_0), \ldots, x_n = F(x_{n-1}), \ldots .$$

Покажем, что такая последовательность является фундаментальной в (X, ρ). В рассуждении удобно также использовать обозначение $x_2 = F(F(x_0)) = F^2(x_0)$, то есть $x_n = F^n(x_0)$. Пусть $m > n$ – некоторые номера. Оценим $\rho\,(x_n, x_m)$:

$$\begin{aligned}
\rho\,(x_n, x_m) &= \rho\left(F^n(x_0), F^n\left(F^{m-n}(x_0)\right)\right) \\
&\le \alpha^n \cdot \rho\left(x_0, F^{m-n}(x_0)\right) \\
&= \alpha^n \cdot \rho\,(x_0, x_{m-n}) \\
&\le \alpha^n \cdot (\rho\,(x_0, x_1) + \rho\,(x_1, x_2) + \ldots + \rho\,(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \\
&\le \alpha^n \cdot \left(\rho\,(x_0, x_1) + \alpha \cdot \rho\,(x_0, x_1) + \alpha^{m-n-1} \cdot \rho\,(x_0, x_1)\right) \\
&\le \alpha^n \cdot \rho\,(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \\
&= \alpha^n \cdot \frac{\rho\,(x_0, x_1)}{1 - \alpha}.
\end{aligned}$$

В преобразованиях использовано соотношение

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho(F(x_{k-1}), F(x_k)) \le \rho(x_{k-1}, x_k) = \ldots \le\propto^k \rho(x_0, x_1).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Завершающая дробь в оценке является постоянным числом, а $\alpha^n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому для данного ε найдётся такой номер n_ε, что при $n, m \ge n_\varepsilon$ величина $\rho\,(x_n, x_m)$ будет меньше ε. Таким образом, построенная последовательность является фундаментальной.

Из полноты пространства (X, ρ) следует, что существует $\lim x_n = x_*$. Покажем, что x_* является неподвижным элементом преобразования F. Этот факт является достаточно очевидным, если учесть, что элементы последовательности x_n, $n \in \mathbb{N}$, получаются итерациями сжимающего преобразования (очередная «точка» сдвигается преобразованием в пространстве (X, ρ) «кратно» меньше, чем предыдущая (рис. 6.4); поэтому «предельная точка» вообще не может сдвинуться). Формально неподвижность x_* является следствием непрерывности сжимающего преобразования:

$$F(x_*) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = x_*.$$

Осталось установить единственность такого элемента. Предположим, что существует такой x_{**}, что $F(x_{**}) = x_{**}$. Тогда

$$\rho\,(x_*, x_{**}) = \rho\,(F(x_*), F(x_{**})) \le \alpha \cdot \rho\,(x_*, x_{**})\,.$$

Поскольку $\alpha < 1$, то соотношение возможно лишь при условии

$$\rho\,(x_*, x_{**}) = 0,$$

то есть когда $x_{**} = x_*$. □

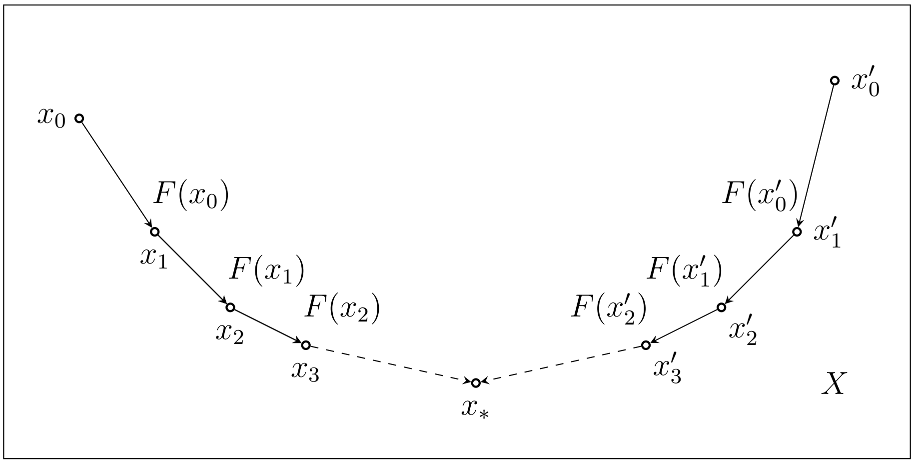


Рис. 6.4. Принцип сжимающих отображений

Отметим, что доказательство теоремы представляет собой по сути вычислительный алгоритм, поэтому выявление в какой-либо задаче сжимающего отображения является важнейшим шагом к нахождению решения.

Упражнение 6.1.9. Пусть F – преобразование пространства $\mathbb{R}$ с обычной метрикой, определённое формулой $F(x) = x^3$. Найдите все его неподвижные точки и покажите. В окрестности каких неподвижных точек F будет сжимающим отображением?

Упражнение 6.1.10. Докажите, что преобразование $F(x) = A(x)$ пространства $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой, где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 10 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

не является сжимающим отображением, а его некоторая натуральная степень является.

Упражнение 6.1.11. Приведите пример сжимающего отображения F в неполном пространстве (X, ρ), для которого неподвижная точка не существует.

6.2. Неподвижные точки сжимающих отображений. Применение к решению уравнений

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие приведённую выше теорему Банаха о неподвижной точке.

Пример 6.2.1. Легко убедиться, что функция

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

задаёт сжимающее отображение на всей числовой прямой с обычной метрикой. Значит, у неё существует единственный неподвижный элемент x_*. Найдём его.

Первый способ – решить уравнение

$$F(x) = x \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (x-1) = x \right).$$

Получим $x_* = -1$.

Второй способ – действовать как в доказательстве теоремы. Возьмём для удобства $x_0 = 7$. Положим

$$x_1 = F(x_0), \ldots, x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0).$$

Получим последовательность

$$7, 3, 1, 0, -\frac{1}{2}, \ldots,$$

которая сходится к $x_* = -1$ (рис. 6.5). С каждым шагом результат становится в 2 раза ближе к ответу!

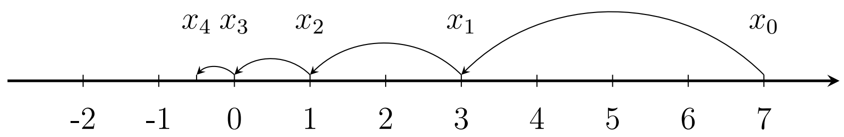


Рис. 6.5. Сжимающее отображение на прямой

Пример 6.2.2. Формула

$$\left(F(x)\right)(u) = \int_0^u x(t)dt$$

задаёт сжимающее отображение на $C[0;b]$, $0 < b < 1$, с равномерной метрикой. Найдём неподвижный элемент $x_*(t)$ этого отображения.

Первый способ. Решим уравнение $F(x) = x$, то есть уравнение

$$x(u) = \int_0^u x(t)dt.$$

Сразу видна общая закономерность $x(t) = c \cdot e^t$. Учитывая значение функции в начальной точке отрезка –

$$x(0) = \int_0^0 x(t)dt = 0,$$

– получим $x_*(t) = \overline{0}$.

Второй способ. Осуществим последовательность итераций преобразования F. Пусть $x_0(t) = t$; положим

$$x_1 = F(x_0), \ldots, x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0).$$

Построенная последовательность

$$t, \frac{t^2}{2}, \ldots, \frac{t^n}{n!}, \ldots$$

равномерно сходится на $[0; b]$ к $x_*(t) = \overline{0}$ (рис. 6.6).

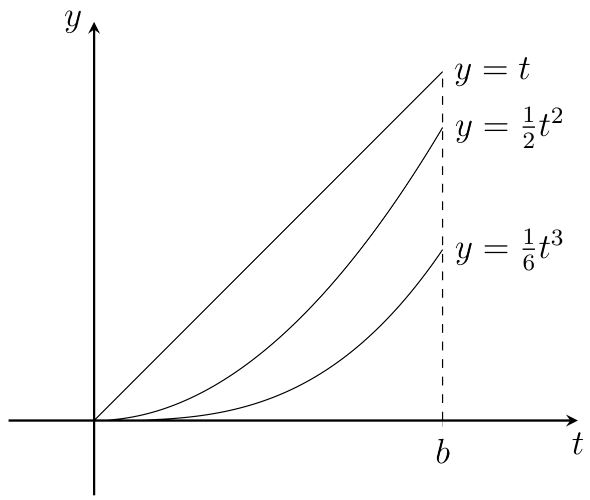


Рис. 6.6. Сжимающее отображение на $C[0; b]$

Упражнение 6.2.3. Известно [4], что преобразование вида

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

является сжимающим на плоскости с евклидовой метрикой, если собственные значения матрицы по модулю меньше 1. Покажите, что преобразование

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

обладает свойством сжатия и найдите его неподвижную точку.

Упражнение 6.2.4. Имеются две (подобные прямоугольные) географические карты одной местности, но разного масштаба. Докажите, что при любом полном наложении меньшей карты на большую, на меньшей карте найдётся точка, воткнув в которую иголку мы на обеих картах попадём в одно и то же географическое место. Как найти эту точку?

Указание. Нанесение географической разметки на два листа бумаги устанавливает между их точками взаимно однозначное соответствие.

Принцип сжимающих отображений представляет очень большой интерес с точки зрения доказательства существования решения уравнения (задачи), а также численного нахождения этого решения. Основная идея заключается в том, чтобы привести исходную задачу к виду $F(x) = x$ и доказать, что F является сжимающим отображением в некотором полном метрическом пространстве.

Пример 6.2.5. Покажем, что уравнение $\cos^4 x - \cos^2 x - 5x + 1 = 0$ имеет единственное решение и найдём его приближённо.

Перепишем уравнение в виде

$$x = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right).$$

Покажем, что функция

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$$

определяет сжимающее отображение на всей числовой прямой с обычной метрикой. Для оценки модуля разности значений функции в двух точках удобно воспользоваться *теоремой Лагранжа «о среднем значении»*: если f дифференцируема на $(a; b)$, то для любых $a < x_1 < x_2 < b$ найдётся такая точка $\xi \in (x_1; x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Получаем для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left|-\frac{1}{10}\sin 4\xi \cdot (x_2 - x_1)\right| \\ &\le \frac{1}{10}\max_{\xi\in\mathbb{R}} |\sin 4\xi| \cdot |(x_2 - x_1)| \\ &= \frac{1}{10} \cdot |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Следовательно, F является сжимающим отображением, и уравнение имеет единственное решение x_*. Для более быстрого нахождения приближённого значения этого решения заметим, что x_* должно принадлежать множеству значений функции F.

Очевидно, что

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \le F(x) \le \frac{1}{5} \cdot 1,$$

то есть

$$E(F) = \left[\frac{3}{20}; \frac{1}{5}\right].$$

Возьмём $x_0 = \frac{1}{5}$ и применим к нему преобразование F (учтём, что $\sin x < x$ при $x > 0$):

$$F\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{20} \cdot \sin^2\left(\frac{2}{5}\right) > \frac{1}{5} - \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{125}.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x_* \approx 0.2$.

Упражнение 6.2.6. Покажите, что уравнение

$$x^4 - 8x + \frac{1}{2} = 0$$

имеет на $[-1; 1]$ единственный корень и найдите его приближённо.

Замечание 6.2.7. К решению задачи может быть привлечён классический метод Ньютона убыстренного нахождения на $[a; b]$ корня уравнения $f(x) = 0$, также связанный с принципом сжимающих отображений. Он применяется, ориентировочно говоря, если функция f принимает на концах отрезка значения разных знаков, является строго монотонной и выпуклой вниз (если на $[a; b]$ существует корень x_* уравнения $f(x) = 0$, f имеет отличную от нуля (отделённую конкретным числом) первую производную и положительную ограниченную вторую производную). При таких предпосылках итерационная последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

сходится к x_* (квадратичная сходимость.) Точные формулировки можно найти, например, в [6].

6.3. Теорема Пикара

Интегральное сжимающее отображение лежит в основе доказательства существования и единственности решения задачи Коши, предложенного Пикаром (Picard, 1893).

Теорема 6.3.1 (Пикар)**.** Если функция $f(t, x)$ непрерывна на некотором прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, x) : \ |t - t_0| \le h, \ |x - x_0| \le d\},$$

причём на нём выполняется условие Липшица

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le K \cdot |x_1 - x_2|,$$

то дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение $x_*(t)$ на некотором отрезке $|t - t_0| \le r$.

Доказательство. Схематично ситуация представлена на рис. 6.7.

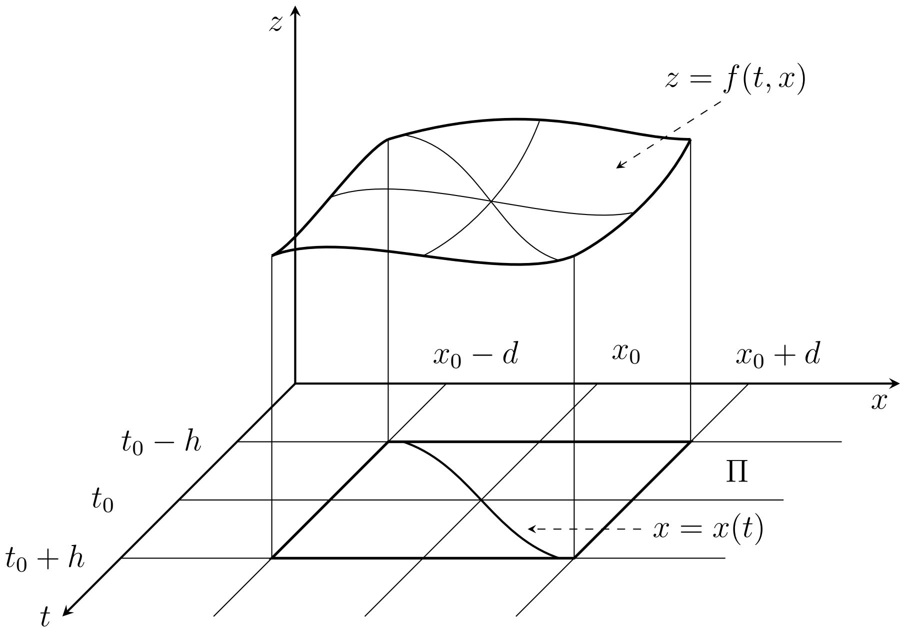


Рис. 6.7. Теорема Пикара

Дифференциальное уравнение с учётом начального условия эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds, \tag{6.1}$$

то есть $x(t) = (F(x))(t)$.

Убедимся сначала, что F на некотором отрезке сохраняет свойство ограниченности (допустимой) функции:

$$x_0 - d \le x(t) \le x_0 + d \quad \Rightarrow \quad x_0 - d \le (F(x))(t) \le x_0 + d.$$

Из непрерывности f на Π следует существование такого числа M, что для точек (t, x) этого прямоугольника выполняется $|f(t, x)| \le M$. Поэтому при наличии условий $|t - t_0| \le h$, $|x(t) - x_0| \le d$ имеет место оценка

$$|(F(x))(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds \right| \le |t - t_0| \cdot M.$$

Возьмём

$$0 < r \le \min\left\{h, \frac{d}{M}\right\}.$$

При $|t - t_0| \le r$ получается, что если $|x(t) - x_0| \le d$, то $|(F(x))(t) - x_0| \le d$.

Рассмотрим F как преобразование на $C[t_0{-}r; t_0{+}r]$ с равномерной метрикой. Убедимся, что для соответствующих значений r преобразование F задаёт сжимающее отображение. Действительно, пусть $x(t)$,$y(t)$ – некоторые две функции из рассматриваемого пространства, тогда по условию теоремы

$$\begin{aligned}\rho\left(F(x),F(y)\right) &= \max_{|t-t_0|\le r}\left|\int_{t_0}^{t} f\left(s,x(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} f\left(s,y(s)\right)ds\right| \\ &\le \max_{|t-t_0|\le r}\left|\int_{t_0}^{t} K\cdot|x(s)-y(s)|\,ds\right| \\ &\le K\cdot r\cdot \max_{|t-t_0|\le r}|x(t)-y(t)| \\ &= K\cdot r\cdot\rho\left(x,y\right).\end{aligned}$$

Следовательно, при $K\cdot r<1$ получаем сжимающее отображение. Выберем r так, чтобы и это соотношение выполнялось.

Объединяя вместе рассмотренные свойства, приходим к выводу, что F является сжимающим отображением на замкнутом относительно равномерной метрики множестве

$$G=\{x(t)\in C[t_0-r;t_0+r]:|x(t)-x_0|\le d\}.$$

Как известно, замкнутое в полном метрическом пространстве множество образует с той же метрикой полное метрическое пространство (лемма 2.2.6). Из принципа сжимающих отображений вытекает, что существует единственная функция

$$x_*(t)\in C[t_0-r;t_0+r],$$

удовлетворяющая интегральному уравнению (6.1), значит, дифференциальному уравнению из условия теоремы. □

Замечание 6.3.2. Наличие сжимающего отображения в доказательстве даёт, как обычно, возможность итерационного нахождения обсуждаемого решения. В связи с этим сразу получается несколько очень любопытных наблюдений. Во-первых, выполнение (счётного числа) итераций (интегрального) преобразования F приводит к построению бесконечно дифференцируемой функции, то есть, при выполнении условий теоремы решение задачи Коши – бесконечно дифференцируемая функция. Во-вторых, локальный характер существования решения (на $[t_0-r;t_0+r]$), гарантируемый теоремой, расширяется до области существования получаемой итерациями функции.

Пример 6.3.3. Решить уравнение

$$x'(t)=2tx(t),\;\; x(0)=1.$$

Для иллюстрации замечания проведём сначала вычисления и рассуждения, следуя доказательству теоремы, а затем найдём решение итерациями полученного в ходе рассуждений преобразования.

Функция $f(t,x)=2tx$ непрерывна на любом заданном прямоугольнике вида

$$\{(t,x):\ |t|\le h,\ |x-1|\le d\},$$

и на нём выполняется

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|=2|t|\cdot|x_1-x_2|\le 2h\cdot|x_1-x_2|.$$

Чтобы из условия $|x(t)-1|\le d$ следовало $|(F(x))(t)-1|\le d$, где

$$(F(x))(t)=1+2\int_0^t s\cdot x(s)ds,$$

достаточно выполнения $t^2(1+d)\le d$. Пусть

$$0<r\le\min\left\{h,\sqrt{\frac{d}{d+1}}\right\}.$$

Чтобы F было сжимающим отображением на $C[-r;r]$ с равномерной метрикой, то есть для любых функций $x(t),y(t)$ из рассматриваемого пространства имело место

$$\max_{|t|\le r}\left|2\int_0^t s\cdot x(s)ds-2\int_0^t s\cdot y(s)ds\right|\le\alpha\cdot\max_{|t|\le r}|x(t)-y(t)|\,,\ \alpha<1,$$

достаточно выполнения

$$\max_{|t|\le r}\left|2\int_0^t|s|ds\right|<1\ \Leftrightarrow\ r^2<1.$$

Таким образом, в множестве

$$G=\{x(t)\in C[-r;r]:\ |x(t)-1|\le d\},$$
$$r=\min\left\{h,\sqrt{\frac{d}{d+1}}\right\}$$

есть единственное решение заданного дифференциального уравнения.

Для нахождения этого решения методом итераций выберем в качестве стартовой постоянную функцию: $x_0(t)=1$. Учитывая, что

$$x_n(t)=(F(x_{n-1}))(t)=1+2\int_0^t s\cdot x_{n-1}(s)ds,$$

получаем

$$x_1(t)=1+2\int_0^t s\,ds=1+t^2,$$
$$x_2(t)=1+2\int_0^t s\left(1+s^2\right)ds=1+t^2+\frac{t^4}{2},$$
$$x_3(t)=1+2\int_0^t s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right)ds=1+t^2+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{6}.$$

В общем случае

$$\begin{aligned} x_n(t) &= 1 + 2\int_0^t s\left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \ldots + \frac{s^{2(n-1)}}{(n-1)!}\right) ds \\ &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \ldots + 2\int_0^t \frac{s^{2n-1}}{(n-1)!} ds \\ &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Последовательность $x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на любом отрезке $[-h; h]$, поскольку числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{n!}$$

сходится к функции e^{t^2}.

С другой стороны (по теореме Пикара), на отрезке $[-r; r]$ она должна сходиться к единственному решению $x_*(t)$ дифференциального уравнения. Заключаем, что $x_*(t) = e^{t^2}$.

Упражнение 6.3.4. Пусть функция $\phi(s, x)$ определена в полосе

$$\Pi = \{(s, x) : \ a \le s \le b, \ -\infty \le x \le \infty\},$$

непрерывна в Π и имеет непрерывную производную по x, удовлетворяющую условию

$$0 < m \le \phi_x(s, x) \le M < \infty, \ (s, x) \in \Pi.$$

Докажите, что существует единственная функция $x_* \in [a; b]$ такая что $\phi(s, x_*(s)) \equiv 0$ на $[a; b]$.

Упражнение 6.3.5. Решите следующую краевую задачу, предварительно сведя её к интегральному уравнению

$$x''(t) = \lambda x^2(t) + y(t), \ x(0) = 0, \ x(1) = 0, \ y \in C[0; 1].$$

Глава 7

Метод IFS кодирования изображений (метод фрактального сжатия графической информации)

Два названия метода в заголовке взаимно дополняют друг друга. Первое отражает, скорее, алгоритм декодирования (воспроизведения по коду) «сжатого» изображения (IFS – Iterated Function System – система (комплекс) итерированной функции); второе указывает класс объектов (изображений), изучение которых привело к разработке данного способа кодирования.

7.1. Понятие фрактала. Канторово множество

Упрощённо говоря, *фрактал* – геометрическая фигура (множество точек), каждая часть которой подобна всей фигуре. Сразу представить примеры такой конструкции непросто, поскольку в описании подразумевается бесконечная повторяемость в структуре, что в классических построениях геометрии не встречается. Природными объектами, имеющими сходное строение, являются, например, ветви дерева, облака, береговая линия.

Исторически одним из первых хорошо изученных фракталов было множество, представленное общественности немецким математиком Георгом Кантором в конце XIX века, – *канторово множество.* Рассмотрим подробнее его построение.

В качестве стартовой конфигурации берётся отрезок $[0; 1]$. Он делится на 3 равные по длине части, из которых удаляется средняя, более точно, интервал $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Оставшиеся отрезки снова делятся на 3 равные по длине части, из которых удаляются средние интервалы $(\frac{1}{9}; \frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9}; \frac{8}{9})$ (рис. 7.1).

И так далее, на новом шаге каждый из оставшихся отрезков делится на 3 равные по длине части, из которых удаляется находящаяся посередине (интервал). Интерес представляет множество, получающееся в пределе данных ите-

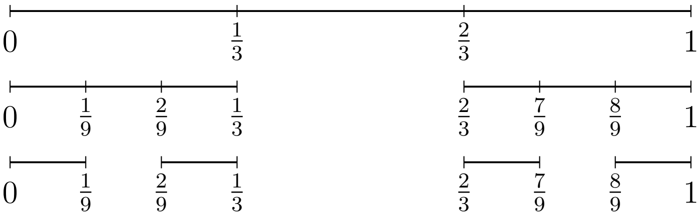


Рис. 7.1. Построение канторова множества

раций (канторово). Обозначим его $\mathcal{C}$.

Канторово множество обладает многими примечательными свойствами. Отметим наиболее важные в контексте нашей тематики.

а) $\mathcal{C}$ – фрактал. Действительно, в ходе построения к каждому меньшему отрезку применяются те же преобразования, что и ко всему $[0;1]$.

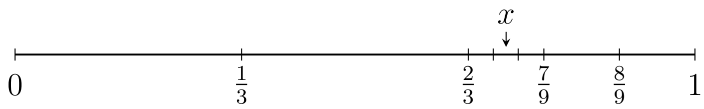
б) Мера («сколько места занимает» на прямой) множества $\mathcal{C}$ равна нулю. Действительно, $\mathcal{C}$ содержится в наборе отрезков, образующихся на любом шаге построения. Суммы длин отрезков в таких наборах составляют последовательность $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{2^n}{3^n}, \ldots$, из чего и следует утверждение. Этот же факт можно проиллюстрировать, если вычислить сумму длин всех удаляемых в процессе построения $\mathcal{C}$ интервалов:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = /S = \frac{b_1}{1-q}/ = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

в) Мощность множества $\mathcal{C}$ равна мощности $[0;1]$. Действительно, можно установить взаимно однозначное соответствие (отображение) между элементами (числами) этих множеств. Для задания такого отображения Кантор предложил записать числа множества $\mathcal{C}$ в троичной системе, а числа всего $[0;1]$ – в двоичной.

Поскольку в таких записях можно использовать (см. ниже) только отрицательные степени тройки и двойки соответственно, то нахождение записей имеет простой геометрический смысл, связанный с делением $[0;1]$ на равные по длине части. Проиллюстрируем идею только для троичной системы. Пусть x – некоторое число из $[0;1)$. Значение первой цифры после запятой в его троичной записи – 0, 1 или 2 – геометрически определяется тем, в какую треть $[0,1)$ попадает точка, соответствующая числу x. Если в $[0;1/3)$, то 0; если в $[1/3;2/3)$, то 1; если в $[2/3;1)$, то 2. Значение следующей цифры получается аналогично после деления на три равные части той трети $[0;1)$, в которой оказалась точка x, и т. д. (рис. 7.2).

Таким образом, точки (числа) канторова множества, кроме правых границ отрезков деления, имеют в своей троичной записи только цифры 0 или 2. При этом хорошо известно, что как раз границы деления дробных



$$x = 0.201\ldots = 2 \times \tfrac{1}{3} + 0 \times \tfrac{1}{9} + 1 \times \tfrac{1}{27} + \ldots$$

Рис. 7.2. Пример представления числа в троичной системе

разрядов (правые границы соответствующих отрезков) в любой системе представления (по любому основанию) имеют две записи. Например, число $1 = 1.0$ в десятичной системе может быть записано и как $0.(9)$. Действительно,

$$0.99\ldots9\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{1/10}} = 1.$$

Точно так же в троичной системе имеем

$$1 = 1.0 = 0.(2); \quad \frac{1}{3} = 0.1 = 0.0(2); \quad \frac{7}{9} = 0.21 = 0.20(2) \text{ и т. д.}$$

Получается, что все точки (числа) множества $\mathcal{C}$, и только они, могут иметь дробную запись в троичной системе, состоящую из цифр 0 и 2. Каждое число $[0;1]$ имеет дробную запись в двоичной системе, состоящую из цифр 0 и 1 (число 1 представляем в виде $0.(1)$). Взаимно однозначное соответствие между множествами $[0;1]$ и $\mathcal{C}$ определяется схемой, приведенной на рис. 7.3.

$$x = 0.10110100\ldots \in [0;1]$$

$$y = 0.20220200\ldots \in \mathcal{C}$$

Рис. 7.3. Биекция между $\mathcal{C}$ и отрезком $[0;1]$

Как известно, единичный отрезок имеет мощность континуума (мощность множества действительных чисел).

7.2. Аналитическое задание канторова множества

Важным шагом в изучении фракталов была разработка способов их компьютерного построения. Этапы построения канторова множества можно описать при помощи преобразований, задаваемых формулами.

Первый этап – переход от $[0;1]$ к набору из двух отрезков $[0;\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};1]$ (от множества G_0 к множеству G_1), – можно осуществить путём объединения результатов действия двух преобразований сжатия A и B, где A – сжатие с $k = \frac{1}{3}$

относительно точки 0, B – сжатие с $k = \frac{1}{3}$ относительно точки 1, то есть $G_1 = A(G_0) \cup B(G_0)$ (рис. 7.4).

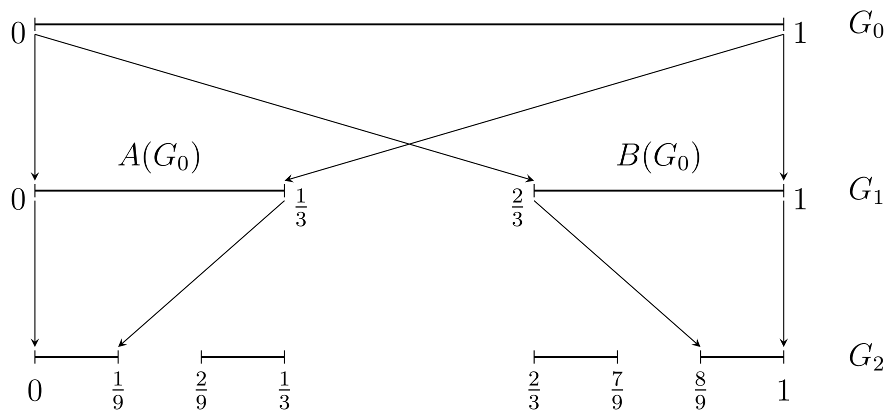


Рис. 7.4. Построение канторова множества
с помощью двух преобразований сжатия

Легко увидеть, что $G_2 = A(G_1) \cup B(G_1)$, $G_3 = A(G_2) \cup B(G_2)$ и т. д. Другими словами, если определить преобразование

$$F(\cdot) = A(\cdot) \cup B(\cdot),$$

где $(\cdot)$ означает одну точку (число) или целое множество точек, то можно записать

$$\begin{aligned}
&G_1 = F(G_0),\\
&G_2 = F(G_1) = F(F(G_0)) = F^2(G_0),\\
&\ldots\\
&G_n = F(G_{n-1}) = F^n(G_0).
\end{aligned}$$

В таких обозначениях

$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} G_n \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} F^n(G_0).$$

Следующее действие – задание преобразований A и B формулами. Очевидно, образом точки с координатой x при преобразовании A будет точка $x' = \frac{1}{3}x$, то есть $A(x) = \frac{1}{3}x$.

Формулу преобразования B удобно получить из решения более общей задачи (которая понадобится для дальнейшей работы с фракталами) – нахождения аналитического задания преобразования сжатия на плоскости относительно данной точки $M_0(x_0, y_0)$ с коэффициентом k $(0 < k < 1)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная (переменная) точка, $M'(x', y')$ – её образ; тогда по определению преобразования выполняется $M_0M' = kM_0M$. Соотношение между координатами переменной точки и её образа проще найти, перейдя к векторной записи (рис. 7.5). Имеем $M_0 \leftrightarrow \overrightarrow{OM_0}$, $M \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$, $M' \leftrightarrow \overrightarrow{OM'}$; получается

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{OM_0} + k\overrightarrow{M_0M},$$

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_0} + k(\overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{OM_0}) = (1-k)\overrightarrow{OM_0} + k\overrightarrow{OM},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (1-k)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

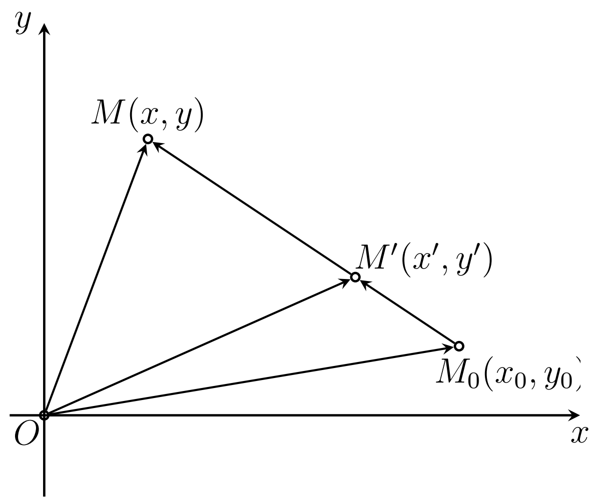


Рис. 7.5. Сжатие на плоскости относительно точки $M_0(x_0, y_0)$

Для преобразования B выходит, что $B(x) = (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Таким образом, построение канторова множества осуществляется из отрезка $[0; 1]$ итерациями преобразования F, состоящего из комбинации двух преобразований сжатия на прямой.

Удивительный факт можно наблюдать, если начать итерации преобразования F не с отрезка $[0; 1]$, а с любого другого множества G'_0, например содержащего одну некоторую точку. Пусть

$$G'_1 = F(G'_0), \ldots, G'_n = F(G'_{n-1}) = F^n(G'_0).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} G'_n = \mathcal{C} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F^n(G'_0) = \mathcal{C}.$$

(Здесь сходимость понимается пока чисто визуально.)

Это означает, что преобразование F в определённом смысле содержит «всю информацию» о (несчётном) канторовом множестве (всегда к нему приводит). По сути, речь идёт о кодировании – переводе информации из одного вида в другой, – причём очень эффективном. Однако пока всё выглядит лишь как очень интересный частный случай, возможно похожий на то, что два числа k и b описывают на плоскости бесконечное множество точек, координаты которых связаны уравнением $y = kx + b$ – точек, лежащих на этой прямой, то есть возможно, что таким способом можно задавать только однотипные множества.

7.3. Описание фракталов на плоскости

Определение 7.3.1. *Канторово множество на плоскости* определим как декартово произведение двух «одномерных» канторовых множеств:

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} = \{(x, y) : x \in \mathcal{C}, y \in \mathcal{C}\}.$$

Для сравнения: декартовым произведением двух отрезков $[a; b] \times [c; d]$ является прямоугольник (рис. 7.6).

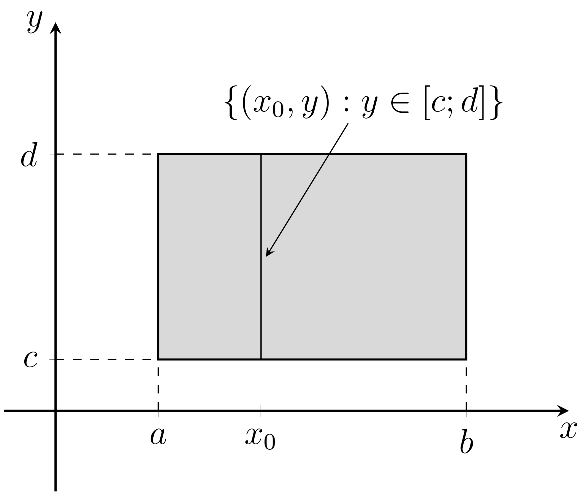


Рис. 7.6. Декартово произведение отрезков $[a; b]$ и $[c; d]$

Геометрически построение канторова множества на плоскости осуществляется теми же действиями, что и построение «одномерного», только одновременно по обеим координатам. Этот процесс можно описать так. На первом шаге исходное множество $[0; 1] \times [0; 1] = G_0$ делим на 9 равных квадратов, из которых удаляем 5 средних полузамкнутых (рис. 7.7).

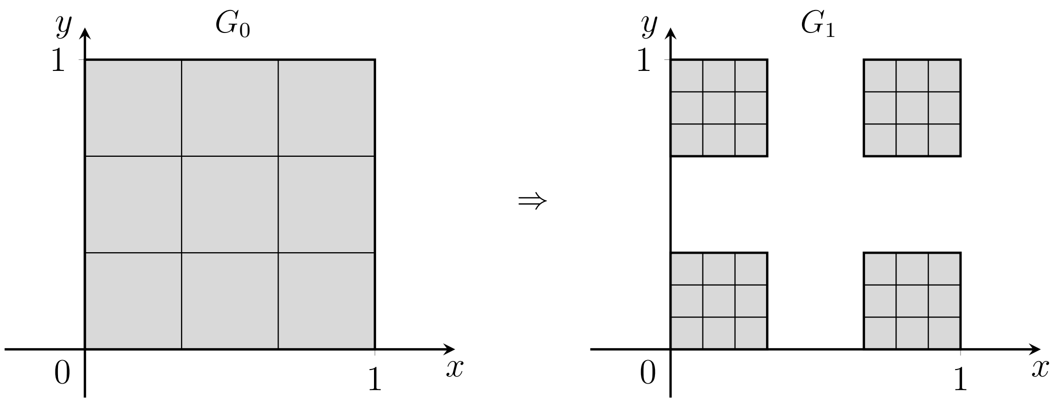


Рис. 7.7. Построение канторова множества на плоскости

Получаем набор из 4 одинаковых замкнутых квадратов со стороной $\frac{1}{3}$, приставленных к вершинам исходного квадрата, – это множество G_1. На втором шаге каждый из оставшихся квадратов делим на 9 равных квадратов, из которых удаляем 5 средних полузамкнутых, и так далее. В пределе приходим к множеству $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Как и в «одномерном» случае, построение можно описать аналитически при помощи комбинации (объединения) преобразований сжатия. Легко увидеть, что G_1 получается объединением 4 уменьшенных копий множества G_0. А множество G_2 таким же образом получается из G_1. Пусть A_i – преобразование сжатия с $k = \frac{1}{3}$ относительно i-й вершины единичного квадрата (рис. 7.8).

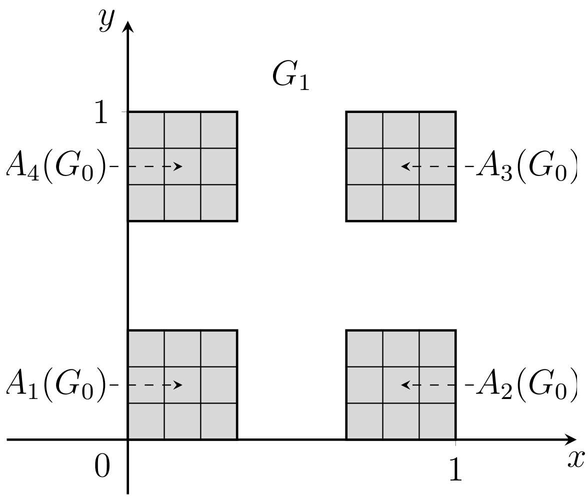


Рис. 7.8. Преобразования, приводящие к канторову множеству на плоскости

Найдём аналитическую запись преобразований A_i, $i = 1, \ldots, 4$. Формулу (7.1), описывающую в координатах преобразование сжатия на плоскости относительно данной точки $M_0(x_0, y_0)$ с коэффициентом k $(0 < k < 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (1-k)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-k)x_0 \\ (1-k)y_0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$A_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$A_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Замечание 7.3.2. Формулу каждого из преобразований A_2, A_3, A_4 удобнее сразу искать при помощи композиции (последовательного действия) двух преобразований (см. рис. 7.9.):

1) сжатия исходного единичного квадрата относительно начала координат с коэффициентом $k = \frac{1}{3}$ (масштабирования),

2) сдвига на соответствующий вектор (параллельного переноса).

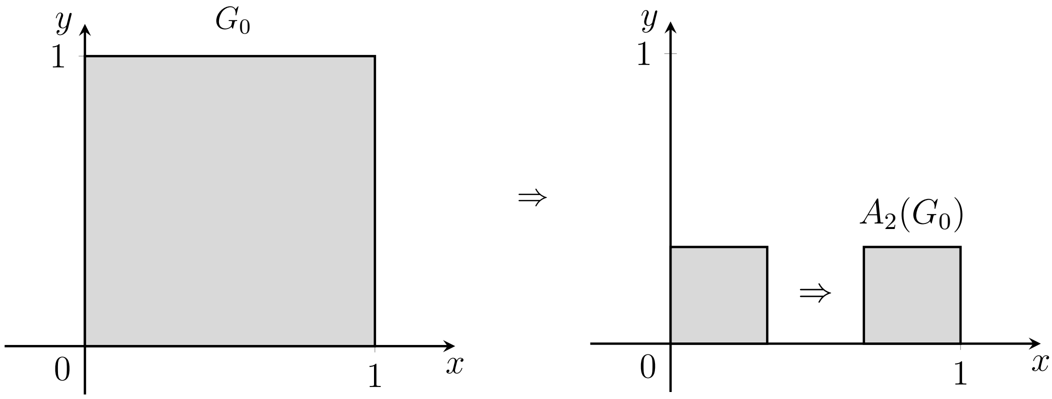


Рис. 7.9. Композиция преобразований масштабирования и сдвига

Если определить

$$F(\cdot) = \bigcup_{i=1}^{4} A_i(\cdot),$$

то приходим к соотношениям:

$$G_1 = F(G_0),$$

$$\ldots,$$

$$G_n = F(G_{n-1}) = F^n(G_0),$$

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} F^n(G_0).$$

Таким образом, аналитическое описание (построения) канторова множества полностью завершено.

Аналогично канторову множеству на плоскости строятся многие другие фракталы. Рассмотрим, например, широко известную конструкцию *треугольник Серпинского* (рис. 7.10). Здесь в качестве исходного множества берётся треугольник (обычно равносторонний или прямоугольный равнобедренный); он делится средними линиями на 4 равных треугольника, из которых удаляется один (открытый), находящийся середине. Далее над каждым оставшимся треугольником совершаются те же операции.

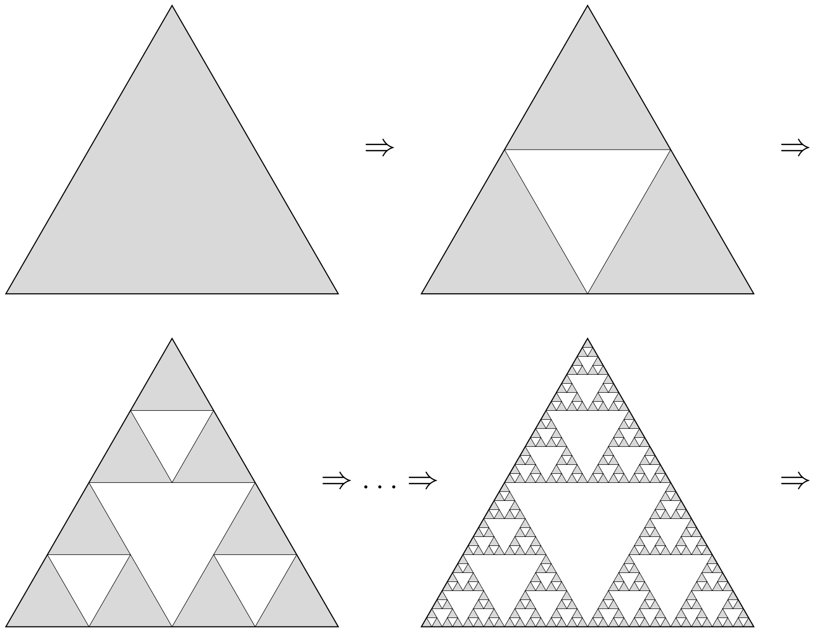


Рис. 7.10. Построение треугольника Серпинского

Чтобы описать аналитически такое построение, нужно ввести систему координат и задать 3 преобразования сжатия относительно вершин исходного треугольника с $k = \frac{1}{2}$. Тогда объединение действий этих преобразований

$$F(\cdot) = \bigcup_{i=1}^{3} A_i(\cdot)$$

приводит к нужному фракталу.

Несложно убедиться, что мера (на плоскости) как канторова множества, так и треугольника Серпинского равна нулю.

Так же получаются фракталы на основе других правильных многоугольников. Общую схему построения подобных фракталов можно сформулировать следующим образом. Исходное множество G_0 покрывается своими уменьшенными копиями не полностью, а с оставлением пустот. Далее пустоты «тиражируются» в меньшем масштабе в каждой копии и так далее. В пределе приходим к фракталу.

Фракталы можно получать по той же схеме, но не удалением частей исходного множества, а, наоборот, наращиванием новых. Так строится, например, *снежинка Коха* (рис. 7.11). Стороны равностороннего треугольника делятся на 3 равные части. К каждой средней части пририсовывается равносторонний треугольник соответствующего размера. Затем стороны новой фигуры («звёздочки») снова делятся на 3 равные части, к средней из которых пририсовывается равносторонний треугольник, и так далее. С каждым шагом получаем всё более «пушистую» фигуру. Отметим ещё раз, что в обсуждаемом методе переход к новой фигуре в цепочке получается объединением уменьшенных копий предыдущей. В данном случае их набирается 12 (рис. 7.12).

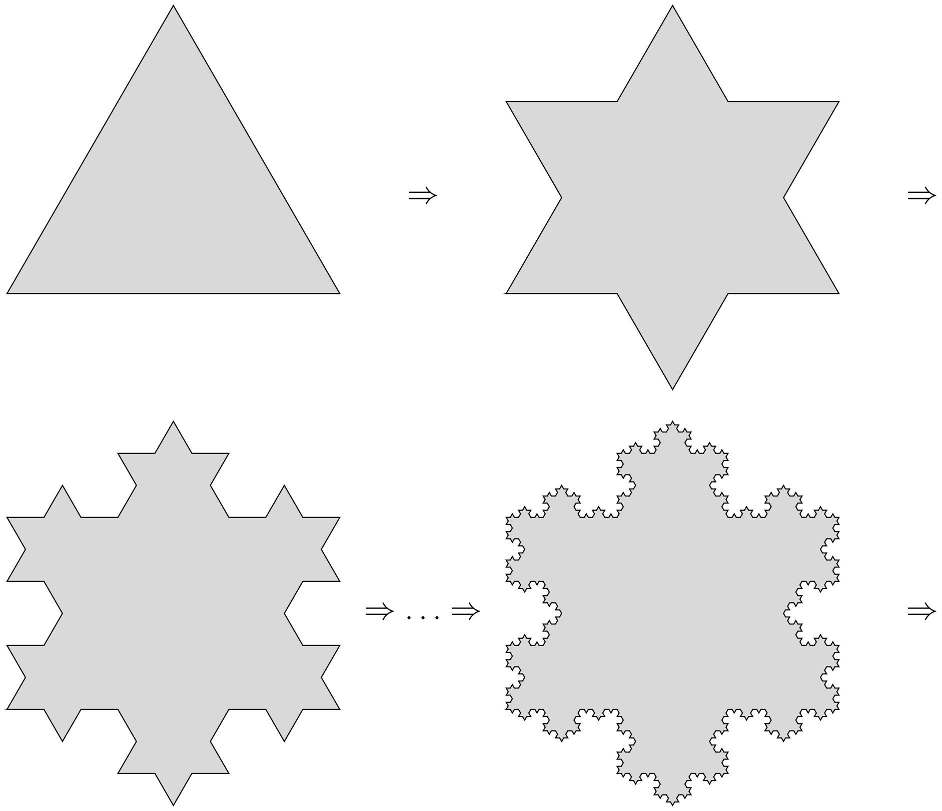


Рис. 7.11. Построение снежинки Коха

Во всех рассмотренных примерах снова можно наблюдать загадочную «притягательность» предельного множества при многократных повторениях найденного в процессе построении фрактала преобразования F. Обозначив изучаемый (тот, который строили) фрактал как G_*, возьмём в качестве стартовой фигуры любое множество G'_0, например состоящее из одной некоторой точки. Пусть $G'_1 = F(G'_0), \ldots, G'_n = F(G'_{n-1}) = F^n(G'_0)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} G'_n = G_* \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} F^n(G'_0) = G_*.$$

О сходимости вновь говорим, понимая только сходство зрительных образов.

7.4. Применение метода фрактального кодирования к обычным геометрическим фигурам

Итак, видим эффект. Набор уменьшающих преобразований, используемый при построении фрактала (он «покрывает» исходную фигуру её копиями с оставлением пустот или, наоборот, с добавлением новых частей), является его кодом, а именно при итерациях такого набора преобразований вне зависимости от стартового множества всегда приходим к одному фракталу.

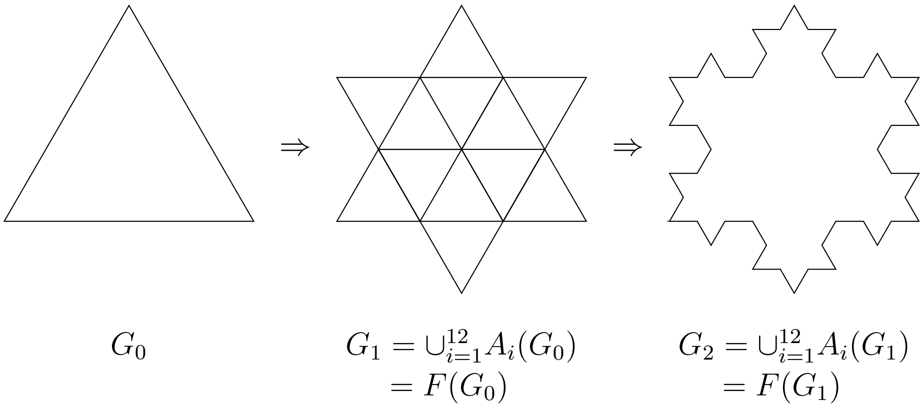


Рис. 7.12. Кодирование снежинки Коха

Возникает вопрос: пусть набор уменьшающих преобразований в точности составляет некоторую фигуру из её образов, сохранится ли его свойство кодирования?

Рассмотрим простейший пример. Пусть G_0 – единичный квадрат. Построим 4 уменьшающих преобразования (сжатия относительно вершин квадрата с $k = \frac{1}{2}$), покрывающие точным образом G_0 его уменьшенными копиями (рис. 7.13). (Ясно, что при повторных применениях этого комплекса геометрически ничего не происходит /любая новая фигура в цепочке совпадает с исходной/, хотя всё-таки при каждом применении точки квадрата определённым образом перемешиваются.)

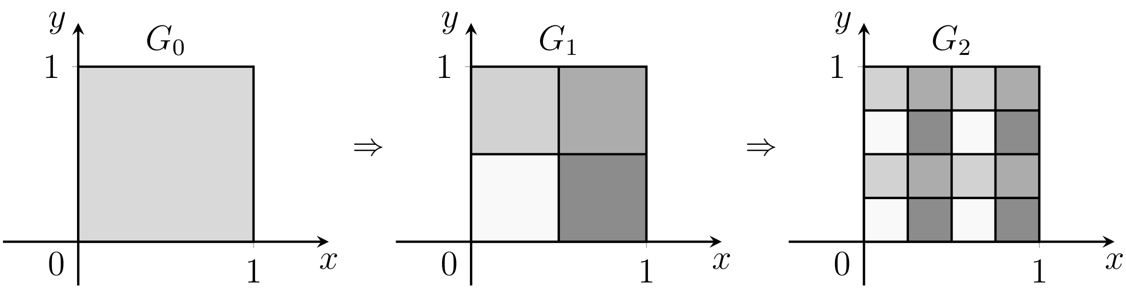


Рис. 7.13. Кодирование методом IFS единичного квадрата

Взяв в качестве стартового множества, например, начало координат, осуществим несколько итераций набора из данных 4 преобразований. С каждой итерацией количество точек в новой фигуре будет увеличиваться в 4 раза. Меньше чем через 10 шагов точки очередной фигуры будут «плотно» заполнять единичный квадрат (если говорить про пиксели на экране монитора, то полностью).

Получается, что обнаруженный способ кодирования фракталов представляет собой не просто интересное наблюдение, а является проявлением достаточно универсального алгоритма, в котором важно разобраться. Понятно, что для кодирования заданной фигуры методом IFS достаточно точным образом покрыть её своими уменьшенными копиями.

Упражнение 7.4.1. Закодировать фигуры на рис. 7.14 методом IFS. (Цифры на сторонах задают лишь пропорции в фигуре; для более удобного вычисления коэффициентов преобразований логично выбрать подходящий масштаб в системе координат.)

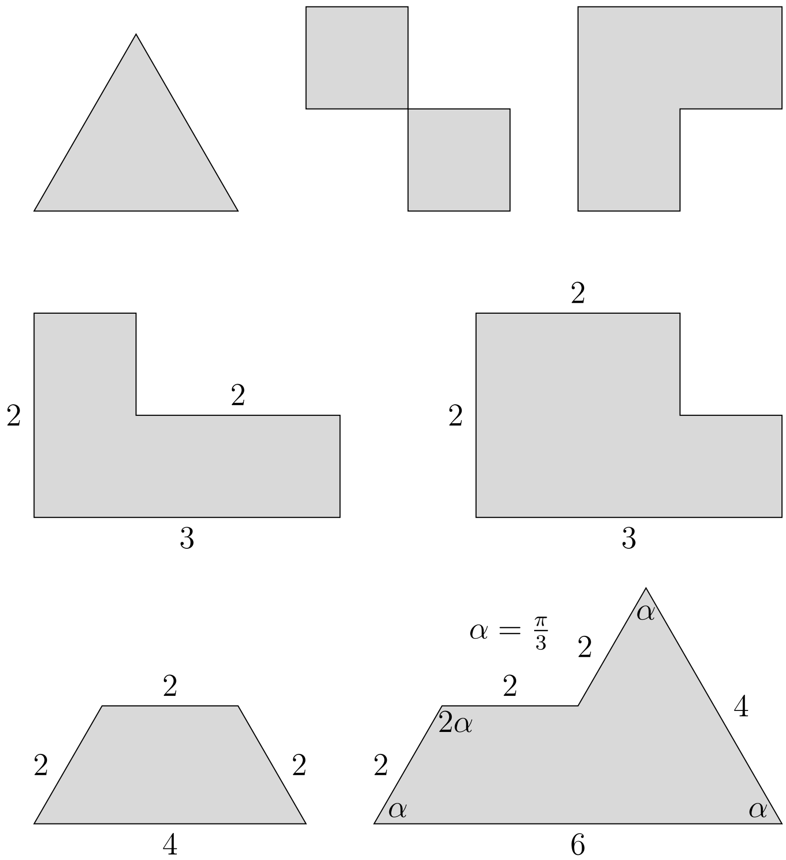


Рис. 7.14. Фигуры для кодирования из упражнения 7.4.1

Упражнение 7.4.2. Опишите преобразования для построения фракталов на рис. 7.16 и 7.15.

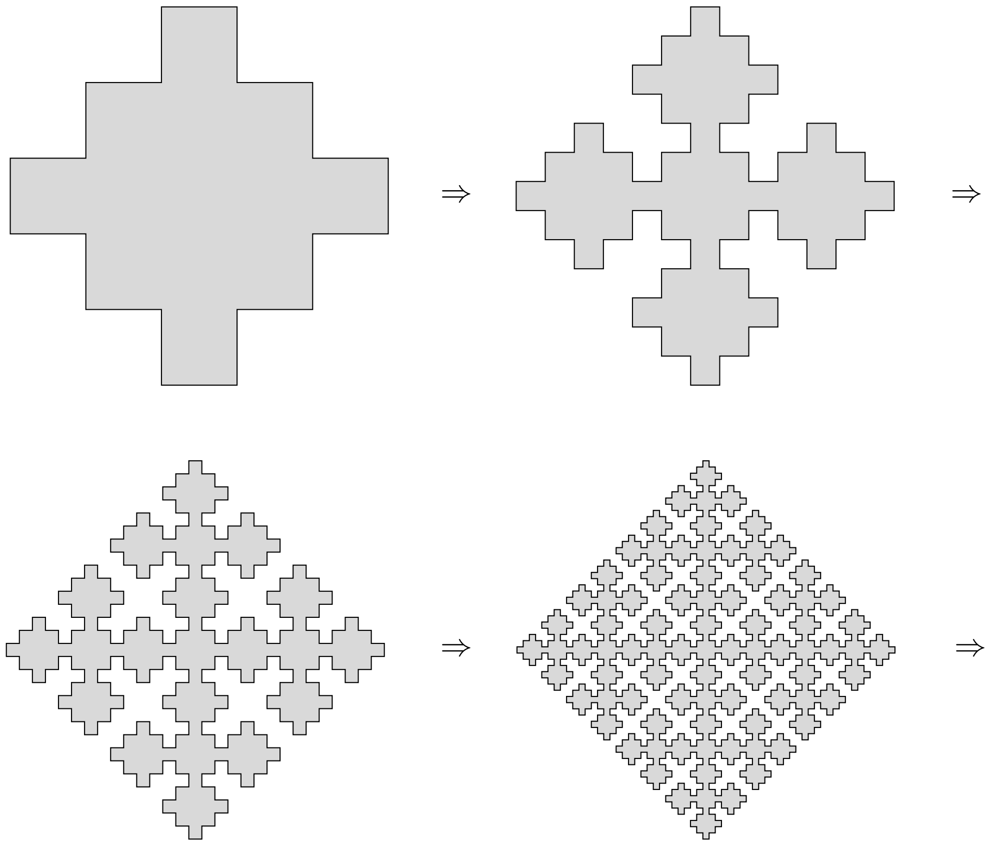


Рис. 7.15. Квадрат Серпинского

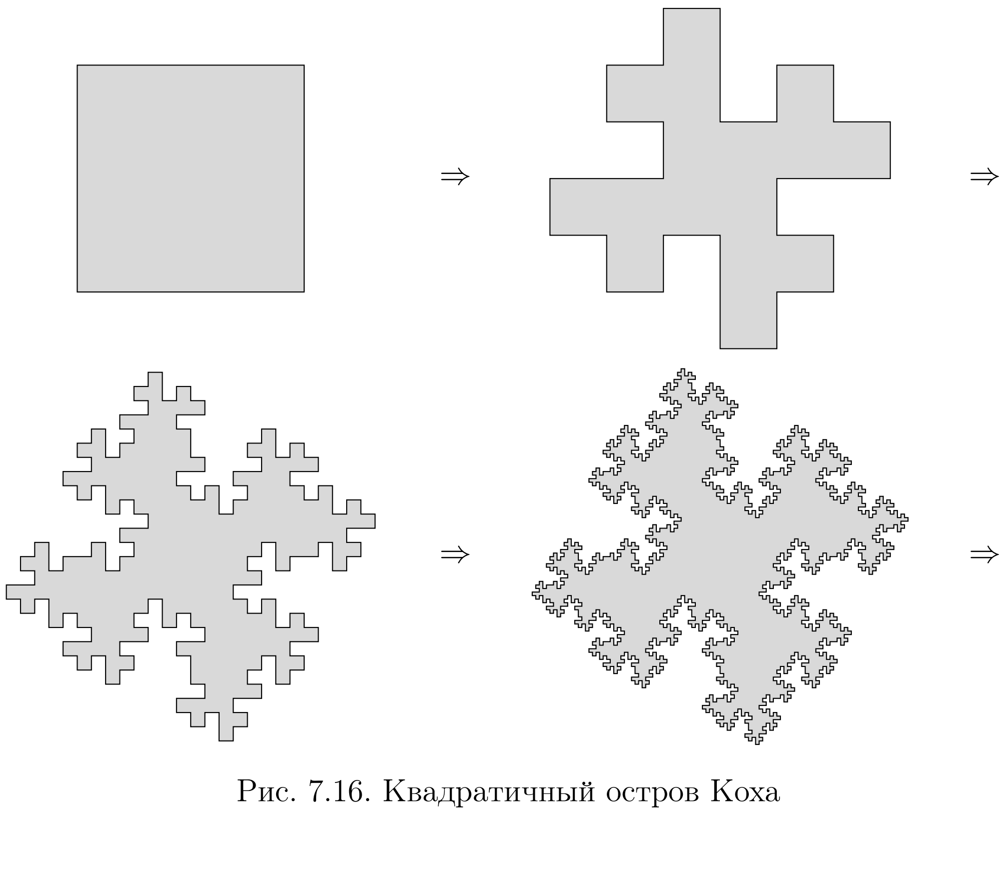


Рис. 7.16. Квадратичный остров Коха

Глава 8

Теоретические основы метода IFS

8.1. Пространство изображений, метрика Хаусдорфа

Чтобы найти объяснение эффекта кодирования, которым обладает комбинация уменьшающих преобразований, сначала нужно чётко сформулировать понятие сходства / различия изображений (геометрических фигур), то есть того вида сходимости последовательности фигур, с которым имеем дело. Математическим способом определения сходства / различия объектов некоторой природы является, как известно, введение метрики на множестве этих объектов.

Отождествим изображение с некоторым замкнутым подмножеством фиксированного прямоугольника Π, обозначим получаемый набор объектов через X. Для такого множества хорошо известна *метрика Хаусдорфа*.

Её удобно задать за 3 шага. Рассмотрим некоторые $G_1, G_2 \in X$.

1) Если $G_1 = \{x_0\}$ состоит из одной точки, то *отклонением* его от множества G_2 назовём
$$\delta(x_0, G_2) = \min_{y \in G_2} \|x_0 - y\|, \tag{8.1}$$
где $\|x_0 - y\| = \rho_2(x_0, y)$ – обычное евклидово расстояние между точками.

2) В общем случае, отклонение G_1 от G_2 –
$$\delta(G_1, G_2) = \max_{x \in G_1} \delta(x, G_2) = \max_{x \in G_1} \min_{y \in G_2} \|x - y\| \tag{8.2}$$
– показатель того, насколько фигура G_1 выходит за пределы фигуры G_2 (рис. 8.1).

Аналогично вычисляется $\delta(G_2, G_1)$.

В пунктах 1) и 2) используются понятия min и max, поскольку множества из X компактны. Следовательно (8.1), на них (непрерывная) функция

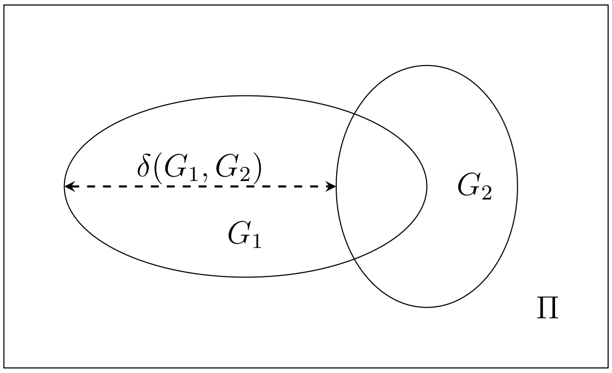


Рис. 8.1. Отклонение множества G_1 от G_2

расстояния до заданного элемента достигает наименьшего и наибольшего значений. Отклонение точек плоскости (8.2) от заданного множества также является непрерывной функцией.

Отклонение – «односторонний» показатель, поэтому не обладает всеми свойствами метрики (приведите примеры!).

3) *Расстоянием по Хаусдорфу* между G_1 и G_2 называется

$$\rho(G_1, G_2) = \max\{\delta(G_1, G_2), \delta(G_2, G_1)\}$$

– характеристика максимального выступа одной из фигур G_1, G_2 за пределы другой, то есть отличия этих фигур.

Конструкции хаусдорфовой метрики можно придать следующий геометрический смысл. Для множества $G \in X$ и действительного $r > 0$ определим замкнутую r-окрестность множества

$$G(r) = \{\bar{x} : \ \delta(\bar{x}, G) \le r\}.$$

Тогда

$$\delta(G_1, G_2) = \min\{r : \ G_1 \subset G_2(r)\} \text{ (рис. 8.2)},$$

а $\rho_H(G_1, G_2)$ – больший из «радиусов» соответствующих окрестностей множеств G_2 и G_1. Работа с обсуждаемыми величинами в таком виде более наглядна.

Очевидно, аксиомы а), б) метрики в данном случае выполняются; покажем, что имеет место и «неравенство треугольника».

Пусть G_1, G_2 и G – некоторые множества из X. Обозначим $u = \rho_H(G_1, G)$, $v = \rho_H(G, G_2)$. Тогда $G_1 \subset G(u)$, $G \subset G_2(v)$, значит, $G_1 \subset G_2(u+v)$ (рис. 8.3).

Следовательно,

$$\delta(G_1, G_2) \le u + v = \rho_H(G_1, G) + \rho_H(G, G_2).$$

Аналогично $G_2 \subset G(v)$, $G \subset G_1(u)$, откуда $G_2 \subset G_1(u+v)$ и

$$\delta(G_2, G_1) \le u + v = \rho_H(G_1, G) + \rho_H(G, G_2),$$

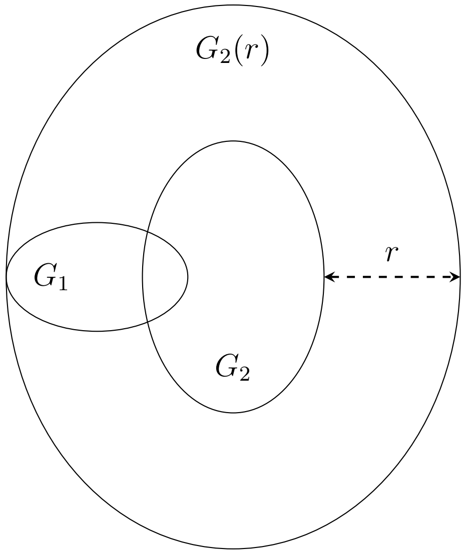


Рис. 8.2. Определение отклонения множества через r-окрестность

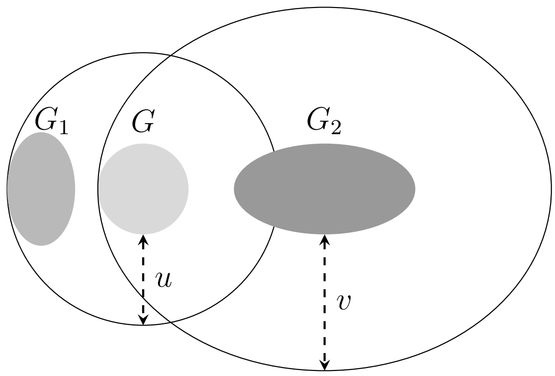


Рис. 8.3. Неравенство треугольника для метрики Хаусдорфа

поэтому

$$\rho_H(G_1, G_2) \leq \rho_H(G_1, G) + \rho_H(G, G_2).$$

(X, ρ_H) будем называть *пространством изображений.*

Теорема 8.1.1. (X, ρ_H) является полным метрическим пространством.

Доказательство. Нужно показать, что любая фундаментальная по метрике Хаусдорфа последовательность непустых замкнутых множеств из Π сходится к непустому замкнутому множеству из Π. (Ситуация качественно сходна с тем, что фундаментальная относительно равномерной метрики последовательность непрерывных функций имеет пределом непрерывную функцию: график непрерывной на отрезке функции – непустое замкнутое множество.)

Пусть G_n, $n \in \mathbb{N}$, – некоторая такая последовательность. Докажем, что для неё существует множество $G_* \in X$, которое удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер n_ε, что при любом номере $n \geq n_\varepsilon$ выполняется

$$\rho_H(G_n, G_*) < \varepsilon.$$

Рассмотрим всевозможные последовательности точек x_n, удовлетворяющие условию

$$x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, \dots, x_n \in G_n, \dots$$

Поскольку любая рассматриваемая последовательность является ограниченной, у неё существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через V множество последовательностей x_n, имеющих предел; а через G_* – множество всех точек, являющихся пределами:

$$G_* = \{x_* : x_* = \lim x_n\}.$$

Сначала убедимся, что G_* является непустым множеством ($V \neq \emptyset$). Если $G_{n+1} \subset G_n$ для всех n, то это очевидно. Возьмём произвольную последовательность x_n обсуждаемого вида и рассмотрим её сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Покажем, что эту подпоследовательность всегда можно дополнить до последовательности из V, то есть существует

$$y_n \in V : y_{n_k} = x_{n_k}, k \in N.$$

Без потери общности можно считать, что $x_{n_1} = x_1$. Зафиксируем элементы $y_{n_k} = x_{n_k}$. Для каждого $n_k < n < n_{k+1}$, $k \in N$, выберем точку $y_n \in G_n$ по принципу

$$\left\|y_{n_{k+1}} - y_n\right\| = \delta(y_{n_{k+1}}, G_n).$$

Следовательно, при $n_k < n < n_{k+1}$ выполняется

$$\left\|y_n - y_{n_{k+1}}\right\| \leq \delta(G_n, G_{n_{k+1}}) \leq \rho_H(G_n, G_{n_{k+1}}).$$

Поскольку y_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность, а G_n – фундаментальная последовательность, то $y_n \in V$ (обоснуйте аккуратно это утверждение на языке «$\varepsilon, n_\varepsilon$»).

Убедимся, что множество G_* является замкнутым: произвольная точка прикосновения этого множества x_0 принадлежит ему, то есть нужно показать существование последовательности из V, имеющей пределом x_0.

По определению,

$$x_0 = \lim x_n^*, \ x_n^* \in G_*.$$

Пусть $h_n = \|x_n^* - x_0\|$. Каждый элемент x_n^* является, в свою очередь, пределом некоторой последовательности из V. Значит, существуют номер n_1 и точка $x_{n_1} \in G_{n_1}$, такие что $\|x_{n_1} - x_1^*\| < h_1$, номер $n_2 > n_1$ и точка $x_{n_2} \in G_{n_2}$, для которых $\|x_{n_2} - x_2^*\| < h_2$, и так далее. Получается последовательность x_{n_k}, сходящаяся к x_0. Поскольку G_n – фундаментальная последовательность, то, как показано выше, x_{n_k} можно достроить до последовательности из V (имеющей пределом x_0).

Таким образом, $G_* \in X$. Докажем, что G_n сходится к G_*. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Убедимся в существовании номера n_ε, такого что при любом $n \geq n_\varepsilon$ выполняется $G_* \subset G_n(\varepsilon)$ и $G_n \subset G_*(\varepsilon)$.

Рассмотрим первое включение. По условию существует номер n'_ε, начиная с которого ($m > n \geq n'_\varepsilon$) выполняется $\rho_H(G_n, G_m) < \varepsilon$, следовательно, $G_m \subset G_n(\varepsilon)$.

Пусть $x_* \in G_*$ – произвольный элемент. Учитывая, что

$$x_* = \lim x_m,\ x_m \in G_m,$$

а $G_n(\varepsilon)$ – замкнутое множество, получаем $x_* \in G_n(\varepsilon)$. Значит, $G_* \subset G_n(\varepsilon)$ при $n \geq n'_\varepsilon$.

Рассмотрим второе включение. Из фундаментальности G_n вытекает существование подпоследовательности n_k натуральных чисел, такой что при $n, m \geq n_k$ выполняется $\rho_H(G_n, G_m) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Возьмём произвольный элемент $x = x_{n_1} \in G_{n_1}$. Поскольку $G_{n_1} \subset G_{n_2}(\frac{\varepsilon}{2})$, то существует элемент $x_{n_2} \in G_{n_2}$, для которого

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично из $G_{n_2} \subset G_{n_3}(\frac{\varepsilon}{4})$ следует существование элемента $x_{n_3} \in G_{n_3}$, для которого

$$\|x_{n_2} - x_{n_3}\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

И так далее.

В общем случае условие $G_{n_k} \subset G_{n_{k+1}}(\frac{\varepsilon}{2^k})$ гарантирует существование $x_{n_{k+1}} \in G_{n_{k+1}}$, для которого

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right\| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Указанные элементы удовлетворяют условию: для любого $l > k$

$$\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq \left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right\| + \ldots + \left\|x_{n_{l-1}} - x_{n_l}\right\| < \frac{\varepsilon}{2^k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{l-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}},$$

то есть x_{n_k} – фундаментальная подпоследовательность некоторой последовательности из V. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*,$$

тогда $\|x - x_*\| < \varepsilon$. Следовательно, $G_{n_1} \subset G_*(\varepsilon)$ (для любого $n \geq n_1$ выполняется $G_n \subset G_*(\varepsilon)$).

Окончательно получаем: если $n \geq n_\varepsilon = \max\{n_1, n'_\varepsilon\}$, то $\rho_H(G_n, G_*) < \varepsilon$. □

Рассмотренная теорема может быть обобщена до случая пространства из ограниченных и замкнутых подмножеств произвольного полного метрического пространства (Hahn, 1932).

8.2. Аффинный коллаж. Преобразование аффинного коллажа

Определение 8.2.1. Преобразование $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

называют *аффинным.*

По своей сути это композиция линейного преобразования на плоскости и параллельного переноса, поэтому его свойства хорошо понятны.

Определение 8.2.2. Набор аффинных преобразований $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называют *аффинным коллажем* (коллаж – изображение объекта в стиле мозаики) на заданном прямоугольнике Π, если каждое A_i, $i = 1, \ldots, m$, обладает следующими свойствами:

1) существует $0 \le \alpha_i < 1$, что для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) прямоугольника Π выполняется:

$$\left\| A_i\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - A_i\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \le \alpha_i \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|,$$

– условие сжатия;

2) для любой точки (x, y) прямоугольника Π имеет место

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Pi,$$

– условие сохранения области.

Замечание 8.2.3. Несложно увидеть, что условие сжатия аффинного преобразования

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равносильно тому, что его линейная часть является сжимающим преобразованием на $\mathbb{R}^2$: для любой точки (x, y) плоскости справедливо неравенство

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \le \alpha \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

Замечание 8.2.4. При наличии условия сжатия второе условие равносильно тому, что вектор сдвига не выводит точки за пределы прямоугольника. Из принципа сжимающих отображений вытекает, что при выполнении обоих условий неподвижная точка соответствующего аффинного преобразования находится внутри Π.

Определение 8.2.5. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – аффинный коллаж на прямоугольнике П, (X, ρ_H) – пространство изображений, ассоциированное с П. Преобразование $F: \ X \to X$,

$$F(\cdot) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i(\cdot),$$

называют *преобразованием аффинного коллажа на* П.

Теорема 8.2.6. Преобразование аффинного коллажа является сжимающим отображением в пространстве изображений.

Доказательство. Нужно показать, что при некотором $0 \le \alpha < 1$ для любых $G_1, G_2 \in X$ выполняется

$$\max\{\delta(F(G_1), F(G_2)), \delta(F(G_2), F(G_1))\} \le \alpha \cdot \rho_H(G_1, G_2).$$

В силу произвольности множеств G_1 и G_2 достаточно убедиться, например, в соотношении

$$\delta(F(G_1), F(G_2)) \le \alpha \cdot \rho_H(G_1, G_2),$$

то есть что

$$\max_{\bar{u} \in F(G_1)} \min_{\bar{v} \in F(G_2)} \|\bar{u} - \bar{v}\| \le \alpha \cdot \rho_H(G_1, G_2).$$

Возьмём произвольную точку $\bar{u}_0$ в множестве $F(G_1)$, тогда для неё найдутся точка $\bar{x}_0$ в G_1 и аффинное преобразование A_i, такие что $\bar{u}_0 = A_i(\bar{x}_0)$. По точке $\bar{x}_0$ выберем в множестве G_2 точку $\bar{y}_0$ так, чтобы $\delta(\bar{x}_0, G_2) = \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|$, а по точке $\bar{y}_0$ построим точку $\bar{v}_0 \in F(G_2)$: $\bar{v}_0 = A_i(\bar{y}_0)$ (рис. 8.4).

Из построения сразу вытекает

$$\|\bar{u}_0 - \bar{v}_0\| = \|A_i(\bar{x}_0) - A_i(\bar{y}_0)\| \le \alpha_i \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| = \alpha_i \cdot \delta(\bar{x}_0, G_2) \le \alpha_i \cdot \rho_H(G_1, G_2),$$

где α_i – это коэффициент сжатия преобразования A_i. Следовательно,

$$\delta(\bar{u}_0, F(G_2)) \le \|\bar{u}_0 - \bar{v}_0\| \le \alpha_i \cdot \rho_H(G_1, G_2),$$
$$\delta(A_i(G_1), F(G_2)) \le \alpha_i \cdot \rho_H(G_1, G_2).$$

В общем случае получается

$$\max_{\bar{u} \in F(G_1)} \delta(\bar{u}, F(G_2)) \le \alpha \cdot \rho_H(G_1, G_2),$$

где $\alpha = \max\{\alpha_i : \ i = 1, \ldots, m\}$, то есть

$$\delta(F(G_1), F(G_2)) \le \alpha \cdot \rho_H(G_1, G_2).$$

□

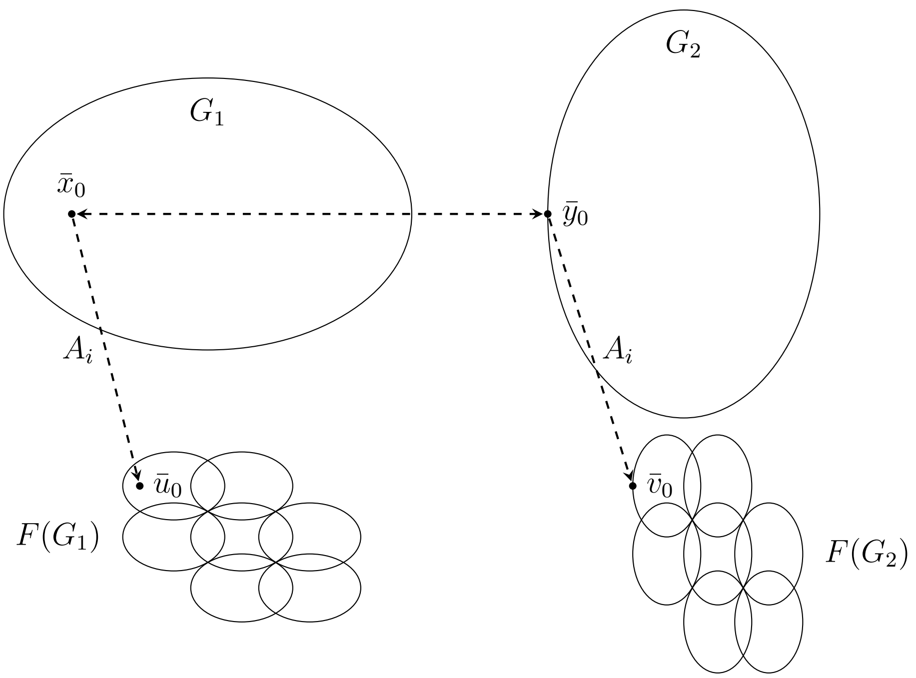


Рис. 8.4. Сжатие преобразования аффинного коллажа

Следствие 8.2.7. Если F – преобразование аффинного коллажа, то существует единственное изображение G_* (элемент из X), которое при преобразовании F переходит само в себя: $F(G_*) = G_*$. Получить G_* можно из любого элемента $G_0 \in X$ путём итераций преобразования F:

$$G_1 = F(G_0), \ldots, G_n = F(G_{n-1}) = F^n(G_0),$$
$$G_* = \lim_{n \to \infty} F^n(G_0).$$

Утверждение сразу следует из принципа сжимающих отображений.

Таким образом, каждое преобразование аффинного коллажа является кодом некоторого изображения.

Упражнение 8.2.8. Пусть $T_1, \ldots, T_m$ – сжимающие отображения полного метрического пространства (M, ρ). Тогда существует и единствен такой компакт K, что

$$K = T_1(K) \cup \ldots \cup T_m(K).$$

8.3. Границы применимости метода IFS

Как для произвольного $G \in X$ выяснить, существует ли кодирующее G преобразование аффинного коллажа, и отыскать его, неизвестно. Наиболее эффективным на данный момент способом является «геометрическая» проверка соотношения

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i,$$

где G_i, $i = 1, \dots m$, – уменьшенные подобные G (возможно, пересекающиеся) изображения (более точно, такие, что их можно получить при помощи уменьшающих аффинных преобразований из G). Если равенство выполняется, то это равносильно существованию преобразования аффинного коллажа, переводящего G в себя.

Точным образом кодируется большое количество фракталов, выпуклые многоугольники, ряд других фигур.

Упражнение 8.3.1. Закодировать фигуры на рис. 8.5 методом IFS.

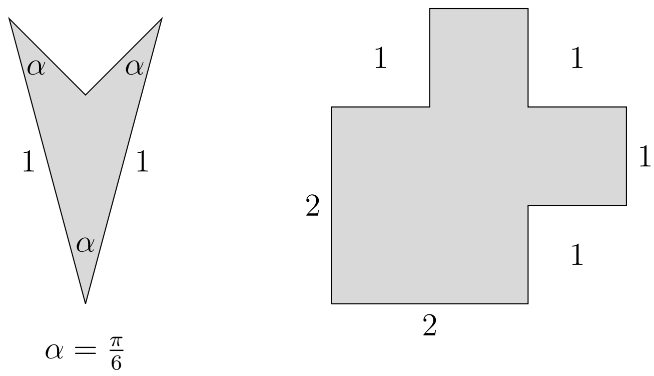


Рис. 8.5. Фигуры для кодирования из упражнения 8.3.1

Указание. Фигуру справа можно составить из 6 одинаковых квадратов, поэтому достаточно покрыть один такой квадрат уменьшенными образами всей фигуры, а далее действовать при помощи сдвигов.

Однако имеются достаточно простые примеры, показывающие, что в общем случае это сделать не удастся.

Утверждение 8.3.2. Круг невозможно закодировать методом IFS.

Доказательство. Аффинными образами круга могут быть:

а) **круг** (если, например, линейную часть соответствующего преобразования задаёт диагональная матрица);

б) **эллипс** (во всех случаях, когда ранг матрицы преобразования равен 2, кроме относящихся к пункту (а));

в) **отрезок** (когда ранг матрицы преобразования равен 1);

г) **точка** (когда матрица состоит из нулей, то есть ранг равен 0).

Таким образом, кодирование круга методом IFS равносильно покрытию его конечным числом меньших кругов, эллипсов, отрезков и точек.

Окружность имеет постоянную кривизну $k = \frac{1}{r}$ (где r – радиус окружности), поэтому две окружности разного радиуса не могут иметь общего «невырожденного» участка (общей дуги ненулевой длины). Эллипс в каждой точке одной своей четверти имеет разную кривизну, поэтому также не может иметь общего «невырожденного» участка с окружностью (рис. 8.6). С отрезком и точкой ситуация очевидна.

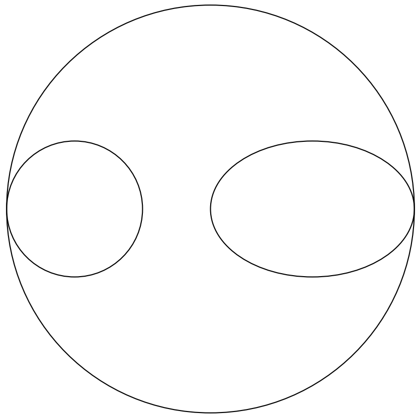


Рис. 8.6. Разная кривизна кривых

Получается, что невозможно составить окружность из конечного числа дуг окружностей меньшего радиуса, частей эллипсов и отрезков; следовательно, невозможно покрыть точно круг его уменьшенными аффинными образами. □

8.4. Приближённое кодирование методом IFS

С практической точки зрения мы никогда не сможем воспроизвести точно сложное изображение G_*, например фрактал, закодированное методом IFS, поскольку для этого потребуется бесконечное количество итераций:

$$G_* = \lim_{n\to\infty} F^n(G_0).$$

А раз определённое искажение при работе алгоритма неизбежно, то особенно актуален вопрос: можно ли использовать приближённое кодирование (которое может принципиально расширить класс кодируемых фигур)? Другими словами, является ли метод IFS устойчивым относительно кодируемого изображения – если покрыть заданную фигуру её уменьшенными аффинными образами с небольшим отклонением от оригинала, то сильные ли изменения получатся при воспроизведении фигуры по соответствующему IFS-коду? Ответ можно найти в следующей теореме.

Как и прежде, (X, ρ_H) – пространство изображений, ассоциированное с фиксированным прямоугольником П.

Теорема 8.4.1. Пусть $G \in X$, F – некоторое преобразование аффинного коллажа на П. Тогда

$$\rho_H(G, G_F) \le \frac{\rho_H(G, F(G))}{1-\propto},$$

где G_F – неподвижное изображение преобразования F, $\propto$ – коэффициент сжатия F.

Доказательство. Схема рассуждения в большой степени соответствует доказательству принципа сжимающих отображений. Для краткости пишем ρ вместо ρ_H.

Пусть

$$G_1 = F(G), \ldots, G_n = F(G_{n-1}) = F^n(G).$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned}
\rho(G, G_F) &\leq \rho(G, G_1) + \rho(G_1, G_2) + \ldots + \rho(G_{n-1}, G_n) + \rho(G_n, G_F) \\
&\leq \rho(G, G_1) + \propto \rho(G, G_1) + \ldots + \propto^{n-1} \rho(G, G_1) + \rho(G_n, G_F) \\
&= \rho(G, G_1)(1 + \propto + \ldots + \propto^{n-1}) + \rho(G_n, G_F)
\end{aligned}$$

(использовано соотношение

$$\rho(G_k, G_{k+1}) = \rho(F(G_{k-1}), F(G_k)) \leq \rho(G_{k-1}, G_k) = \ldots \leq \propto^k \rho(G, G_1)).$$

Неравенство справедливо при любом n, поэтому в нём можно перейти к пределу при $n \to \infty$:

$$\rho(G, G_F) \leq \frac{\rho(G, G_1)}{1 - \propto} + \rho(G_F, G_F).$$

□

Согласно теореме, если для заданного изображения G подобрать преобразование аффинного коллажа F такое, чтобы $\rho_H(G, F(G)) < \varepsilon$ (то есть покрыть G его уменьшенными аффинными образами с точностью ε), то с помощью (итерациями) преобразования F можно прийти к изображению G_F, отличающемуся от G меньше чем на $\frac{\varepsilon}{1-\propto}$ (рис. 8.7).

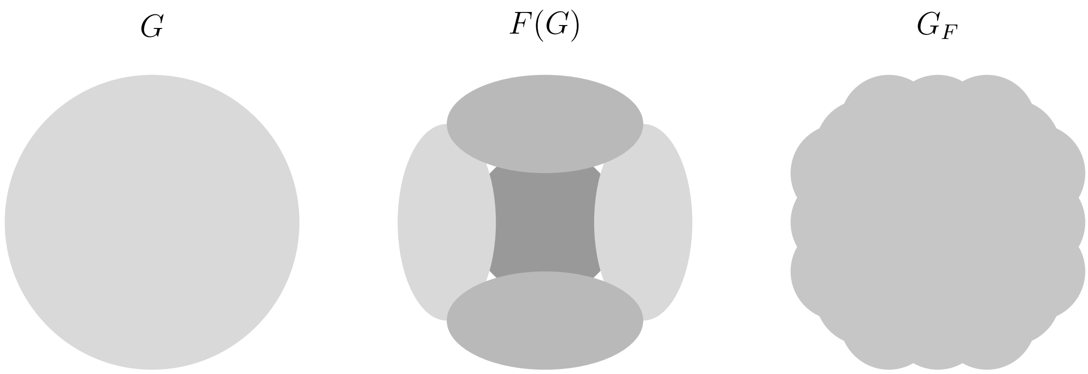


Рис. 8.7. Приближённое кодирование

Получается, что теоретическая основа для приближённого алгоритма существует.

Поскольку каждое изображение является компактным множеством, а аффинное преобразование может перевести его в сколь угодно малое по диаметру множество (и даже в одну точку, если матрица состоит из нулей), то приходим к возможности приближённого кодирования любого изображения с любой требуемой точностью (используя достаточно большое количество преобразований). Однако на таком пути теряется сама идея кодирования как выигрыша в объёме хранимой информации.

Вопрос о разработке эффективного приближённого алгоритма остаётся открытым. Одной из наиболее интересных реализаций является метод блочно-ориентированного кодирования.

Пояснения к упражнениям

Упражнение 1.2.1. Аксиомы а) и б) из определения 1.1.1 очевидны, неравенство треугольника в случае, когда $x = y$, также очевидно; если же $x \neq y$, то хотя бы одно из слагаемых справа равно единице, и, следовательно,

$$1 = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Упражнение 1.3. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, упомянутое в тексте упражнения, имеет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k^2.$$

В справедливости этого неравенства можно убедиться, воспользовавшись общей теоремой 1.3.6. Оно является частным случаем неравенства 1.9, так как в $\mathbb{R}^m$ скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k.$$

Упражнение 1.2.4. Важно обратить внимание на то, что максимум в формуле 1.4 существует. Это следует из непрерывности на $[a; b]$ функции $|x(t) - y(t)|$ и теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции.

Упражнение 1.2.5. Здесь в пояснении нуждается аксиома а) из определения 1.1.1 метрики, а именно то, что из условия $\rho(x, y) = 0$ следует равенство $x = y$. Рассуждая от противного, предположим, что

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt = 0,$$

но функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ не равны между собой. Тогда найдётся такая точка $t_0 \in [a; b]$, для которой

$$d = |x(t_0) - y(t_0)| > 0.$$

Функция $|x(t) - y(t)|$ непрерывна, поэтому найдётся отрезок $[\alpha; \beta]$, удовлетворяющий условиям:

1) $t_0 \in [\alpha;\beta] \subseteq [a;b]$,

2) $\beta > \alpha$,

3) $\forall t \in [\alpha;\beta]\ |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{2}d$.

Из этих условий вытекает:

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt \geq \int_\alpha^\beta |x(t) - y(t)|dt \geq \frac{1}{2}d(\beta - \alpha).$$

Пришли к противоречию.

Упражнение 1.2.9. Можно рассмотреть более широкое множество

$$\tilde{X} = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) :\ \xi_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m\}$$

и положить

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|$$

(так называемая *манхэттенская* метрика, проверка аксиом не составит труда). На множестве $X = \{0,1\}^m$ эта метрика превращается в расстояние Хэмминга.

Упражнение 1.2.11.

1) $\phi(x,y) = (x-y)^2$ не является метрикой, так как нарушается неравенство треугольника. Например,

$$4 = \phi(0,2) \leq \phi(0,1) + \phi(1,2) = 1 + 1 = 2.$$

2) – 4) Нетрудно доказывается следующее утверждение. Пусть функция $\psi = \psi(t)$, где $t \geq 0$, удовлетворяет следующим условиям: $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ при $t > 0$, ψ возрастает и вогнута. Тогда величина $\phi(x,y) = \psi(|x-y|)$ является метрикой в $\mathbb{R}$. В примерах 2) – 4) роль ψ выполняют соответственно функции $t^{\frac{1}{2}}$, $\ln(1+t)$ и $\arctan t$. Для каждой из них перечисленные выше условия выполнены.

Упражнение 1.2.12. Нет, не является. Положим

$$x(t) \equiv 0 \text{ и } y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq t < b, \\ 1 & \text{при } t = b. \end{cases}$$

Очевидно, что $\phi(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt = 0$, но $x \neq y$.

Упражнения 1.2.14 и 1.2.15. В обоих случаях аксиомы а) и б) определения 1.1.1 метрики очевидны. Справедливость аксиомы в) (неравенство треугольника) следует из классического *неравенства Минковского* для конечных сумм:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство неравенства Минковского можно найти в [2].

Упражнение 1.3.9. Можно воспользоваться полезным равенством для евклидовой нормы:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон), которое проверяется непосредственно. Это равенство не выполняется для указанной в упражнении нормы, например при $x = (1, 0)$ и $y = (0, 1)$. Следовательно, искомое скалярное произведение не существует.

Упражнение 1.4.2. Можно воспользоваться неравенством

$$\rho(x_0, y_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0)$$

и перейти в нём к пределу.

Упражнение 1.4.3. Рассмотрите неравенства:

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y_n)$$

и

$$\rho(x_0, y_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_0).$$

Из них следует наше утверждение:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \le \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0).$$

Упражнение 1.4.4. (См. [11]) Отметим, что при $t \in [0; 1]$ числовая последовательность $x_n \to 1$. Рассмотрим $t \in (1; 2]$. По правилу Лопиталя получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+t^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+t^n} \cdot t^n \ln t}{1} \\ = \ln t \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \ln t \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^n}+1} = \ln t.\end{aligned}$$

Таким образом, при $t \in (1; 2]$ последовательность $x_n(t) \to t$. Окончательно получаем, что поточечно

$$x_n(t) \to x_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ t, & \text{при } 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

причём функция $x_0(t)$ непрерывна.

Поскольку сходимость в пространстве $C[0; 2]$ эквивалентна равномерной сходимости, а поточечная сходимость следует из равномерной, то в пространстве $C[0; 2]$ исходная последовательность может сходиться только к функции $x_0(t)$ в силу единственности предела.

Проверим условие сходимости $\rho(x_n, x_0) \to 0$:

$$\rho(x_n, x_0) = \sup_{t\in[0;2]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - x_0(t) \right|$$
$$= \max\left\{ \sup_{t\in[0;1]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - 1 \right|, \sup_{t\in[1;2]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - t \right| \right\}.$$

Найдём

$$\sup_{t\in[0;1]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - 1 \right|.$$

Обозначим через $f(t) = \sqrt[n]{1+t^n} - 1$. Заметим, что $f(0) = 0$, $f(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$ при $n \to \infty$. Найдём экстремумы функции $f(t)$:

$$f'(t) = \frac{1}{n} \cdot (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot n \cdot t^{n-1} = (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{n-1} = 0.$$

Учитывая, что точка $t = 0$ уже рассмотрена как граница отрезка, получаем уравнение

$$(1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} = 0,$$

которое не имеет решений, так как $\frac{1}{n} \leq 1$.

Таким образом,

$$\sup_{t\in[0;1]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - 1 \right| = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0.$$

Теперь найдём

$$\sup_{t\in[1;2]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - t \right|.$$

Обозначим теперь $f(t) = \sqrt[n]{1+t^n} - t$. Отметим, что $f(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$, $f(2) = \sqrt[n]{1+2^n} - 2 \to 0$ при $n \to \infty$ (см. посчитанный выше предел).

Аналогично рассмотрим

$$f'(t) = \frac{1}{n} \cdot (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot n \cdot t^{n-1} - 1 = (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{n-1} - 1 = 0.$$

Тогда

$$(1+t^n)^{\frac{1-n}{n}} = t^{1-n}$$

и

$$(1+t^n)^{\frac{1}{n}} = t,$$

что даёт уравнение

$$1 + t^n = t^n,$$

которое не имеет решений.

Таким образом,

$$\sup_{t\in[1;2]} \left| \sqrt[n]{1+t^n} - t \right| = \max\left\{ \sqrt[n]{2} - 1, \sqrt[n]{1+2^n} - 2 \right\}.$$

Окончательно получаем, что

$$\rho(x_n, x_0) = \max\left\{\sqrt[n]{2} - 1,\ \sqrt[n]{1+2^n} - 2\right\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность сходится в пространстве $C[0;2]$.

Упражнение 1.4.5. (См. [11])

1-й способ. Очевидно, что покоординатно $x_n \to x_0$, где $x_0 = (0, 0, 0, \ldots)$, при $n \to \infty$.

Нетрудно убедиться, что из сходимости последовательности $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$ к вектору $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots)$ в пространстве ℓ_p следует покоординатная сходимость, то есть $\xi_1^n \to \xi_1^0$, $\xi_2^n \to \xi_2^0$ и так далее.

Таким образом, если последовательность покоординатно сходится к x_0, то, в силу единственности предела, в пространстве ℓ_1 она может иметь только тот же предел x_0. Проверим сходимость в пространстве ℓ_1:

$$\rho(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k^n - \xi_k^0\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \nrightarrow 0,$$

следовательно, последовательность не сходится в ℓ_1.

2-й способ. Пространство ℓ_1 является полным, следовательно в нём каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Поэтому для доказательства сходимости достаточно доказать фундаментальность последовательности. Если же последовательность не является фундаментальной, то сходиться она тем более не может.

Проверим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geq n_\varepsilon\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть

$$x_m = \left(\underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{m}, \ldots\right)$$

и $n > m$, тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k^m| = \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{n}$$
$$= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \cdot m + \frac{1}{n} \cdot (n - m) = 2 - \frac{2m}{n}.$$

Выбрав $n = 2m$, получим $\rho(x_n, x_m) = 1$, что при $\varepsilon < 1$ даёт противоречие. Таким образом, последовательность x_n не является фундаментальной, а значит, не сходится.

Упражнение 1.4.6. (См. [11]) Покоординатно $x_n \to x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ при $n \to \infty$. Проверим сходимость в пространстве ℓ_3:

$$\rho(x_n, x_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ – это остаток сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, следовательно, по теореме об остатке сходящегося ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность x_n сходится в пространстве ℓ_3.

Упражнение 1.4.8. Нет, не следует. Рассмотрите (X, ρ), где X – интервал $(0; 6)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, и шары $S(x_1, r_1)$ и $S(x_2, r_2)$, где $x_1 = 1$, $r_1 = 4$, $x_2 = 3$, $r_2 = 3$.

Упражнение 3.1.5. Может. Например, в пространстве с дискретной метрикой

$$d = \operatorname{diam} \bar{S}(x_0, 1) = 1,$$

то есть $d = r < 2r$.

Упражнение 3.1.7. Предположим, что любая последовательность $\bar{S}(x_n, r_n)$ замкнутых вложенных шаров в X, где $r_n \to 0$, имеет общую точку, и покажем, что X полно.

Рассмотрим фундаментальную последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через n_k, $k \in \mathbb{N}$, строго возрастающую последовательность номеров, для которых выполняется условие

$$\forall k \ \forall n \geq k \ \rho(x_{n_k, x_n}) \leq \frac{1}{2^k};$$

в силу фундаментальности x_n, $n \in \mathbb{N}$, такая последовательность найдётся.

Рассмотрим замкнутые шары $\bar{S}_k = \bar{S}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Докажем, что при любом $k \in \mathbb{N}$ $\bar{S}_{k+1} \subseteq \bar{S}_k$. Пусть $x \in \bar{S}_{k+1}$, тогда

$$\rho(x, x_k) \leq \rho(x, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_k) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

следовательно, $x \in \bar{S}_k$.

По предположению последовательность $\bar{S}_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеет общую точку; обозначим её x_0. Последовательность $x_{n_k} \to x_0$, так как $\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Отсюда, с учётом фундаментальности x_n, следует, что $x_n \to x_0$. Действительно, в неравенстве

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

правая часть стремится к 0 при $n, k \to \infty$.

Упражнение 3.2.2. Достаточно заметить, что каждая пара пересекается с $X \backslash Y$.

Упражнение 3.2.3. Нет, неверно. Контрпример: $X = \mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел, $Y = \mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел, тогда $X \backslash Y$ – множество всех иррациональных чисел, оно плотно в каждом шаре.

Упражнение 3.2.4. Множество всех постоянных функций нигде не плотно в $C[a;b]$, так как в каждом шаре найдётся непрерывная функция x_0, не являющаяся постоянной, и шар $S(x_0,r)$ при достаточно малом $r > 0$ не содержит постоянных функций (приведите детали!).

Множество всех алгебраических многочленов всюду плотно в $C[a;b]$, это следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной на отрезке функции многочленами. Следовательно, нигде не плотным это множество не является.

Упражнение 3.2.5. Покажем, что произвольный открытый шар $S(x_0,r) \in \ell_2$ содержит в себе другой шар, в котором нет точек из L_{n_0}.

Если в шаре $S(x_0,r)$ нет ни одной точки из L_{n_0}, то утверждение доказано.

Допустим, что в шаре $S(x_0,r)$ лежит точка $x_1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_{n_0}^1, 0, 0, \ldots) \in L_{n_0}$. Очевидно, что $r_1 = \rho(x_0,x_1) < r$. Выберем такое ε, что $0 < \varepsilon < r - r_1$, и рассмотрим шар $S(x_1,\varepsilon)$. Пусть $x \in S(x_1,\varepsilon)$, тогда

$$\rho(x,x_0) \le \rho(x,x_1) + \rho(x_1,x_0) < \varepsilon + r_1 < r.$$

Следовательно, $x \in S(x_0,r)$, то есть $S(x_1,\varepsilon) \subset S(x_0,r)$.

Рассмотрим точку $x_2 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_{n_0}^1, \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \ldots) \notin L_{n_0}$ и шар $S(x_2, \frac{\varepsilon}{3})$. Пусть $x \in S(x_2, \frac{\varepsilon}{4})$, тогда

$$\rho(x,x_1) \le \rho(x,x_2) + \rho(x_2,x_1) < \frac{\varepsilon}{4}\rho(x_2,x1).$$

Поскольку $\rho(x_2,x_1) = \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\rho(x,x_1) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} < 4,$$

то есть $x \in S(x_1,\varepsilon)$. Получаем, что $S(x_2,\frac{\varepsilon}{4}) \subset S(x_1,\varepsilon) \subset S(x_0,r)$.

Остаётся показать, что в шаре $S(x_2,\frac{\varepsilon}{4})$ нет ни одной точки из множества L_{n_0}. Действительно, пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in L_{n_0}$, тогда

$$\rho(x,x_2) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} \left| \xi_k - \xi_k^1 \right|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, $x \notin S(x_2,\frac{\varepsilon}{4})$.

Упражнение 4.2.11. Пусть M – множество элементов $(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$, где r_i – произвольные рациональные числа, а n – некоторое натуральное число. Очевидно, что множество M счётно. Покажем, что оно всюду плотно в s. Для этого возьмём произвольный элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in s$ и произвольное $\varepsilon > 0$.

Без ограничения общности положим n таким, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что остаток всякого сходящегося ряда можно сделать сколь угодно малым.

Выберем элемент $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$ таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно, так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$. Получаем

$$\begin{aligned}\rho(x, x_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \xi_k^0|}{1+|\xi_k - \xi_k^0|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - r_k|}{1+|\xi_k - r_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|} \\ &< \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, множество M всюду плотно в s.

Упражнение 6.1.9. (См. [3]) Неподвижные точки отображения F находятся из уравнения $x^3 = x$. В результате получим три точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 1$.

Рассмотрим отображение F в открытом шаре $S(0, r)$. Для произвольных точек $x, y \in S(0, r)$ имеем

$$\rho(F(x), F(y)) = |x^3 - y^3| = |x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq 3r_0^2 \rho(x, y),$$

где $r_0 = \max\{\rho(x, 0), \rho(y, 0)\}$ и $0 < r_0 < r$. Отображение F будет сжимающим, если в $S(0, r)$ выполняется неравенство $0 < 3r_0^2 < 1$. Таким образом, F – сжимающее отображение в окрестности

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \ |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

точки 0.

Теперь рассмотрим отображение F в открытом шаре $S(-1, r)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$\rho(F(x), F(y)) = |x^3 - y^3| = 3c^2|x - y| = 3c^2 \rho(x, y).$$

В окрестности

$$V = \{c \in \mathbb{R} : \ |c + 1| < r, \ 0 < r < 1\}$$

точки $x = -1$ функция $c \mapsto c^2$ убывает. Поэтому в окрестности V выполняется неравенство $c^2 < (r+1)^2$. Получаем

$$\rho(F(x), F(y)) < 3(r+1)^2\rho(x, y).$$

Отсюда видно, что ни при каком $r > 0$ неравенство $3(r+1)^2 < 1$ выполняться не может. Следовательно, в окрестности точек $x_2 = -1$ отображение F не является сжимающим.

Аналогично можно рассмотреть точку $x_3 = 1$ и доказать, что в её окрестности отображение F не является сжимающим.

Упражнение 6.1.11. Пусть $\mathbb{Q}^+$ – множество всех неотрицательных рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ и пусть ϕ – отображение в $(\mathbb{Q}^+, \rho)$, заданное формулой

$$\phi(x) = \frac{1}{x+2}.$$

Непосредственно из определения ϕ получаем

$$\rho(\phi(x_1, \phi(x_2)) = \frac{|x_1 - x_2|}{(x_1+2)(x_2+2)} \le \frac{1}{4}\rho(x_1, x_2),\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^+.$$

Следовательно, ϕ – сжимающее отображение. Предположим, что ϕ имеет неподвижную точку $x_0 \in \mathbb{Q}^+$, тогда справедливо соотношение

$$x_0 = \frac{1}{x_0+2} \ \Leftrightarrow\ x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0.$$

Однако это уравнение не имеет решений в $\mathbb{Q}^+$. Действительно, если x_0 – корень уравнения, то $(x+1)^2 = 2$, но не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Таким образом, если в теореме о принципе сжимающих отображений опустить условие полноты метрического пространства (X, ρ), то теорема перестанет выполняться.

Упражнение 6.3.4. (См. [3]) Рассмотрим в пространстве $C[a; b]$ отображение F, определённое как

$$F(x)(s) = x(s) - \frac{2}{M+m}\phi(s, x(s)),\ \ s \in [a; b],$$

и покажем, что оно является сжимающим. Пусть x_1, x_2 – произвольные элементы из $C[a; b]$. Тогда на основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях для любого $s \in [a;b]$ будем иметь

$$\begin{aligned}|F(x_1)(s) - F(x_2)(s)| &= \left| x_1(s) - x_2(s) - \frac{2}{M+m}(\phi(s, x_1(s)) - \phi(s, x_2(s))) \right| \\ &= |x_1(s) - x_2(s)| \cdot \left| 1 - \frac{2}{M+m}\phi_n(s, \theta(s)) \right| \\ &\le \frac{1}{M+m}|M + m - 2\phi_n||x_1(s) - x_2(s)| \\ &\le \frac{1}{M+m}(|M - \phi| + |\phi - m|)|x_1(s) - x_2(s)| \\ &= \frac{M-m}{M+m}\rho(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение

$$0 < \frac{M-m}{M+m} < 1,$$

получаем, что F – сжимающее отображение в $C[a;b]$. Следовательно, оно имеет единственную неподвижную точку $x_* \in C[a;b]$, где $f(x_*) = x_*$. Таким образом,

$$x_*(s) \equiv x_*(s) - \frac{2}{M+m}\phi(s, x_*(s)),$$

что равносильно тождеству $\phi(s, x_*(s)) \equiv 0,\ s \in [a;b]$.

Упражнение 6.3.5. (См. [3]) По условию имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \lambda x^2(t) + y(t),\ \ t \in [0;1], \tag{П.1}$$

$$x(0) = 0,\ \ x(1) = 0, \tag{П.2}$$

где $y \in C[0;1]$, λ – некоторый числовой параметр.

Сведём краевую задачу к интегральному уравнению. Для этого дважды интегрируем уравнение (П.1) в пределах от 0 до t. Получим уравнение

$$x(t) = \int_0^t (t-s)(\lambda x^2(s) + y(s))ds + c_1(t) + c_2. \tag{П.3}$$

Теперь с учётом краевых условий (П.2) найдём значения

$$c_2 = 0,\ \ c_1 = \int_0^1 (s-1)(\lambda x^2(s) + y(s))ds.$$

Подставим найденные значения c_1 и c_2 в уравнение (П.3):

$$x(t) = \int_0^t g(t,s)(\lambda x^2(s) + y(s))ds, \tag{П.4}$$

где функция $g(t,s)$ определяется как

$$g(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & \text{при } 0 \le s \le t, \\ t(s-1), & \text{при } t \le s \le 1 \end{cases}$$

и называется *функцией Грина* краевой задачи (П.1)-(П.2). Очевидно, что функция $g \in C([0;1] \times [0;1])$, причём

$$\max_{t,s \in [0;1]} |g(t,s)| = 1.$$

Рассмотрим отображение $F : C[0;1] \to C[]0;1]$, определённое равенством

$$F(x)(t) = \int_0^1 g(t,s)(\lambda x^2(s) + y(s))ds,$$

в замкнутом шаре $\bar{S}(x_0, r)$ пространства $C[0;1]$, где

$$x_0(t) = \int_0^1 g(t,s)y(s)ds.$$

Покажем, что отображение F действует в шаре $\bar{S}(x_0, r)$. Для произвольной точки $x \in \bar{S}(x_0, r)$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(F(x), x_0) &= \max_{t \in [0;1]} |F(x)(t) - x_0(t)| \\ &= \max_{t \in [0;1]} \left| \lambda \int_0^1 g(t,s)x^2(s)ds \right| \\ &\le |\lambda| \max_{t \in [0;1]} |x(t)|^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x_0 \in C[0;1]$, и полагая

$$m = \max_{t \in [0;1]} |x_0(t)|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0;1]} |x(t)|^2 &= \max_{t \in [0;1]} |(x(t) - x_0(t)) + x_0(t)|^2 \\ &\le \max_{t \in [0;1]} |x(t) - x_0(t)|^2 + 2m \max_{t \in [0;1]} |x(t) - x_0(t)| + m^2 \\ &\le (r+m)^2. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить оценку

$$\rho(F(x), x_0) \le |\lambda|(r+m)^2.$$

Если параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| \le \frac{r}{(r+m)^2}, \tag{П.5}$$

то выполняется неравенство

$$\rho(F(x), x_0) \le r,$$

то есть функция $F(x)$ принадлежит шару $\bar{S}(x_0, r)$.

Покажем, что отображение $F : \bar{S}(x_0, r) \to \bar{S}(x_0, r)$ является сжимающим. Рассмотрим произвольные элементы $x_1, x_2 \in \bar{S}(x_0, r)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\rho(F(x_1, x_2)) &= \max_{t\in[0;1]} \left|\lambda \int_0^1 (x_1^2(s) - x_2^2(s))ds\right| \\
&\le |\lambda| \max_{t\in[0;1]} |x_1(s) + x_2(s)|\rho(x_1, x_2) \\
&\le |\lambda| \max_{t\in[0;1]} |(x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_0(t)) + 2x_0(t)| \cdot \rho(x_1, x_2) \\
&\le 2|\lambda|(r + m)\rho(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$|\lambda| < \frac{1}{2(r+m)^2} \tag{П.6}$$

получим, что F – сжимающее отображение в $\bar{S}(x_0, r)$. Так как $\bar{S}(x_0, r)$ – замкнутое множество в полном метрическом пространстве $C[0; 1]$, то $(\bar{S}(x_0, r), \rho_{\bar{S}(x_0,r)})$ также является полным метрическим пространством. На основании принципа сжимающих отображений заключаем, что интегральное уравнение (П.4), а значит, и краевая задача (П.1)-(П.2), имеют единственное решение в $(\bar{S}(x_0, r)$ при

$$|\lambda| < \min\left\{\frac{r}{(r+m)^2}, \frac{1}{2(r+m)}\right\},$$

которое находится с помощью метода последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= \int_0^1 g(t, s)y(s)ds, \\
&\ldots \\
x_n(t) &= \int_0^1 g(t, s)(\lambda x_{n-1}^2(s) + y(s))ds, \ n = 1, 2, 3, \ldots .
\end{aligned}$$

Предметный указатель

Литература

[1] *Бакушинский, А. Б.* Элементы функционального анализа : учеб. пособие для вузов / А. Б. Бакушинский, Ю. М. Худак. – М. : Академия, 2013. – 188 с.

[2] *Беккенбах, Э. Ф.* Неравенства / Э. Ф. Беккенбах, Р. Беллман. – М. : КомКнига, 2007. – 280 с.

[3] *Бичегкуев, М. С.* Метрические пространства : теория, задачи, решения / М. С. Бичегкуев. – М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 192 с.

[4] *Бондаренко, В. А.* Фрактальное сжатие изображений по Барнсли–Слоану / В. А. Бондаренко, В. Л. Дольников // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 5. – С. 12–20.

[5] *Власова, Е. А.* Элементы функционального анализа : учеб. пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. – СПб. : Лань, 2015. – 397 с.

[6] *Волков, Е. А.* Численные методы. – 2-е изд., испр. / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1987. – 248 с.

[7] *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : учебник для вузов : в 2 ч. – 7-е изд., стереотип. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – Ч. 1. – 646 с.

[8] *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : учебник для вузов : в 2 ч. – 7-е изд., стереотип. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – Ч. 2. – 464 с.

[9] *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ. – 4-е изд., испр. / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – СПб. : БХВ-Питербург, 2004. – 816 с.

[10] *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

[11] *Кутузов, А. С.* Метрические пространства : учеб. пособие – 2-е изд., испр. и доп. / А. С. Кутузов. – Троицк, 2012. – 104 с.

[12] *Лебедев, В. И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – 4-е изд., испр. и доп. / В. И. Лебедев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 295 с.

[13] *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу : пер. с фр. – 2-е изд., перераб. и доп. / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : Мир, 1979. – 587 с.

[14] *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 443 с.

[15] *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1937. – 306 с.

[16] *Ampère, A. M.* Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées / A. M. Ampère. – Ecole Politechnique, 6, 1806, fasc. 13.

[17] *Gerver, J.* The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π / J. Gerver // American Journal of Mathematics. – 1970. – Vol. 92, №. 1. – P. 33–35.

[18] *Hardy, G. H.* Weierstrass's nondifferentiable function / G. H. Hardy // Transactions of the American Mathematical Society. – 1916. – Vol. 17, №. 3. – P. 301–325.

[19] *Van der Waerden, B. L.* Ein einfaches beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen funktion / B. L. Van der Waerden // Math. Zeitschrift. – 1930. – Vol. 32. – P. 474–475.

[20] *Weierstrass, K.* Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzeren einen bestimmten fifferentialquotienten besitzen / K. Weierstrass // Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften, Mathematische Werke von Karl Weierstrass. – Berlin : Mayer & Mueller, 1895. – Vol. 2. – P. 71–74.

Учебное издание

Бондаренко Владимир Александрович
Морозов Анатолий Николаевич
Николаев Андрей Валерьевич

Метрические пространства

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Вёрстка А. В. Николаев

Подписано в печать 28.09.17. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 24 экз. Заказ № .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.