Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Прикладная математика и информатика,
Прикладная информатика (в экономике),
Информационные технологии

Ярославль 2009

УДК 519.2
ББК В 171я73-4 + В 172я73-4
Т 11

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра дискретного анализа ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Составители: Ю.В. Богомолов, А.Н. Максименко,
А.Н. Морозов

Т 11 **Теория вероятностей и математическая статистика:** сборник задач / сост. Ю.В. Богомолов, А.Н. Максименко, А.Н. Морозов; Яросл. гос. ун-т. — 2-е изд., перераб. и доп. — Ярославль: ЯрГУ, 2009. — 111 с.

Сборник содержит более 400 задач по темам «Случайные события» и «Случайные величины». На все вычислительные задачи даны ответы. Кроме того, сборник снабжен приложениями, содержащими справочный материал: таблицы значений функции плотности нормального распределения и функции Лапласа.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 010501 Прикладная математика и информатика, 080801 Прикладная информатика (в экономике) и 010400 Информационные технологии (дисциплина «Теория вероятностей», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В 171я73-4 + В 172я73-4

Содержание

1 Случайные события

1.1 Основные понятия. Классическое определение вероятности

Событие называется *случайным*, если в данном опыте оно может произойти или не произойти. Случайные события обозначаем $A, B, C, \ldots$

Под *вероятностью события* понимается степень (мера) нашей уверенности в его наступлении, основанная на объективной оценке доли случаев его появления. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие Ω, которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$P(\Omega) = 1.$$

Невозможным называется событие $\emptyset$, которое в результате опыта не может произойти.

$$P(\emptyset) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий образуют полную группу и несовместны, то они называются *элементарными событиями или исходами*. Если, кроме того, все они равновозможны, то их называют *шансами*.

Исход называется *благоприятным событию*, если появление этого исхода влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся к схеме шансов, то вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N — общее число исходов,

N_A — число исходов, благоприятных событию A.

Пример 1. *Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2+4x+q=0$. Какова вероятность того,*

что корни этого уравнения окажутся
а) действительными числами, б) целыми числами?

▼ События, о которых идет речь в задаче:
A = {корни действительные},
B = {корни целые}

Элементарными событиями в данной задаче можно считать извлечения одного из данных чисел (то есть извлечение числа 0, числа 1, числа 2 и так далее). Общее количество исходов:

$$N = 10.$$

Для нахождения исходов, благоприятных событию A, достаточно найти количество целых чисел q от 0 до 9, для которых дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 4x + q = 0$ неотрицателен:

$$D = 4^2 - 4q = 4(4-q) \geqslant 0.$$

Легко видеть, что таких чисел всего 5 (это 0, 1, 2, 3, 4). Поэтому количество благоприятных для события A исходов равно

$$N_A = 5.$$

Отсюда вероятность события

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим вероятность события B. Под исходами будем понимать то же, что и в предыдущем случае. Их количество соответственно останется прежним. Благоприятные для события B исходы, как можно легко заметить, содержатся в благоприятных исходах для A (действительно, для наличия целых корней необходимо, чтобы были хоть какие-то корни). Поэтому для выявления благоприятных исходов можно просто подставить в уравнение $x^2+4x+q=0$ значения q равные 0, 1, 2, 3, 4 (при подстановке которых уравнение имеет корни) и выбрать из них те, при которых корни целые. Непосредственная проверка показывает, что такому условию удовлетворяют числа 0, 3, 4. Значит, количество благоприятных для B исходов

$$N_B = 3.$$

Тогда вероятность соответствующего события

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3}{10}.$$ ▲

В задачах 1–3 проводится опыт, состоящий в подбрасывании двух симметричных монет. Требуется проверить:

а) образуют ли данные события полную группу;
б) являются ли эти события несовместными;
в) являются ли они равновозможными.

1. События: A — появление двух гербов;
B — появление двух цифр.

2. События: A — появление двух гербов;
B — появление двух цифр;
C — появление одного герба и одной цифры.

3. События: A — появление хотя бы одного герба;
B — появление хотя бы одной цифры.

В задачах 4–9 проверить, являются ли шансами данные события.

4. Опыт — выстрел по мишени; события:
A — попадание;
B — промах.

5. Опыт — бросание двух монет; события:
A — появление герба на второй монете;
B — появление цифры на второй монете.

6. Опыт — бросание двух монет; события:
A — появление герба на первой монете;
B — появление цифры на второй монете.

7. Опыт — бросание игральной кости; события:
A — число выпавших очков делится на три;
B — появилось не более двух очков;
C — появилось четыре или пять очков.

8. Опыт — извлечение одной карты из колоды; события:
A — появление туза;
B — появление карты, не являющейся тузом.

9. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \ldots, 9$, случайным образом вынимают по одному шару до тех пор, пока урна не окажется пустой. События: A_i — появление шара с номером 1 в i-й выемке, где $i = 1, 2, \ldots, 9$.

В задачах 10–12 рассматривается урна, содержащая a белых и b черных шаров.

10. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

11. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

12. Из урны вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

13. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

14. Из урны вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

15. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

16. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

17. Из ящика, содержащего 4 билета с номерами 1, 2, 3, 4, вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

18. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1,3,5,7 и 9. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

19. Трехзначное число случайно и равновероятно выбирается из всего множества трехзначных чисел. Найти вероятность того, что оно делится: а) на 3; б) на 7.

20. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) три; б) две; в) одну; г) ни одной.

Подбрасываются две игральные кости. В следующих задачах найти вероятности указанных событий.

21. $A = \{$числа очков на обеих костях совпадают$\}$, $B = \{$число очков на первой кости больше, чем на второй$\}$.

22. $C = \{$сумма очков больше двух$\}$, $D = \{$сумма очков не меньше пяти$\}$.

23. $E = \{$хотя бы на одной кости появится цифра 6$\}$, $F = \{$произведение выпавших очков равно 6$\}$.

24. $G = \{$суммарное количество выпавших очков является простым числом$\}$, $H = \{$количество выпавших очков на первой и второй кости отличается не более чем на 2$\}$.

25*. Игральная кость бросается трижды. Пусть x - сумма очков, полученных при всех бросаниях. Что более вероятно: $x = 12$ или $x = 11$?

1.2 Комбинаторные формулы

Решение вероятностных задач, сводящихся к классическому определению вероятности, часто облегчается использованием комбинаторных формул.

Правило произведения. Пусть элемент x_1 набора вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ можно выбрать n_1 способами; после осуществления выбора x_1 элемент x_2 может быть выбран n_2 способами; после выборов x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать n_3 способами и т.д.; после выборов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ элемент x_k можно выбрать n_k способами. Тогда существует $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ наборов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Замечание. Количество всевозможных наборов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ можно наглядно перечислить при помощи «дерева вариантов» (графа задачи). В основании «дерева» будут рассредоточены n_1 значений («корней»), которые может принимать x_1. Далее, так как при каждом выборе значения x_1 значение для x_2 может быть выбрано n_2 способами, то из каждого «корня»

выйдет по n_2 «ветвей». Затем из каждой такой «ветви» появится n_3 новых «веточек» – количество возможных значений x_3 при соответствующем выборе x_1 и x_2, и так далее. Общее число «веточек» последнего уровня, совпадающее с общим количеством наборов указанного вида, будет вычисляться по формуле $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 2. *Сколькими способами можно выбрать пятизначное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево (как, например, 85258)?*

▼ Каждому пятизначному числу можно поставить во взаимно однозначное соответствие строку $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$, где $x_1, \ldots, x_5$ — соответственно 1-я, ..., 5-я цифры. Элемент x_1 этой строки можно выбрать 9 способами (любую из цифр, кроме 0); при каждом таком выборе элемент x_2 можно выбрать 10 способами (теперь можно использовать и цифру 0); элемент x_3 также можно выбрать 10 способами; наконец, элементы x_4 и x_5 определяются однозначно: $x_4 = x_2$, $x_5 = x_1$. Согласно правилу произведения искомое число способов выбора равно: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$. ▲

Пример 3. *Коля и Вася бросили по одной игральной кости. Найти вероятность того, что Коля выбросил больше очков, чем Вася.*

▼ **1 способ.**

Исходом данного испытания является упорядоченная пара чисел (x_1, x_2), где x_1 и x_2 – количество очков, выброшенное Колей и Васей соответственно. Общее количество исходов равно $N = 6 \cdot 6 = 36$. Благоприятными являются исходы, удовлетворяющие условию $x_1 > x_2$. Посчитаем их количество. Если $x_1 = 6$, x_2 может принимать 5 возможных значений (от 1 до 5), при $x_1 = 5$ – 4 возможных значения, и так далее, при $x_1 = 2$ – единственное возможное значение $(x_2 = 1)$. Поэтому количество благоприятных исходов $N_A = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Искомая вероятность равна

$$\frac{N_A}{N} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

2 способ.

Все исходы делятся на три категории: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 < x_2$. Количество исходов, удовлетворяющих условию $x_1 = x_2$, равно 6 (пары (1,1), (2,2), и т.д.). Поэтому количество исходов $x_1 > x_2$ и $x_1 < x_2$ в сумме составляет $36 - 6 = 30$. А так как исходов вида $x_1 > x_2$ столько же, сколько исходов вида $x_1 < x_2$, то количество благоприятных исходов составляет $m = 30 : 2 = 15$. Искомая вероятность события теперь считается аналогично. ▲

Пример 4. *Сколькими способами можно на клетчатую доску 10×5 поставить красную, синюю, желтую и зеленую фишку так, чтобы никакие две фишки не стояли в одной строке или столбце?*

▼ **1 способ.** Будем последовательно расставлять фишки. Красную фишку можно поставить на любую клетку доски, поэтому количество вариантов выбора клетки для данной фишки равно 50. При каждом варианте размещения красной фишки, для синей фишки можно выбрать любую клетку таблицы, кроме находящихся с красной в одной строке или одном столбце; количество таких клеток, согласно правилу произведения, равно $9 \cdot 4 = 36$ (клетки таблицы, находящиеся в 9 «разрешенных» столбцах и 4 «разрешенных» строках). При каждом способе размещения красной и синей фишки желтую фишку можно разместить в клетке, находящейся в одном из 8 столбцов (не занятых уже установленными фишками) и одной из 3 строк, такую клетку можно выбрать $8 \cdot 3 = 24$ способами. Наконец, зеленую фишку для каждого варианта размещения уже рассмотренных фишек можно поставить в любую клетку, находящуюся в одном из 7 свободных столбцов и одной из 2 свободных строк, что можно сделать $7 \cdot 2 = 14$ способами. В соответствии с правилом произведения, количество способов расставить все фишки равно $50 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 14 = 604800$.

Замечание: отметим, что правило произведения мы использовали и на каждом шаге (при подсчете количества клеток, допустимых для размещения очередной фишки), и при подсчете общего количества способов расстановки всех фишек.

2 способ.

Заметим, что в рассматриваемой задаче расстановке необходимо выбрать для каждой из фишек строку и столбец, на пересечении которых мы ее и размещаем. Таким образом, требуется выбрать 4 различных столбца и 4 различные строки. Столбец для красной фишки можно выбрать 10 способами; для каждого такого выбора столбец для размещения синей фишки можно выбрать 9 способами (любой, кроме того, в котором стоит красная фишка), после чего 8 способами выбираем столбец для желтой фишки, а при каждом выборе столбцов для рассмотренных трех фишек столбец для оставшейся (зеленой) фишки можно выбрать 7 способами. Поэтому выбор четырех столбцов для размещения данных фишек можно осуществить $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ способами.

Аналогично находим количество вариантов выбора четырех строк для размещения четырех разноцветных фишек, оно равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Для каждого из 5040 способов выбрать четыре строки можно 120 способами выбрать четыре столбца для размещения данных фишек. Поэтому, согласно правилу произведения, общее количество вариантов выбора строки и столбцов (а значит, и общее количество способов размещения фишек) равно $5040 \cdot 120 = 604800$.

Можно заметить, что первое и второе решение отличаются лишь порядком подсчета количества способов выбора строк и столбцов. ▲

26. Имеется 6 видов конвертов без марок и 4 вида марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

27. Сколько двуязычных словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского - на любой другой из этих 5 языков?

28. У одного студента 5 книг, у другого - 9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен одной книги на книгу?

29. На вершину горы ведут 4 тропинки. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее? Решите эту задачу с дополнительным условием: подъем и спуск должны происходить по разным тропинкам.

30. Три дороги соединяют города А и В, четыре дороги соединяют города В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться в А также через В?

31. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все цифры которого различны?

Важными случаями «правила произведения» являются комбинаторные формулы, определяющие общее число способов выбора k элементов из n различных элементов исходного множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Существуют две схемы выбора. В *первой* схеме выбор осуществляется *без возвращения* элементов (это значит, что отбирается последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). Во *второй* схеме выбор осуществляется поэлементно *с возвращением* отобранного элемента на каждом шаге. После того как выбор тем или иным способом сделан, отобранные элементы (или их номера) могут быть *упорядочены* (т. е. выложены в строку). В результате получаются следующие две различные постановки эксперимента.

1. Размещения с повторениями. Любая упорядоченная строка длиной k, составленная из (быть может, повторяющихся) элементов множества E, называется *размещением с повторениями из n элементов по k*. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$n^k.$$

Пример 5. *Сколько существует различных наборов инициалов фамилии, имени и отчества (пример: АБВ) при условии, что буквы Ъ, Ы, Ь не могут* *быть использованы? Какова вероятность того, что на некотором предприятии среди 30 тысяч рабочих и служащих найдутся хотя бы два человека с одинаковыми инициалами?*

▼ Наборы инициалов можно рассматривать как строки длиной 3, составленные из элементов множества E, включающего в себя 30 букв алфавита (исключая Ъ, Ы, Ь). Т.е. каждый набор есть размещение с повторениями из 30 элементов по 3, а всего их $30^3 = 27000$. Следовательно, среди 30 тысяч наборов инициалов обязательно найдутся хотя бы два одинаковых и вероятность такого события равна 1. ▲

2. Размещения без повторений. Перестановки. Упорядоченная строка длиной k, составленная из различных элементов множества E, называется *размещением без повторений из n элементов по k.* Число всех таких размещений обозначается A_n^k и равно:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В случае, когда $k = n$, размещения без повторений называются *перестановками n элементов.* Число всех перестановок n элементов равно

$$A_n^n = n!$$

Пример 6. *Восемь легкоатлетов разыгрывают в финальном забеге одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти медали могут быть распределены между спортсменами?*

▼ Предположим, что спортсмены пронумерованы цифрами от 1 до 8 и x_1, x_2, x_3 — номера спортсменов, получивших золотую, серебряную и бронзовую медали. Каждому распределению медалей соответствует строка (x_1, x_2, x_3), состоящая из различных чисел (номеров спортсменов). Следовательно, число способов распределения медалей равно числу размещений без повторений из 8 элементов по 3, т.е.

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336. \qquad ▲$$

32. Имеются 3 разных письма, каждое из которых можно послать по 6 различным адресам. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если: а) по одному адресу можно посылать несколько писем; б) все письма посылать по разным адресам?

33. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек, если: а) в один вагон могут сесть несколько пассажиров; б) все они должны ехать в разных вагонах?

34. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых состоит не более чем из 3 цифр. Сколько таких чисел можно составить, если: а) повторение цифр в числах не разрешается; б) разрешается повторение цифр?

35. Сколькими способами три различных подарка A, B и C можно сделать каким-то трем из 15 лиц, если: а) никто не должен получать более одного подарка; б) подарок A должно получить определенное лицо?

36. Проверьте, что число трехбуквенных «слов», которые можно образовать из букв слова «гипотенуза», равно числу всех возможных перестановок букв слова «призма».

Очень часто в выбираемых наборах без повторения порядок чередования элементов несущественен. В этих случаях можно вести речь о подмножествах. Рассмотрим две постановки эксперимента, заключающегося в выборе подмножеств из некоторого множества.

3. Сочетания. Всякое k-элементное подмножество n-элементного множества E называется *сочетанием из n элементов по k.* Число различных сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Числа C_n^k обладают следующими свойствами:

$$C_n^0 = 1; \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Пример 7. *Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 6 карт?*

▼ Очевидно, что 6 выбранных карт образуют 6-элементное подмножество множества всех карт, т.е. являются сочетанием из 36 элементов по 6. Следовательно, искомое число способов равно $C_{36}^6 = 1947792$. ▲

37. На окружности выбрано 10 точек. а) Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? б) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

38. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если нажать три определенные цифры из имеющихся десяти. Некто подошел к подъезду и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр (не повторяясь). Какое максимальное число попыток ему потребуется, чтобы открыть дверь?

39. Для участия в команде тренер отбирает пять мальчиков из десяти. Сколькими способами он может сформировать команду, если два определенных мальчика должны войти в команду?

40. Сколькими способами можно в строчку написать шесть плюсов и четыре минуса?

41. Восемь человек должны сесть в два автомобиля, причем в каждом должно быть не более пяти человек. Сколькими способами они могут это сделать при условии, что порядок расположения пассажиров внутри автомобиля не имеет значения?

42. В группе 9 человек. Сколькими способами можно образовать подгруппу при условии, что в подгруппу входит не менее двух человек?

43. Сколькими способами на шахматной доске можно указать: а) 2 клетки? б) 2 клетки одного цвета? в) 2 клетки разного цвета?

44. У одного студента 6 книг, у другого - 7. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут обменять две книги на две книги?

4. Сочетания с повторениями. Если из n-элементного множества E выбираются k элементов без учета порядка, причем один и тот же элемент может быть выбран несколько раз, то получаемые при этом множества называются *сочетаниями с повторениями*, а их общее число равно

$$C_{n+k-1}^{k}.$$

Замечание. При решении задач по теории вероятностей последняя формула используется крайне редко.

Пример 8. *Сколько различных наборов значений может появиться при бросании трех одинаковых игральных костей?*

▼ Результатом бросания трех одинаковых игральных костей является 3-элементное множество, каждый элемент которого есть цифра от 1 до 6. Следовательно, каждый такой набор представляет собой сочетание с повторениями из 6 элементов по 3, а их общее число равно $C_{6+3-1}^{3} = 56$. ▲

45. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколькими способами можно выбрать 4 пирожных?

46. Сколько костей должно быть в наборе домино, если на каждой кости нарисованы два числа от 0 до N?

1.3 Применение комбинаторики к вычислению вероятностей

При решении задач с использованием комбинаторики нужно прежде всего понять, какие наборы – упорядоченные или неупорядоченные – логичнее выбрать в качестве элементарных исходов. В тех задачах, где результатом проведения эксперимента является некоторая упорядоченная цепочка чисел или номеров предметов, следует пользоваться правилом умножения и формулами для числа размещений.

Пример 9. *Какова вероятность того, что при трех бросаниях игральной кости будут получены три разных результата?*

▼ В этой задаче общее количество элементарных исходов и количество благоприятных элементарных исходов вычисляется проще, если в качестве их взять упорядоченные наборы.

Каждый исход данного эксперимента можно записать строкой (x_1, x_2, x_3), где x_i — результат i-го бросания, $i = 1, 2, 3$. Т. к. каждое x_i может принимать значение от 1 до 6, то общее число исходов равно числу размещений с повторениями из 6 элементов по 3:

$$N = 6^3.$$

Благоприятному исходу соответствует строка (x_1, x_2, x_3), состоящая из разных чисел. Следовательно, число благоприятных исходов равно числу размещений без повторений из 6 элементов по 3:

$$N_A = A_6^3.$$

Действительно, первое число может быть выбрано 6 способами; при каждом таком выборе второе может быть выбрано 5 способами. А при каждом выборе первых двух есть 4 способа для выбора третьего числа.

И искомая вероятность равна

$$\frac{N_A}{N} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}. \qquad ▲$$

Пример 10. *Цифры 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятность того, что на четных местах будут стоять только четные цифры.*

▼ Общее число исходов этого опыта равно числу перестановок 9 элементов:

$$N = 9!$$

Для подсчета благоприятных исходов воспользуемся правилом произведения. По условию задачи при благоприятном исходе на четных местах могут стоять только четные цифры, следовательно, на нечетных местах могут стоять только нечетные цифры. Тогда первую цифру можно выбрать 5-ю способами, вторую — 4-мя, третью — из оставшихся после выбора первой цифры 4-х нечетных цифр, четвертую — из оставшихся после выбора 2-й цифры трех четных цифр, и т. д.:

$$N_A = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

А вероятность такого события равна:

$$\frac{N_A}{N} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{126}. \qquad \blacktriangle$$

47. Телефонная книга раскрывается наудачу, и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 6 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: $A = \{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$, $B = \{$все цифры различны$\}$.

48. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$появится число 123$\}$, $B = \{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$, $C = \{$появится четное число$\}$.

49. На шахматную доску наудачу ставят три ладьи (ладьи ходят по вертикали и по горизонтали). Найти вероятность того, что никакие две из них не побьют друг друга.

50. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: $A = \{$число кратно пяти$\}$, $B = \{$число состоит из нечетных цифр$\}$.

51. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины: а) не содержит одинаковых цифр; б) состоит из одинаковых цифр; в) имеет ровно две одинаковые цифры. Известно, что все номера трехзначные, начиная с 001, не повторяющиеся и равновозможные.

52. Из множества чисел $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе выбранное число больше первого, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением.

53. Из разрезной азбуки выкладывается слово «математика». Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «математика»?

54. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий: $A = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$, $B = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$; $C = \{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10$\}$.

55. Из множества $\{0, 1, 2, ..., 10^n - 1\}$ случайным образом выбирается число. Найти вероятность того, что это число k-значно (представимо в виде $a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, где $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, $i = 1, \cdots, k-1$ и $0 < a_k \leqslant 9$).

Если в условии задачи говорится о выборе нескольких разных (не повторяющихся) предметов и порядок выбора этих предметов не имеет значения, то для подсчета общего числа исходов следует пользоваться формулой для числа сочетаний.

Пример 11. *В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: $A = \{$шары одного цвета$\}$, $B = \{$шары разных цветов$\}$?*

▼ Как следует из условия задачи, шары выбираются без повторений (один и тот же шар не может быть выбран дважды). Поэтому число всех исходов

$$N = C_{11}^2 = 55.$$

Событие A наступает, если оба шара белые либо оба черные. Число способов выбора белых шаров равно C_4^2, а для черных — C_7^2. Суммируя, получаем

$$P(A) = \frac{C_4^2 + C_7^2}{55} = \frac{6 + 21}{55} = \frac{27}{55}.$$

Событие B наступает, если один из выбранных шаров окажется белым, а другой черным. Число всех таких исходов вычисляется с помощью правила умножения и равно $4 \cdot 7$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{4 \cdot 7}{55} > P(A).$$

Замечание. Вероятность события B можно было бы найти по формуле $P(B) = 1 - P(A)$, т. к. эти события дополняют друг друга. ▲

56. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) ровно один выигрышный; б) оба выигрышных; в) ни одного выигрышного.

57. В автобусе, насчитывающем 26 мест, случайным образом занимают места 16 человек. Найти вероятность того, что: а) последние 3 места останутся свободными; б) будут заняты последние 3 места.

58. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что в полученной выборке все карты бубновой масти.

59. Трое игроков играют в преферанс (32 карты). Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт пиковой масти и 4 – не пиковой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две пиковые карты.

60. Из колоды в 36 карт случайным образом извлекаются 6 карт. Найти вероятности p_k того, что в полученной выборке ровно k тузов, где $k = 0, 1, \ldots, 4$.

61. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены все шары по одному и разложены в ряд. Какова вероятность того, что цвета шаров чередуются?

62. Колода из 36 карт делится наугад на две равные пачки по 18 листов. Найти вероятность того, что:

а) в каждой из пачек окажется по два туза;

б) в одной из пачек (не важно в какой) окажутся все четыре туза.

63. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

64. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама — три, король — четыре, туз — одиннадцать, а остальные карты — соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

Пример 12. *На $2n$ стульев, стоящих в ряд, случайным образом рассаживаются n мальчиков и n девочек. Найти вероятности следующих событий:*
$\mathbf{A} = \{$*все мальчики будут сидеть рядом*$\}$;
$\mathbf{B} = \{$*никакие два мальчика не будут сидеть рядом*$\}$.

▼ Для нахождения вероятности события $\mathbf{A}$ можно использовать как элементарные исходы с упорядоченными наборами мест, так и с неупорядоченными.

1 способ.

Выберем в качестве элементарного исхода упорядоченный набор из $2n$

чисел - номера мест всех мальчиков и девочек после того, как они сядут в ряд (в этом случае мы не только различаем расположение мальчиков и девочек, но и любых двух человек между собой). Тогда общее число элементарных исходов $N = (2n)!$ - количество всевозможных перестановок $2n$ различных номеров. Для нахождения количества благоприятных исходов N_A, зафиксируем какой-нибудь такой исход. Например,

$$(m, m, \cdots, m, d, d, \cdots, d).$$

Теперь вычислим количество всевозможных вариантов изменения такого исхода, чтобы при этом исход оставался благоприятным. Ясно, что можно переставлять между собой номера мест мальчиков и при каждой такой перестановке по-разному переставлять между собой номера мест девочек (т.е. всего осуществить $n! \cdot n!$ разных перемещений). Другим преобразованием является сдвиг всего «блока» мальчиков. Таких сдвигов можно сделать $n+1$ (номер первого мальчика в «блоке» может заключаться от 1 до $n+1$). Окончательно получаем $N_A = n! \cdot (n+1)!$, а вероятность события A

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n! \cdot (n+1)!}{(2n)!}.$$

2 способ.

Выберем в качестве элементарного исхода неупорядоченный набор из n чисел, отобранных из $2n$, — номера мест мальчиков после того, как они сядут на стулья (остальные n мест достанутся девочкам). В этом случае мы не будем различать, где конкретно сидит каждый мальчик, а будем учитывать только весь список мест, занятых мальчиками. Общее число элементарных исходов $N = C_{2n}^n$ - количество всевозможных сочетаний по n номеров из $2n$ имеющихся. Количество благоприятных исходов $N_A = n+1$, - столько существует способов взять n номеров подряд.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n+1}{C_{2n}^n} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}.$$

Вероятность события $\mathbf{B}$ тоже можно найти двумя способами. Ограничимся вторым, более коротким вариантом, использующим неупорядоченные наборы.

Выберем в качестве элементарного исхода неупорядоченный набор из n чисел — номеров мест мальчиков после того, как они сядут на стулья (остальные n мест достанутся девочкам). Тогда общее число элементарных исходов

$N = C_{2n}^n$. Перечислим все благоприятные исходы:

$$\begin{array}{ll} 1) & (d, m, d, m, d, m, \cdots, d, m), \\ 2) & (m, d, d, m, d, m, \cdots, d, m), \\ 3) & (m, d, m, d, d, m, \cdots, d, m), \\ & \ldots \\ n) & (m, d, m, d, \cdots, m, d, d, m), \\ n+1) & (m, d, m, d, m, d, \cdots, m, d). \end{array}$$

Окончательно получаем вероятность события **B**

$$P(B) = \frac{n! \cdot (n+1)!}{(2n)!}. \qquad \blacktriangle$$

65. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

66. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.

67. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятности событий:
A = {четыре туза расположены рядом},
B = {места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7}.

68. Из 30 чисел $\{1, 2, ..., 30\}$ по схеме случайного выбора без возвращения отбирается 10 чисел. Найти вероятности событий:
A = {все числа нечётные},
B = {ровно 5 чисел делится на 3},
C = {5 чисел чётных и 5 нечётных, причём ровно одно число делится на 10}.

69. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трёхтомник Пушкина. Найти вероятности событий:
A = {тома Пушкина расположены рядом в порядке возрастания номеров},
B = {тома Пушкина расположены в порядке возрастания номеров (но не обязательно стоят подряд)}.

70. Из множества чисел $\{1, 2, ..., n\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти вероятность того, что второе выбранное число больше первого, но меньше третьего.

71. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайным образом выбирается одна. Найти вероятности событий:
A = {последовательность начинается с 0 и заканчивается на 0},
B = {в последовательности есть хотя бы один 0},
C = {в последовательности есть ровно один 0}.

72. В город приехали семь туристов. Каждый из них случайным образом и независимо от других пошел в один из семи находящихся в городе кинотеатров. Найти вероятность того, что:
а) все туристы оказались в одном кинотеатре,
б) все туристы оказались в разных кинотеатрах,
в) в одном из кинотеатров оказалось 4 туриста.

73. Найти вероятность того, что при случайном размещении n шаров по n ящикам хотя бы один ящик окажется пустым.

74. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?

75. При игре в покер из колоды в 52 карты случайно выбираются пять. Найти вероятность того, что будет:
а) каре (четыре карты одного достоинства),
б) фул (три карты одного достоинства и две другого),
в) флеш (пять карт одной масти),
г) стрит (пять последовательных карт произвольных мастей),
д) тройка (три карты одного достоинства),
е) две пары (две пары карт одного достоинства в каждой паре),
ж) одна пара (две карты одного достоинства).

76. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются 4 карты. Найти вероятность того, что:
а) они будут разной масти,
б) они будут разного достоинства,
в) они будут и разной масти, и разного достоинства,
г) среди них найдется хотя бы одна карта бубновой масти,
д) среди них найдется хотя бы одна карта достоинством не ниже валета,

е) среди них найдутся хотя бы три карты одинаковой масти или хотя бы три карты одного достоинства.

77. Из колоды в 52 карты последовательно извлекаются две карты. Найти вероятность того, что данные карты извлечены в порядке увеличения достоинства.

78. В урне 10 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

79. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятность того, что появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3.

80. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

81. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что в полученной выборке найдутся: а) хотя бы две карты одинаковой масти, не важно какой; б) две карты разной масти.

82. Из колоды карт в 36 листов извлекают сразу несколько карт. Какое минимальное число карт нужно извлечь для того, чтобы с вероятностью большей чем 0,5 утверждать, что среди них встретятся хотя бы две карты одной и той же масти?

83. Колода игральных карт (52 листа) тщательно перетасована. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы с вероятностью более 1/2 среди них встретились хотя бы две карты одинакового значения?

84. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных шурупов. Какова вероятность того, что среди случайно выбранных 10 шурупов окажется по крайней мере один дефектный?

85. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятность того, что ровно на трех костях выпадет 6 очков.

86. Вопросы к экзамену разбиты на две группы по 20 вопросов. Студент готов к 15 вопросам из первой группы и к 10 вопросам из второй. На экзамене предлагают на выбор либо два вопроса из первой группы, либо три вопроса из второй. В первом случае для успешной сдачи необходимо ответить на оба вопроса, во втором – хотя бы на два вопроса из трех. Какой вариант прохождения экзамена лучше выбрать?

87. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7-м этажах, найти вероятности следующих событий: A = {на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров}, B = {трое пассажиров выйдут на седьмом этаже}, C = {на каждом этаже выйдет по одному пассажиру}, D = {все пассажиры выйдут на одном этаже}.

88. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 6 цифр, найти вероятность того, что номер содержит три цифры 5, одну цифру 1 и две цифры 2.

89. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайным образом выбирается одна. Найти вероятности событий:
A = {последовательность содержит ровно m единиц},
B = {в последовательности есть ровно m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек}, где $m_0 + m_1 + m_2 = n$.

90. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятность того, что каждый игрок получит туза.

91. В электропоезд, состоящий из 6 вагонов, садятся 12 пассажиров, причем выбор каждым пассажиром любого вагона равновозможен. Определите вероятность того, что: а) в каждый вагон вошло по 2 человека; б) в один вагон никто не вошел, в другой вошел один человек, в 2 вагона - по 2 человека, а в оставшиеся 2 вагона соответственно 3 и 4 человека.

92. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на всех трех костях выпало одинаковое количество очков,

б) на первой кости выпало 5 очков,

в) выпала комбинация (1, 2, 3) очков в некоторой последовательности,

г) на всех трех костях выпало разное количество очков,

д) в сумме на всех трех костях выпало 10 очков,

е) на первой кости выпало столько же очков, сколько на третьей,

ж) на первой кости выпало столько же очков, сколько на второй и третьей в сумме,

з) на второй кости выпало больше очков, чем на первой, но меньше, чем на третьей,

и) на первой кости выпало больше очков, чем на какой-либо из двух других.

93. Найти вероятность того, что при случайном размещении n различных шаров по n ящикам:

а) ни один ящик не останется пустым;

б) ровно один ящик останется пустым.

94*. Колода игральных карт (52 листа) тщательно перетасована. Наудачу берут 6 карт (без возвращения). Найти вероятность того, что среди этих карт:

а) окажутся представители всех мастей;

б) будет ровно 5 карт одной масти.

95. Каждая из n палок разламывается на две части - длинную и короткую. Затем $2n$ обломков случайным образом соединяются в n пар, каждая из которых образует новую «палку». Найти вероятность того, что:

а) части будут соединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части будут соединены с короткими.

96*. В коробку положили n пар ботинок. Затем из неё случайным образом вынули $2k$ ботинок. Найти вероятность того, что:

1) выбранные ботинки составляют k пар, если

а) все пары ботинок в коробке однотипные (одного цвета и размера),

б) все пары разного типа;

2) из выбранных ботинок можно составить по крайней мере одну пару, если все пары ботинок в коробке однотипные;

3) среди выбранных ботинок есть ровно одна пара, если все пары ботинок разного типа.

97*. По k занумерованным ячейкам случайным образом размещается $n > k$ неразличимых частиц. Найти вероятности событий:

$\mathbf{A} = \{$останется хотя бы одна пустая ячейка$\}$,

$\mathbf{B} = \{$останется ровно одна пустая ячейка$\}$.

98*. Из множества $\{0, 1, 2, ..., n\}$ по схеме случайного выбора с возвращением выбираются два числа. Обозначим первое из них x, второе – y, а p_n – вероятность события $\{x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

99*. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

100*. Из множества, образованного всевозможными подмножествами множества $\{0, 1, 2, ..., n\}$, по схеме случайного выбора с возвращением выбираются два множества A_1, A_2. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

101*. Поверхность деревянного куба размером

а) $2 \times 2 \times 2$,

б) $3 \times 3 \times 3$

полностью окрасили. Куб распилили на одинаковые кубики $1 \times 1 \times 1$, из которых после случайного перемешивания вновь сложили куб исходного размера. Найти вероятность того, что поверхность получившегося куба полностью окрашена.

102*. Из множества, образованного всевозможными подмножествами множества $\{0, 1, 2, ..., n\}$, по схеме случайного выбора с возвращением выбираются множества $A_1, A_2, \cdots, A_r$. Найти вероятность того, что множества $A_1, A_2, \cdots, A_r$ попарно не пересекаются.

1.4 Геометрические вероятности

Формула классической вероятности может быть обобщена на случай непрерывных пространств элементарных событий. Рассмотрим на плоскости измеримую область Ω. Если в условиях опыта вероятность попадания произвольной точки в некоторую подобласть ω области Ω пропорциональна только площади этой подобласти и не зависит от ее местоположения в Ω, тогда говорят, что точка равномерно распределена в области Ω. В случае равномерно распределенной на двумерной области Ω случайной точки вероятность события $A = \{$случайная точка попадет в подобласть $\omega\}$ вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)},$$

где $S(E)$ — площадь подобласти E.

Эта формула естественным образом обобщается на случай пространств произвольной размерности:

$$P(A) = \frac{mes(\omega)}{mes(\Omega)},$$

где $mes(E)$ — мера множества E (длина, площадь, объем и т. д.).

Пример 13. *На отрезке AB длиной 8 случайным образом выбирается точка C и отрезок сгибается в этой точке под прямым углом. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC будет не меньше 6.*

▼ Пусть выбранная точка C удалена на x единиц от точки A, тогда $BC = 8 - x$, а $S_{ABC} = \frac{1}{2}x(8-x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 8)$.

$$P(S_{ABC} \geqslant 6) = P\left(\frac{x(8-x)}{2} \geqslant 6\right) = P(2 \leqslant x \leqslant 6) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Здесь 4 – длина подобласти $\omega = [2;6]$, а 8 – длина области $\Omega = [0;8]$. ▲

103. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

104. На диаметре AB единичного круга случайным образом выбрана точка C. Через точку C перпендикулярно к AB проведена хорда. Какова вероятность того, что длина хорды не превосходит радиуса круга?

105. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?

106. В одной из популярных в Америке игр игрок бросает монету с достаточно большого расстояния на поверхность стола, разграфленную на однодюймовые квадраты. Если монета (3/4 дюйма в диаметре) попадает полностью внутрь квадрата, то игрок получает награду, в противном случае он теряет свою монету. Каковы шансы выиграть при условии, что монета упала на стол?

107. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается монета радиуса r $(r < a/2)$. Найти вероятность того, что монета пересечет ровно одну сторону квадрата.

108. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат — пара чисел (x, y), где x — время прихода Ивана, y — время прихода Петра (время исчисляется в минутах, начиная с 11 часов). Найти вероятности событий: $A = \{$встреча состоялась$\}$, $B = \{$Петру не пришлось ждать Ивана$\}$.

109. (продолжение). В условиях эксперимента предыдущей задачи найти вероятности событий: $C = \{$Встреча состоялась после 11 ч 30 мин$\}$, $D = \{$Иван опоздал на встречу$\}$, $E = \{$Встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут$\}$.

110. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — один час, а второго — два часа.

111. Студент появляется в аудитории равновероятно в любой момент времени от 8.50 до 9.05, а преподаватель, соответственно, от 9.00 до 9.05. Какова вероятность того, что студент не опоздал (пришел раньше преподавателя)?

112. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

113. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки M и N. Определить вероятность того, что длины каждого из трех получившихся отрезков не превосходят заданной величины а $(l/3 < a < l)$.

114. В лаборатории имеется несколько стеклянных трубок, каждая длиной в 9 см, помеченных с одного конца красной меткой. Лаборант нечаянно роняет одну такую трубку на пол, в результате чего она разбивается на три части. Какова вероятность того, что длина куска с красной меткой окажется меньше 3 см?

115. На отрезке длины l наудачу выбираются две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

116. Рассмотрим три отрезка. Длина первого равна 1. Длины двух других выбираются случайно из отрезка [0, 2]. Найти вероятность того, что из этих трех отрезков можно построить треугольник.

117. На окружность радиуса R наудачу поставлены три точки A, B, C. Найдите вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.

118. Найти вероятность того, что сумма трех наудачу выбранных из отрезка [0; l] чисел будет больше l.

119. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| < 1$, $|b| < 1$. Найти вероятности событий $A = \{$корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны$\}$, $B = \{$корни положительны$\}$.

120. Из отрезка $[-1, 2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

Пример 14. *На отрезок $[0; 1]$ случайным образом ставится точка (равномерно распределена). Пусть ξ - длина большей из частей, на которые точка разделит отрезок. Найти $P(\xi < x)$ при каждом значении $x \in \mathbb{R}$.*

▼ Ясно, что длина большей части не может быть меньше $1/2$ и больше 1. Для $1/2 < x < 1$ проще найти $P(\xi \geqslant x)$ - вероятность события, противоположного событию $\xi < x$. Событие $\xi \geqslant x$ происходит, если точка попадает в отрезок $[x; 1]$ или симметричный ему отрезок относительно точки $1/2$ (т.е. $[0; 1 - x]$). Значит, вероятность того, что $\xi \geqslant x$ равна сумме длин этих отрезков, разделённой на длину всего единичного отрезка:

$$P(\xi \geqslant x) = \frac{2 \cdot (1 - x)}{1}.$$

Окончательно получаем

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1/2, \\ 2x - 1, & \text{при } 1/2 < x < 1, \\ 1, & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

121. Случайная точка равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Пусть ξ - числовое значение случайной точки. Найти $P(\xi < x)$ при каждом значении $x \in \mathbb{R}$.

122. На отрезок $[0; 1]$ случайным образом ставится точка (равномерно распределена). Пусть η - длина
а) меньшей из частей,
б) большей из частей,
на которые точка разделит отрезок. Найти $P(\eta \leqslant x)$ при каждом значении $x \in [0; 1]$.

123. Случайная точка M равномерно распределена в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. При каждом значении $x \in \mathbb{R}$ найти вероятность того, что расстояние от поставленной точки до диагоналей прямоугольника не будет превосходить x.

124. Случайная точка M равномерно распределена в квадрате со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от поставленной точки M до ближайшей стороны квадрата будет меньше, чем расстояние от этой точки до ближайшей диагонали.

125. На сторонах AB и CD единичного квадрата $ABCD$ выбрано по одной точке. Соединяющий их отрезок разбивает квадрат на два четырехугольника. Найти вероятность того, что площадь наименьшего из них (по площади) не превосходит $1/3$.

126. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ случайным образом выбраны точки M и N соответственно. Найти вероятность того, что площадь треугольника MAN
а) не превосходит $1/4$, б) не превосходит x.

127. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ случайным образом выбираются точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника MNC
а) не превосходит $1/4$,
б) не превосходит x.

128. Случайная точка M равномерно распределена в квадрате $ABCD$ со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:
а) расстояние от точки M до центра квадрата не превосходит x;
б) расстояние от точки M до вершины A не превосходит x.

129. Случайная точка M равномерно распределена в квадрате $ABCD$ со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:
а) расстояние от точки M до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;
б) расстояние от точки M до ближайшей вершины квадрата не превосходит x.

130. Случайная точка M равномерно распределена в квадрате $ABCD$ со стороной 1. Найти вероятность того, что сумма расстояний от M до сторон AB и AD не превосходит x.

131. Случайная точка M равномерно распределена в прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$ $(a < b)$. Найти вероятность того, что расстояние от M до вершины A не превосходит x.

132. Из отрезка $[0, 1]$ случайно выбраны три числа a, b и c. Найти вероятность того, что из трех отрезков с длинами a, b и c соответственно можно сложить треугольник.

133. На диаметре AB единичного круга случайным образом выбрана точка C. Через точку C перпендикулярно к AB проведена хорда. Найти вероятность того, что ее длина меньше x.

134*. Случайная точка $(\xi; \eta)$ равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(x;y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Обозначим через ν число действительных корней многочлена

$$f_{\xi,\eta}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi^2 x + \eta.$$

Найти вероятности: $P(\nu = 1)$ и $P(\nu = 3)$.

135*. Найти вероятность P_n того, что случайная точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, имеющая равномерное распределение в n-мерном кубе $K_n = \{(x_1; \ldots; x_n) : -1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, n.\}$, принадлежит n-мерному шару $B_n = \{(x_1; \ldots; x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1, \}$, вписанному в K_n. Вычислить P_n для $n = 2, 3, 10$.

1.5 Условные вероятности. Независимость событий

Пусть A и B — некоторые наблюдаемые в эксперименте события, причем $P(A) > 0$. *Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло в результате данного эксперимента,* называется величина, определяемая равенством

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Для краткости условную вероятность $P(B|A)$ называют «вероятностью события B при условии A».

Событие A называется *независимым от события B*, удовлетворяющего условию $P(B) > 0$, если выполняется

$$P(A|B) = P(A).$$

События A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любого набора из m событий ($m = 2, 3, \ldots, n$) выполняется равенство

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\ldots A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\ldots P(A_{k_m}), \quad k_m \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Пример 15. *Из партии деталей, среди которых n качественных и m бракованных, для контроля взяли k ($k < n$) штук. В процессе контроля оказалось, что все они качественные. Найти вероятность того, что еще одна выбранная наудачу деталь также будет качественной.*

▼ Обозначим события $A = \{(k+1)$-я деталь качественная$\}$, $B = \{k$ первых деталей качественные$\}$. Тогда нужно найти $P(A|B)$.

1 способ.

По определению условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

С учётом введённых событий получаем

$$AB = \{\text{все } k+1 \text{ выбранных деталей качественные}\},$$

поэтому

$$P(AB) = \frac{C_n^{k+1}}{C_{n+m}^{k+1}}$$

и

$$P(B) = \frac{C_n^k}{C_{n+m}^k}.$$

Значит,

$$P(A|B) = \frac{C_n^{k+1} \cdot C_{n+m}^k}{C_{n+m}^{k+1} \cdot C_n^k} = \frac{n-k}{n-k+m}.$$

2 способ.

После проверки k деталей в партии осталось $n - k + m$ деталей, среди которых $n - k$ качественных. Значит,

$$P(A|B) = \frac{n-k}{n-k+m}. \qquad \blacktriangle$$

136. Брошено две игральные кости. Найти условную вероятность того, что выпали две пятёрки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

137. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть четное число?

138. Вероятность сбить вертолёт из обычного автомата равна 0,01, а вероятность попасть - 0,2. Какова вероятность того, что вертолёт будет сбит, если было попадание в него?

139. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти двумя способами (с помощью комбинаторного метода и условных вероятностей) вероятность того, что оба студента взяли «хорошие» билеты.

140*. В случайно выбранной семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки — независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка — мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

141*. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются две. Известно, что среди вынутых карт есть дама. Найти вероятность того, что обе извлеченные карты — дамы.

142. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события: $A = \{$на трех костях выпадут разные грани$\}$, $B = \{$хотя бы на одной из костей выпадет шестерка$\}$. Вычислить $P(B|A)$ и $P(A|B)$.

143. Известно, что при бросании 4 игральных костей выпала по крайней мере одна единица. Какова при этом вероятность того, что выпали две или более единицы?

144. Из урны, содержащей 3 белых и 7 красных шаров, наудачу последовательно и без возвращения извлекаются два шара. События: $A = \{$первый шар белый$\}$, $B = \{$второй шар белый$\}$, $C = \{$по крайней мере один из вынутых шаров белый$\}$. Вычислить вероятности $P(B|A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$.

145. (продолжение). В условиях эксперимента, описанного в предыдущем примере, установить, являются ли независимыми события A и B, A и C, B и C, события A, B и C в совокупности.

146. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. События: $A = \{$вынутая карта — туз$\}$, $B = \{$вынута карта черной масти$\}$, $F = \{$вынутая карта — фигура, т.е. является валетом, дамой, королем или тузом$\}$. Установить, зависимы или независимы следующие три пары событий: A и B, A и F, F и B.

147. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу две карты. Наблюдаемые события: $A = \{$среди извлеченных карт хотя бы один туз$\}$ и $B = \{$среди извлеченных карт хотя бы одна дама$\}$. Найти $P(A|B)$.

148. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу две карты. Выяснить, являются ли независимыми события $A = \{$среди извлеченных карт есть по крайней мере один король$\}$ и $B = \{$вынутые карты одной масти$\}$.

149. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Установить, зависимы или независимы события $A = \{$появится не менее двух единиц$\}$ и $B = \{$появится не более двух шестерок$\}$. Вычислить условную вероятность $P(B|A)$.

150. (продолжение) Для событий $C = \{$появится хотя бы одна единица$\}$ и $D = \{$появится не менее двух шестерок$\}$ вычислить условную вероятность $P(C|D)$.

151. Монета бросается три раза. Являются ли независимыми в совокупности следующие события: $A = \{$герб появился не более одного раза$\}$, $B = \{$при первых двух бросаниях герб появился ровно один раз$\}$ и $C = \{$при последних двух бросаниях герб появился ровно один раз$\}$?

152. Из 100 карточек с числами $00, 01, \ldots, 98, 99$ случайно выбирается одна. Рассматриваются события $A_i = \{$сумма цифр на выбранной карточке равна $i\}$ и $B = \{$произведение цифр на выбранной карточке равно $0\}$. Найти $P(A_i|B)$, $i = 0, 1, \ldots, 18$.

153. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим следующие события: $E = \{$вышедший знает английский язык$\}$, $F = \{$вышедший знает французский язык$\}$, $D = \{$вышедший знает немецкий язык$\}$. Указать все пары независимых событий. Установить, являются ли события E, F и D независимыми в совокупности.

154. События A и B несовместны, причем их вероятности не равны нулю. Доказать, что они зависимы.

155. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета, при условии, что не вынут синий шар.

156. На шахматную доску наудачу ставятся два слона (слон ходит по диагонали). Какова вероятность того, что слоны не побьют друг друга, при условии, что белый слон попадет на одно из крайних полей доски?

157. На шахматную доску наудачу ставят две ладьи (ладьи ходят по вертикали и по горизонтали). Вычислить $P(B|A)$, если $A = \{$ладьи попали на клетки разного цвета$\}$, $B = \{$ладьи побьют друг друга$\}$.

158. Случайная точка $(\xi;\eta)$ равномерно распределена в квадрате $\big\{(x;y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\big\}$. Доказать, что при любых x и y независимы события $A_x = \big\{\xi < x\big\}$ и $B_y = \big\{\eta < y\big\}$.

159*. Игральная кость брошена 2 раза. Пусть ξ и η соответственно числа очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события

$A_1 = \big\{\xi$ делится на $2, \eta$ делится на $3\big\}$,
$A_2 = \big\{\xi$ делится на $3, \eta$ делится на $2\big\}$,
$A_3 = \big\{\xi$ делится на $\eta\big\}$,
$A_4 = \big\{\eta$ делится на $\xi\big\}$,
$A_5 = \big\{\xi + \eta$ делится на $2\big\}$,
$A_6 = \big\{\xi + \eta$ делится на $3\big\}$.

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$ и тройки $\{A_i, A_j, A_k\}$ взаимно независимых событий.

160*. Случайная точка $(\xi;\eta)$ равномерно распределена в единичном квадрате $\big\{(x;y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\big\}$. При каких значениях r независимы события
$A_r = \big\{|\xi - \eta| \geqslant r\big\}$ и $B_r = \big\{\xi + \eta \leqslant 3r\big\}$?

161. Случайная точка $(\xi;\eta)$ равномерно распределена в единичном квадрате $\big\{(x;y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\big\}$. Пусть

$A_1 = \big\{\xi \leqslant \frac{1}{2}\big\}$, $A_2 = \big\{\eta \leqslant \frac{1}{2}\big\}$,
$A_3 = \big\{\big(\xi - \frac{1}{2}\big)\cdot\big(\eta - \frac{1}{2}\big) < 0\big\}$.

Показать, что любые два события из A_1, A_2, A_3 независимы, но все три события A_1, A_2, A_3 зависимы. Являются ли зависимыми события A_1, A_2 и A_3 ?

1.6 Вероятности сложных событий

Суммой событий A и B называется третье событие $A + B$, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: A или B. Произведением событий A и В называется третье событие AB, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: A и B. Понятия суммы и произведения двух событий очевидным образом переносятся на случай любого множества событий. Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Сложным событием называется наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью алгебраических операций.

Вероятность осуществления сложного события вычисляется по правилам, основу которых составляют:

Формула умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Формула сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула умножения для произвольного числа событий записывается следующим образом:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Пример 16. *На связке n схожих ключей, из которых только один подходит к данному замку. Какова вероятность того, что замок будет открыт ровно в k-й попытке?*

▼ Обозначим через A интересующее нас событие.

1 способ.

Выберем за элементарный исход упорядоченное расположение всех ключей (возможный порядок их применения). Тогда общее число этих элементарных исходов равно числу перестановок n предметов:

$$N = n!$$

Благоприятный исход получается, если на k-ом месте в наборе окажется нужный ключ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ \oslash & \oslash & \ldots & \oslash & \oplus & \oslash & \ldots & \oslash \end{array}$$

Зафиксируем такую ситуацию (когда нужный ключ на k-м месте). Тогда при любых перемещениях других ключей исход будет оставаться благоприятным. Всего таких перемещений существует $(n-1)!$, то есть

$$N_A = (n-1)!$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Замечание. Вопрос, который возникает при таком способе решения, заключается в том, что по смыслу задачи мы не собираемся перебирать оставшиеся ключи после нахождения нужного. Ответ на него состоит в следующем: после того, как подобран нужный ключ, нас устраивает *любое* расположение оставшихся ключей. То есть количество благоприятных исходов может быть записано стедующим образом:

$$N_A = \underbrace{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}_{k-1} \cdot 1 \cdot (n-k)!$$

2 способ.

Введем в рассмотрение набор событий $\{B_i\}_{i=1}^n$, где $B_i = \{$нужный ключ в связке на i-м месте$\}$. Тогда можно выразить $A = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{B}_{k-1} \cdot B_k$. По формуле получаем:

$$P(\overline{B}_1\overline{B}_2\ldots\overline{B}_{k-1}B_k) = P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2|\overline{B}_1)\ldots P(B_k|\overline{B}_1\ldots\overline{B}_{k-1})$$

Выпишем вероятности событий:

$$P(\overline{B}_1) = \frac{n-1}{n}$$
$$P(\overline{B}_2|\overline{B}_1) = \frac{n-2}{n-1}$$
$$\ldots$$
$$P(\overline{B}_i|\overline{B}_1\ldots\overline{B}_{i-1}) = \frac{n-i}{n-(i-1)}$$
$$\ldots$$
$$P(\overline{B}_{k-1}|\overline{B}_1\ldots\overline{B}_{k-2}) = \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}$$
$$P(B_k|\overline{B}_1\ldots\overline{B}_{k-1}) = \frac{1}{n-(k-1)}$$

В итоге получаем:

$$P(\overline{B}_1\overline{B}_2\ldots\overline{B}_{k-1}B_k) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\cdot\frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}. \ \blacktriangle$$

Пример 17. *Двое поочередно извлекают карты из колоды в 52 карты, выкладывая их на стол. Побеждает тот, после чьего хода на столе окажутся две карты одной масти. Найти вероятность победы второго игрока.*

▼ Очевидно, что второй может победить после извлечения либо второй карты (первым своим ходом), либо четвёртой (вторым своим ходом). До извлечения шестой карты игра не дойдёт, так как к этому моменту на столе уже оказались бы пять карт, а среди них нашлись бы две одной масти.

Обозначим интересующие нас события:

$A \ = \{$Победа второго игрока$\}$,

$A_1 = \{$Победа второго своим первым ходом$\}$,

$A_2 = \{$Победа второго своим вторым ходом$\}$.

Отметим, что $A = A_1 + A_2$, причем события A_1 и A_2 несовместны. Найдем их вероятности. Так как после извлечения первой карты игра закончиться не может, для нахождения вероятности события A_1 достаточно найти вероятность того, что вторая карта будет такой же масти, как и первая. После извлечения первой карты в колоде осталось 12 карт той же масти, а общее количество карт в колоде сократилось до 51. Поэтому вероятность события A_1 вычисляется следующим образом:

$$P(A_1) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}.$$

Для вычисления вероятности победы второго игрока после извлечения четвёртой карты необходимо учесть, что игра должна дойти до этой стадии. Поэтому нужно найти вероятность того, что среди первых трёх карт нет двух одной масти, и умножить на вероятность того, что при этом условии масть четвёртой извлечённой карты совпадет с мастью трёх извлечённых ранее.

Вероятность того, что первые три карты разной масти, можно находить разными способами. Например, найти вероятность того, что вторая карта отличается по масти от первой, и умножить на вероятность того, что при этом третья карта отличается по масти от первых двух $\left(\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\right)$. Если это произошло, то вероятность извлечения четвёртой карты, совпадающей по масти с одной из первых трёх, равна отношению количества карт извлечённых мастей $(12\cdot 3)$ к общему количеству оставшихся в колоде карт (49). Поэтому вероятность события A_2 вычисляется так:

$$P(A_2) = \frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{36}{49}.$$

Учитывая несовместность событий A_1 и A_2, вычислим вероятность события A:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{4}{17} + \frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{36}{49}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 18. *Из колоды в 52 карты случайным образом извлекаются 4. Найти вероятность того, что среди извлеченных карт будет хотя бы два короля и хотя бы один туз.*

▼ Пусть событие $A = \{$Извлекли не менее двух королей и не менее одного туза$\}$.

Рассмотрим, каким образом среди извлеченных карт могут оказаться хотя бы два короля и хотя бы один туз. В соответствии с этим, разобьем исходное событие на сумму нескольких несовместных событий.

$A_1 = \{$Среди извлеченных карт два короля и один туз$\}$.
$A_2 = \{$Среди извлеченных карт два короля и два туза$\}$.
$A_3 = \{$Среди извлеченных карт три короля и один туз$\}$.
$A = A_1 + A_2 + A_3$.

Теперь вычислим вероятности событий в отдельности. Для этого будем пользоваться классическим определением вероятности. Общее количество исходов для каждого из рассматриваемых событий одно и то же: $N = C_{52}^4$. Найдем количество благоприятных исходов для каждого из этих событий.

Событие A_1 заключается в том, что извлекли двух королей, одного туза и еще одну карту, не являющуюся ни королем, ни тузом. Соответственно для нахождения количества благоприятных для A_1 исходов найдем по правилу умножения количество способов извлечь двух королей (всего их четыре, поэтому данное количество способов равно C_4^2), умножим на количество способов извлечь одного туза (C_4^1) и умножим на количество способов извлечь одну карту, не являющуюся ни королем и ни тузом (таких карт в колоде 44, поэтому искомое количество способов равно C_{44}^1). Таким образом, $N_1 = C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{44}^1$.

Аналогичным образом находим благоприятные исходы для оставшихся событий:

$N_2 = C_4^2 \cdot C_4^2$,
$N_3 = C_4^3 \cdot C_4^1$.

Теперь легко находятся и вероятности событий:

$$P(A_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{44}^1}{C_{52}^4}, \qquad P(A_2) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{52}^4}, \qquad P(A_3) = \frac{C_4^3 \cdot C_4^1}{C_{52}^4}.$$

В силу несовместности составляющих A событий:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Отсюда и получаем ответ:

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{44}^1 + C_4^2 \cdot C_4^2 + C_4^3 \cdot C_4^1}{C_{52}^4}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 19. *Три стрелка выполнили по одному выстрелу по мишени с вероятностью попадания* $0,5$, $0,7$ *и* $0,8$ *соответственно. Оказалось, что мишень поражена один раз. Найти вероятность того, что это сделал первый стрелок.*

▼ Пусть $A_i = \{$Попадание i-го стрелка$\}$, $A = \{$Мишень поражена один раз$\}$. Необходимо найти вероятность того, что при условии однократного

поражения мишени тремя стрелками первый стрелок попал. Иначе говоря, нужно вычислить условную вероятность $P(A_1|A)$. По определению условной вероятности:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1A)}{P(A)}.$$

Найдём вероятность однократного поражения мишени. Заметим, что

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

По условию $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,7$, $P(A_3) = 0,8$. Отсюда находим и вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,5$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0,3$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0,2$. Легко заметить, что события $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ несовместны (так как в каждых двух из них есть несовместные множители, в одном – некоторое A_i, а в другом – $\overline{A}_i$). Поэтому вероятность суммы событий равна сумме вероятностей:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \\ &= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3). \end{aligned}$$

Также учтём, что независимость событий A_1, A_2 и A_3 сохранится и в том случае, если некоторые из них заменить отрицаниями. Поэтому вероятность произведения таких событий будет равна произведению их вероятностей:

$$\begin{aligned} P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) &= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,03; \\ P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) &= P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,07; \\ P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2A_3) &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,12. \end{aligned}$$

Для нахождения условной вероятности осталось найти вероятность события A_1A. Это событие заключается в том, что первый стрелок попал, и мишень оказалась поражена только одним выстрелом из трёх. Для этого необходимо, чтобы второй и третий стрелки промахнулись. Отсюда можем сделать вывод, что $A_1A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Учитывая независимость соответствующих событий, вычислим вероятность:

$$P(A_1A) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,03.$$

Осталось сделать только последний шаг:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1A)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,22} = \frac{3}{22}. \qquad \blacktriangle$$

162. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама, король или туз)?

163. В условиях эксперимента, описанного в задаче 153, найти вероятность того, что вышедший знает или английский, или французский язык.

164. Определить вероятность того, что наудачу выбранное целое положительное число делится: а) на два и на три; б) на два или на три.

165. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 мин, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 мин. Предполагая, что автобус и троллейбус ходят независимо друг от друга, найти вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?

166 ☺. Ученик 6б класса Костя Сидоров и его приятель, заняв выгодную позицию вблизи школьных дверей, обстреливали снежками всех выходящих девчонок. Когда дверь в очередной раз открылась, два снежка одновременно полетели в голову застывшего на пороге завуча - Маргариты Викентьевны. Какова вероятность того, что цель была поражена, если известно, что Костя обычно попадает 8 раз из 10, а его приятель только 7?

167. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу две карты. Наблюдаемые события: $A = \{$среди выбранных карт есть хотя бы один туз$\}$, $B = \{$хотя бы один король$\}$. Вычислить $P(A+B)$.

168. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1, для второго стрелка равна p_2. Стрелки произвели по одному выстрелу в мишень. Считая попадания в мишень для отдельных стрелков событиями независимыми, найти вероятности следующих событий: $A = \{$ни одного попадания в мишень$\}$, $B = \{$ровно одно попадание в мишень$\}$.

169. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p, а для второго – 0,7. Известно, что вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найдите p.

170. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он попадет ровно 2 раза.

171. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью

р, а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

172*. Найти вероятность того, что при игре в покер не будет собрана ни одна из комбинаций, перечисленных в задаче 75 (ситуация «нет игры»).

173. Пусть A и B — некоторые события. Известно, что $P(A+B) = 0,7$ и $P(A) = 0,5$. Указать диапазон всех возможных значений для вероятности противоположного к B события.

174. Известно, что A и B — наблюдаемые события в эксперименте, причем $P(B) = 0,4$, $P(A/B) = 0,3$, $P(A/\bar{B}) = 0,2$. Найти $P(AB)$, $P(A)$, $P(A+B)$.

175. Опираясь на формулу для вероятности суммы двух событий, вывести формулу для вероятности суммы трех событий.

176. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

177. В городе проживает $n+2$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает ее другому, тот - третьему и т. д., причем передача новости осуществляется следующим образом: человек, которому сообщена новость, случайным образом выбирает одного из n жителей (исключая себя и человека, сообщившего ему новость) и сообщает новость ему, тот поступает точно так же и т. д. Найти вероятность того, что новость будет передана $n+1$ раз:

а) без возвращения к человеку, который узнал ее первым;

б) без повторного сообщения ее кому-либо.

178. В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?

179. Сколько нужно взять случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

180. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, можно было надеяться, что хотя бы один раз появится 6 очков?

181. (задача де Мере). Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить «6» или при 24 бросаниях двух костей хотя бы раз получить две шестерки?

182. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна p_1. Сколько надо произвести независимых выстрелов в неизменных условиях, чтобы с вероятностью, не меньшей p_2, поразить цель хотя бы один раз? Написать общее выражение для наименьшего числа выстрелов $n(p_1, p_2)$ и найти следующие числовые значения: $n(0,3; 0,9)$, $n(0,3; 0,95)$.

183. Иван и Петр поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Иван бросает первым. Найти вероятности p_1 и p_2 выигрыша для каждого из игроков, считая, что бросание монеты может продолжаться неограниченно долго.

184. (продолжение). Установить, можно ли сделать игру из предыдущей задачи более справедливой, если позволить Петру делать большее число бросков, когда наступает его очередь. Вычислить вероятность выигрыша для Ивана, если Петру разрешается делать два броска при его подходе.

185. Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет грань с шестью очками. Найти вероятность того, что выиграет игрок, бросающий первым.

186. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков 2 партий подряд (ничья исключается). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0,5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найдите вероятность того, что игра окончится до 6-й партии.

187. Два человека поочерёдно извлекают шары (без возвращения в урну), содержащей m белых и $n - m$ чёрных шаров до появления белого шара. Найти вероятность, что первым белый шар вынет человек, начавший извлечения, если:

а) $n = 4$, $m = 1$;

б) $n = 7$, $m = 2$.

188. Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 чёрных и 2 красных, два игрока поочерёдно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Найти вероятности событий:

а) выиграет игрок, начавший игру;

б) выиграет второй участник;

в) игра закончится вничью.

189. Из урны, содержащей a белых шаров и b чёрных, два игрока поочерёдно извлекают по одному шару. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша игрока, начавшего игру, в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возвращением,

б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

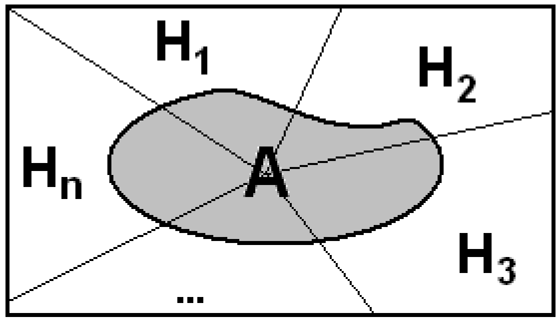
1.7 Формула полной вероятности

Пусть H_1, H_2, ..., H_n — возможные сопутствующие события данному событию A для данного эксперимента, причем система множеств $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ образует полную группу несовместных событий:

а) $H_i \cdot H_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$ (события попарно несовместны, то есть никакие два события не могут произойти одновременно),

б) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$ (хотя бы одно событие должно произойти).

Иначе говоря, в результате эксперимента может произойти одно и только одно из событий H_1, H_2, ..., H_n.



Для любого наблюдаемого в эксперименте события A имеет место *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

События H_i принято называть *гипотезами* по отношению к событию A.

Пример 20. *Из полного набора (28 костяшек) домино извлекаются две костяшки. Найти вероятность того, что их можно по правилам приложить одну к другой.*

▼ На результате совершенно не должно сказываться, по одной мы извлекаем эти костяшки или же извлекаем сразу обе. Поэтому для определённости будем считать, что из полного набора сначала извлечена первая костяшка, а потом из оставшихся 27 костяшек извлекается вторая.

Предположим, первая костяшка извлечена. Какая теперь вероятность извлечь вторую костяшку так, чтобы её можно было приставить к первой? Ответ на этот вопрос зависит от вида первой костяшки. В самом деле: если мы, к примеру, достали первой костяшку «$5:5$», то в наборе осталось 6 костяшек, которые можно приставить к первой (это оставшиеся костяшки с цифрой «5» – «$5:0$», «$5:1$», «$5:2$», «$5:3$», «$5:4$» и «$5:6$»). Но если первой была бы извлечена, допустим, костяшка «$5:4$», то в оставшемся наборе, помимо 6 костяшек с цифрой «5», найдутся ещё 6 костяшек с цифрой «4», которые также можно приставить к первой костяшке.

Так как вероятность приставить вторую костяшку к известной первой зависит от вида этой первой костяшки, то будет удобно воспользоваться формулой полной вероятности. Введём некоторые обозначения:

$A=\{$Вторую костяшку можно приставить к первой$\}$.

Гипотезы:

$H_1=\{$Первая костяшка имеет вид «X:X» («дубль»)$\}$,

$H_2=\{$Первая костяшка имеет вид «X:Y»$\}$.

Вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4},\qquad P(H_2)=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

Условные вероятности наступления события A при наступлении гипотез:

$$P(A|H_1)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9},\qquad P(A|H_2)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}.\ ▲$$

Пример 21. *Как изменится вероятность угадать 5 номеров в лотерее «Спортлото 5 из 36», если при розыгрыше шаров один из них забыли положить в барабан?*

▼ Пусть $A=\{$угаданы все 5 номеров$\}$. Вычислим вероятность угадать 5 номеров, если все шары положили барабан. Под элементарным исходом в данной задаче будем понимать извлеченный неупорядоченный набор из 5 чисел – номеров извлеченных шаров. Общее количество способов извлечь 5 шаров из 36 возможных (общее количество элементарных исходов):

$$N=C_{36}^5=\frac{36!}{5!31!}.$$

Благоприятный исход будет всего 1 (если извлечены именно шары с загаданными номерами): $N(A)=1$. Тогда искомая вероятность события находится по формуле:

$$P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{1}{C_{36}^5}=\frac{5!31!}{36!}.$$

Теперь решим ту же задачу в случае, если некоторый шар забыли положить в урну. Сразу же однозначно ответить на вопрос, увеличится или уменьшится вероятность события A в этом случае, нельзя: действительно, если забыли положить шар с одним из загаданных нами номеров, то вероятность уменьшится (станет нулевой), а если забыли положить шар с номером, который мы не загадывали, то вероятность данного события увеличится (количество «выигрышных» шаров осталось прежним, а общее количество шаров уменьшилось).

Поэтому рассмотрим оба случая – и тот, в котором забыли положить «выигрышный» шар, и противоположный – как две возможные гипотезы:

$H_1=\{$забыли положить «выигрышный» шар$\}$

$H_2=\{$забыли положить «невыигрышный» шар$\}$.

Учитывая то, что среди 36 шаров 5 «выигрышных» и 31 «невыигрышный», вычислим вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{5}{36},\qquad P(H_2)=\frac{31}{36}.$$

Вероятность наступления события A при условии наступления события H_1 равна нулю ($P(A|H_1)=0$), так как выпадение 5 «выигрышных» шаров при условии, что один «выигрышный» шар забыли положить в барабан, невозможно.

Для нахождения вероятности события A при условии наступления события H_2 воспользуемся такой же схемой рассуждения, как и первоначально при нахождении вероятности этого события в случае, когда все шары на месте. Если забыли положить «невыигрышный шар», то в барабане оказалось 35 шаров, из которых 5 «выигрышных». Излечь 5 шаров можно $C_{35}^5=\dfrac{35!}{5!30!}$ способами, но благоприятный исход только один, поэтому искомая вероятность равна

$$P(A|H_2)=\frac{1}{C_{35}^5}=\frac{5!30!}{35!}.$$

Согласно формуле полной вероятности, найдем вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$
$$= \frac{5}{36} \cdot 0 + \frac{31}{36} \cdot \frac{5!30!}{35!} = \frac{5!30! \cdot 31}{35! \cdot 36} = \frac{5!31!}{36!}.$$

Заметим, что получился такой же результат, что и в том случае, когда никакой шар не забывали. Таким образом, вероятность угадать 5 номеров, когда при розыгрыше один шар забыли положить в барабан, *не изменилась*.

Этого результата можно было ожидать. Описанная ситуация является фактически более сложной схемой случайного выбора 5 шаров при розыгрыше – сначала из полного набора в 36 шаров случайным образом выбираются 35 и помещаются в барабан, а после этого из них выбирается 5 шаров. Поэтому аналогичного совпадения вероятностей можно ожидать и в случаях, когда в барабан забыли положить 2, 3, 4, . . . , 30 или даже 31 шар. ▲

190. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят - она оказалась:

а) дамой;

б) тузом.

После этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

191. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки — 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

192. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10% и третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% — со второго и 50% — с третьего?

193. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую. После чего из второй партии наудачу выбирается одно изделие. Определить вероятность того, что оно бракованное.

194 ☺**.** Любимое занятие двухлетней девочки Кати - срезать пуговицы с одежды. Пока мама готовила кашу, Кате удалось остричь все 5 белых пуговиц с папиной пижамы и 3 черные пуговицы с маминого вечернего платья. Одну пуговицу Катя проглотила, а остальные засунула в глубокую щель между полом и плинтусом. За этим занятием ее и застала мама. С большим трудом мама сумела выковырять из щели 2 пуговицы. Какова вероятность того, что платье можно привести в порядок, если одна запасная пуговица у мамы есть?

195. В первой урне находится один белый и 9 черных шаров, а во второй - один белый и 5 черных шаров. Из каждой урны удалили случайным образом по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью (свободную) урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

196. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% — вторую, 20,9% — третью и 7,9% — четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

197 ☺**.** Студент филфака Петя Чернышев ставит три ящика пива против двух, что, выучив 12 билетов из 30, он сдаст зачет по крайней мере со второго раза. Стоит ли его приятелю заключать пари? (*Указание:* найти отношение вероятностей благоприятного и неблагоприятного для Пети событий.)

198. В первой урне содержится 3 белых и 2 черных шара, во второй — 3 белых и 4 черных шара. Из первой урны вынули наудачу шар и переложили во вторую. После этого из второй урны вынули наудачу шар и переложили в первую. С какой вероятностью состав шаров в урнах не изменился?

199. Три стрелка, вероятности попадания которых при одном выстреле в мишень в неизменных условиях постоянны и соответственно равны $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,6$, делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вычислить вероятность события A $= \{$в мишени окажется ровно две пробоины$\}$, приняв в качестве гипотез элементарные исходы данного эксперимента.

200. Два орудия производят стрельбу по двум целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью p, двумя орудиями — с вероятностью $p(2-p)$. С какой вероятностью из двух целей будет поражена ровно одна?

201 ☺. Один властелин, которому наскучил его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым повелителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по 2 урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из нее вытащит один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

202. Из полной колоды в 52 карты наудачу последовательно и без возвращения выбирают две карты. Какова вероятность того, что второй картой можно покрыть первую? (Это значит, что вторая карта должна быть более старшей картой той же масти.)

203. Из 20 вопросов студент подготовился к 15. На экзамене каждый берет вопрос и, оставив его у себя, идет готовиться. Найти вероятность того, что студент, пришедший

а) вторым,

б) третьим

ответит на предложенный ему вопрос. Сравнить полученный результат с вероятностью правильного ответа на предложенный вопрос, если бы студент заходил первым.

204. (продолжение задачи 156). На шахматную доску наудачу ставятся два слона (слон ходит по диагонали). Найти вероятность того, что слоны побьют друг друга.

205. В первой урне находятся 5 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 5 черных шаров. Из первой урны наудачу берут 1 шар и перекладывают во вторую урну, после чего наудачу из второй урны в первую также перекладывается один шар. После этого из первой урны извлекаются два шара. Найти вероятность того, что оба извлеченных шара окажутся черными.

206. В первой урне m_1 белых и n_1 черных шаров, во второй – m_2 белых и n_2 черных шаров, в третьей – m_3 белых и n_3 черных шаров. Из первой урны случайным образом один шар переложили во вторую, затем из второй урны один шар переложили в третью, после чего один шар из третьей урны переложили в первую. Найти вероятность того, что извлеченный после этого шар из первой урны окажется белым. Решить задачу для случаев:

а) $m_1 = m_2 = m_3 = n_1 = n_2 = n_3 = 2$,

б) $m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad n_1 = n_2 = n_3 = 2$,

в) $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 3,\ n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1$,

г) для произвольных натуральных m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3.

207. Производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два снаряда — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

208*. Чему равна вероятность того, что два бросания трех игральных костей дадут один и тот же результат (неупорядоченный набор из трех цифр), если кости внешне не различимы?

1.8 Формула Байеса

Пусть $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ — возможные сопутствующие события данному событию A для данного эксперимента, образующие полную группу событий. Пусть эксперимент проведен и стало известно, что событие A осуществилось. Для вычисления *послеопытной (апостериорной)* вероятности гипотезы H_k при условии, что событие A произошло, следует пользоваться *формулой Байеса*

$$p(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Формула Байеса позволяет «переоценить» вероятность каждой из гипотез после поступления новой «информации» относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

Пример 22. *Двое охотников заметили утку. Первый выстрелил один раз с вероятностью попадания 0,8, а второй успел сделать два выстрела, но с вероятностью попадания 0,4 на каждом из них. Утка упала, причём попадание в неё было только одно. Кто из охотников с большими основаниями может претендовать на добычу?*

▼ Пусть $A = \{$Утка поражена одним выстрелом$\}$. Найдем вероятность того, что при этом условии выстрел первого охотника достиг цели. Если найденная вероятность окажется больше $1/2$, то большие основания претендовать на добычу будут у первого охотника, если меньше $1/2$, то у второго (а в случае равенства этой вероятности $1/2$ основания претендовать на добычу у обоих охотников будут одинаковыми).

Для решения задачи воспользуемся формулой Байеса. Выделим гипотезы:

$H_1 = \{$Первый охотник попал$\}$,

$H_2 = \{$Первый охотник промахнулся$\}$.

Из условия получаем: $P(H_1) = 0,8;\ P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0,2$. Найдём вероятность события A при условии наступления данных гипотез.

Если наступило событие H_1, то это означает, что первый охотник попал. Поэтому для наступления события A при этом условии необходимо, чтобы второй охотник оба раза промахнулся. Введем обозначения:

$B_1 = \{$Второй охотник попал своим первым выстрелом$\}$,

$B_2 = \{$Второй охотник попал своим вторым выстрелом$\}$.

По условию $P(B_1) = P(B_2) = 0,4$, тогда $P(\overline{B_1}) = P(\overline{B_2}) = 0,6$. Стало быть, $A|H_1 = \overline{B_1}\ \overline{B_2}$. Учитывая то, что выстрелы второго независимы, можно найти вероятность данного события:

$$P(A|H_1) = P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36.$$

Аналогично вычисляем и вероятность $P(A|H_2)$. Наступление события A после промаха первого охотника возможно только тогда, когда второй охотник попадет ровно один раз. Для этого он должен либо попасть своим первым выстрелом, а вторым промахнуться, либо наоборот – промахнуться, а потом попасть. Поэтому

$$\begin{aligned} P(A|H_1) &= P(B_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2) = P(B_1)P(\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1)P(B_2) = \\ &= 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48. \end{aligned}$$

Для подсчета $P(A|H_2)$ можно было также воспользоваться формулой вычисления вероятности наступления одного события в серии из двух независимых однотипных испытаний (схема Бернулли):

$$P(A|H_2) = C_2^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^1 = 0,48.$$

Разумеется, и при этом способе подсчёта получен тот же результат.

Теперь можно воспользоваться и формулой Байеса:

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,36}{0,8 \cdot 0,36 + 0,2 \cdot 0,48} = \frac{0,288}{0,384} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Так как $P(H_1|A) = \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2}$, то с большими основаниями претендовать на добычу может первый охотник. ▲

209. В первой группе 25 студентов, во второй 35. В первой группе стипендию всем выдали в следующем наборе: 6 ассигнаций по 50 рублей и одну 100 рублей. А во второй - в наборе 4 по 50 р. и 2 по 100 р. Некий студент, положив стипендию в карман, вынул затем одну ассигнацию; она оказалась достоинством в 50 р. Какова вероятность того, что он из первой группы?

210. В коробке находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появляется с вероятностью 1/3, единица — с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

211. Письмо находится в письменном столе с вероятностью p, причем с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели семь ящиков и письма не нашли. Какова при этом вероятность, что письмо в восьмом ящике?

212. В урне лежит шар неизвестного цвета с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

213 ☺**.** В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий вытачивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0,5. Во вторник этот показатель снижается до среднецехового - 0,2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник?

214. На некоторой фабрике машина A производит 40% всей продукции, а машина B — 60%. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказывается браком, а у машины B — брак 2 единицы из 500. Некоторая единица продукции, выбранная случайным образом из дневной продукции, оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена на машине B?

215. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй - 2 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из второй урны извлекают один шар. Какой состав переложенных шаров наиболее вероятен, если шар, извлеченный из второй урны, окажется белым?

216. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

217. Число бракованных микросхем на 1000 априори считается равновозможным от 0 до 3. Наудачу опробованы 100 микросхем, оказавшиеся исправными. Какова вероятность, что все схемы исправны?

218. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 — удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные — 20, подготовленные удовлетворительно — 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез:

$H_1 = \{$студент подготовлен отлично или хорошо$\}$,

$H_2 = \{$студент подготовлен удовлетворительно$\}$,

$H_3 = \{$студент подготовлен плохо$\}$.

219. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 – хорошо, 4 – посредственно и 2 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо – 35, посредственно – 25 и плохо – 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все 3 вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен

а) хорошо,

б) плохо.

220. Имеется 117 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 7 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с 2 гербами.

221. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90% (т. е. 10% носителей туберкулеза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, действительно является носителем туберкулеза?

222. При некоторых условиях стрельбы стрелок A поражает мишень с вероятностью $p_1 = 3/5$, стрелок B — с вероятностью $p_2 = 2/3$, стрелок C — с вероятностью $p_3 = 2/5$. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал C в мишень или нет?

223. Трое охотников одновременно выстрелили в волка, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что волк был убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

1.9 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Одним из классических экспериментов, изучаемых теорией вероятностей, является проведение последовательных независимых испытаний и наблюдение результата совместного осуществления тех или иных исходов каждого испытания.

Последовательные испытания называются *независимыми*, если вероятность осуществления любого исхода в i-м по счету испытании не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Простейшим классом повторных независимых испытаний является *последовательность независимых испытаний с двумя исходами («успех» и «неуспех») и с неизменными вероятностями «успеха» p и «неуспеха» $q = 1 - p$ в каждом испытании.* Краткое название: *схема испытаний Бернулли.*

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления «успеха» равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), вычисляется по формуле

Бернулли
$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$
где $q = 1 - p$.

Пример 23. *Вероятность попадания в мишень при одиночном выстреле равна $3/4$. Найти вероятность того, что после 5 выстрелов мишень*

а) не будет поражена ни разу;

б) будет поражена 2 раза;

в) будет поражена не менее 3 раз.

▼ В данной задаче под «успехом» будем понимать попадание в мишень. По условию $p = 3/4$, $n = 5$. Вероятность «неуспеха» $q = 1 - p = 1/4$. а) Вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу, равна вероятности наступления 0 успехов в серии из 5 испытаний, что по формуле Бернулли вычисляется следующим образом:
$$P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5.$$
б) Аналогичным образом находим вероятность 2 попаданий («успехов»):
$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 10 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$
в) Событие, заключающееся в поражении мишени не менее 3 раз, раскладывается в сумму *несовместных* событий, заключающихся в попадании в мишень 3, 4 и 5 раз соответственно. Поэтому искомая вероятность равна
$$\begin{aligned}P_5(\geqslant 3) &= P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \\ &= C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \\ &= 10 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^5.\end{aligned}$$ ▲

Пример 24. *Вероятность отказа двигателя самолета во время полета равна p. Самолет сохраняет способность летать, если у него работают не меньше половины двигателей. На каком самолете безопаснее летать – двухмоторном или четырехмоторном? (исследовать в зависимости от p)*

▼ Для каждого из самолетов вычислим вероятность того, что он потеряет способность летать (обозначим эти вероятности как P_2 и P_4 соответственно). Для двухмоторного самолета такая ситуация происходит в случае отказа обоих двигателей, поэтому для него искомая вероятность равна
$$P_2 = p^2.$$

Четырехмоторный самолет теряет способность летать в результате одного из двух несовместных случаев – отказа ровно трех или отказа ровно четырех двигателей. Вероятность отказа ровно трех двигателей из четырех по формуле Бернулли вычисляется как $C_4^3 p^3 q = 4p^3 q$ (здесь $q = 1 - p$). Вероятность отказа всех четырех двигателей составляет p^4. Поэтому вероятность потери способности летать равна
$$P_4 = 4p^3 q + p^4.$$
Осталось сравнить найденные вероятности. Выясним, при каких значениях p от 0 до 1 выполняется неравенство $P_2 > P_4$, что равносильно следующему:
$$p^2 > 4p^3 q + p^4.$$
Пока будем считать, что $p > 0$ (случай $p = 0$ позже рассмотрим отдельно), поэтому на p^2 можно сократить и получить равносильное неравенство:
$$1 > 4pq + p^2.$$
Учитывая, что $q = 1 - p$, и раскрывая скобки, приходим к следующему квадратному неравенству:
$$3p^2 - 4p + 1 > 0.$$
Для p от 0 до 1 это неравенство выполняется при $p \in (0, 1/3)$, поэтому для этих значений p выполняется неравенство $P_2 > P_4$. В этом случае безопаснее летать на четырехмоторном самолете. Аналогичным образом можно показать, что при $p \in (1/3, 1)$ выполняется неравенство $P_2 < P_4$, и в этом случае лучше предпочесть двухмоторный самолет. Пограничный случай $p = 1/3$ соответствует одинаковой надежности двухмоторного и четырехмоторного самолета. Одинаковая вероятность сохранения способности летать для рассматриваемых типов самолетов будет также при $p = 0$ и $p = 1$ (в первом из этих случаев оба самолета будут абсолютно надежны, во втором – абсолютно ненадежны).

Стоит отметить, что более приближенным к реальной ситуации можно считать случай малых ненулевых значений p. При этом, как уже отмечалось ранее, более надежным будет четырехмоторный самолет.

Ответ: при $p \in (0, 1/3)$ безопаснее летать на четырехмоторном самолете; при $p \in (1/3, 1)$ – на двухмоторном; при $p = 0$, $p = 1/3$ и $p = 1$ безопасность самолетов одинаковая. ▲

224. Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других изделий может с вероятностью p оказаться дефектным. Какова вероятность того, что из 10 проверенных изделий только одно окажется дефектным?

225. Считая, что вероятности рождения мальчика и девочки равны 0,5, найти вероятность того, что среди 8 наудачу выбранных новорожденных: а) будет хотя бы один мальчик; б) число мальчиков и девочек одинаково; в) мальчиков будет больше чем девочек.

226. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть ровно две партии из четырех или ровно три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

227. (Продолжение) Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

228 ☺. Том Сойер ставит свою дохлую крысу на веревочке против приятельского сломанного будильника, что при подбрасывании 6 монет выпадет 3 орла. Том считает, что шансы получить или не получить загаданный результат равны. Каковы его шансы на выигрыш?

229. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность p попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна $1/4$. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$ровно одно попадание$\}$, $B = \{$ровно два попадания$\}$.

230. (Продолжение) В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий: $C = \{$хотя бы одно попадание$\}$, $D = \{$не менее трех попаданий$\}$.

231. Найти вероятность того, что при 6 бросаниях игральной кости единица появится как минимум дважды.

232. Путем длительных наблюдений установлено, что в данной местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Что вероятнее: из шести наудачу взятых дней сентября будет два дождливых или три дождливых дня?

233. Десять лампочек для елки включены в цепь последовательно (если перегорает одна лампочка, то перестают гореть и все остальные). Вероятность для любой лампочки перегореть в течение двух дней непрерывной работы равна 0,1. Определить вероятность выхода из строя гирлянды в течение двух дней непрерывной работы.

234. Уравновешенная монета бросается 6 раз. Какова вероятность, что выпадет больше гербов, чем решек?

235. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не меньше 10 автомашин.

236. У биатлониста имеется 6 патронов для поражения 5 мишеней (один патрон — запасной). Вероятность поразить мишень одним выстрелом равна 0,8. Какова вероятность того, что будут поражены хотя бы 4 мишени?

237. Что вероятнее: при бросании шести игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при бросании двенадцати костей получить хотя бы две единицы? (Этот вопрос был задан в 1693 г. Исааку Ньютону Сэмюелем Пипсом.)

238. Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий ни одного вопроса, даст не менее 3 правильных ответов (предполагается, что учащийся выбирает ответы наудачу).

239 ☺. Фасовщица Клава развешивает пряники в пакеты - по 1 кг в пакет. Пакеты Клава складывает в коробки - по 20 штук в коробку. Причем один из каждых 10 пакетов Клава недовешивает. Контролер ОТК Иван Кузьмич подозревает Клаву в нечестности. Из 5 произвольных коробок он берет по одному пакету на проверку. Какова вероятность того, что у Ивана Кузьмича в руках окажется 2 недовешенных пакета?

240. Некий господин зашел в казино и приобрел 36 фишек для игры в рулетку. В каждой игре он ставит одну фишку на номер 1 (всего на барабане 37 ячеек). По правилам, в случае, если шарик попадает на номер 1, выигрыш составляет 35 фишек (без учета поставленной). Найти вероятность того, что после 36 игр у него на руках будет по-прежнему 36 фишек.

241. Мишень имеет форму квадрата, в который вписан круг. По мишени наудачу производится 4 независимых выстрела. Предполагая, что при каждом выстреле происходит попадание в квадрат, выяснить, какова вероятность получения хотя бы трех попаданий в круг.

242. В круге радиуса 2 случайно и независимо друг от друга разбросано 4 точки. Чему равна вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не менее 1?

243. Отрезок AB разделен точкой C в отношении $2:1$. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две — правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

244. На отрезок AB длины a наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x, а три — на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

245*. Двое бросают симметричную монету n раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

1.10 Приближенные формулы Пуассона и Муавра–Лапласа

Приближенная формула Пуассона. В тех случаях, когда число n испытаний Бернулли велико, а вероятность успеха p в одном испытании мала, справедлива формула

$$P_n(k) \cong \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Локальная приближенная формула Муавра–Лапласа. Вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли (при $0 < p < 1$) событие наступит ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная приближенная формула Муавра–Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа.

Таблица значений функции Лапласа для $x \in [0;5]$ приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = \frac{1}{2}$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Замечание. Приближенными формулами Муавра–Лапласа на практике пользуются в случае, если $npq \geqslant 10$. Если же $npq < 10$, то эти формулы приводят к существенным погрешностям.

246. Вероятность попасть в самолёт одиночным винтовочным выстрелом весьма мала и составляет порядка $0,004$. Чтобы сбить самолет, необходимо попасть в него не менее двух раз. Какова (приближённо по Пуассону) вероятность сбить самолёт при одновременной независимой стрельбе из 250-ти винтовок? (Принять $e^{-1} = 0,3679$.)

247. Книга в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на заданной странице не менее трех опечаток.

248. Известно, что левши составляют в среднем 1%. Оценить вероятность того, что среди 80 человек окажется по меньшей мере двое левшей. (Принять $e^{-0,8} = 0,4493$.)

249. Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить ровно 6 семян сорняков?

250. Вероятность иметь на одной руке в покере десятку, валета, даму, короля и туза одной масти равна $1/649740$. Сколь велико должно быть n, чтобы вероятность того, что ни разу при n сдачах не окажется такого набора карт, была бы меньше $1/e$? (Решение не требует никаких вычислений.)

251. В учебном корпусе университета установлено 1000 ламп дневного света, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа для любой лампы в течение одного дня равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение дня откажут ровно три лампы. (Принять $e^{-2} = 0,1353$.)

252. Кинотеатр вмещает 730 зрителей. Найдите вероятность того, что:

а) ровно у трех зрителей день посещения кинотеатра совпадает с днем рождения;

б) не более 3 зрителей родились в этот день.

253. Известно, что при производстве спичек в среднем одна спичка из сотни оказывается бракованной. В коробок кладут 102 спички. Найти вероятность того, что по крайней мере 100 из них окажутся хорошими.

254. (продолжение) Какое наименьшее количество спичек нужно класть в коробок, чтобы с вероятностью, не меньшей $0,977$, в ней было не менее 100 хороших?

255 ☺. Известно, что на 100 булочек с изюмом попадается одна, в которой изюма нет вообще. Ученик 6б класса Костя Сидоров ставит одну жевачку Dirol против одной приятельской, что из купленной в школьном буфете булочки он выковыряет хотя бы 4 изюминки. У кого больше шансов на выигрыш? (*Указание:* найти вероятность того, что в купленной булочке будет по крайней мере 4 изюминки, считая, что число изюминок в булочке подчиняется закону Пуассона.)

256*. Найти среднее число изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы число булочек без изюма составляло менее 1%.

257. Игрок бросает по 3 игральные кости за один раз. В том случае, если он выбрасывает три «шестерки», он получает 200 рублей выигрыша; если же хотя бы на одной из костей не выпадет «шестерка», то он вынужден отдать 1 рубль. Найти вероятность того, что после 400 бросаний он не окажется в проигрыше.

258. Найти наиболее вероятное число k успехов для приближения Пуассона.

259. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах будет ровно 7 промахов.

260. Вероятность того, что покупателю требуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 100 покупателей обувь 41-го размера потребуют ровно 25 человек.

261. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно N раз.

262. Решить задачу 240 с помощью формулы Муавра–Лапласа. Сравнить ответы.

263. Вероятность рождения мальчика $p = 0,512$. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется:

а) ровно 51 мальчик;

б) больше мальчиков, чем девочек.

264. (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не превысит 10.

265. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85. Найдите вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдет:

а) не более 425 семян;

б) не менее 400 семян;

в) от 425 до 450 семян.

266. Найти вероятность того, что среди 10 000 случайных цифр цифра 7 появится не более 955 раз.

267. Известно, что в среднем 5% студентов носят очки. Какова вероятность, что из 84 студентов, сидящих в аудитории, окажется не менее 10%, носящих очки?

268. Некий господин зашел в казино и приобрел 37 фишек для игры в рулетку. В каждой игре он ставит одну фишку на черное (всего на барабане 37 ячеек, черных - 18). По правилам, в случае, если шарик попадает на черное, выигрыш игрока равен одной ставке. Найти вероятность того, что после 37 игр он окажется в выигрыше.

269. В стране насчитывается 10 млн избирателей, из которых 5,5 млн поддерживают партию А, и 4,5 млн поддерживают партию В. Назначаются жребием 2 000 выборщиков. Какова вероятность того, что большинство выборщиков окажется сторонниками партии В?

270. Найти m, при котором с вероятностью $0,9$ число выпадений герба при 400 бросаниях монеты будет лежать между 185 и m.

271. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9773 можно было ожидать, что событие появится не менее 72 раз?

272. На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью $1/3$. Сколько людей должно пройти мимо продавца, чтобы он с вероятностью $0,96$ смог продать не менее 100 газет.

273. В жюри, состоящем из нечетного числа $n = 2m + 1$ членов, каждый независимо от других принимает правильное решение с вероятностью $p = 0,7$. Каким должно быть минимальное число членов жюри, при котором решение, принятое большинством голосов, будет справедливым с вероятностью $0,99$.

274. Вероятность аварии в течение года составляет 0,006. Страховая компания заключила 10 000 страховых контрактов с автолюбителями, согласно которым в случае аварии в течение ближайшего года ему выплачивается 100 000 руб. Стоимость одного контракта равна 1 200 руб. Найти вероятности следующих событий:

а) к концу года страховая компания окажется в убытке;

б) доход страховой компании превысит 4 000 000 руб.

275. В страховой компании 10 000 клиентов, взнос каждого из которых составляет 1 000 руб. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 100 000 руб. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 1 000 000 руб., с вероятностью 0,999.

1.11 Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа $\varepsilon > 0$, определяется приближенно следующей формулой:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

276. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от p по абсолютной величине не более чем на 0,04.

277. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

278. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

279. При 10 000 бросаниях монеты герб появлялся 5400 раз. Есть ли основания считать, что монета несимметрична?

280. Для проверки влияния нового лекарства на кровяное давление у 100 пациентов было измерено давление до и после приема лекарства. При этом оказалось, что в 38 случаях после приема лекарства давление повысилось (соответственно в 62 случаях понизилось). Какова вероятность того, что чисто случайные колебания давления вызовут не меньшее отклонение от 50%?

281. После анализа статистических данных по датам рождения 613 миллиардеров, чьи имена фигурируют в списке Forbes, обнаружилось, что 12% из них родились в период между 23 августа и 22 сентября (являются Девами по знаку зодиака). Выяснить, сколь велика вероятность такого или большего отклонения от $1/12$ при равномерном распределении дней рождения по знакам зодиака.

282. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

283. Для определения доли курящих людей в некотором обществе производится выборка. Определить объем выборки, при котором с вероятностью, не меньшей $0,99$, погрешность составит менее $0,005$.

284. Во время каникул Петя работал в предвыборном штабе кандидата в депутаты, который проводил выборочный опрос избирателей. Примерное распределение голосов было известно: по 40% избирателей «за» и «против» кандидата, остальные воздержались. Сколько нужно опросить людей, чтобы с вероятностью, не меньшей

0,9, гарантировать отклонение процента голосов, отданных за кандидата при выборочном опросе, от истинного мнения избирателей не более, чем на 2% от всего электората?

285. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства $|m/n - 1/6| < 0,01$ была больше вероятности противоположного неравенства, где m — число появлений одного очка в n бросаниях игральной кости?

286. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, утверждать, что частота выпадения герба попадет в интервал (0,4; 0,6)?

287. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила ε.

288. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

289. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

290. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

2 Случайные величины

2.1 Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Число возможных значений случайной величины может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех значений счетно).

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая — вероятности p_i:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

,

где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть также задан аналитически (формулой)

$$P(X = x_i) = f(x_i)$$

или с помощью функции распределения.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X — числа «успехов» в n испытаниях по схеме Бернулли. Вероятность возможного значения $X = k$ вычисляется в таком случае по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

где $q = 1 - p$ — вероятность «неуспеха» в единичном испытании.

Если число n испытаний велико, а вероятность «успеха» p мала, то используют приближенную формулу

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np$ (среднее число «успехов» в n испытаниях), и говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона*.

Геометрическим (с параметром p) называют закон распределения случайной величины X – количества проводимых до первого достижения успеха включительно однотипных испытаний (с вероятностью успеха в каждом из них p). Ее возможные значения равны 1, 2, ..., а соответствующие вероятности определяются формулой

$$P(X = k) = pq^{k-1}.$$

Пример 25. *Имеется 4 патрона на поражение мишени. Стрелок выполняет выстрелы до первого попадания (либо до того, как израсходует все патроны, если мишень поразить так и не удалось). Вероятность попадания на одиночном выстреле равна $1/3$. Построить ряд распределения случайной величины X – количества израсходованных патронов.*

▼ Рассмотрим все возможные варианты развития событий в данном эксперименте. Заметим, что количество израсходованных патронов может быть равно 1, 2, 3 или 4.

1) Случай $X = 1$ возможен тогда, когда стрелок первым же выстрелом поразил мишень; вероятность данного исхода равна $P(X = 1) = \dfrac{1}{3}$.

2) Событие $X = 2$ происходит только тогда, когда стрелок поразил мишень со второй попытки, то есть сначала промахнулся, а вторым выстрелом попал. Так как вероятность промаха равна $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$, вероятность рассматриваемого исхода $P(X = 2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$.

3) Случай $X = 3$ возможен тогда, когда стрелок допустил сначала два промаха, а третьим выстрелом поразил мишень; так же, как и в предыдущем случае, вычисляем вероятность: $P(X = 3) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$.

4) Наконец, случайная величина X может принимать значение 4 в двух случаях: либо при поражении мишени с четвертой попытки (три промаха, после чего попадание), либо при четырех промахах подряд (и израсходовании всех отведенных патронов). Поэтому $P(X = 4) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{27}$.

Сводим полученные значения в таблицу:

X	1	2	3	4
P	1/3	2/9	4/27	8/27

Таким образом, ряд распределения случайной величины X построен – перечислены все возможные значения и найдены вероятности, с которыми она принимает эти значения. ▲

291. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0,5$. Для случайного числа X появлений герба построить ряд распределения.

292. В большой партии деталей содержится 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

293. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа X стандартных деталей среди отобранных.

294. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекается 3 шара. Случайная величина X - число белых шаров в выборке. Описать закон распределения.

295. На пути движения автомашины два светофора. Каждый из них с вероятностью 0,4 разрешает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд распределения для числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

296. С вероятностью попадания при одном выстреле $0,7$ охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина X - число промахов. Найдите: а) закон распределения X, б) вероятности событий: $X < 2$; $X \leqslant 3$; $1 < X \leqslant 3$.

297. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна $0,8$. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

298. Бросается игральная кость до первого появления шестерки. Случайная величина X равна количеству бросаний кости. Найдите закон распределения случайной величины X и вероятность события $X \leqslant 5$.

299. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Вероятность попадания для первого равна $\frac{1}{2}$, а для второго $\frac{2}{3}$. Пусть X — число бросков, сделанных первым баскетболистом, а Y — вторым. Построить ряды распределения для X и Y.

2.2 Случайные векторы

Упорядоченную пару (X, Y) случайных величин X и Y будем называть *случайным вектором* (или *двумерной случайной величиной*). Ниже будем рассматривать только те случаи, когда X и Y дискретны. Тогда распределение вектора (X,Y) удобно представлять таблицей, которая называется *таблицей совместного распределения* случайных величин X и Y. Пусть случайные величины X и Y заданы таблицами распределения

X	x_1	x_2	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$

Y	y_1	y_2	$\dots$
P	q_1	q_2	$\dots$

Обозначим через $p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j)$, $i = 1,2,\dots$, $j = 1,2,\dots$, вероятность одновременного появления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$. Тогда таблица совместного распределения случайных величин X и Y выглядит следующим образом:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Из определения чисел p_{ij} следует, что $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$. Кроме того, если просуммировать вероятности в i-й строке, то получим вероятность события $\{X = x_i\}$:

$$\sum_j p_{ij} = P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1,2,\dots$$

Если же просуммировать вероятности в j-м столбце, то получим вероятность события $\{Y = y_j\}$:

$$\sum_i p_{ij} = P(Y = y_j) = q_j, \quad j = 1,2,\dots$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любой пары множеств действительных чисел $B \subseteq \mathbb{R}$ и $C \subseteq \mathbb{R}$ события $\{X \in B\}$ и $\{Y \in C\}$ независимы:

$$P(X \in B,\ Y \in C) = P(X \in B) \cdot P(Y \in C).$$

Для дискретных случайных величин это определение эквивалентно выполнению равенства

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

для всех возможных наборов значений (x_i, y_j).

Функция $Z = f(X,Y)$ от двух случайных величин также является случайной величиной. Её возможные значения есть числа вида $f(x_i, y_j)$, где x_i, y_j

— возможные значения для X и Y соответственно. Вероятность $P(Z = z_k)$ определяется формулой

$$P(Z = z_k) = \sum_{\{i,j \mid f(x_i,y_j) = z_k\}} P(X = x_i,\ Y = y_j).$$

Пример 26. *Двое игроков бросают баскетбольный мяч в корзину. Первый игрок делает две попытки с вероятностью попадания 0,4 на каждой из них, второй — одну попытку с вероятностью попадания 0,5. Случайная величина X — количество попаданий первого игрока, Y — общее количество попаданий.*

а) найти закон совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y),

б) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми,

в) найти закон распределения случайной величины $Z = XY$.

▼ **а)** Так как величина X может принимать значения 0, 1, 2, а величина Y — значения 0, 1, 2, 3, то двумерная случайная величина (X,Y) потенциально может принимать 12 возможных значений вида (m,n), где $m \in \{0,1,2\}$, $n \in \{0,1,2,3\}$. Заметим при этом, что величина (X,Y) принимает значения $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,3)$ с нулевой вероятностью (к примеру, событие $\{(X,Y) = (2,0)\}$ соответствует ситуации, когда первый сделал 2 попадания, а общее количество попаданий равно 0, что невозможно):

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0			0	0
1	0			0
2	0	0		

Для остальных значений двумерной случайной величины найдем соответствующие вероятности. Событие $\{(X,Y) = (0,0)\}$ соответствует ситуации, когда баскетболисты не сделали ни одного попадания, поэтому $P((X,Y) = (0,0)) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,18$. В случае $\{(X,Y) = (0,1)\}$ первый оба раза промахнулся, а второй попал, поэтому $P((X,Y) = (0,1)) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,18$. Если $\{(X,Y) = (1,1)\}$, то первый попал один раз в двух попытках, а второй промахнулся (раз общее количество попаданий как раз и равно 1), поэтому $P((X,Y) = (1,1)) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24$. Аналогично вычисляются и остальные вероятности:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$0,18$	$0,18$	0	0
1	0	$0,24$	$0,24$	0
2	0	0	$0,08$	$0,08$

б) Для решения дальнейших двух подзадач нам потребуется найти законы распределения компонент X и Y. Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2; найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Исходя из таблицы совместного распределения (X, Y), получим:

$$\begin{aligned}P\big(X=0\big) &= P\big(X=0, Y=0\big)+P\big(X=0, Y=1\big)+\\&+P\big(X=0, Y=2\big)+P\big(X=0, Y=3\big)=\\&=0,18+0,18+0+0=0,36\end{aligned}$$

(фактически, в таблице совместного распределения суммируются вероятности в строке, соответствующей $X=0$). Аналогично, $P(X=1)=0,48$ и $P(X=2)=0,16$. Следует также заметить, что закон распределения величины X можно было найти и без закона совместного распределения — это просто биномиальное распределение с параметрами $n=2$ и $p=0,4$.

Точно таким же образом находим закон распределения случайной величины Y (здесь для нахождения соответствующих вероятностей по таблице совместного распределения будем суммировать вероятности в столбцах). Найденные законы распределения представим в виде таблицы:

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Y	0	1	2	3
P	0,18	0,42	0,32	0,08

Для того чтобы величины X и Y были независимыми, необходимо, чтобы для любых пар значений (m, n) выполнялось условие

$$P(X=m, Y=n)=P(X=m)\cdot P(Y=n).$$

В нашем случае это не выполняется: например, $P(X=0, Y=0)=0,18$, но $P(X=0)\cdot P(Y=0)=0,18\cdot 0,36\neq 0,18$, поэтому X и Y зависимы.

Можно было рассуждать и иначе: значения, принимаемые одной случайной величиной, дают некоторую информацию о значениях, принимаемых другой случайной величиной. Действительно, если $Y=0$, то можно сделать вывод, что и $X=0$, — отсюда очевидным образом следует зависимость X и Y.

в) Так как X принимает значения 0, 1, 2, а Y — значения 0, 1, 2, 3, то их произведение $Z=XY$ может принимать только значения 0, 1, 2, 3, 4, 6.

Z	0	1	2	3	4	6
P						

Соответствующие вероятности находим из закона распределения (X, Y):

$P(XY=1)=P((X, Y)=(1,1))=0,24,$

$P(XY=2)=P((X, Y)=(1,2))+P((X, Y)=(2,1))=0,24+0=0,24,$

и так далее. Результаты заносим в таблицу распределения:

Z	0	1	2	3	4	6
P	0,36	0,24	0,24	0	0,08	0,08

▲

300. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле — $0,5$, для второго — $0,4$. Дискретная случайная величина X — число попаданий в мишень. Найдите: а) закон распределения X, б) вероятность события $X\geqslant 1$.

301. (продолжение) Пусть случайная величина Y равна разности между числом попаданий в мишень первым стрелком и числом попаданий в мишень вторым стрелком. Найдите закон распределения Y.

302. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 дает 5 очков, в кольцо № 3 дает (- 1) очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы выбитых очков в результате двух попаданий.

303. Дважды брошена игральная кость. Случайная величина X равна разности между числом очков при первом бросании и числом очков при втором бросании. Найдите закон распределения X и вероятность события $2\leqslant X\leqslant 4$.

304. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по 2 выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго - 0,6. Найдите закон распределения случайной величины X, равной общему числу попаданий в мишень.

305. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений цифры.

306. Монету бросают три раза. Рассматриваются две случайные величины: X — число появлений герба, Y — число появлений цифры. Написать закон распределения случайной величины $Z=XY$.

307. Дана таблица совместного распределения случайных величин X и Y. Найти закон распределения случ. величины $Z=XY$.

$X \setminus Y$	-1	1	2
-1	0,2	0,2	0,1
1	0,1	0,3	0,1

308. По таблице совместного распределения выяснить, являются ли независимыми случайные величины X и Y.

$X \setminus Y$	-1	1
0	1/4	1/12
1	1/2	1/6

309. Пусть случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены, причем $P(X = 1) = p > 0$ и $P(X = 0) = 1 - p > 0$. Введем новую случайную величину Z: $Z = 0$ при $X + Y$ — четном и $Z = 1$ при $X + Y$ — нечетном. При каком значении p величины X и Z независимы?

2.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X вычисляют по формуле

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если с. в. X принимает счетное множество значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует только в том случае, когда ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

Свойство 1. Если $C = const$, то $M(C) = C$.

Свойство 2. $M(CX) = CM(X)$, где $C = const$.

Свойство 3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$ (аддитивность математического ожидания).

Свойство 4. Пусть X_1, X_2, $\ldots$, X_n — взаимно независимые случайные величины, тогда

$$M(X_1X_2\ldots X_n) = M(X_1)M(X_2)\ldots M(X_n).$$

Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами n и p, тогда $M(X) = np$.

Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, математическое ожидание $M(X) = \lambda$.

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по геометрическому закону с параметром p, равно $1/p$.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2.$$

Дисперсию также можно вычислять по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \big(M(X)\big)^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат характеристиками рассеяния значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Свойство 1. Если $C = const$, то $D(C) = 0$.

Свойство 2. $D(CX) = C^2D(X)$, где $C = const$.

Свойство 3. Пусть X_1, X_2, $\ldots$, X_n — независимые случайные величины, тогда $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$ (аддитивность дисперсии для независимых случайных величин).

Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами n и p, тогда $D(X) = npq$.

Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, дисперсия равна математическому ожиданию $D(X) = M(X) = \lambda$.

Дисперсия случайной величины X, распределенной по геометрическому закону с параметром p, равна $\dfrac{1-p}{p^2}$.

Пример 27. *Для случайной величины X из примера 25 вычислить математическое ожидание и дисперсию.*

▼ Для данной случайной величины закон распределения был найден:

X	1	2	3	4
P	1/3	2/9	4/27	8/27

Тогда

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{4}{27} + 4\cdot\frac{8}{27} = \frac{65}{27},$$
$$M\left(X^2\right) = 1^2\cdot\frac{1}{3} + 2^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{4}{27} + 4^2\cdot\frac{8}{27} = \frac{197}{27},$$
$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{197}{27} - \left(\frac{65}{27}\right)^2. \qquad \blacktriangle$$

310. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
P	0,3	0,2	0,5

б)

X	-2	5	6	10
P	0,1	0,5	0,3	0,1

311. Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известно:

а) $Z = 3X - 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 6$;

б) $Z = X + 2Y + 1$, $M(X) = 0$, $M(Y) = 2$.

312. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

313. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 0,1$, $M(X^2) = 0,9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

314. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – количества красных карандашей среди извлеченных.

315. Стрелок выполняет выстрелы по удаляющейся мишени до первого попадания. Он успевает сделать не более 4 выстрелов, при этом вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,8, а на каждом последующем убывает на 0,2. Построить таблицу распределения и найти математическое ожидание количества совершенных выстрелов.

316. Найти дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

б)

X	2	4	6	10
P	0,05	0,10	0,25	0,60

317. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем равновероятных. Доказать, что дисперсия величины X равна квадрату полуразности возможных значений.

318. Случайная величина X может принимать только два значения: 0 или 1. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения для DX.

319. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найдите математическое ожидание числа вынутых шаров и его дисперсию.

320. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 1,2$.

321. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна $0,63$.

322. Производится ряд выстрелов по мишени с вероятностью попадания 0,7 при каждом выстреле. Стрельба ведется до первого попадания в мишень, но не более 4 выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию числа X произведенных выстрелов.

323. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2 , причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

324. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X) = 2,6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 0,8$.

325. Привести пример случайной величины X, которая может принимать только значения -1, 0, 1, если известно, что ее математическое ожидание и дисперсия совпадают.

326. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известно:

а) $Z = 3X - 2Y$, $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$;

б) $Z = X + 2Y - 1$, $D(X) = 1$, $D(Y) = 2$.

327. Произведено n независимых бросаний монеты ($n \geqslant 1$). Случайная величина X — число выпадений герба при этих n бросаниях. Найти математическое ожидание и дисперсию для X.

328. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $p = 1/3$ и $n = 9$. Найти MX^2.

329. Двое игроков бросают по одной игральной кости, пока на кости второго игрока не выпадет значение, большее значения на кости первого игрока. Случайная величина X - общее количество бросаний кости первого игрока. Построить таблицу распределения величины X и найти ее математическое ожидание.

330. Пусть X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = 0,5$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, привести пример (линейной) функции f, для которой $Mf(X) = 1$ и $Df(X) = 4$.

331. Известен закон распределения случайной величины X:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^X$.

Пример 28. *Двое баскетболистов бросают мяч в корзину. Первый производит 8 бросаний с вероятностью попадания при одиночном бросании 0,75, второй бросает мяч до первого попадания с вероятностью попадания при каждом броске 0,25. Найти математическое ожидание и дисперсию*

а) общего количества попаданий,

б) общего количества бросков.

▼ **а)** Пусть случайная величина X – общее количество попаданий, которое складывается из количество попаданий, совершенных первым баскетболистом, и количества попаданий второго: $X = X_1 + X_2$.

Так как первый производит фиксированное количество (восемь) бросаний (однотипных испытаний) с постоянной вероятностью «успеха» (0,75), можем сделать вывод, что случайная величина X_1 имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 8$ и $p = 0,75$. Для биномиального распределения математическое ожидание равно

$$M(X) = np = 8 \cdot 0,75 = 6,$$

а дисперсия

$$D(X) = npq = 8 \cdot 0,75 \cdot (1 - 0,75) = 8 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,5.$$

Случайная величина X_2 принимает всегда значение 1 (так как второй баскетболист прекращает бросать мяч после первого попадания), поэтому такое же значение примет и математическое ожидание этой величины: $M(X_2) = 1$, а дисперсия (как дисперсия константы) равна 0: $D(X) = 0$. Математическое ожидание величины X, равной сумме случайных величин X_1 и X_2:

$$M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = 6 + 1 = 7.$$

Дисперсия суммы *независимых* случайных величин также равна сумме дисперсий:

$$D(X) = D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = 1,5 + 0 = 1,5.$$

б) Пусть случайная величина Y – общее количество бросков, которое по аналогии с предыдущим случаем складывается из количества бросков, совершенных первым, и бросков, совершенных вторым: $Y = Y_1 + Y_2$.

Первый производит ровно 8 бросаний, поэтому Y_1 всегда принимает значение 8. Тогда ее числовые характеристики (аналогично характеристикам величины X_2) принимают следующие значения: $M(Y_1) = 8$, $D(Y_1) = 0$.

Второй выполняет броски (испытания) до первого попадания («успеха»), поэтому по отношению к случайной величине Y_2 (количеству бросков, совершенных вторым баскетболистом) мы можем сделать вывод, что она имеет геометрический закон распределения с параметром $p = 0,25$. Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно принимают следующие значения:

$$M(Y_2) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,25} = 4, \; D(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,75}{0,25^2} = \frac{0,75}{0,0625} = 12.$$

В силу аддитивности математического ожидания, находим

$$M(Y) = M(Y_1 + Y_2) = M(Y_1) + M(Y_2) = 8 + 4 = 12,$$

А так как величины Y_1 и Y_2 независимы, то дисперсия равна

$$D(Y) = D(Y_1 + Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) = 0 + 12 = 12.$$

Замечание. При решении данной задачи мы использовали не только аддитивность математического ожидания, но и свойство аддитивности дисперсии для *независимых* случайных величин. Независимость рассматриваемых в каждом из предложенных заданий слагаемых следует из постановки эксперимента – каждый из баскетболистов производит серию бросаний (испытаний), на которую не оказывает влияния серия бросаний (испытаний) партнера. В дальнейшем, в случае рассмотрения зависимых случайных величин, дисперсия их суммы может оказаться не равна сумме дисперсий. ▲

332. Стрелок стреляет по мишени, при этом вероятность выбить 10 очков при одиночном выстреле составляет 0,1, 8 очков – 0,2, 6 очков – 0,3, 4 очка – 0,1, 2 очка – 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию общего числа очков при 10 выстрелах.

333. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, равной числу станков, которые не потребуют внимания рабочего.

334. Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а для второго — p_2. Найдите $M(X)$ и $D(X)$, если X — общее число попаданий в мишень.

335. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,9, для второго 0,8. Рассматриваются две случайные величины: X — число попаданий первого стрелка; Y — число попаданий второго стрелка и их разность $Z = X - Y$. Построить ряд распределения случайной величины Z и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

336. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков, выпавших на первой, а Y — на второй кости. Найти:
а) $M(X/Y)$; б) $M(X - Y)$; в) $D(X - Y)$.

337. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна $0,8$. Найти математическое ожидание и дисперсию для числа попаданий в мишень в 100 независимых выстрелах.

338. Вероятность успеха в каждом из n испытаний Бернулли равна p. Величина X — относительная частота успеха в серии из n испытаний. Найти числовые характеристики для X.

339. Брошены m игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

340. Случайная величина X распределена по геометрическому закону. Выбрать первый член p и знаменатель прогрессии q так, чтобы математическое ожидание величины X было равно 10, и вычислить при этом условии вероятность $P(X \leqslant 8)$.

341. Игра заключается в том, что игрок A бросает монету до появления герба. Если герб выпал при k-м бросании монеты, то игрок A получает k рублей от игрока B. Сколько рублей должен уплатить игрок A игроку B перед началом игры для того, чтобы математические ожидания проигрыша для каждого игрока равнялись нулю (чтобы игра была «безобидной»)?

342. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

343. Случайные величины X и Y независимы, причем X распределена по биномиальному закону с параметрами $p = 1/4$ и $n = 8$, а Y — по геометрическому закону с параметром $p = 1/3$. Найти $M(X^2 - Y)$.

344. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите числовые характеристики случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если: а) испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует; б) испробованный ключ участвует в последующих опробованиях.

345. Трое стрелков с вероятностями попадания 0,5, 0,7 и 0,75 при одиночном выстреле стреляют по мишени. Первый выполняет 10 выстрелов, второй стреляет до первого промаха, а третий сначала стреляет 4 раза, после чего стреляет до первого попадания. Найти математическое ожидание общего количества попаданий и общего количества выстрелов.

346. Для любого положительного числа $\varepsilon < 1$ привести пример случайной величины X такой, что $P(X < MX) \leqslant \varepsilon$.

347. Докажите, что для случайной величины X и произвольного действительного числа c выполняется неравенство:

$$D(X - c)^2 \geqslant D(X),$$

причем равенство достигается только в том случае, если $c = M(X)$.

348. Пусть X — некоторая (нетривиальная) случайная величина. Привести примеры случайных величин Y и Z, удовлетворяющих неравенствам $M(X+Y)^2 > DX$ и $M(X+Z)^2 < DX$.

349. Докажите, что если случайная величина X имеет наименьшее и наибольшее возможные значения, равные a и b соответственно, то выполняется неравенство:

$$D(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

350. Докажите, что для независимых случайных величин X и Y выполняется равенство:

$$D(XY) = D(X)D(Y) + (M(X))^2 D(Y) + (M(Y))^2 D(X).$$

351. Три стрелка выполняют 4, 5 и 6 выстрелов в мишень соответственно с вероятностями попадания 0,25, 0,4 и 0,5 соответственно. Найти математическое ожидание и дисперсию общего количества попаданий. Построить таблицу распределения количества попаданий первого стрелка.

352*. Стрелок, имея n патронов в запасе, начинает стрельбу по цели, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна p. Стрельба прекращается после первого попадания в цель или после израсходования всех патронов. Найдите числовые характеристики числа израсходованных патронов.

353*. Из урны, содержащей m белых и $n-m$ черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается выборка объемом k. Пусть X — число белых шаров в выборке. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

2.4 Ковариация, коэффициент корреляции

Пусть X и Y — некоторые случайные величины. Выведем формулу для дисперсии суммы. Воспользуемся аддитивностью математического ожидания:

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= M(X+Y-M(X+Y))^2 = M((X-MX)+(Y-MY))^2 = \\ &= M(X-MX)^2 + 2M(X-MX)M(Y-MY) + M(Y-MY)^2 = \\ &= DX + DY + 2M(X-MX)M(Y-MY). \end{aligned}$$

Выражение $M(X-MX)M(Y-MY)$ называется *ковариацией* случайных величин X и Y и обозначается:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(X-MX)M(Y-MY) = M(XY) - MXMY.$$

С новым обозначением формула для дисперсии суммы приобретает вид

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Ковариация имеет следующие свойства:

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
2. $\operatorname{cov}(X,X) = DX$.
3. $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, если X и Y независимы.
4. $\operatorname{cov}(X+a,Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$, где $a = \mathrm{const}$.
5. $\operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y)$, где $a = \mathrm{const}$.
6. $\operatorname{cov}(X+Y,Z) = \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)$.

Наиболее часто используемой характеристикой зависимости случайных величин X и Y является *коэффициент корреляции* $\rho(X,Y)$, определяемый формулой

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{M(XY) - MXMY}{\sqrt{DXDY}}.$$

Этот коэффициент обладает следующими свойствами:

1. $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
2. $\rho(X,Y) = 0$, если X и Y независимы.
3. Всегда $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$.
4. $|\rho(X,Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы $Y = aX + b$ и $a \neq 0$.
5. $\rho(aX+b,Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$, для $a \neq 0$.

Пример 29. *Для примера 26 вычислить ковариацию и коэффициент корреляции величин X и Y.*

▼ Для нахождения ковариации величин X и Y найдем математическое ожидание их произведения. Для этого воспользуемся найденной ранее таблицей распределения величины $Z = XY$.

XY	0	1	2	3	4	6
P	0,36	0,24	0,24	0	0,08	0,08

Находим математическое ожидание:
$M(XY) = 0\cdot 0,36 + 1\cdot 0,24 + 2\cdot 0,24 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0,08 + 6\cdot 0,08 = 1,52$.

Аналогично математические ожидания X и Y находим по построенным ранее таблицам распределения: $MX = 0,8$ и $MY = 1,3$.

Теперь находим ковариацию X и Y: $\operatorname{cov}(X,Y) = M(XY) - MX\cdot MY = 1,52 - 0,8\cdot 1,3 = 0,48$.

Для нахождения коэффициента корреляции потребуются средние квадратические отклонения X и Y, которые также легко найти по таблицам распределения:

$$M(X^2) = 0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,48 + 2^2 \cdot 0,16 = 1,12,$$
$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 1,12 - (0,8)^2 = 0,48,$$
$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{0,48}.$$

Аналогично $\sigma_Y = \sqrt{0,73}$.

Тогда коэффициент корреляции равен:

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0,48}{\sqrt{0,48}\sqrt{0,73}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} \approx 0,81.$$

Так как коэффициент корреляции положителен и близок к 1, то можно говорить, что между величинами X и Y существует сильная положительная корреляционная зависимость.

Примечание 1. Так как ковариация отлична от 0, то можно сразу же сделать вывод о том, что случайные величины X и Y зависимы.

Примечание 2. Ковариацию X и Y можно было вычислить иначе. Пусть Z — количество попаданий второго стрелка, тогда $Y = X + Z$, а величины X и Z независимы. При этом из свойств ковариации и независимости X и Z получим:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, X+Z) = \operatorname{cov}(X,X) + \operatorname{cov}(X,Z) = DX + 0 = 0,48. \ \blacktriangle$$

Пример 30. *Известно, что средние квадратические отклонения независимых случайных величин X и Y равны $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 3$. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин $2X + Y - 3$ и $X - 3Y$*

▼ Дисперсии X и Y равны $DX = \sigma_X^2 = 4$, $DY = \sigma_Y^2 = 9$. Используя свойства ковариации и независимость X и Y, получим: $\operatorname{cov}(2X+Y-3, X-3Y) = \operatorname{cov}(2X+Y, X-3Y) = 2\operatorname{cov}(X, X-3Y) + \operatorname{cov}(Y, X-3Y) = 2(\operatorname{cov}(X,X) - 3\operatorname{cov}(X,Y)) + (\operatorname{cov}(Y,X) - 3\operatorname{cov}(Y,Y)) = 2(DX - 3 \cdot 0) + (0 - 3DY) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = -19.$

Пользуясь свойствами дисперсии и независимостью X и Y устанавливаем, что

$$\sigma(2X+Y-3) = \sqrt{D(2X+Y-3)} = \sqrt{D(2X+Y)} =$$
$$= \sqrt{4DX + DY} = \sqrt{4 \cdot 4 + 9} = 5,$$
$$\sigma(X-3Y) = \sqrt{D(X-3Y)} = \sqrt{DX + 9DY} = \sqrt{4 + 9 \cdot 9} = \sqrt{85}.$$

Тогда:

$$\rho(2X+Y-3, X-3Y) = \frac{\operatorname{cov}(2X+Y-3, X-3Y)}{\sigma(2X+Y-3)\sigma(X-3Y)} = -\frac{19}{5\sqrt{85}}. \ \blacktriangle$$

354. Система случайных величин (X,Y) задана таблицей распределения. Найдите коэффициент корреляции X и Y.

$X \setminus Y$	-2	0	1
-1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,1

355. Система случайных величин (X,Y) задана таблицей распределения. Найдите коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$:

а)

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0,1	0,2	0,1
1	0,2	0,3	0,1

б)

$X \setminus Y$	0	1	2
1	0,3	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1

356. Задан закон распределения случайной величины X:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найдите коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$, если $Y = |X|$.

357. Задан закон распределения случайной величины X:

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Найдите коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$, если:

а) $Y = 2 + 3X$; б) $Y = 2 - 3X$;
в) $Y = X^2$; г) $Y = |X|$;
д) $Y = 2X^2 + 1$; е) $Y = 3|X|$;
ж) $Y = |X| + 2$.

358. Задан закон распределения случайной величины X:

x_i	-1	0	1
p_i	0,4	0,4	0,2

Найдите коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$, если:

а) $Y = X^2$; б) $Y = X^2 + 1$;
в) $Y = -2X^2$; г) $Y = |X|$.

359. Случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X) = -1$, $M(Y) = 3$. Ковариация этих величин равна

$\text{cov}(X,Y) = 6$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 3XY + 4$.

360. Случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X) = 1$, $M(Y) = 2$ и дисперсии $D(X) = 9$, $D(Y) = 4$. Коэффициент корреляции этих величин равен $\rho(X,Y) = 0,5$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 2XY + 3$.

361. Имеется случайный вектор (X,Y). Известно, что $M(X) = 0$, $M(Y) = 2$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 1$ и $\rho(X,Y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$.

362. Известно, что $MX = 1$, $MY = 0$, $DX = 1$, $DY = 4$ и $\rho(X,Y) = 0,5$. Найти $D(2X - Y)$.

363. Независимые случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X) = 2$, $M(Y) = -3$ и дисперсии $D(X) = 1$, $D(Y) = 2$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 3X^2Y + 2Y^2 + 1$.

364. Пусть X и Y — одинаково распределенные независимые случайные величины. Найти коэффициент корреляции $\rho(X, X - Y)$.

365. Верно ли, что для любых случайных величин X, Y и Z выполняется $\rho(X + Y, Z) = \rho(X,Z) + \rho(Y,Z)$? Если да, то доказать, если нет — привести контрпример.

366. Средние квадратические отклонения независимых случайных величин X и Y равны 2 и 3 соответственно. Вычислить $cov(3X + 2Y, X - Y)$.

367. Петя вычислил ковариацию роста X спортсменов из институтской баскетбольной команды, измеренного в см, и скорости бега Y (тех же спортсменов), измеренной в м/с. Маша для той же совокупности баскетболистов вычислила ковариацию роста X, измеренного в м, и скорости бега Y, измеренной в дм/с. Определить, в каком отношении находятся эти ковариации.

2.5 Условное распределение. Формула полного математического ожидания.

Под *условным распределением* будем понимать распределение некоторой случайной величины X при условии наступления события A. Для дискретной случайной величины X закон распределения при условии наступления

события A может быть описан с помощью следующей таблицы:

$X\|A$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	$P(X = x_1\|A)$	$P(X = x_2\|A)$	$\ldots$	$P(X = x_n\|A)$

,

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все возможные значения величины X. В частности, в качестве A можно рассматривать событие, заключающееся в том, что другая случайная величина Y приняла некоторое числовое значение y_i.

Пример 31. *Случайная величина X — количество «орлов», выпавших при бросании трех монет. Найти закон распределения X при условии, что хотя бы один «орел» выпал.*

▼ Пусть A={выпал хотя бы один «орел»}. Несложно показать, что $P(A) = \frac{7}{8}$. При заданном условии количество выпавших «орлов» может быть 1, 2 или 3. Найдем вероятности событий $\{X = 1|A)\}$, $\{X = 2|A)\}$ и $\{X = 3|A)\}$. По формуле условной вероятности $P(X = 1|A) = \dfrac{P(\{X = 1\}A)}{P(A)}$. Заметим, что событие $\{X = 1\}A$ заключается в том, что выпал один «орел» и при этом выпал хотя бы один «орел», то есть, фактически, совпадает просто с выпадением одного «орла» при бросании трех монет, а вероятность этого события равна $\frac{3}{8}$. Таким образом, $P(X = 1|A) = \dfrac{3/8}{7/8} = \dfrac{3}{7}$. Аналогично находим $P(X = 2|A) = \dfrac{P(\{X = 2\}A)}{P(A)} = \dfrac{3/8}{7/8} = \dfrac{3}{7}$ и $P(X = 3|A) = \dfrac{P(\{X = 3\}A)}{P(A)} = \dfrac{1/8}{7/8} = \dfrac{1}{7}$. Найденный закон условного распределения можно оформить в виде таблицы:

$X\|A$	1	2	3
P	3/7	3/7	1/7

. ▲

368. Брошены две игральные кости. Найти закон распределения количества очков на второй игральной кости при условии, что на ней выпало больше очков, чем на первой.

369. Из колоды в 52 карты случайным образом извлекаются четыре. Найти закон распределения количества тузов среди извлеченных карт:

а) при условии, что все вытащенные карты имеют достоинство не ниже короля;

б) при условии, что туз пик не был извлечен.

Пусть события (гипотезы) H_1, H_2, …, H_n таковы, что

а) $H_i \cdot H_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$ (события попарно несовместны), б) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$ (хотя бы одно событие должно произойти); (иначе говоря, из событий H_1, H_2, ..., H_n может произойти одно и только одно).

Тогда математическое ожидание случайной величины X может быть вычислено следующим образом:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)M(X|H_i).$$

Это соотношение носит название *формулы полного математического ожидания* и является аналогом рассмотренной ранее формулы полной вероятности.

В частности, в качестве набора гипотез H_1, H_2, ..., H_n можно использовать набор событий $\{Y = y_1\}$, $\{Y = y_2\}$, ..., $\{Y = y_n\}$, где Y — некоторая случайная величина, принимающая n различных значений.

Рассмотрим частный случай формулы полного математического ожидания. Пусть $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_Y$, где Y — случайная величина, принимающая натуральные значения (т.е. рассматривается сумма случайных величин, состоящая из случайного количества (Y) слагаемых). Тогда имеют место два интересных следствия формулы полного математического ожидания:

Следствие 1. $MX = \sum\limits_{i=1}^{n} MX_i P(Y \geqslant i)$.

Следствие 2. Если все слагаемые (случайные величины) X_i имеют одинаковые математические ожидания $MX_i = a$ (например, в том случае, когда все слагаемые имеют одинаковый закон распределения), то $MX = a \cdot MY$

Пример 32. *У рассеянного стрелка есть две обоймы по 5 патронов в каждой. Вероятность попадания при одиночном выстреле составляет 0,5. При этом вероятность потерять обойму равна 0,4 (для каждой из обойм). Стрелок подходит к мишени и стреляет по ней, используя все имеющиеся к данному моменту (непотерянные) патроны. Найти математическое ожидание общего количества попаданий.*

▼ **1 способ.** Пусть X — общее количество попаданий. Рассмотрим набор гипотез: H_1={стрелок не потерял ни одной обоймы}, H_2={стрелок потерял одну обойму}, H_3={стрелок потерял обе обоймы}. Нетрудно найти вероятности этих гипотез: $P(H_1) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$; $P(H_2) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,48$; $P(H_3) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$. Пусть произошло событие H_1, тогда у стрелка есть две обоймы по 5 патронов и, таким образом, он делает 10 выстрелов с вероятностью попадания на каждом из них $0,5$. Поэтому в этом случае случайная величина $\{X|H_1\}$ имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 10$ и $p = 0,5$, а ее математическое ожидание равно $M(X|H_1) = np = 10 \cdot 0,5 = 5$. В случае наступления события H_2 у стрелка есть одна обойма с 5 патронами, поэтому величина $\{X|H_2\}$ имеет биномиальный закон распределения уже с параметрами $n = 5$ и $p = 0,5$, а ее математическое ожидание $M(X|H_2) = np = 5 \cdot 0,5 = 2,5$. Наконец, если произошло событие H_3, то патронов у стрелка нет, а математическое ожидание количества попаданий $M(X|H_3) = 0$. Используя формулу полного математического ожидания, получим:

$$\begin{aligned} MX &= P(H_1)M(X|H_1) + P(H_2)M(X|H_2) + P(H_3)M(X|H_3) = \\ &= 0,36 \cdot 5 + 0,48 \cdot 0,25 + 0,16 \cdot 0 = 3. \end{aligned}$$

2 способ. Пусть Y — количество обойм, которые остались у стрелка. Тогда величину X можно представить в виде суммы Y случайных слагаемых, равных количеству попаданий при выстрелах с использованием соответствующей непотерянной обоймы. Заметим, что каждое из этих слагаемых имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 5$ и $p = 0,5$ (в каждой обойме 5 патронов), поэтому математическое ожидание каждого из слагаемых равно $a = np = 5 \cdot 0,5 = 2,5$. В то же время случайная величина Y также распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 2$ и $p = 0,6$, поэтому $MY = np = 2 \cdot 0,6 = 1,2$. Тогда, пользуясь следствием 2, получим: $MX = a \cdot MY = 1,2 \cdot 2,5 = 3$. ▲

370. Имеется 10 карточных колод: 4 колоды по 52 карты (карты 13 достоинств, 4 мастей) и 6 колод по 36 карт (карты 9 достоинств, 4 мастей). Случайным образом извлекаются две колоды, после чего из каждой извлекаются по 2 карты. Найти математическое ожидание количества тузов среди извлеченных карт.

371. В первой урне находятся 1 белый и 4 черных шара, во второй — 2 белых и 3 черных шара. Из первой урны во вторую случайным образом перекладывают:

а) один шар,

б) два шара,

после чего из второй урны извлекают три шара. Найти математическое ожидание количества белых шаров среди извлеченных.

372. Игральная кость бросается один раз, после чего дополнительно бросается столько раз, сколько очков выпало при первом бросании. Найти математическое ожидание общего количества выпавших очков.

373. При игре на игральном автомате «Меткий стрелок» играющий стреляет до тех пор, пока не промахнется. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9. Найти математическое ожидание числа выстрелов, произведенных за день, если в зал игральных автоматов ежедневно заходит 300 человек, и каждый из них с вероятностью $\frac{1}{3}$ может сыграть на данном автомате.

374. На математической олимпиаде участнику выдаются 4 задачи. Каждую из задач участник может решить с вероятностью 0,5. Если по ходу олимпиады оказывается, что он решил не менее трех задач, то ему предлагаются еще 3 дополнительные задачи. Найти математическое ожидание количества решенных задач.

375. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных на прямой с интервалом a между соседними станками. Считая, что рабочий обслуживает станки, подходя к ним в порядке очередности, найти математическое ожидание длины перехода между двумя станками.

376. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 3×4. В одной из центральных клеток сидит паук, который каждую секунду равновозможно переползает в любую из соседних (по стороне) клеток. Найти математическое ожидание времени, за которое паук покинет прямоугольник.

377. В одной из вершин куба сидит паук, который каждую секунду равновозможно переползает в любую из соседних по ребру вершин. Найти математическое ожидание времени, за которое паук доберется до противоположной вершины куба.

2.6 Функция и плотность распределения вероятности случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x) = F_X(x)$, определяющую для каждого значения переменной x $(-\infty < x < +\infty)$ вероятность того, что X примет значение, меньшее x:

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.
2. $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$.
3. Не убывает: $F_X(x_2) \geqslant F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
4. $F_X(x)$ непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0)$.

Вероятность попадания случайной величины X на интервал $[x_1, x_2)$ определяется формулой

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1).$$

Зная закон распределения дискретной случайной величины X, можно вычислить ее функцию распределения:

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если существует такая неотрицательная и интегрируемая функция $f(x) = f_X(x)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.
3. $F'_X(x) = f_X(x)$.

Функция распределения непрерывной случайной величины X является непрерывной, монотонно возрастающей функцией, причем для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется $P(X = x_0) = 0$ (т. е. вероятность «попасть в точку» для непрерывной случайной величины равна нулю). Вероятность попадания такой случайной величины в интервал может быть вычислена по формуле

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\,dt.$$

Функция распределения случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, равна

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Плотность распределения равномерно распределенной на $[a, b]$ случайной величины равна

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Пример 33. *Случайная величина X задана функцией распределения*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \operatorname{tg}(x/4) & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти
а) вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-2, 4\pi/3)$;
б) плотность распределения X.

▼ а) Вероятность того, что случайная величина X попадет на заданный интервал $(-2, 4\pi/3)$ вычисляется по формуле

$$P(-2 < X < 4\pi/3) = F_X(4\pi/3) - F_X(-2) = \operatorname{tg}(\pi/3) - 0 = \sqrt{3}.$$

б) Плотность распределения найдем как производную функции распределения:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\cos^2(x/4)} & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$ ▲

Пример 34. *Случайная величина X задана плотностью распределения $f_X(x) = Cx^2$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти значение параметра C.*

▼ Для нахождения параметра C воспользуемся свойством плотности распределения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Учитывая, что вне интервала (0, 1) плотность распределения $f_X(x) = 0$, получим:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int\limits_0^1 Cx^2\,dx = \frac{C}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{C}{3},$$

откуда $C = 3$, поэтому на интервале (0, 1) плотность $f_X(x) = 3x^2$ (вне этого интервала плотность по условию равна 0). ▲

378. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ x/2 - 1 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } 4 < x. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньшее 0,2;

б) меньшее трех;

в) не меньшее пяти.

379. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{\pi}$. Найти возможное значение x, удовлетворяющее условию: с вероятностью 1/4 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x.

380. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а)

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

,

б)

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

.

Найти функцию распределения $F_X(x)$ и начертить ее график.

381. С помощью характеристических свойств выясните, является ли $F(x)$ функцией распределения случайной величины. Постройте схематически график данной функции:

а) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,3 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

б) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,3 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

в) $$F(x) = \frac{\pi + 2\operatorname{arctg} x}{8}.$$

г) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{при } x \in (-\frac{\pi}{2}; 0], \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

д) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{x}{10} & \text{при } 0 < x \leqslant 5, \\ 0,4 & \text{при } 5 < x \leqslant 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

е) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,25x & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

382. Пользуясь характеристическими свойствами для данной функции $F(x)$ распределения вероятностей, найти параметры A и B:

а) $F(x) = \dfrac{Bx}{1+|x|} + A$; б) $F(x) = A + B\,\mathrm{arctg}\,x$; в) $F(x) = \dfrac{A}{1+e^x} + B$.

383. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f_X(x)$.

384. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f_X(x) = (3/2)\sin 3x$ в интервале $(0, \pi/3)$; вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6, \pi/4)$.

385. Непрерывная случайная величина X в интервале $(0, \infty)$ задана плотностью распределения $f_X(x) = ae^{-ax}$ $(a > 0)$; вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1, 2)$.

386. Для плотности $f_X(x)$ распределения вероятнотей случайной величины X найти функцию распределения $F_X(x)$:

а) $f_X(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

б) $f_X(x) = \begin{cases} x - 0,5 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

в) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{при } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$

г) $f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

д) $f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

387. По заданной плотности $f_X(x)$ распределения вероятностей случайной величины X найти постоянный параметр C:

а) $f_X(x) = \frac{C}{1+x^2}$.

б) $f_X(x) = \begin{cases} C\sin 2x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

в) $f_X(x) = \begin{cases} C(1-x^2) & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

г) $f_X(x) = \begin{cases} Cxe^{-x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

д) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4} & \text{при } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$

е) $f_X(x) = \begin{cases} C\cos x & \text{при } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$

2.7 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx,$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно.

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Если $g(X)$ — функция случайного аргумента X, то

$$M(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx.$$

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной *равномерно* на отрезке $[a, b]$, равно

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f_X(x)\,dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx - (M(X))^2.$$

Все свойства дисперсии дискретных случайных величин, перечисленные ранее, остаются справедливыми и для непрерывных случайных величин.

Дисперсия случайной величины X, распределенной *равномерно* на отрезке $[a, b]$, равна

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 35. *Случайная величина X задана плотностью распределения $f_X(x) = 3x^2$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти*

а) математическое ожидание случайной величины X;

б) дисперсию $D(X)$.

▼

Находим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2\,dx = 3\int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{4}.$$

Для вычисления дисперсии нам понадобится найти $M\left(X^2\right)$.

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,dx = 3\int_0^1 x^4\,dx = \frac{3}{5}.$$

Подставляем найденные значения в формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}. \qquad \blacktriangle$$

388. Случайная величина X задана плотностью распределения $f_X(x) = 2x$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

389. Случайная величина X задана плотностью $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа). Найти математическое ожидание величины X.

390. Случайная величина X задана плотностью распределения $f_X(x) = c(x^2 + 2x)$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $p(x) = 0$. Найти:

а) параметр c;

б) математическое ожидание величины X.

391. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x/4 & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } 4 < x. \end{cases}$$

392. Случайная величина X, возможные значения которой неотрицательны, задана функцией распределения $F_X(x) = 1 - e^{-ax}$ $(a > 0)$. Найти математическое ожидание величины X.

393. Случайная величина X в интервале $(0; \pi)$ задана плотностью распределения $f_X(x) = (1/2)\sin x$; вне этого интервала плотность $f_X(x) = 0$. Найти дисперсию X.

394. Случайная величина X в интервале $(0; 5)$ задана плотностью распределения $f_X(x) = (2/25)x$; вне этого интервала $f_X(x) = 0$. Найти дисперсию X.

395. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ x/4 + 0,5 & \text{при } -2 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

396. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для непрерывной случайной величины, заданной плотностью $f_X(x)$:

а) $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

б) $f_X(x) = \begin{cases} x/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

в) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

г) $f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

д) $f_X(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

е) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

397. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Найти вероятность $P(|X-MX| \geqslant \sigma(X))$.

398. Плотность $f(x)$ вероятности случайной величины X равна $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа). Вычислите вероятность попадания значений данной случайной величины в промежуток $[MX-3\sigma(X), MX+3\sigma(X)]$.

399. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2,1]$. Найдите $M(X^2+X+1)$.

400. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1,3]$. Найдите: а) $M(2X+3)$; б) $M(X^2+1)$.

401. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{3/2}}, & x \geqslant 2, \\ 0, & x < 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра c, функцию распределения случайной величины X, ее математическое ожидание, дисперсию. Найти вероятность события $|X-MX| \leqslant 1$.

402. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x+1), & -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найти значение параметра c, функцию распределения случайной величины X, ее математическое ожидание, дисперсию. Найти вероятность события $|X-MX| \leqslant 1$.

Пример 36. *Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол φ, равномерно распределенный на отрезке $[0,\pi]$. Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.*

▼ 1 способ.

Найдем функцию распределения случайной величины X – расстояния между концами ножек. По определению, $F_X(x) = P(X < x)$. Легко видеть, что при отрицательных значениях x неравенство $X < x$ не выполняется (расстояние между концами ножек не может быть меньше отрицательного числа). Отсюда делаем вывод, что вероятность того, что данное неравенство выполнится для отрицательных значений x равна 0, поэтому $F_X(x) = 0$ при $x < 0$. Аналогично рассуждая, можно также сделать вывод, что $F_X(x) = 1$ при $x > 2$ (расстояние между концами ножек циркуля гарантированно будет меньше любого числа, большего двух).

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant x \leqslant 2$. Выясним, в каком диапазоне должен принимать значение угол φ, чтобы расстояние между ножками было меньше x. Несложным образом (например, из теоремы косинусов с последующими преобразованиями) находится, что расстояние между концами ножек циркуля равно $2\sin(\varphi/2)$. Поэтому для рассматриваемых значений x:

$$P(X < x) = P(2\sin(\varphi/2) < x) = P(\sin(\varphi/2) < x/2).$$

С учетом монотонности синуса на отрезке $[0;\pi/2]$ (а для выбранного от 0 до π угла φ значение $\varphi/2$ как раз будет лежать на отрезке $[0;\pi/2]$) и условия $0 \leqslant x \leqslant 2$ можем переписать данное соотношение в следующем виде:

$$P\big(\sin(\varphi/2) < x/2\big) = P(0 \leqslant \varphi/2 < \arcsin(x/2)) = P(0 \leqslant \varphi < 2\arcsin(x/2)).$$

Случайная величина φ равномерно распределена на $[0;\pi]$, поэтому

$$F_\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x}{\pi} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Поэтому для рассматриваемых значений x вероятность

$$P(X < x) = P(0 \leqslant \varphi < 2\arcsin(x/2)) = \\ = F_\varphi(2\arcsin(x/2)) - F_\varphi(0) = \frac{2}{\pi}\arcsin(x/2).$$

Таким образом, получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin(x/2) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

По известной функции распределения несложно находится и плотность распределения случайной величины X:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{4-x^2}} & \text{при } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{при } x \notin (0,2). \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины с известной плотностью распределения вычисляется по известной формуле:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int\limits_0^2 \frac{2x}{\pi\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{2\sqrt{4-x^2}}{\pi}\bigg|_0^2 = \frac{4}{\pi}.$$

2 способ.

Воспользуемся формулой вычисления математического ожидания функции случайного аргумента. Ранее было установлено, что $X = 2\sin(\varphi/2)$. Так как величина φ равномерно распределена на $[0,\pi]$, ее плотность распределения

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

Поэтому

$$M(X) = M(2\sin(\varphi/2)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\sin(x/2) f_\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi 2\sin(x/2)\cdot\frac{1}{\pi}\,dx = -\frac{4}{\pi}cos(x/2)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}. \quad ▲$$

403. На отрезке а) $[0,\pi]$; б) $[0,3\pi/2]$ оси OX случайным образом выбрана точка A. Перпендикулярно OX через точку A проводится прямая, пересекающая график функции $y = \sin x$ в точке B. Найти математическое ожидание длины отрезка AB.

404. На диаметре AB единичного круга случайным образом выбрана точка C. Через точку C перпендикулярно к AB проведена хорда. Найти математическое ожидание длины данной хорды.

405. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа. Случайная величина X – время ожидания (от момента прибытия на место встречи первого пришедшего до прихода второго). Найти математическое ожидание величины X.

2.8 Нормальное распределение

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее отрезку $[x_1, x_2]$ (или соответствующему интервалу),

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа. Функция распределения случайной величины X равна $\dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения не превосходит ε ($\varepsilon > 0$),

$$P(|X-a| \leqslant \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma).$$

Пример 37. *Случайные ошибки при измерении длины стержня имеют нормальный закон распределения с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1 см. Найти вероятность того, что при измерении стержня длиной 1 м результат измерения окажется в диапазоне от 98 см до 102 см.*

▼ Пусть X – случайная ошибка измерения, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием 0 и средним квадратическим (стандартным) отклонением 1. Из условия следует, что необходимо найти вероятность того, что абсолютное значение величины X не превзойдет 2. Эта вероятность равна

$$P(|X| \leqslant 2) = P(|X-0| \leqslant 2) = 2\Phi(2/1) = 2\Phi(2) \approx 2\cdot 0,4773 \approx 0,95.▲$$

406. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f_X(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

407. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны, соответственно, 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (12, 14).

408. Случайная величина X нормально распределена с параметрами $a = 1$ и $\sigma = 2$. Выразить ее функцию распределения через функцию $\Phi(x)$.

409. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со стандартным отклонением 0,1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,15 мм.

410. Шарик, изготовленный автоматом, считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера не превышает 0,1 мм. Точность изготовления характеризуется стандартным отклонением σ. Считая, что для данной технологии $\sigma = 0,05$ мм и X нормально распределена, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.

411. (продолжение). В условиях предыдущей задачи выяснить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98?

412. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Самолету задана высота, соответствующая середине коридора. Какова вероятность, что самолет будет лететь: а) ниже, б) внутри и в) выше коридора?

413. Измеряемая случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 10 и стандартным отклонением 5. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадет измеренное значение.

414. Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84 г/см^3. В результате статистических испытаний обнаружено, что практически 99,9% всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более, чем на 0,01 г/см^3.

415. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

ОТВЕТЫ

1. а) нет; б) да; в) да. **2.** а) да; б) да; в) нет. **3.** а) да; б) нет; в) да. **4.** Да, при условии, что попадание и промах — события равновозможные. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Да. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** $\frac{a}{a+b}$. **11.** $\frac{a-1}{a+b-1}$. **12.** $\frac{a}{a+b}$. **13.** $\frac{a-1}{a+b-1}$. **14.** $\frac{a}{a+b}$. **15.** $\frac{1}{4}$. **16.** $\frac{12}{27}$. **17.** $\frac{5}{8}$. **18.** $0,3$. **19.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{32}{225}$. **20.** а) $\frac{1}{125}$; б) $\frac{12}{125}$; в) $\frac{48}{125}$; г) $\frac{64}{125}$. **21.** $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{5}{12}$. **22.** $P(C) = \frac{35}{36}$; $P(D) = \frac{5}{6}$. **23.** $P(E) = \frac{11}{36}$; $P(F) = \frac{1}{9}$. **24.** $P(G) = \frac{5}{12}$; $P(H) = \frac{2}{3}$. **25.** Более вероятно $x = 11$. **26.** 24. **27.** 20. **28.** 45. **29.** 16; 12 с доп. условием. **30.** $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$. **31.** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. **32.** а) 6^3; б) A_6^3. **33.** а) 9^4; б) A_9^4. **34.** а) $A_5^3 + A_5^2 + 5 = 85$; б) $5^3 + 5^2 + 5 = 155$. **35.** а) A_{15}^3; б) A_{14}^2. **37.** а) $C_1^2 0$; б) $C_1^3 0$. **38.** 120. **39.** $C_8^3 = 56$. **40.** $C_{10}^6 = 210$. **41.** $C_8^5 + C_8^4 + C_8^3 = 182$. **42.** $2^9 - 9 - 1 = 502$. **43.** а) $C_6^2 4$; б) $2C_3^2 2$; в) 32^2. **44.** $C_6^2 \cdot C_7^2 = 315$. **45.** $C_{10}^4 = 210$. **46.** C_{N+2}^2. **47.** $P(A) = 0,001$; $P(B) = \frac{10!}{4!10^6} = 0,1512$. **48.** $P(A) = \frac{1}{60}$; $P(B) = \frac{2}{5}$; $P(C) = \frac{2}{5}$. **49.** $\frac{49 \cdot 36}{63 \cdot 62}$. **50.** $P(A) = 0,2$; $P(B) = \frac{5}{144}$. **51.** а) $\frac{80}{111}$; б) $\frac{1}{111}$; в) $\frac{30}{111}$. **52.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{n-1}{2n}$. **53.** $\frac{24}{10!}$. **54.** $P(A) = \frac{1}{9!}$; $P(B) = \frac{1}{9}$; $P(C) = \frac{1}{945}$. **55.** $9 \cdot 10^{-(n-k+1)}$. **56.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{2}{9}$. **57.** а) $\frac{C_{23}^{16}}{C_{26}^{16}} = \frac{3}{65}$; б) $\frac{C_{23}^{13}}{C_{26}^{16}} = \frac{14}{65}$. **58.** $\frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} \approx 0,0026$. **59.** $\frac{1}{231}$. **60.** $p_k = \frac{C_4^k C_{32}^{6-k}}{C_{36}^6}$; $p_0 \approx 0,465$, $p_1 \approx 0,414$, $p_2 \approx 0,111$, $p_3 \approx 0,0102$, $p_4 \approx 0,00025$. **61.** $\frac{2}{C_{10}^5} = \frac{1}{126}$. **62.** а) $\frac{C_4^2 C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}} \approx 0,3974$; б) $\frac{2C^{14}{}_3{}^2}{C_{36}^{18}} \approx 0,1039$. **63.** $\frac{16}{5525} \approx 0,0029$. **64.** $\frac{564}{C_{36}^3} \approx 0,079$. **65.** $\frac{2}{7}$. **66.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{6}$. **67.** P(A) = 1/1785, P(B) = 1/3927. **68.** P(A) = 1/10005, P(B) = 62016/476905, P(C) = 99/667. **69.** P(A) = 1/1560, P(B) = 1/6. **70.** 1/6. **71.** P(A) = 1/9, P(B) = 1 - $(2/3)^n$, P(C) = $n/3 \cdot (2/3)^{n-1}$. **72.** а) $\frac{1}{7^6}$, б) $\frac{6!}{7^6}$, в) $\frac{C_7^4 \cdot 6^3}{7^6}$. **73.** $1 - \frac{n!}{n^n}$. **74.** $\frac{30}{C_{10}^3}$. **75.** Пусть $N = C_{52}^5 = 2598960$. Тогда а) $\frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{N} = \dfrac{1}{4165}$; б) $\frac{13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6}{N} \approx 0,00144$; в) $\frac{4C_{13}^5}{N} \approx 0,00198$; г) $\frac{9 \cdot 4^5}{N} \approx 0,00355$; д) $\frac{13 \cdot 4C_{12}^2 4^2}{N} \approx 0,02113$; е) $\frac{C_{13}^2 11 (C_4^2)^2 4}{N} \approx 0,04754$; ж) $\frac{13C_4^2 C_{12}^3 4^3}{N} \approx 0,42257$. **76.** Пусть $N = C_{52}^4$. а) $\frac{13^4}{N}$; б) $\frac{C_{13}^4 \dot{4}^4}{N}$; в) $\frac{A_{13}^4}{N}$; г) $1 - \frac{C_{39}^4}{N}$; д) $1 - \frac{C_{36}^4}{N}$; е) $\frac{4C_{13}^3 \cdot 39 + 4C_{13}^4 + 13C_4^3 \cdot 48 + 13}{N}$. **77.** $\frac{8}{17}$. **78.** 4. **79.** $\frac{9}{10}$. **80.** $1 - \frac{C_{21}^7}{C_{28}^7} \approx 0,90$. **81.** а) $1 - \frac{9^4}{C_{36}^4} \approx 0,89$; б) $1 - \frac{4C_9^4}{C_{36}^4} \approx 0,99$. **82.** Три. **83.** Шесть. **84.** $1 - \frac{C^1 0_{90}}{C^1 0_{100}} \approx 0,67$. **85.** $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \frac{2}{3} \approx 0,155$. **86.** Первый. **87.** $P(A) = \frac{1}{64}$; $P(B) = \frac{5^4 4}{6^6} \approx 0,0536$;

$P(C) = \frac{5}{324}$; $P(D) = \frac{1}{6^5}$. **88.** $\frac{9}{10^5}$. **89.** $\mathrm{P(A)} = C_n^m \cdot 1/2^m \cdot (2/3)^n$, $\mathrm{P(B)} = \frac{n!}{m_0!m_1!m_2!} \cdot 1/3^n$. **90.** $\frac{4!48!(13!)^4}{(12!)^4 52!} \approx 0,105$. **91.** а) $\frac{12!}{2^6 6^{12}}$; б) $\frac{5\cdot 3\cdot 12!}{2\cdot 6^{12}}$. **92.** а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{5}{9}$; д) $\frac{1}{8}$; е) $\frac{1}{6}$; ж) $\frac{5}{72}$; з) $\frac{5}{54}$; и) $\frac{91}{216}$. **93.** а) $\frac{n!}{n^n}$; б) $\frac{C_n^2 n!}{n^n}$. **94.** а) $\frac{C_4^2 (C_{13}^2)^2 (13)^2}{C_{52}^6} \approx 0,3030$; б) $\frac{4\cdot 3\cdot C_{13}^5 13}{C_{52}^6} \approx 0,01$. **95.** а) $\frac{2^n n!}{(2n)!}$; б) $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. **96.** 1) а) $\frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^{2k}}$, б) $\frac{C_n^k}{C_{2n}^{2k}}$; 2) $1 - 2\frac{C_n^{2k}}{C_{2n}^{2k}}$ $(k \leqslant \frac{n}{2})$; 3) $\frac{n\cdot 2^{2k-2}\cdot C_{n-1}^{2k-2}}{C_{2n}^{2k}}$. **97.** $P(A) = 1 - \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{k+n-1}^{k-1}}$, $P(B) = \frac{k\cdot C_{n-1}^{k-2}}{C_{k+n-1}^{k-1}}$. **98.** $\pi/4$. **99.** $1 - \frac{C_{10}^2 + A_{10}^3\cdot C_3^2\cdot C_3^1 + 10\cdot C_9^3\cdot 3^3}{C_{30}^6} \approx 0,95$. **100.** $(3/4)^n$. **101.** а) $\frac{1}{8^8}$; б) $\frac{8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{24}\cdot 6!}{27!\cdot 24^{26}}$. **102.** $(\frac{r+1}{2^r})^n$. **103.** $\frac{6}{19}$. **104.** $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **105.** $\frac{a}{l}\left(2 - \frac{a}{l}\right)$. **106.** $1/16$. **107.** $\frac{4r(a-2r)}{a^2}$. **108.** $P(A) = \frac{7}{16}$, $P(B) = \frac{7}{32}$. **109.** $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{9}{32}$, $P(E) = \frac{1}{24}$. **110.** $\frac{139}{1152}$. **111.** $5/6$. **112.** $\frac{3}{4}$. **113.** Если $l/3 \leqslant a \leqslant l/2$, то $p = \left(1 - \frac{3a}{l}\right)^2$; если $l/2 \leqslant a \leqslant l$, то $p = 1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2$. **114.** $5/9$. **115.** $\frac{1}{4}$. **116.** $5/8$. **117.** $1/4$. **118.** $\frac{5}{6}$. **119.** $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{12}$. **120.** $\frac{2}{9}\ln 2 + \frac{1}{6}$.

121. $P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ x, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$ **122.** $P = \min\{2x, 1\}$.

123. $P = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - (1 - x\sqrt{5})^2, & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$ **124.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

125. $\frac{4}{9}$. **126.** а) $\frac{1+\ln 2}{2}$; б) $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x(1 - \ln 2x), & \text{при } 0 < x \leqslant 1/2, \\ 1, & \text{при } x > 1/2. \end{cases}$

127. а) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}$; б) $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - (1 - 2x)(1 - \ln(1 - 2x)), & \text{при } 0 < x \leqslant 1/2, \\ 1, & \text{при } x > 1/2. \end{cases}$

128. а) $P = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ \pi x^2, & \text{при } 0 < x \leqslant 1/2, \\ x^2\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}\right) + \sqrt{4x^2 - 1}, & \text{при } \frac{1}{2} < x \leqslant 1/\sqrt{2}, \\ 1, & \text{при } x > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$

б) $P = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{\pi x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^2 - 1}, & \text{при } 1 < x \leqslant \sqrt{2}, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{2}. \end{cases}$

129. а) $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 4x(1 - x), & \text{при } 0 < x \leqslant 1/2, \\ 1, & \text{при } x > 1/2. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ \pi x^2, & \text{при } 0 < x \leqslant 1/2, \\ \sqrt{1 - 4x^2} + x^2(\pi - 4\arccos(1/2x)), & \text{при } 1/2 < x \leqslant \sqrt{2}/2, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{2}/2. \end{cases}$

130. $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^2/2, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 - (2 - x)^2/2, & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$

131. $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{\pi x^2}{4ab}, & \text{при } 0 < x \leqslant a, \\ \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} + x^2\arcsin(a/x)}{2ab}, & \text{при } a < x \leqslant b, \\ \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} + b\sqrt{a^2 - x^2} + x^2(\arcsin\frac{a}{x} + \arccos\frac{b}{x})}{2ab}, & \text{при } b < x \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$

132. $1/2$. **133.** $\begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - \sqrt{1 - x^2/4}, & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$ **134.** $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{6}$.

135. $P_{2k} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k$, $P_{2k+1} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k$, в частности, $P_2 = 0,785398\ldots$, $P_3 = 0,523598\ldots$, $P_{10} = 0,00249039\ldots$. **136.** $1/7$. **137.** $5/18$. **138.** 0,05. **139.** $1/30$. **140.** $1/3$. **141.** $1/33$. **142.** $P(B|A) = 1/2$; $P(A|B) = 60/91$. **143.** $1 - \frac{4\cdot 5^3}{6^4 - 5^4}$. **144.** $P(B|A) = 2/9$; $P(A|B) = 2/9$; $P(A|C) = 9/16$. **145.** нет, нет, нет, нет. **146.** независимы, зависимы, независимы. **147.** $\frac{4^2}{18\cdot 35 - 16\cdot 31}$. **148.** Зависимы. **149.** зависимы; 1. **150.** $3/16$. **151.** Да. **152.** $1/19\,(i = 0)$, $2/19\,(i = 1, 2, \ldots, 9)$, $0\,(i = 10, 11, \ldots, 18)$. **153.** E и F; нет. **155.** $48/95$. **156.** $8/9$. **157.** $1/4$. **159.** Независимы пары $\{A_i, A_j\}$, $i, j \in \{1, 2, 5, 6\}$ и тройки $\{A_1, A_5, A_6\}$, $\{A_2, A_5, A_6\}$. **160.** При $r \leqslant 0$, $r = 1/3$, $r \geqslant 2/3$. **161.** $A_1 A_2$ и A_3 зависимы. **162.** $25/52$. **163.** $0,7$. **164.** а) $1/6$; б) $2/3$. **165.** $5/8$. **166.** $0,94$. **167.** $2/5$. **168.** $P(A) = (1 - p_1)(1 - p_2)$; $P(B) = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$. **169.** 0,4.

170. 0,452. **171.** p. **172.** $\frac{1332216}{2598960} \approx 0,512596$. **173.** $0,3 \leqslant P(\bar{B}) \leqslant 0,8$. **174.** $P(AB) = 0,12$; $P(A) = 0,24$; $P(A+B) = 0,52$. **175.** $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$. **176.** а) $0,216$; б) $1/6$. **177.** а) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \approx \frac{1}{e}$; б) $\frac{n!}{n^n}$. **178.** $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. **179.** не менее четырех. **180.** Не менее четырех. **181.** $P_1 \approx 0,5177$, $P_2 \approx 0,4914$. **182.** $n(p_1, p_2) \geqslant \frac{\ln(1-p_2)}{\ln(1-p_1)}$; $n(0,3; 0,9) = 7$; $n(0,3; 0,95) = 9$. **183.** $p_1 = 2/3, p_2 = 1/3$. **184.** $p_1 = 4/7$. **185.** $6/11$. **186.** $\frac{15}{16}$. **187.** а) $1/2$; б) $4/7$. **188.** а) $\frac{83}{210}$, б) $\frac{43}{210}$, в) $\frac{2}{5}$. **189.** а) $\frac{a+b}{a+2b}$, б) $\frac{a}{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_n^{2k}}{A_{a+b-1}^{2k}}$. **190.** а) $2/35$; б) $19/35$. **191.** 84%. **192.** $0,895$. **193.** $\frac{13}{132}$. **194.** $3/28$. **195.** $\frac{13}{105}$. **196.** $\approx 0,574$. **197.** Нет. **198.** $11/20$. **199.** $P(A) = 0,452$. **200.** $p(2 - \frac{3}{2}p)$. **201.** В одну из урн следует положить один белый шар, в другую — все остальные. **202.** $\frac{6}{51}$. **203.** а) $3/4$; б) $3/4$. **204.** $5/36$. **205.** $\frac{363}{3136}$. **206.** а) $1/2$; б) $1/3$. **207.** $1 - npq_1q^{n-1} - q^n$, где $q = 1 - p$, $q_1 = 1 - p_1$. **208.** $\frac{6\cdot5\cdot4+5\cdot3\cdot3+1}{6^5} \approx 0,021$. **209.** $\frac{45}{94}$. **210.** $1/3$. **211.** $\frac{p}{8-7p}$. **212.** $2/3$. **213.** $1/2$. **214.** 0,4. **215.** белый и черный шары. **216.** $\frac{0,96\cdot0,98}{0,96\cdot0,98+0,04\cdot0,05}$. **217.** $\approx 0,29$. **218.** $P(H_1/A) \approx 0,8677$, $P(H_2/A) \approx 0,1052$, $P(H_3/A) \approx 0,0271$. **219.** а) $\frac{119}{214}$; б) $\frac{3}{214}$. **220.** $\frac{32}{61}$. **221.** $\approx 0,0826$. **222.** Промах вероятнее. **223.** $P(H_1/A) = 0,103$, $P(H_2/A) = 0,277$, $P(H_3/A) = 0,620$. **224.** $10p(1-p)^9$. **225.** а) $255/256$; б) $70/256$; в) $93/256$. **226.** первое событие более вероятно. **227.** первое событие. **228.** $5/16$. **229.** $P(A) \approx 0,40$; $P(B) \approx 0,26$. **230.** $P(C) \approx 0,76$; $P(D) \approx 0,1$. **231.** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$. **232.** Вероятнее два дня. **233.** $\approx 0,65$. **234.** $11/32$. **235.** $C_{12}^{10} 0,8^{10} 0,2^2 + C_{12}^{11} 0,8^{11} 0,2 + 0,8^{12}$. **236.** $\frac{11}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0,90$. **237.** $P_1 \approx 0,6651$, $P_2 \approx 0,6187$. **238.** $\frac{106}{4^5} \approx 0,10$. **239.** $0,0729$. **240.** $\left(\frac{36}{37}\right)^{36} \approx 0,373$. **241.** $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \left(4 - \frac{3\pi}{4}\right)$. **242.** $\frac{81}{256}$. **243.** $8/27$. **244.** $10x^2(a-x)^3/a^5$. **245.** $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 2^{-2n} = C_{2n}^n 2^{-2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. **246.** $1 - \frac{2}{e}$. **247.** $\approx 0,08$. **248.** $\approx 0,19$. **249.** $\approx 0,1606$. **250.** не менее 649740. **251.** $\approx 0,18$. **252.** а) $\frac{3}{4}e^{-2} \approx 0,18$; б) $\frac{19}{3}e^{-2} \approx 0,857$. **253.** $\approx 0,916$. **254.** 103. **255.** У Кости. **256.** не менее пяти. **257.** $1 - e^{-50/27}(1 + 50/27) \approx 0,55$. **258.** Если $\lambda = np$ — целое, то $k = \lambda$ или $k = \lambda - 1$. В противном случае $k = \lfloor \lambda \rfloor$. **259.** $\approx 0,081$. **260.** $\approx 0,046$. **261.** $\approx 0,56/\sqrt{N}$. **262.** $\approx 0,4099$, невысокая точность объясняется слишком низким значением $npq \approx 1$. **263.** $\approx 0,08$; $\approx 0,52$. **264.** $\approx 0,669$. **265.** а) 0,5; б) 0,999; в) 0,499. **266.** $\approx 0,067$. **267.** $\approx 0,008$. **268.** $\approx 0,371$. **269.** $\approx 0,000003$. **270.** $m = 218$. **271.** 100. **272.** Не менее 346. **273.** 33. **274.** а) 0; б) 99,5%. **275.** а) 3 360 000 руб.; б) 125 000 руб. **276.** $\approx 0,9876$. **277.** $\approx 0,77$. **278.** $\approx 0,62$. **279.** Вероятность столь существенного отклонения практически равна нулю. **280.** $\approx 1,6\%$. **281.** $\approx 0,1\%$. **282.** $n = 144$. **283.** ≈ 66300. **284.** 1624. **285.** $n > 631$. **286.** не менее 126 раз. **287.** $\varepsilon = 0,05$. **288.** $\varepsilon = 0,02$. **289.** $14 < m < 33$.

290. $5 \leqslant m \leqslant 22$. **291.**

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

.

292.

X	0	1	2	3	4
P	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

.

293.

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

.

294.

X	0	1	2	3
P	1/6	1/2	3/10	1/30

.

295.

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

.

296.

X	0	1	2
P	0,6	0,24	0,16

.

297.

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	0,2	0,16	$\ldots$	$(0,8)^{k-1}0,2$	$\ldots$

.

298.

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\ldots$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$	$\ldots$

; $P(X \leqslant 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

299.

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\ldots$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{5}{6}$	$\ldots$

;

Y	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{72}$	$\ldots$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{5}{12}$	$\ldots$

.

300.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

. **301.**

X	-1	0	1
P	0,2	0,5	0,3

.

302.

X	-2	4	9	10	15	20
P	0,04	0,12	0,2	0,09	0,3	0,25

.

303.

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

;

$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{1}{4}$. **304.**

X	0	1	2	3	4
P	0,04	0,2	0,37	0,3	0,09

.

305.

X	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	4	∞
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

.

306.

Z	0	2
P	1/4	3/4

. **307.**

Z	-2	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,5	0,1

.

308. Независимы. **309.** $p = 1/2$. **310.** а) $M(X) = 5$; б) $M(X) = 5,1$. **311.** а) $M(Z) = 3$; б) $M(Z) = 5$. **312.** $x_3 = 21$, $p_3 = 0,2$. **313.** $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,5$. **314.** $M(X) = 12/7$.

315.

X	1	2	3	4
P	0,8	0,12	0,032	0,048

; $MX = 1,328$.

316. а) $D(X) = 14,44$; б) $D(X) = 6,8$. **318.** $0 \leqslant DX \leqslant 1/2$. **319.** $MX = 2$, $DX = 1$. **320.** $0,48$. **321.** $0,3$ или $0,7$. **322.** $MX = 1,417$, $DX \approx 0,531$. **323.**

X	1	2
P	0,6	0,4

. **324.**

X	1	3
P	0,2	0,8

.

325.

X	-1	0	1
P	1/8	1/4	5/8

. **326.** а) $D(Z) = 69$; б) $D(Z) = 9$. **327.** $M(X) = \frac{n}{2}$, $DX = \frac{n}{4}$. **328.** $MX^2 = 11$. **329.** Геом.распределение для $p = 5/12$; $MX = 12/5$. **330.** $f(X) = 2X-3$. **331.** $MY = 2,4$, $DY = 1,99$. **332.** $MX = 52$; $DX = 89,6$. **333.** 3,15; 0,6475. **334.** $M(X) = p_1 + p_2$, $DX = p_1 + p_2 - p_1^2 - p_2^2$. **335.**

X	-1	0	1
P	0,08	0,74	0,18

; $M(Z) = 0,1$; $D(Z) = 0,25$. **336.** а) $M(X/Y) = \frac{343}{240}$; б) $M(X-Y) = 0$; в) $D(X-Y) = 35/6$. **337.** $M(X) = 80$, $DX = 16$. **338.** $M(X) = p$, $DX = \frac{pq}{n}$. **339.** $7n/2$; $35n/12$. **340.** $0,57$. **341.** 2 р.. **342.** $M(X) = (n+m)/m$; $D(X) = n(n+m)/m^2$. **343.** $M(X^2 - Y) = 5/2$. **344.** а) $M(X) = 3$; $D(X) = 2$; б) $M(X) = 5$; $D(X) = 20$. **345.** 34/3; 53/3.

346.

X	0	1
P	ε	$1-\varepsilon$

. **348.** $Y = X$, $Z = -X$. **351.** $M(X) = 6$; $DX = 2,45$. **352.** $M(X) = \frac{1-q^n}{p}$, $D(X) = \frac{1+q-(2n+1)q^n+(2n-1)q^{n+1}}{p^2}$, где $q = 1-p$. **353.** $M(X) = \frac{mk}{n}$; $D(X) = \frac{mk(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$. **354.** $\rho(X,Y) \approx -0,11$. **355.** а) $\rho(X,Y) \approx -0,117$; б) $\rho(X,Y) \approx -0,218$. **356.** $\rho(X,Y) \approx 0,681$. **357.** а) 1; б) -1; в) $\approx 0,953$; г) 1; д) $\approx 0,953$; е) 1; ж) 1. **358.** а) $\approx -0,218$; б) $\approx -0,218$; в) $\approx 0,218$; г) $\approx -0,218$. **359.** $MZ = 13$. **360.** $MZ = 13$. **361.** $DZ = 23$. **362.** $D(2X-Y) = 6$. **363.** $MZ = -22$. **364.** $\rho(X, X-Y) = \sqrt{2}/2$. **365.** Контрпример: $X = Y = Z$. **366.** 30. **367.** 10 : 1. **368.**

$X\|A$	2	3	4	5	6
P	1/15	2/15	1/5	4/15	1/3

.

369. а)

$X\|A$	0	1	2	3	4
P	1/70	8/35	18/35	8/35	1/70

.

б)

$X\|A$	0	1	2	3
P	C_{48}^4/C_{51}^4	$C_{48}^3 \cdot 3/C_{51}^4$	$C_{48}^2 \cdot 3/C_{51}^4$	$48/C_{51}^4$

.

370. 38/195. **371.** а) 7/5; б) 36/35. **372.** 63/4. **373.** 1000. **374.** 79/32. **375.** $\frac{a(n^2-1)}{3n}$. **376.** 380/71. **377.** 10. **378.** а) 0; б) 0,5; в) 0. **379.** 2. **381.** а), г), е) — да; б), в), д) — нет. **382.** а) $A = B = 1/2$; б) $A = 1/2$, $B = 1/\pi$; в) $A = -1$, $B = 1$. **383.** $f_X(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

384. $\sqrt{2}/4$. **385.** $\frac{e^a-1}{e^{2a}}$. **386.** а) $\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & \text{при } x \in (1, 2), \\ 1 & \text{при } 2 \leqslant x. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 1 - 1/x & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1+x|x|}{2} & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

387. а) $C = 1/\pi$; б) $C = 1$; в) $C = 3/4$; в) $C = 1$; д) $C = 3$; е) $C = 1/2$. **388.** $M(X) = 2/3$. **389.** $M(X) = 0$. **390.** $c = 3/4$; $M(X) = 11/16$. **391.** $M(X) = 2$. **392.** $M(X) = 1/a$. **393.** $D(X) = \frac{\pi^2-8}{4}$. **394.** $D(X) = 25/18$. **395.** $D(X) = 4/3$. **396.** а) $MX = DX = 1$; б) $MX = 4/3$, $DX = 2/9$; в) $MX = 3/8$, $DX = \frac{19}{320}$; в) $MX = 2/3$, $DX = \frac{1}{18}$; д) $MX = \frac{7}{2}$, $DX = \frac{25}{12}$; е) $MX = 0$, $DX = 0,6$. **397.** $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **398.** $1 - e^{-3\sqrt{2}}$. **399.** $M(X^2 + X + 1) = 3/2$. **400.** а) $M(2X+3) = 5$; б) $M(X^2) = 7/3$. **401.** $c = 1/\sqrt{2}$; MX и DX не существуют. **402.** $c = 1/8$; $MX = 5/3$; $DX = 8/9$; $P(|X - MX| \leqslant 1) = 2/3$. **403.** а) $2/\pi$; б) $2/\pi$. **404.** $\pi/2$. **405.** 1/3. **406.** $MX = 1$, $DX = 25$. **407.** $0,1359$. **408.** $\Phi((x-1)/2) + 1/2$. **409.** $0,8664$. **410.** 95%. **411.** $4,292$. **412.** $0,18$; $0,48$; $0,34$. **413.** $(-5; 25)$. **414.** $0,898$. **415.** $99,95\%$.

Список литературы

[1] Андрухаев, Х.М. Сборник задач по теории вероятностей / Х.М. Андрухаев. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 2005.

[2] Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: задачи и упражнения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — Изд. 2-е, стер. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.

[3] Володин, Б.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Б.Г. Володин и др.; под ред. А.А. Свешникова. — Изд. 2-е, доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.

[4] Вуколов, Э.А. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов / Э.А. Вуколов и др.; под ред. А.В. Ефимова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

[5] Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. — Изд. 5-е, стер. — М.: Высш. шк., 1999.

[6] Мостеллер, Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями: пер. с англ. / Ф. Мостеллер. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975. (Электронный вариант: `http://ilib.mccme.ru/djvu/50zadach.htm`)

[7] Севастьянов, Б.А. Сборник задач по теории вероятностей / Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

[8] Сотникова, Н.Я. Первоапрельский задачник по теории вероятностей для студентов нематематиков / Н.Я. Сотникова. — `www.astro.spbu.ru/staff/nsot/Teaching/tver/zadachi.html`

[9] Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1: пер. с англ. / В. Феллер. — М.: Мир, 1984.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0170	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3680	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4230	4251	4265	4279	4292	4305	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986

$\Phi(3,0) = 0,49865$; $\Phi(3,2) = 0,49931$; $\Phi(3,4) = 0,49966$;
$\Phi(3,6) = 0,499841$; $\Phi(3,8) = 0,499928$; $\Phi(4,0) = 0,499968$;
$\Phi(4,5) = 0,499997$; $\Phi(5,0) = 0,49999997$.

Учебное издание

Теория вероятностей
и математическая статистика

Сборник задач

2-е издание, переработанное и дополненное

Составители: **Богомолов** Юрий Викторович
Максименко Александр Николаевич
Морозов Анатолий Николаевич

Редактор, корректор И.В. Бунакова
Компьютерная верстка А.Н. Максименко

Подписано в печать 23.04.2009. Формат 60x84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 4,7.
Тираж 200 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.