Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

М. В. Ануфриенко
Ю. В. Богомолов
Г. В. Шабаршина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ КУРСУ

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2020

УДК 517.53/55(078)
ББК В161.55я73
А73

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2020 года.

Рецензент
кафедра дискретного анализа

Ануфриенко, Маргарита Вадимовна.

А73 Методические указания по практическому курсу «Теория функций комплексного переменного»: учебно-методическое пособие / М. В. Ануфриенко, Ю. В. Богомолов, Г. В. Шабаршина / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2020. — Ч. 2. — 76 с.

Пособие написано по материалам лекций и практических занятий, проводимых авторами на факультете информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова. Во второй части пособия обсуждаются теоретические вопросы, связанные с классификацией особых точек, теорией вычетов и конформными отображениями, и возможности их применения в решении разнообразных практических задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Комплексный анализ».

УДК 517.53/55(078)
ББК В161.55я73

Оглавление

Введение

Пособие по практическому курсу «Теория функций комплексного переменного» (вторая часть) содержит разбор задач и задания для самостоятельной работы. Включены примерные варианты контрольных работ и примерный вариант экзаменационной работы. Материал второй части связан, во-первых, с теорией вычетов, т. е. с разбором вопросов, связанных с классификацией изолированных особых точек однозначной аналитической функции, с определением и вычислением вычетов. Здесь же будет рассмотрена основная теорема теории вычетов и ее приложение к вычислению интегралов. Отдельная глава посвящена определению логарифмического вычета, обсуждению теоремы о нулях и полюсах и теоремы Руше. Во-вторых, мы обсудим определение и свойства конформных отображений и научимся строить отображения, переводящие одну заданную область в другую.

Как всё начиналось

В 1545 г. вышла в свет книга «Великое искусство» (“Ars magna”) знаменитого итальянского математика Джероламо Кардано (1501–1576). в основном она была посвящена решению уравнений 3-й и 4-й степеней. Книга оказалась поистине великой. Она и другие работы Кардано сыграли большую роль не только в современной ему математике XVI века. Пожалуй, настоящая значимость их для формирования алгебры как науки была осознана только к XIX веку.

Человечество достаточно естественно ввело в употребление натуральные числа, используемые для счета, и положительные рациональные. Мы не будем здесь останавливаться на вопросах первого кризиса в истории математики, связанного с иррациональными числами. Сейчас речь идет о том, что тяжело входили в использование отрицательные числа и, конечно, комплексные. Кардано в «Великом искусстве» рассматривает отрицательные числа, называя их «чисто ложными», и комплексные числа. Последние Кардано называет «поистине софистическими». Однако в книге содержится указание, что квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Он предлагает оперировать с «софистическими» числами по понятным естественным правилам. Продолжателем исследований Кардано и итальянской школы алгебраистов стал Рафаэль Бомбелли (1526–1572) . В основном труде «Алгебра» он рассматривал отрицательные и комплексные числа как легальные объекты. Здесь впервые были сформулированы базовые правила действий с мнимыми числами. Бомбелли применил эти правила к исследованию неприводимых уравнений третьей степени.

В XVIII веке появляются работы, содержащие интерпретации комплексных чисел и описание действий над ними. Полное обоснование теории и геометрическую интерпретацию комплексного числа мы находим в «Теории биквадратных вычетов» — труде Карла Фридриха Гаусса (1777–1855). В 1799 году им написана докторская диссертация, посвященная доказательству основной теоремы алгебры. В «Арифметических исследованиях» Гаусс применил комплексные корни из единицы для построения правильных многоугольников.

Большое значение для развития теории аналитических функций имели исследования Леонарда Эйлера (1707–1783), связанные с его методами вычисления определенных интегралов. В работах Эйлера введены понятия функции комплексного аргумента, даны условия дифференцируемости. Занимаясь вопросами картографии, он определил понятие отображения «подобного в малом». Впоследствии они будут названы конформными. Эйлер начал применять функции комплексного аргумента в исследованиях по гидродинамике.

В XIX веке развитие ТФКП в основном связано с именами Огюстена Коши (1789–1897), Карла Вейерштрасса (1815–1897), Георга Бернхарда Римана (1826–1866). В своих работах, начиная с 1826 года, О. Коши создает теорию вычетов. Он вводит термин в начале исследований, изучая разности (“résidus” или “residuum”) интегралов по кривым, имеющим общие начало и конец. В область между кривыми попадают особые точки. В цикле статей О. Коши строит теорию рядов и элементарных функций, формулирует интегральную формулу. В 1841 году Вейерштрасс обобщает теорему Коши о разложении функции в степенной ряд на случай функции, непрерывной и дифференцируемой в кольце. Возникает ряд, содержащий положительные и отрицательные степени переменной. Независимо от Вейерштрасса, ряд был найден Пьером Альфонсом Лораном (1813–1854), имя которого этот ряд сейчас носит. Работы Вейерштрасса сформировали подход, основанный на понятии равномерной сходимости, а потому в его основе лежит возможность представления функций степенными рядами. Риман в 1851 году защищает докторскую диссертацию «Основы общей теории функции одной комплексной переменной». Он предложил с каждой функцией комплексного переменного связывать представление об отображении одной области на другую. Риман разработал теорию конформных отображений, ввел понятие римановой поверхности, занимался вопросами основ теории аналитических функций, положил начало геометрической теории функций.

История теории аналитических функций связана со многими именами. Мы кратко описали вклад только нескольких ученых. Можно рассказывать о дискуссии по поводу логарифмов отрицательных чисел в переписке Г. Лейбница и И. Бернулли, говорить о решении задачи о корнях n-й степени из комплексного числа в работах английского математика Абрахама де Муавра, о цикле работ П.-С. Лапласа с новым методом решения разностных и дифференциальных уравнений, о статьях Пуассона о распределении электричества на поверхности проводников и т. д.

В 1826 году появилась работа Н. И. Лобачевского, содержащая одно из самых замечательных открытий в истории науки — неевклидову геометрию. В течение десятилетий пришло понимание, что геометрия теории аналитических функций одной переменной и есть геометрия Лобачевского. Работы П. Л. Чебышева и Г. Римана послужили основой для появления аналитической теории чисел, использующей методы теории аналитических функций комплексного аргумента. Начиная, видимо, с Вейерштрасса общая теория аналитических функций стала университетским курсом. В Петербургском университете такой курс читал Ю. В. Сохоцкий — автор исследований по теории функций комплексного аргумента. ТФКП находит широкое применение в физике, инженерных расчетах, в аналитической теории чисел, операционном исчислении, теории фракталов.

Глава 1

Изолированные особые точки

Первый вопрос, который нам предстоит рассмотреть, — это вопрос о классификации особых точек. Он основан на разложении функции в ряд Лорана, поэтому напомним соответствующий материал.

1.1. Ряды Лорана

1.1.1. Область сходимости ряда Лорана

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Здесь z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости, коэффициенты c_n — некоторые комплексные числа, а суммирование ведется как по положительным, так и по отрицательным значениям индекса:

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z+z_0)^n + \ldots$$

Такой ряд называется рядом Лорана.

Установим область сходимости этого ряда. Для этого представим выражение в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Очевидно, областью сходимости всего ряда является общая часть областей сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Несложно установить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в круге $|z-z_0| < R$ к некоторой аналитической функции $f_1(z)$ комплексной переменной. В свою очередь, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сходится вне круга $|z-z_0| > \rho$ к аналитической функции $f_2(z)$. Поэтому если $\rho < R$, то существует общая область сходимости этих рядов — круговое кольцо $\rho < |z-z_0| < R$, в котором ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится к аналитической функции $f(z)$.

Так как ряды, из которых составлен ряд Лорана, являются обычными степенными рядами, то в указанной области функция $f(z)$ обладает всеми свойствами суммы степенного ряда.

1.1.2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана

Можно ли функции, аналитической в некотором круговом кольце, сопоставить ряд Лорана, сходящийся к этой функции в данном кольце?

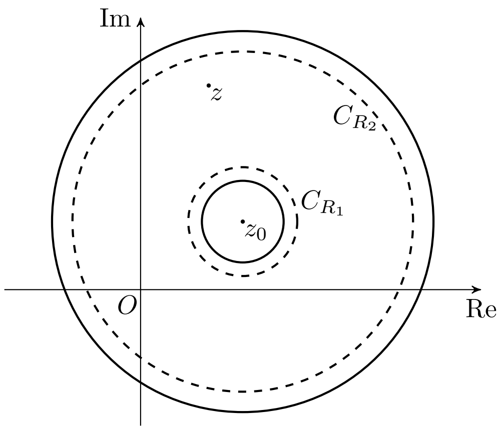
Теорема 1.1.1. ***(Лорана)*** *Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $\rho < |z-z_0| < R$, единственным образом представляется в этом кольце сходящимся к ней рядом Лорана.*

Если мы в своё время разобрались с доказательством теоремы Тейлора, то представление функции в произвольной точке z внутри кольца $\rho < |z - z_0| < R$ в виде степенного ряда, содержащего положительные и отрицательные степени $(z - z_0)$, возникает достаточно естественно. Мы строим две окружности C_{R_1} и C_{R_2} с центрами в z_0, радиусы которых удовлетворяют условиям $\rho < R_1 < R_2 < R$. Далее используем формулу Коши для многосвязной области, представив

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_1}^-} \frac{f(t)dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_2}^+} \frac{f(t)dt}{t - z}.$$

Поскольку на C_{R_2} выполнено неравенство $\left|\dfrac{z - z_0}{t - z_0}\right| \leqslant q < 1$, а на C_{R_1} соответственно выполнено неравенство $\left|\dfrac{t - z_0}{z - z_0}\right| \leqslant q < 1$, то дробь $\dfrac{1}{t - z}$ в каждом из интегралов представляется рядом по соответствующим степеням $(z - z_0)$. Выкладки проводятся аналогично доказательству теоремы Тейлора.

Небольшое замечание об аналитичности подынтегральных функций позволяет в формулах для коэффициентов перейти к одному контуру и записать, что $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$, где C — произвольный замкнутый контур, лежащий в кольце $\rho < |z - z_0| < R$, содержащий точку z_0 внутри и пробегаемый в положительном направлении.



Пример 1. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < \sqrt{2}$.

Обозначим $t = z - 1$. Тогда

$$\frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{t(t+1+i)} = \frac{1}{t(1+i)\left(1+\frac{t}{1+i}\right)} =$$

$$= \frac{1}{t(1+i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{(1+i)^{n+1}}.$$

Заметим, что здесь делаются стандартные преобразования и используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\dfrac{t}{1+i}$ (который по модулю меньше 1).

В итоге получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n-1}}{(1+i)^{n+1}},$$

где $\left|\dfrac{z-1}{1+i}\right| < 1$, т.е. $|z-1| < |i+1| = \sqrt{2}$.

1.2. Изолированные особые точки

Определение 1.2.1. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если функция $f(z)$ — однозначная аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, а в самой точке z_0 не определена или не аналитична.

Согласно теореме Лорана функцию $f(z)$ можно представить сходящимся в кольце $0 < |z - z_0| < R$ рядом Лорана $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$. Напомним, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется *главной частью* разложения, а $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ — *правильной частью.*

Возможны три различных случая:

1. Полученный ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$;

2. Содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$;

3. Содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$.

Классификация изолированных особых точек проводится в зависимости от полученного результата. Видом главной части разложения определяется и поведение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

1.2.1. Устранимая особая точка

Определение 1.2.2. Если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, то точку z_0 назовем устранимой особой точкой.

В этом случае $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$. Отсюда несложно увидеть, что существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$. Поэтому если функция $f(z)$ не была определена в точке z_0, то будем считать, что $f(z_0) = c_0$. Если функция $f(z)$ была определена в точке z_0, но значение не совпадало с c_0, то переопределим его, положив $f(z_0) = c_0$.

Так определенная функция будет аналитической в круге $|z-z_0| < R$. Отсюда и название этого вида особых точек. Поскольку мы устранили разрыв функции, то назвали точку устранимой особой точкой.

Верно и обратное утверждение.

Утверждение 1.2.3. *Если функция $f(z)$ — однозначная аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то точка z_0 является устранимой особой точкой.*

Сделаем два замечания.

Во-первых, сформулированное утверждение можно усилить, заменив условие существования предела на условие ограниченности функции в данном кольце.

Во-вторых, функция в окрестности устранимой особой точки может быть представлена рядом $f(z) = (z-z_0)^m \sum\limits_{n=m}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-m}$, где $m \geqslant 0$, или, обозначив аналитическую функцию $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-m}$ через $\varphi(z)$, её можно записать в виде $f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $m \geqslant 0$.

Рассмотрим пример.

Пример 2. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имеет особую точку $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

Так как ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки $z_0 = 0$ не содержит членов с отрицательными степенями z, то точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Ответ можно было получить, используя подход к классификации изолированных особых точек, основанный на характеристике поведения функции в окрестности этой точки: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. Так как предел существует, то точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

1.2.2. Полюс

Рассмотрим второй тип изолированных особых точек.

Определение 1.2.4. Если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 содержит конечное число k членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, то точку z_0 назовем полюсом k-го порядка.

В этом случае

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Поведение аналитической функции в окрестности ее полюса может быть определено следующим образом: если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к z_0.

Верно и обратное утверждение.

Утверждение 1.2.5. *Если функция $f(z)$ — однозначная аналитическая в круговом кольце $0 < |z-z_0| < R$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, то точка z_0 является полюсом функции.*

Рассмотрим пример.

Пример 3. Функция $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ имеет особую точку $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots$$

Так как ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки $z_0 = 0$ содержит слагаемое $\dfrac{1}{z}$, то точка $z_0 = 0$ является в этом случае полюсом первого порядка.

Поведение функции в окрестности этой точки определяется как $\lim\limits_{z\to 0} \left|\dfrac{\cos z}{z}\right| = \infty$. Мы можем сказать, что точка $z_0 = 0$ является полюсом. Но порядок еще предстоит определить.

Поэтому установим связь между нулями и полюсами функции.

Утверждение 1.2.6. *Если точка z_0 является полюсом k-го порядка функции $f(z)$, то z_0 есть ноль кратности k для функции $\dfrac{1}{f(z)}$. И наоборот, если точка z_0 есть ноль кратности k для функции $f(z)$, точка z_0 является полюсом k-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$.*

Вернувшись к примеру $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, мы легко увидим, что $z_0 = 0$ является нулем кратности 1 для функции $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z}{\cos z}$.

Рассмотрим еще пример, в котором используются аналогичные рассуждения.

Пример 4. Пусть $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$. Точки i и $-i$ суть изолированные особые точки функции. Возникли они как нули знаменателя (числитель в ноль в этих точках не обращается). Несложно понять, что обе точки — полюса первого порядка.

1.2.3. Существенно особая точка

Вернемся к классификации особых точек.

Определение 1.2.7. Если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, то точку z_0 называют существенно особой точкой функции.

С учетом предыдущего обсуждения, можно заметить, что для описания поведения аналитической функции в окрестности ее существенно особой точки остался только случай — несуществование конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Более конкретно на вопрос о поведении аналитической функции в окрестности ее существенно особой точки отвечает теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

Теорема 1.2.8. ***(Сохоцкого–Вейерштрасса)*** *Для любого $\varepsilon > 0$ в любой окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка z, в которой значение функции $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа B меньше чем на ε.*

Поясним условие.

Замечание. Любая однозначная аналитическая функция в каждой окрестности существенно особой точки принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному комплексному числу.

Поскольку в существенно особой точке z_0 не существует конечного или бесконечного предельного значения аналитической функции, то, выбирая различные последовательности точек, сходящихся к точке z_0, мы можем получить последовательности значений функции, сходящиеся к различным пределам. Причем можно выбрать последовательность, сходящуюся к любому наперед заданному комплексному числу, включая ∞.

Пример 5. В качестве примера заметим, что для функций $f(z) = e^{1/z}$, $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$ и $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой. Действительно,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}} + \ldots$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} + \ldots$$

1.3. Точка $z = \infty$ — изолированная особая точка

Определение 1.3.1. Точка $z = \infty$ — бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, если можно указать такое значение R, что вне круга $|z| > R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z = 0$.

Фактически это означает, что функция аналитическая в некоторой окрестности точки $z = \infty$. Представим функцию в этом кольце сходящимся к ней рядом Лорана.

Как и для конечной точки, здесь можно рассмотреть три случая:

1. Точка $z = \infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если разложение не содержит членов с положительными степенями, т. е. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n}$. Отсюда следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c_0$;

2. Точка $z = \infty$ называется полюсом функции $f(z)$, если разложение в ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями, т. е. $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{k} c_n z^n$. В этом

случае о поведении функции на бесконечности следует сказать, что функция неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления $z \to \infty$;

3. Точка $z = \infty$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если лорановское разложение содержит бесконечное число членов с положительными степенями: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. В этом случае, выбирая последовательность $z_n \to \infty$, можно получить последовательность значений $f(z_n)$, сходящуюся к любому наперед заданному комплексному числу.

Рассмотрим еще пример.

Пример 6. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^6 - z^3}$ имеет особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \infty$.

Перепишем функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Точки $z = 0$, $z = 1$, $z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ являются нулями знаменателя. Значит, для $f(z)$ это полюса. Порядок полюса определяется порядком нуля функции

$$\varphi(z) = z^3(z-1)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

то есть точка $z = 0$ — полюс третьего порядка, остальные — простые полюса, т. е. первого порядка.

Так как существует $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, то $z = \infty$ является нулем этой функции. Посмотрим на лорановское разложение функции в $z = \infty$. Сделав замену $z = \dfrac{1}{t}$, перепишем функцию в виде $f(t) = \dfrac{t^6}{1 - t^3} = t^6 \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{3n+6}$, где $|t| < 1$.

Вернемся к старой переменной: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{3n+6}}$, где $|z| > 1$. Таким образом, разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ не содержит положительных степеней.

1.4. Примеры для самостоятельной работы

Найдите изолированные особые точки, определите их вид.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-i)}$ **2.** $f(z) = \dfrac{z+1}{1-\cos z}$ **3.** $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z}-1} + \dfrac{1}{z^2}$

4. $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$ **5.** $f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ **6.** $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$

Глава 2

Вычеты

2.1. Основные определения и теоремы

Пусть точка z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Согласно теореме Лорана функцию $f(z)$ можно представить сходящимся в кольце $0 < |z - z_0| < R$ рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

В этом разложении коэффициент c_{-1} имеет вид

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z) dz.$$

Определение 2.1.1. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z) dz$. Интеграл вычисляется по любому замкнутому контуру C, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$, охватывающему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$ и обходимому в положительном направлении.

Обозначают вычет через $\mathrm{res}(f(z),\, z_0)$, иногда $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$ или $\text{Выч}(f(z), z_0)$ (мы будем использовать первый вариант). Еще раз обратим внимание, что вычисление вычета не зависит от кривой интегрирования.

Одно из основных приложений вычетов — вычисление контурных интегралов. Вычисление интеграла от аналитической функции по некоторому замкнутому контуру, содержащему внутри конечное число изолированных особых точек, может быть сведено к вычислению вычетов функции в этих точках. Подобное сведение задачи могло бы показаться неэффективным, если бы в ряде случаев не был бы указан простой способ вычисления вычета.

Сразу можно заметить, что если точка z_0 является правильной или устранимой особой точкой функции $f(z)$, то вычет в этой точке равен нулю.

Если точка z_0 является полюсом первого порядка функции $f(z)$, то в некоторой окрестности этой точки $0 < |z - z_0| < R$ имеет место разложение

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Умножим равенство на $z - z_0$. Получим $f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \ldots$. Перейдём к пределу при $z \to z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = c_{-1}.$$

Получили формулу для вычисления вычета $\operatorname{res}(f(z), z_0)$ в изолированной особой точке, являющейся полюсом первого порядка.

Рассмотрим пример.

Пример 7. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$ в изолированных особых точках.

Изолированные особые точки этой функции $z = i$, $z = -i$, $z = -3$ и $z = \infty$. Первые три точки — полюса первого порядка. Поэтому

$$\operatorname{res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}(z - i) = \lim_{z \to i} \frac{z^2(z-i)}{(z-i)(z+i)(z+3)} =$$
$$= \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{(i+i)(i+3)} = \frac{1+3i}{20}.$$

$$\operatorname{res}(f(z),\,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}(z+i)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2(z+i)}{(z-i)(z+i)(z+3)}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z+3)}=\frac{(-i)^2}{(-i-i)(-i+3)}=\frac{1-3i}{20}.$$

$$\operatorname{res}(f(z),\,-3)=\lim_{z\to -3}\frac{z^2(z+3)}{(z^2+1)(z+3)}=\lim_{z\to -3}\frac{z^2}{z^2+1}=\frac{(-3)^2}{(-3)^2+1}=\frac{9}{10}.$$

Вычисление вычета в точке $z=\infty$ обсудим далее.

Если точка z_0 является полюсом k-го порядка функции $f(z)$, то в окрестности этой точки имеет место разложение вида

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Умножим обе части на $(z-z_0)^k$, получим

$$f(z)(z-z_0)^k=c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-2}(z-z_0)^{k-2}+$$

$$+\,c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{n+k}.$$

Продифференцируем равенство k раз:

$$\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}=c_{-1}(k-1)!+c_0k!(z-z_0)+\ldots$$

Перейдем к пределу при $z\to z_0$. Получим формулу вычисления вычета в полюсе k-го порядка функции $f(z)$:

$$\operatorname{res}(f(z),z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в существенно особой точке следует воспользоваться разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Если точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции, то вычет в ней следует определить так:

$$\operatorname{res}(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} f(z)dz,$$

т. е. вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = \infty$ назовем комплексное число, равное значению интеграла $-\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} f(z)dz$. Здесь интеграл вычисляется по любому замкнутому контуру C, вне которого нет особых точек функции $f(z)$.

Вернемся к рассмотренному выше примеру функции

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}.$$

Вычеты в конечных изолированных особых точках этой функции мы уже вычислили. Рассмотрим $z_0 = \infty$. Сделаем замену $z = \dfrac{1}{t}$ и перепишем функцию в виде

$$f(t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+3t)} = t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (3t)^n\right),$$

где $|3t| < 1$. Здесь стандартное разложение использовали для каждого множителя: $\dfrac{1}{1+t^2}$ и $\dfrac{1}{1+3t}$.

Вернемся к старой переменной:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^n}\right),$$

где $|z| > 3$. Поскольку нам нужен не весть ряд, а только коэффициент c_{-1}, взятый с противоположным знаком, то $\operatorname{res}(f(z), \infty) = -1$.

Пример 8. Найти значение вычета $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-2)}$ в точке ∞.

Сделаем формальную замену $z = \dfrac{1}{z}$ и перепишем функцию в виде

$$f(t) = \frac{t^3 \cos\frac{1}{t}}{1-2t} = t^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, t^{2n}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n\right), \quad |2t| < 1.$$

Вернемся к старой переменной:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}\right),\quad |z|>2.$$

Запишем суммы в развёрнутом виде:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\dots\right)\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\frac{2^4}{z^4}+\dots\right).$$

Поскольку интересуемся только коэффициентом c_{-1}, то запишем отдельно слагаемое с z^{-1}:

$$\frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{4!}-\frac{2^3}{6!}+\frac{2^4}{8!}-\dots\right).$$

Преобразуем выражение в скобках (это и есть коэффициент c_{-1}):

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{4!}-\frac{2^3}{6!}+\frac{2^4}{8!}-\dots&=\frac{1}{2^2}\left(-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\dots\right)=\\&=\frac{1}{2^2}\left(-1+1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\dots\right)=\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2.\end{aligned}$$

Окончательно $\operatorname{res}(f(z),\infty)=-c_{-1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2$.

2.2. Основная теорема теории вычетов

Основная теорема теории вычетов является базовой для практического применения. Приведем формулировку и необходимые пояснения.

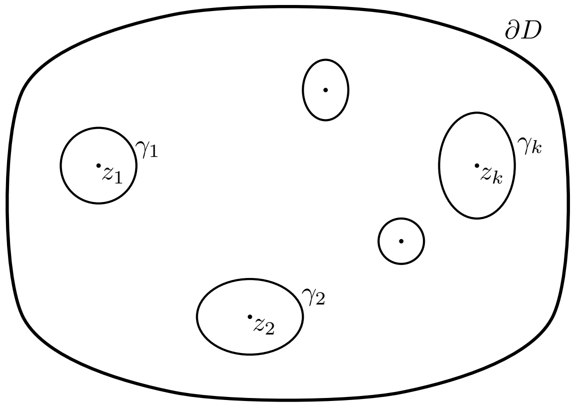
Теорема 2.2.1. *Пусть функция $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в некоторой замкнутой $\overline{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,,2,\dots,n)$, лежащих внутри области D. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D^+} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f(z),z_k),$$

где ∂D^+ — полная граница области D.

Чтобы пояснить полученный результат, во-первых, заметим, что все точки границы ∂D — правильные, т. к. в условии сказано, что $f(z)$ — аналитическая в замкнутой $\overline{D}$.

Во-вторых, проведя вокруг каждой из особых точек z_k замкнутый контур γ_k, достаточно малый для того, чтобы контуры не пересекались друг с другом и каждый из них не содержал внутри других особых точек, кроме точки z_k, получим замкнутую многосвязную область, ограниченную контуром ∂D и всеми контурами γ_k $(k = 1, , 2, \ldots, n)$. В этой области функция $f(z)$ является аналитической.

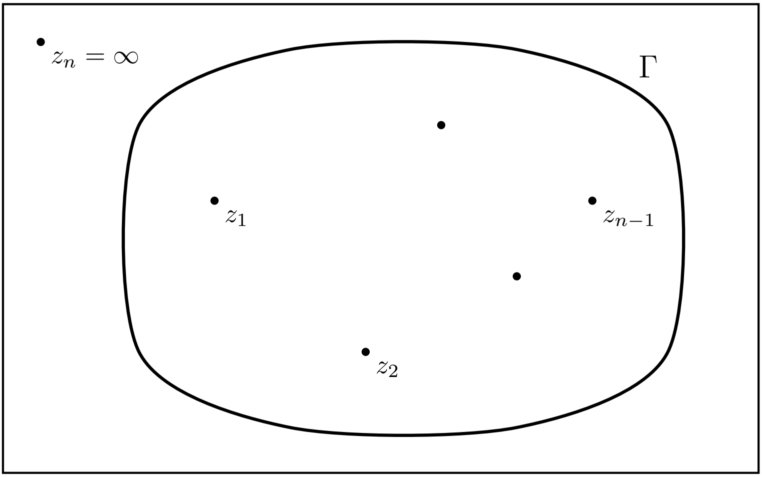


Поэтому по теореме Коши для многосвязных областей получим

$$\oint\limits_{\partial D^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\partial \gamma_k^-} f(z)dz = 0.$$

Вспомнив определение вычета, получим утверждение теоремы.

Несмотря на то что практическая значимость теоремы уже была отмечена выше, еще раз подчеркнем, что во многих случаях вычеты вычислять проще, чем сам интеграл. Отметим и еще один важный момент. Если функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ и $z_n = \infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k) = 0.$



Проведем замкнутый контур Γ, содержащий внутри все конечные особые точки z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1}. Вне контура лежит точка $z_n = \infty$. По основной теореме теории вычетов

$$\oint\limits_{\partial\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}(f(z), z_k).$$

С другой стороны, этот же интеграл может быть представлен как

$$\oint\limits_{\partial\Gamma^+} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res}(f(z), \infty).$$

Отсюда и получим, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}(f(z), z_k) + \operatorname{res}(f(z), \infty) = 0.$

Это утверждение может быть использовано следующим образом. Пусть мы вычисляем интеграл по замкнутому контуру от функции, аналитической на всей комплексной плоскости , за исключением конечного числа изолированных особых точек. Основная теорема требует вычисления вычетов внутри контура. Но если внутри содержится много особых точек функции, а снаружи их меньшее количество, тогда удобно воспользоваться формулой для полной суммы вычетов.

Рассмотрим примеры.

Пример 9. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz$, где контур C — окружность $|z| = 2$.

Нужно определить, какие особые точки имеет подынтегральная функция, какие из них попадают внутрь контура, и вычислить вычеты в этих точках.

Особые точки этой функции уже были обсуждены выше. Поэтому заметим, что внутри контура $|z| = 2$ лежат две из них: $z = i$, $z = -i$. Вычеты мы тоже уже вычислили. Поэтому

$$\oint\limits_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}(f(z), i) + \operatorname{res}(f(z),\ -i)\right) =$$
$$= 2\pi i\left(\frac{1+3i}{20} + \frac{1-3i}{20}\right) = \frac{\pi i}{5}.$$

Пример 10. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{z^4}{e^z+1}dz$, где C — окружность $|z| = 4$.

Особые точки этой функции — это нули знаменателя $e^z + 1 = 0$. Из множества точек вида $i(\pi+2\pi k)$ для $k \in \mathbb{Z}$ внутри контура $|z| = 4$ лежат две: $z = \pi i$, $z = -\pi i$. Вычислим вычеты. Каждая точка — это полюс первого порядка. Поэтому

$$\operatorname{res}(f(z), \pi i) = \lim_{z\to\pi i}\frac{z^4(z-\pi i)}{e^z+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to\pi i}\frac{(z^4(z-\pi i))'}{(e^z+1)'} =$$
$$= \lim_{z\to\pi i}\frac{(z^5-\pi i z^4)'}{(e^z+1)'} = \lim_{z\to\pi i}\frac{5z^4-4\pi i z^3}{e^z} = \frac{(\pi i)^4}{e^{\pi i}} = -\pi^4.$$

Аналогично вычислим $\operatorname{res}(f(z),\ -\pi i) = -\pi^4$. Отсюда

$$\oint\limits_C \frac{z^4}{e^z+1}dz = 2\pi i(\operatorname{res}(f(z),\pi i)+\operatorname{res}(f(z),-\pi i)) = 2\pi i(-\pi^4-\pi^4) = -4\pi^5 i.$$

2.3. Примеры для самостоятельной работы

1. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(1-\cos z)(1-z)^2}$, где C — окружность $|z| = 3$.

2. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{1}{1+z^4}dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

3. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{\cos\frac{1}{z}}{iz+1}dz$, где C — окружность $|z - 1 - i| = 2$.

4. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz$, где C — окружность $|z - i| = \dfrac{3}{2}$.

Глава 3

Вычисление интегралов с помощью вычетов

Материал предыдущей главы мы будем применять для вычисления определенных интегралов. Для этого используется переход к вычислению интеграла от заданной функции, но по специальным образом подобранному контуру, или от некоторой другой функции по некоторому выбранному контуру. Чаще даже вычисляют не сам интеграл, а предел такого интеграла, когда контур бесконечно увеличивают. Сразу же возникают вопросы: какую функцию взять? как выбрать контур? как получить из проведенного рассмотрения исходный интеграл? Ответы на эти вопросы часто зависят от формулировки задачи. Поэтому мы остановимся только на трех стандартных, чаще всего используемых подходах.

3.1. Методы и примеры

Случай 1. Рассмотрим интеграл вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)d\varphi$.

Здесь через $R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ обозначена рациональная функция от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Выразим по формулам Эйлера синус и косинус и сделаем замену $e^{i\varphi} = z$. Получим

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

$$i\varphi = \ln z, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

При изменении φ от 0 до 2π точка $z = e^{i\varphi}$ описывает единичную окружность $|z| = 1$ в положительном направлении. Таким образом, интеграл примет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi,\, \cos\varphi) d\varphi = \oint\limits_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz,$$

где $\dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{z - z^{-1}}{2i}, \dfrac{z + z^{-1}}{2}\right) = \tilde{R}(z)$ — рациональная функция. Полученный интеграл вычисляется с использованием теоремы вычетов.

Пример 11. Вычислить $I = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} d\varphi$.

Делаем замену $e^{i\varphi} = z$. Выше указано, как $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и $d\varphi$ выражаются через z, поэтому $\dfrac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} = \dfrac{2 + \frac{z+z^{-1}}{2}}{2 - \frac{z-z^{-1}}{2i}} = -i\dfrac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 4iz - 1}$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} d\varphi = \oint\limits_{|z|=1} -i\frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 4iz - 1} \cdot \frac{dz}{iz} = -\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя — точки $z = 0$, $z = i(2 + \sqrt{3})$, $z = i(2 - \sqrt{3})$. Внутрь контура $|z| = 1$ попадают точки $z = 0$ и $z = i(2 - \sqrt{3})$. Найдем вычеты в этих точках. Обе — простые полюса.

$$\operatorname{res}(f(z), 0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} z = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 4iz - 1} = -1.$$

$$\operatorname{res}(f(z), i(2-\sqrt{3})) = \lim_{z\to i(2-\sqrt{3})} \frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}(z-i(2-\sqrt{3})) =$$

$$= \lim_{z\to i(2-\sqrt{3})} \frac{z^2+4z+1}{z(z-i(2+\sqrt{3}))} = 1 + i\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно,

$$I = -2\pi i\Big(\operatorname{res}(f(z),0) + \operatorname{res}(f(z), i(2-\sqrt{3}))\Big) =$$

$$= -2\pi i\left(-1+1+i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Случай 2. Рассмотрим интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Это несобственный интеграл первого рода. Будем считать, что функция $f(x)$ определена на всей действительной оси и может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость так, что ее продолжение удовлетворяет дополнительным условиям.

Теорию вычетов здесь применяем следующим образом. Не меняя подынтегральную функцию, рассмотрим интеграл от нее по замкнутому контуру, образованному полуокружностью C_R и диаметром $[-R,R]$. Радиус выберем настолько большим, чтобы внутрь контура попали все изолированные особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Далее запишем, что

$$\int\limits_{-R}^{+R} f(z)dz + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(f(z), z_k), \quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $R\to\infty$. Получим

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(f(z), z_k),$$

где правая часть от R не зависит.

Отметим, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$, т. е. это исходный интеграл. Для вычисления $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz$ применим лемму.

Лемма 3.1.1. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$, и существуют положительные числа R_0, M, δ такие, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R_0$, выполнено неравенство $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.*

На самом деле, для доказательства того, что предел интеграла по полуокружности равен нулю, наличие особых точек неважно. Важна оценка модуля функции. Причем на практике можно ограничиться условием: если функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\cdot z = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Мы приводим лемму в такой формулировке, чтобы основную теорему для этого случая вычисления интегралов сформулировать более компактно.

Теорема 3.1.2. *Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси, аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость так, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(f(z), z_k), \quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Пример 12. Вычислить $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)^3}dx$.

Подынтегральную функцию можно аналитически продолжить на верхнюю комплексную полуплоскость как $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^3}$. Эта функция не имеет особых точек на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет одну особую точку $z = 2i$. Так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\cdot z = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{(z^2+4)^3} = 0$ (степень знаменателя равна 6, что больше степени числителя), то условия леммы выполняются. Тогда по теореме

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^3}dx = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{(z^2+4)^3}, 2i\right).$$

Осталось найти значение вычета.

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(\frac{1}{(z^2+4)^3}, 2i\right) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{(z^2+4)^3}(z-2i)^3\right)'' = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{(z+2i)^3}\right)'' = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2i}(-3)(-4)\frac{1}{(z+2i)^5} = \frac{12}{2\cdot(4i)^5} = \frac{3}{512i}.\end{aligned}$$

Отсюда $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^3}dx = 2\pi i \cdot \frac{3}{512i} = \frac{3\pi}{256}$.

Случай 3. Рассмотрим интегралы вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx$. Пусть $m > 0$.

Чаще всего функция $f(x)$ — это рациональная дробь. Поэтому для того, чтобы интеграл сходился, нужно чтобы знаменатель этой дроби не имел действительных корней и степень числителя была ниже степени знаменателя хотя бы на единицу.

В примерах этого вида мы действуем так: в качестве продолжения функции берём не подынтегральную, а функцию вида $f(z)e^{imz}$. Контур интегрирования, как и в предыдущем случае, образован полуокружностью C_R и диаметром $[-R,R]$. Далее запишем, что

$$\int\limits_{-R}^{+R} f(z)e^{imz}dz + \int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(f(z), z_k), \quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $R \to \infty$. Получим

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(z)e^{imz}dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(f(z), z_k),$$

где правая часть от R не зависит.

Для доказательства, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 0$ применим лемму Жордана.

Лемма 3.1.3. ***(Жордана)*** *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$, и равномерно относительно $\arg z$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$ стремится к 0 при $|z| \to \infty$. Тогда при $m > 0$: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 0$, где C_R — дуга полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости.*

Приводить полное доказательство не будем, сделаем только несколько замечаний.

Замечание 1. Фраза «функция $f(z)$ равномерно относительно $\arg z$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$ стремится к 0 при $|z| \to \infty$» означает, что для функции $f(z)$ при $|z| = R$ справедлива оценка $|f(z)| < \mu_R$, где $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$.

Замечание 2. Если $m < 0$ и $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости, то $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 0$, где C_R — дуга полуокружности $|z| = R$ в нижней полуплоскости.

Лемма Жордана позволит сформулировать основную теорему для этого случая вычисления интегралов.

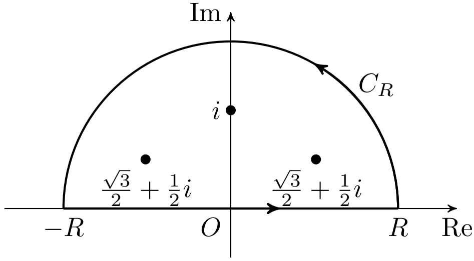
Теорема 3.1.4. *Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси, может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость так, что $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(f(z)e^{imz}, z_k),$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Пример 13. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx.$

Подынтегральная функция чётная, поэтому $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx.$ В качестве аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость выбираем функцию $f(z) = \dfrac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}$. Её особыми точками являются нули знаменателя, среди которых в верхнюю полуплоскость попадают $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = \cos\dfrac{3\pi}{6} + i\sin\dfrac{3\pi}{6} = i$, $z_3 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, являющиеся простыми полюсами.



Несложно убедиться, что условия леммы Жордана и приведённой теоремы выполнены, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname{res}\left(\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}, z_k\right).$$

Осталось найти значение вычетов:

$$\operatorname{res}\left(\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}(z-z_1) = z_1^3e^{2iz_1}\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^6+1} =$$
$$= z_1^3e^{2iz_1}\lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = z_1^3e^{2iz_1}\frac{1}{6z_1^5} = \frac{1}{6z_1^2}e^{2iz_1}.$$

Обратим внимание, что для вычисления предела применили правило Лопиталя. Аналогично вычислим остальные вычеты:

$$\operatorname{res}\left(\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}, z_2\right) = \frac{1}{6z_2^2}e^{2iz_2}, \qquad \operatorname{res}\left(\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}, z_3\right) = \frac{1}{6z_3^2}e^{2iz_3}.$$

Подставим найденные значения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{6z_1^2}e^{2iz_1} + \frac{1}{6z_2^2}e^{2iz_2} + \frac{1}{6z_3^2}e^{2iz_3}\right).$$

Теперь преобразуем, записывая e^{2iz_k} по формуле Эйлера и преобразуя $\dfrac{1}{6z_k^2} = \dfrac{z_k}{6z_k^3}$ с учётом $z_1^3 = i$, $z_2^3 = -i$, $z_3^3 = i$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^3e^{2iz}}{z^6+1}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\cos 2x}{x^6+1}dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(z_1e^{2iz_1} + z_2e^{2iz_2} + z_3e^{2iz_3}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}e^{(\sqrt{3}+i)i} + ie^{-2} + \frac{-\sqrt{3}+i}{2}e^{(-\sqrt{3}+i)i}\right) =$$
$$= i\frac{\pi}{3}\left((\sqrt{3}\sin\sqrt{3} + \cos\sqrt{3})e^{-1} - e^{-2}\right).$$

Тогда $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\cos 2x}{x^6+1}dx$ и $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx$ — соответственно действительная и мнимая части получившегося значения, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}\left(\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3} + \cos\sqrt{3}\right)e^{-1} - e^{-2}\right).$$

Отсюда исходный интеграл равен

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}\left(\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3} + \cos\sqrt{3}\right) e^{-1} - e^{-2}\right).$$

3.2. Примеры для самостоятельной работы

1. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\varphi} d\varphi.$

2. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$

3. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx.$

4. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{3 + 2\sin\varphi} d\varphi.$

5. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{5 - 4\cos\varphi} d\varphi.$

6. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1} dx.$

7. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

Глава 4

Логарифмический вычет и его приложения

4.1. Основные определения и теоремы

Будем рассматривать функции $f(z)$, аналитические в некоторой проколотой окрестности точки z_0. При этом точка z_0 может быть изолированной особой точкой, но также $f(z)$ может и не терять аналитичности в этой точке. Для таких функций $f(z)$ в точках описанного вида рассмотрим понятие *логарифмического вычета*.

Определение 4.1.1. Логарифмическим вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 (описанного выше вида) будем называть вычет её логарифмической производной $(\ln f(z))' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ в этой точке:

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

где простой замкнутый контур L полностью лежит в ранее описанной проколотой окрестности точки z_0 (в качестве L можно взять окружность $|z - z_0| = \delta$ с достаточно малым радиусом δ).

Пример 14. Вычислить логарифмический вычет $f(z) = ze^{1/z}$ в точке $z_0 = 0$.

Так как $f'(z) = (z)' \cdot e^{1/z} + z(e^{1/z})' = e^{1/z} + ze^{1/z} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = e^{1/z} + $ $+ ze^{1/z} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = e^{1/z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)$, то логарифмическая производная равна $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^{1/z}\left(1-\frac{1}{z}\right)}{ze^{1/z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$.

Вычет функции равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения в окрестности точки z_0. Так как $\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$ и так является разложением по степеням z (т. е. в окрестности $z_0 = 0$), а слагаемое с $\frac{1}{z}$ присутствует с коэффициентом 1, то $c_{-1} = 1$. Поэтому

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, 0\right) = \operatorname{res}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}, 0\right) = 1.$$

Для некоторых видов точек логарифмический вычет можно найти с помощью следующих утверждений.

Теорема 4.1.2. *Пусть z_0 — нуль кратности k аналитической функции $f(z)$. Тогда логарифмическая производная $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет в точке z_0 простой полюс, а логарифмический вычет равен кратности нуля:* $\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = k$.

Теорема 4.1.3. *Пусть z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда логарифмическая производная $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет в точке z_0 простой полюс, а логарифмический вычет равен порядку полюса с противоположным знаком:* $\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = -m$.

Пример 15. Найти логарифмический вычет функции $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ в точках 1, -1, i, $-i$.

Перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Отметим, что точки 1 и -1 являются нулями числителя (первой кратности), а знаменатель в этих точках не обращается в 0. Тогда точки 1 и -1 — нули первой кратности функции $f(z)$, поэтому

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, 1\right) = 1, \qquad \operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, \, -1\right) = 1.$$

В то же время точки i и $-i$ являются полюсами функции $f(z)$ порядка 2 (корни знаменателя второй кратности, при этом числитель в точках $\pm i$ отличен от 0). По соответствующей теореме

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, i\right) = -2, \qquad \operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, \, -i\right) = -2.$$

Для некоторых утверждений удобно ввести понятие *логарифмического вычета относительно контура.*

Определение 4.1.4. Пусть функция $f(z)$ на замкнутом контуре L является аналитической и не имеет на нём нулей. Тогда значение

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, L\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура L.

Теорема 4.1.5. ***(о логарифмическом вычете)*** *Пусть функция $f(z)$, отличная от константы, аналитична в односвязной области D (включая границу — кусочно гладкий контур L), за исключением, быть может, конечного числа полюсов. Пусть на контуре L функция $f(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов, а в области D количество нулей конечно. Тогда*

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, L\right) = N - P,$$

где N и P — соответственно количество нулей (с учётом их кратности) и полюсов (с учётом их порядка) функции $f(z)$ в D.

Следствие 4.1.6. *Для многочлена $P_n(z)$ логарифмический вычет относительно контура L равен количеству корней (с учётом их кратности) внутри L.*

Пример 16. Найти логарифмический вычет функции $f(z) = (e^z - 4)^4$ по контуру $|z| = 9$.

Нули функции $f(z)$ — корни уравнения $e^z = 4$, то есть числа $z_k = \operatorname{Ln} 4 = \ln 4 + i \arg 4 + 2\pi k i = 2\ln 2 + 2\pi k i$ (для целых k). Несложно убедиться, что корни, соответствующие $k = 0$ и $k = \pm 1$, лежат внутри контура $|z| = 9$. Действительно, $|z_0| = |2\ln 2| = 2\ln 2 < 9$, $|z_1| = |2\ln 2 + 2\pi i| \leqslant 2\ln 2 + 2\pi < 9$, аналогично для z_{-1}. А для $|k| \geqslant 2$: $|z_k| = |2\ln 2 + 2\pi k i| = \sqrt{(2\ln 2)^2 + (2\pi k)^2} \geqslant 2\pi|k| \geqslant 4\pi > 9$, т. е. остальные корни лежат вне контура.

Таким образом, функция $f(z) = (e^z - 4)^4$ имеет внутри контура $|z| = 9$ три нуля ($2\ln 2$, $2\ln 2 + 2\pi i$, $2\ln 2 - 2\pi i$). Все они имеют кратность 4 (за счёт возведения в степень 4), поэтому каждый корень мы посчитаем 4 раза, отсюда количество корней внутри контура $|z| = 9$ (с учётом их кратности) равно $4+4+4 = 12$. Полюсов внутри контура нет (функция является аналитической на $\mathbb{C}$), поэтому по теореме о логарифмическом вычете: $\operatorname{res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, |z| = 9\right) = 12 - 0 = 12$.

Пример 17. Найти логарифмический вычет функции $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^4 - 16)^3}$ по контуру $|z - 2 - 2i| = 3$.

В точке 0 функция $f(z)$ имеет нуль второй кратности (за счёт числителя) и он лежит внутри контура (окружности с центром в $2 + 2i$ и радиуса 3).

Знаменатель имеет нули ± 2 и $\pm 2i$ (все кратности 3), в этих точках функция имеет полюсы порядка 3 (числитель в этих точках отличен от 0). Однако внутри контура $|z - 2 - 2i| = 3$ лежат только два из этих полюсов: 2 и $2i$.

Таким образом, функция $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^4 - 16)^3}$ имеет внутри контура $|z - 2 - 2i| = 3$ нуль кратности 2 ($z = 0$) и два полюса порядка 3 ($z = 2$ и $z = 2i$). По теореме о логарифмическом вычете $\operatorname{res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, |z - 2 - 2i| = 3\right) = 2 - 2 \cdot 3 = -4$.

4.2. Принцип аргумента

Рассмотренная теорема о логарифмическом вычете имеет любопытный геометрический смысл: можно проследить, как меняется аргумент функции $f(z)$ при обходе контура L, и связать это изменение со значением интеграла от логарифмической производной. Несложно доказать следующую теорему.

Теорема 4.2.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична на простом кусочно гладком контуре L и не имеет нулей на этом контуре. Тогда $\oint\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$, где значение $\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$ — приращение аргумента точки $f(z)$ на комплексной плоскости, когда точка z проходит контур L в положительном направлении.*

Последний результат по теореме о логарифмическом вычете можно записать в форме, который называется *принципом аргумента.*

Утверждение 4.2.2. ***(принцип аргумента)*** *В условиях теоремы о логарифмическом вычете и в тех же обозначениях*

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg} f(z).$$

Следствие 4.2.3. *Пусть функция $f(z)$, аналитичная в односвязной области D и её границе — кусочно гладком контуре L, не имеет нулей на L. Тогда в области D функция имеет $\frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$ нулей (каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность).*

Следствие из принципа аргумента применимо в задачах подсчёта количества корней многочлена в полуплоскостях и квадрантах. Для случая полуплоскости обычно используется такой подход:

1. Рассматривается контур, состоящий из отрезка (участка координатной оси) и дуги (граница полукруга); при этом предполагается полукруг настолько большого радиуса, что в него заведомо попадают все корни многочлена в рассматриваемой полуплоскости;

2. Контур задаётся параметрически, для этого параметрического определения вычисляется полное изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе контура;

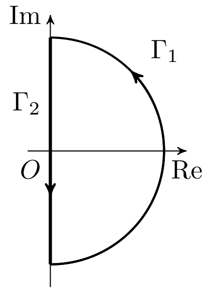
3. По следствию из принципа аргумента вычисляется количество корней в полукруга (а значит, и в полуплоскости).

Покажем особенности использования такого способа на примере.

Пример 18. Найти количество корней уравнения $z^8 + 2z^3 - 1 = 0$ в правой комплексной полуплоскости.

Обозначим $P(z) = z^8 + 2z^3 - 1$.

Для начала покажем, что уравнение не имеет чисто мнимых корней (т.е. корни не попадают на мнимую ось). В самом деле, если бы уравнение имело чисто мнимый корень, то он имел бы вид it для действительного $t \neq 0$. Но тогда $(it)^8 - 2(it)^3 - 1 = t^8 - 1 + 2it$ — имеет ненулевую мнимую часть, поэтому не принимает значения 0.



Рассмотрим контур Γ, состоящий из дуги Γ_1 ($|z| = R$, $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$, $R > 0$) и отрезка Γ_2 от iR до $-iR$ (рисунок справа). Так как многочлен имеет конечное число корней, то можно считать R настолько большим, что все корни, лежащие в правой полуплоскости, оказываются внутри рассматриваемого контура (а на участке Γ_2 они не лежат по доказанному ранее). Согласно принципу аргумента, количество корней внутри контура Γ (а значит и во всей правой полуплоскости) равно $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} P(z)$.

Приращение аргумента $f(z)$ по контуру L можно разбить на сумму приращений по отдельным участкам (с сохранением ориентации):

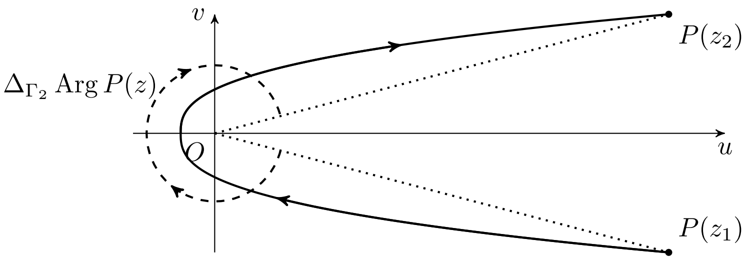
$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} P(z) = \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg} P(z) + \Delta_{\Gamma_2} \operatorname{Arg} P(z).$$

Теперь представим многочлен в виде $P(z) = z^8\left(1 + \dfrac{2}{z^5} - \dfrac{1}{z^8}\right)$. Пользуясь свойством аргумента произведения, получим:

$$\Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg} P(z) = \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg} z^8 + \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^8}\right) = \Delta_{\Gamma_1} 8 \operatorname{Arg} z +$$
$$+\Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^8}\right) = 8\Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg} z + \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^8}\right).$$

При движении по дуге Γ_1 аргумент z меняется на π (от $-\pi/2$ до $\pi/2$), поэтому первое слагаемое в этом выражении равно 8π. Для второго слагаемого удобнее вычислить не значение при конкретном R, а предел при $R \to \infty$. Так как $\lim\limits_{R\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{z^5}-\dfrac{1}{z^8}\right) = 1$, то при больших R значения этой функции лежат в малой окрестности 1. Поэтому изменение аргумента происходит в пределах угла, под которым эта окрестность видна из точки 0, но этот угол стремится к 0 с ростом R: $\lim\limits_{R\to\infty}\Delta_{\Gamma_1}\operatorname{Arg}\left(1+\dfrac{2}{z^5}-\dfrac{1}{z^8}\right) = 0$.

Отсюда $\lim\limits_{R\to\infty}\Delta_{\Gamma_1}\operatorname{Arg}P(z) = 8\pi + 0 = 8\pi$. Теперь рассмотрим участок Γ_2. Параметрически его можно задать как $z = -it$, где t пробегает значения от $-R$ до R (тогда Γ_2 пробегается сверху вниз). Подставим в многочлен: $P(-it) = (-it)^8 + 2(-it)^3 - 1 = t^8 - 1 + 2t^3 i$. Действительная и мнимая часть образа (значения $P(z)$ в точках Γ_2) равны $u(t) = t^8 - 1$, $v(t) = 2t^3$, так что можно выразить u через v: $t = \sqrt[3]{v/2}$, откуда $u = (\sqrt[3]{v/2})^8 - 1 = \dfrac{\sqrt[3]{v^8}}{\sqrt[3]{256}} - 1$ (при движении по отрезку Γ_2 начальной точке при $t_1 = -R$ соответствует $v_1 = -2R^3$, конечной точке при $t_2 = R$ — значение $v_2 = 2R^3$). Кривая (образ отрезка Γ_2 для функции $P(z)$) представлена на рисунке ниже.



Пунктирной стрелкой обозначено изменение аргумента $P(z)$ при движении z по Γ_2. Легко убедиться, что $\lim\limits_{R\to\infty}\Delta_{\Gamma_2}\operatorname{Arg}P(z) = -2\pi$ (действительно, острый угол на чертеже равен $\arg P(z_2) - \arg P(z_1) = 2\operatorname{arctg}\dfrac{2R^3}{R^8+5} \to 0$ при $R \to \infty$). Знак (минус) связан с тем, что при движении z по Γ_2 точка $P(z)$ обходит $z = 0$ против часовой стрелки.

Находим полное изменение аргумента при обходе контура Г:

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_\Gamma \operatorname{Arg} P(z) = \lim_{R\to\infty} \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg} P(z) + \lim_{R\to\infty} \Delta_{\Gamma_2} \operatorname{Arg} P(z) = \\ = 8\pi + (-2\pi) = 6\pi.$$

По следствию из принципа аргумента количество корней внутри контура (а с учётом выбора контура — и во всей правой комплексной полуплоскости) равно $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} P(z) = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$.

Задача решена, но можно более подробно описать расположение корней в правой полуплоскости. На положительной действительной полуоси не более одного корня, так как $P(x) = x^8 + 2x^3 - 1$ от действительного $x \in [0, +\infty)$ возрастает, поэтому обращаться в 0 может не более чем в одной точке. А такая точка существует, так как $P(0) = -1 < 0$ и $P(1) = 2 > 0$. В правой полуплоскости осталось ещё два комплексных корня. Так как коэффициенты $P(z)$ действительны, то его комплексные корни разбиваются на пары сопряжённых (если $P(z_0) = 0$, то $P(\overline{z_0}) = 0$). Поэтому оставшиеся корни — пара сопряжённых комплексных чисел (один из этих корней лежит в первом квадранте, а другой — в четвёртом).

4.3. Теорема Руше

Использованная при рассмотрении предыдущего примера идея с вынесением «большого» множителя при нахождении изменения аргумента помогает в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. ***(Руше)*** *Пусть функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитические в односвязной области D и ограничивающем её контуре L, а во всех точках контура L выполняется неравенство $|\varphi(z)| > |f(z)|$. Тогда функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + f(z)$ имеют одинаковое количество нулей внутри D.*

Пример 19. Найти количество корней уравнения $e^z - 5z^7 + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.

Рассмотрим функции $f(z) = e^z$ и $\varphi(z) = -5z^7 + 1$. На окружности $|z| = 1$ имеем $\operatorname{Re} z \leqslant 1$, поэтому $|f(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leqslant e^1 < 3$. При этом $|\varphi(z)| = |-5z^7 + 1| \geqslant |-5z^7| - |1| = 5|z|^7 - 1 = 5 - 1 = 4$. Таким образом, на контуре $|z| = 1$ выполняются все условия теоремы Руше

($|\varphi(z)| \geqslant 4 > 3 > |f(z)|$), поэтому в круге $|z| < 1$ аналитическая функция $\varphi(z) + f(z) = e^z - 5z^7 + 1$ имеет такое же количество нулей, что и функция $\varphi(z) = -5z^7 + 1$. Но нули функции $\varphi(z)$ — это корни уравнения $5z^7 = 1$, т. е. семь значений $\sqrt[7]{1/5}$, которые лежат внутри контура. Тогда и исходное уравнение в круге $|z| < 1$ имеет 7 корней.

Пример 20. Найти количество корней многочлена $P(z) = z^3 - 3z - 6$: (а) в круге $|z| < 1$, (б) в кольце $1 < |z| < 3$.

(а) Рассмотрим аналитические $f(z) = z^3$ и $\varphi(z) = -3z - 6$. На границе круга (окружности $|z| = 1$): $|f(z)| = |z^3| = |z|^3 = 1$, но $|\varphi(z)| = |-6 - 3z| \geqslant |-6| - |3z| = 6 - 3 = 3 > |f(z)|$, поэтому $P(z)$ в круге $|z| < 1$ имеет столько же корней, сколько $-3z - 6 = 0$, т. е. ни одного (точка $z = -2$ лежит вне круга).

(б) Теперь $\varphi(z) = z^3$ и $f(z) = -3z - 6$. На окружности $|z| = 3$: $|\varphi(z)| = |z^3| = |z|^3 = 27$, $|f(z)| = |-3z-6| \leqslant 3|-z| + |-6| = 9 + 6 = 15 < |\varphi(z)|$, поэтому $P(z)$ имеет в круге $|z| < 3$ столько же корней, сколько многочлен z^3, а он имеет корень 0 кратности 3. При этом в круге $|z| < 1$ корней $P(z)$ нет, на окружности $|z| = 1$ тоже нет корней ($|z^3 - 3z| \leqslant |z^3| + |-3z| = |z^3| + 3|z| = 4$, поэтому не может быть равно 6). Значит, все три корня $P(z)$ лежат в кольце $1 < |z| < 3$.

Теорема Руше применима в доказательстве известного свойства:

Теорема 4.3.2. ***(основная теорема алгебры)*** *Алгебраический многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ с комплексными коэффициентами (и $a_n \neq 0$) имеет ровно n комплексных корней (с учётом их кратности).*

Пример 21. Найти количество корней уравнения $z^5 - z^4 + 8z^3 - 5 = 0$ в области $|z| > 2$.

Пусть $\varphi(z) = 8z^3$, $f(z) = z^5 - z^4 - 5$. На контуре $|z| = 2$: $|\varphi(z)| = |8z^3| = 8|z|^3 = 64$, при этом $|f(z)| = |z^5 - z^4 - 5| \leqslant |z^5| + |z^4| + 5 = 32 + 16 + 5 = 53 < |\varphi(z)|$. По теореме Руше, исходное уравнение имеет в круге $|z| < 2$ столько же корней, сколько уравнение $8z^3 = 0$, а оно имеет корень 0 кратности 3. На самом контуре корней нет (равенство $z^5 - z^4 - 5 = -8z^3$ при $|z| = 2$ не выполняется, так как модуль левой части меньше модуля правой). Всего исходное уравнение имеет 5 корней (корни многочлена пятой степени), из них три лежат в круге $|z| \leqslant 2$. Поэтому вне этого круга лежат два корня.

Пример 22. Найти количество корней уравнения $z^8 + 2z^3 - 1 = 0$ во втором и третьем квадрантах.

Обозначим $P(z) = z^8 + 2z^3 - 1$. Ранее доказали, что $P(z)$ не имеет чисто мнимых корней, имеет единственный положительный действительный корень и пару сопряжённых корней в первом и четвёртом квадранте. Значит, на левой полуплоскости $P(z)$ имеет 5 корней.

При действительных x рассмотрим $P(x)$. Так как $P'(x) = 8x^7 + 6x^2 = 2x^2(4x^5 + 3)$ отрицательна при при $x \in (-\infty, -\sqrt[5]{3/4})$ и положительна при $z \in (-\sqrt[5]{3/4}, 0)$, то на каждом из упомянутых промежутков у $P(x)$ в силу монотонности не больше одного корня. Но $P(x)$ меняет знак на $(-\infty, -\sqrt[5]{3/4})$ ($P(-10) > 0$ и $P(-1) < 0$), поэтому на этом промежутке есть корень. А на $(-\sqrt[5]{3/4}, 0)$ многочлен возрастает, но $P(0) < 0$, поэтому корней здесь нет.

Таким образом, из пяти корней в левой полуплоскости ровно один лежит на отрицательной действительной полуоси, а остальные четыре разбиваются на две пары комплексно сопряжённых (два корня лежат строго во втором квадранте и два корня — строго в третьем).

4.4. Примеры для самостоятельной работы

1. Вычислить логарифмический вычет:

(а) функции $\dfrac{(z^4 - z^2)^2}{(z^2 + 4)^3}$ в точках 0, 1, $2i$ и $-2i$;

(б) функции $\frac{1}{z} e^{z - z^{-1}}$ в точке 0;

(в) функции $(e^{2z} + 4i)^3$ относительно контура $|z| = 5$;

(г) функции $\dfrac{\sin^3 z}{(z^4 + 16)^2}$ относительно контура $|z - 1| = 2$;

(д) функции $\operatorname{tg}^5 z$ относительно контура $|z| = 5$.

2. Найти количество корней уравнения $z^6 + 2z^3 - 15 = 0$

(а) в круге $|z| < 1$; **(б)** в кольце $1 < |z| < 4$.

3. Найти количество корней уравнения $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$

(а) в правой полуплоскости; **(б)** в первом квадранте.

4. Найти количество корней уравнения $e^z + 3 = 12z^n$ (для натурального n) в круге $|z| < 2$.

5. Найти количество корней уравнения $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$ в правой полуплоскости.

Глава 5

Конформные отображения

5.1. Общие свойства конформных отображений

При изучении функций комплексного переменного наглядного представления в виде графика построить нельзя. Аргументом функции является комплексное число (представленное действительной и мнимой частью), то же самое справедливо для значений. В результате график в привычном понимании — как множество точек вида $(z,f(z))$ — оказывается четырёхмерным.

Тем не менее мы привыкли геометрически представлять комплексное число $z = x + iy$ как точку с координатами (x,y) на плоскости, а функция f комплексного переменного переводит точку z в точку $w = u + iv = f(z)$ с координатами (u,v). Аналогично можно отобразить множества точек (кривые, области и другие): каждой точке $z \in D$ сопоставим образ — точку $w = f(z) \in D'$. При этом можно говорить, что функция f отображает множество D в множество точек D', а графически это представить так: изобразить исходное множество точек на плоскости и его образ при действии функции f.

Особый интерес представляют отображения, которые сохраняют некоторые геометрические свойства.

Определение 5.1.1. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* z_0, если оно сохраняет углы между кривыми.

Иначе говоря, если какие-то кривые пересекались в точке z_0 под некоторым углом, то их образы (кривые, в которые они переводятся функцией f) пересекаются в точке $w_0 = f(z_0)$ под тем же углом. Будем также считать, что сохраняется ещё и направление отсчёта этого угла (в общем виде такие отображения называют конформными отображениями первого рода, а если направление отсчёта меняется — то второго рода).

Определение 5.1.2. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в области* D, если оно конформно в каждой точке $z_0 \in D$.

Локальные свойства (в малой окрестности точки z_0) отображения, задаваемого аналитической функцией $f(z)$, во многом определяются значением её производной в точке z_0:

1. Модуль $|f'(z_0)|$ является коэффициентом линейного растяжения в точке z_0;

2. Аргумент $\arg f'(z_0)$ определяет угол поворота кривой, проходящей через z_0, при отображении;

3. Квадрат модуля $|f'(z_0)|^2$ (якобиан) представляет собой коэффициент изменения площади малой окрестности z_0 при этом отображении.

Отметим, что если две кривые, проходящие через z_0, при отображении в окрестности этой точки повернутся на $\arg f'(z_0)$, то угол между ними останется прежним.

Основное внимание уделим таким задачам:

1. Найти образ заданной области при заданном отображении;

2. Для двух заданных областей найти функцию, конформно отображающую первую область во вторую;

3. Для заданного класса отображений описать специфические геометрические свойства.

Существование решения второй из перечисленных задач гарантируется следующей теоремой и следствием из неё.

Теорема 5.1.3. ***(Римана)*** *Если граница односвязной области D в расширенной комплексной плоскости состоит более чем из одной точки, то существует аналитическая в D функция $w = f(z)$, конформно отображающая D на круг $|w| < 1$. Если при этом для заданных точек z_0, w_0 и угла φ потребовать, чтобы $f(z_0) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = \varphi$, то отображение определено однозначно.*

Следствие 5.1.4. *Если границы односвязных областей D_1 и D_2 в расширенной комплексной плоскости состоят более чем из одной точки, то существует аналитическая в D_1 функция $w = f(z)$, конформно отображающая D_1 на D_2. (Условия однозначности такие же, как в исходной теореме.)*

Теорема Римана гарантирует наличие решения, но не даёт способа его построения. Само отображение, даже для довольно простых областей, может определяться очень сложно (например, функция, отображающая заданный треугольник в круг). А если ограничиваться каким-то классом функций, то такого отображения может и не существовать.

Для нахождения отображений или образов областей можно использовать ещё одно полезное утверждение: при некоторых условиях области переходят в области, а границы областей — в границы.

Теорема 5.1.5. ***(принцип соответствия границ)*** *Если функция $f(z)$ конформно (и однолистно) отображает односвязную область D_1 в односвязную область D_2, а границы этих областей (Γ_1 и Γ_2 соответственно) — кусочно гладкие контуры, то $f(z)$ непрерывно продолжается на контур Γ_1, взаимно однозначно отображая его на Γ_2 (с сохранением направления обхода).*

Теорема 5.1.6. ***(принцип сохранения области)*** *Если аналитическая $f(z) \neq const$ отображает область D_1 на $D_2 = f(D_1)$, то D_2 — тоже область (открытое линейно связное множество).*

Обсудим простые, но важные виды конформных отображений.

5.2. Линейные отображения

Начнём с линейных отображений (преобразований).

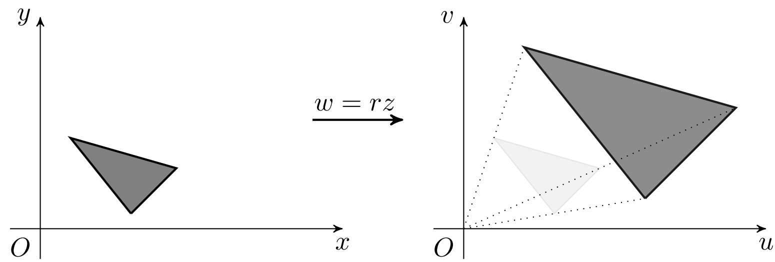
Определение 5.2.1. Отображение называется *линейным*, если задаётся линейной функцией:

$$w = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

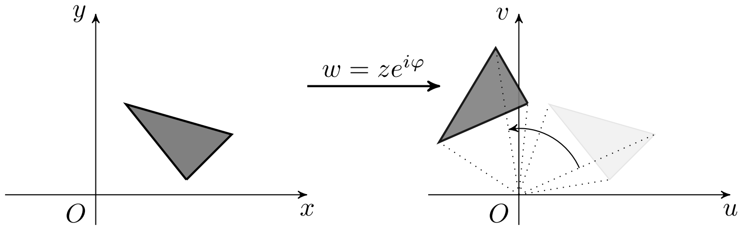
Сразу можно отметить, что любая конечная точка z_0 комплексной плоскости отображается в конечную точку $w_0 = az_0 + b$, а для бесконечно удалённой точки имеем $w(\infty) = \infty$. Несложно убедиться, что разные точки z_1 и z_2 отображаются в разные точки w_1 и w_2 (т. е. отображение является *однолистным*), а обратное отображение существует $\left(z = \dfrac{1}{a}w - \dfrac{b}{a}\right)$ и является линейным. Так как $w'(z_0) = a \neq 0$ для каждой точки z_0, то отображение является конформным на всей комплексной плоскости (также можно сказать, что это справедливо и для $z = \infty$, где линейная функция имеет простой полюс).

Таким образом, имеем однолистное конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Основные геометрические свойства линейного отображения определяются тем, что функция $w = az + b$ является композицией двух функций: домножения на комплексную константу ($w = az$, $a = re^{i\varphi}$, $r = |a| > 0$) и прибавления константы ($w = z + b$).

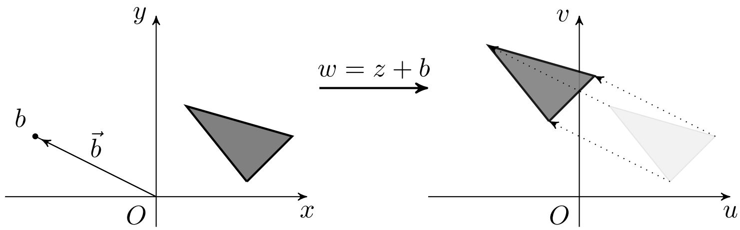
При отображении $w = rz$ ($r = |a| > 0$) модуль каждого числа z умножается на r, а аргумент не меняется. Это соответствует растяжению (преобразованию подобия, гомотетии) комплексной плоскости с коэффициентом r с центром в 0.



При отображении $w = ze^{i\varphi}$ произвольного z модуль не меняется (множитель $e^{i\varphi}$ имеет единичный модуль), а к аргументу прибавляется φ. Такое отображение осуществляет поворот на угол φ.



Функция $w = z + b$ сдвигает каждую точку z на радиус-вектор точки b, поэтому такое отображение соответствует параллельному переносу на $\vec{b}$.



Таким образом, композиция этих трёх преобразований (линейная функция $w = az + b$) осуществляет произвольные движения и преобразования подобия. Среди движений реализуются только сохраняющие ориентацию контуров (например, осевая симметрия не осуществляется линейной функцией). Также отметим, что композиция линейных преобразований (отображения) тоже линейна.

В большинстве случаев на комплексной плоскости есть точка, остающаяся на месте при линейных преобразованиях.

Определение 5.2.2. Точка z_0 называется *неподвижной точкой* отображения $f(z)$, если $f(z_0) = z_0$.

Пример 23. Выяснить, при каких значениях $a \neq 0$ и b отображение $w = az + b$ имеет неподвижную точку.

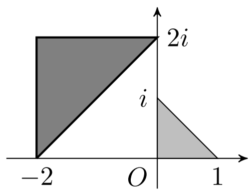
Если z_0 — неподвижная точка, то $w(z_0) = z_0$. Тогда $az_0 + b = z_0$, откуда $(a - 1)z_0 = b$. При $a \neq 1$ любому значению b соответствует единственное значение $z_0 = -\dfrac{b}{a-1}$. Если $a = 1$, то отображение имеет вид $w = z + b$ (соответствует параллельному переносу). Несложно убедиться, что при $b \neq 0$ таких z_0 нет (равенство $z_0 = z_0 + b$

невозможно), а при $b = 0$ отображение тождественно $w = z$ — в нём каждая точка неподвижна.

Получили, что неподвижные точки имеет любое линейное отображение, отличное от параллельного переноса на ненулевой вектор.

При наличии неподвижной точки z_0 линейное отображение запишем в виде $w - z_0 = a(z - z_0)$. Геометрический смысл здесь такой: линейное отображение, не являющееся параллельным переносом, является комбинацией поворота и преобразования подобия относительно неподвижной точки z_0 (поворотной гомотетией с центром в z_0).

Пример 24. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами 0, 1, i в треугольник с вершинами -2, $2i$, $-2+2i$. Определить неподвижную точку найденного отображения.



Способ 1. Линейная функция $w = az + b$ осуществляет подобия и движения, поэтому исходный прямоугольный треугольник отобразится в подобный ему треугольник, а гипотенуза перейдёт в гипотенузу. Отрезок между точками 1 и i (гипотенузу первоначального треугольника) можно перевести в отрезок между $2i$ и -2 двумя способами: $w(1) = -2$ и $w(i) = 2i$ либо наоборот — $w(1) = 2i$ и $w(i) = -2$. Выбрать между этими двумя способами можно так: построить отображение и проверить, перешла ли третья вершина в нужную точку, либо представить, как именно должно осуществиться преобразование (допустимы расширение или сжатие, повороты и параллельные переносы), и понять, куда при этом переходят концы отрезка.

Построим функцию $w = az+b$ по условиям $w(1) = -2$ и $w(i) = 2i$. Подставим эти точки в функцию, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = -2, \\ a \cdot i + b = 2i. \end{cases}$$

Запишем разность этих уравнений, получим $a(1 - i) = -2 - 2i$. Отсюда $a = \dfrac{-2(1+i)}{1-i} = -2i$. Тогда $b = -2-a = -2+2i$. В результате получаем линейную функцию $w = -2iz-2+2i$. Несложно убедиться, что третья вершина исходного треугольника переходит в нужную вершину нового треугольника: $w(0) = -2i \cdot 0 - 2 + 2i = -2 + 2i$.

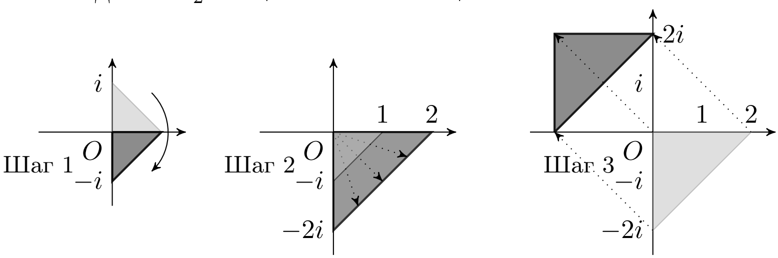
Также можно показать, что отображение, построенное по условиям $w(1) = 2i$ и $w(i) = -2$, перевело бы третью вершину в точку 0, что нас не устраивает.

Способ 2. Рассмотрим геометрические преобразования, выполнение которых переведёт исходный треугольник в требуемый, и выпишем операции, необходимые для их осуществления.

Шаг 1: поворот вокруг точки 0 на угол $-\dfrac{\pi}{2}$ (на прямой угол по часовой стрелке). Это соответствует умножению на $e^{-i\pi/2} = -i$: функция $w_1 = -iz$.

Шаг 2: растяжение в два раза относительно 0. Для этого нужно всё (после шага 1) умножить на 2, получаем промежуточную функцию $w_2 = 2w_1 = -2wi$.

Шаг 3: теперь получившийся треугольник равен требуемому и так же ориентирован на плоскости, осталось только параллельным переносом на вектор $(-2{,}2)$ их совместить . Это соответствует прибавлению комплексного числа $-2 + 2i$, а итоговая функция приобретает вид $w = w_2 - 2 + 2i = -2iz - 2 + 2i$.



Заметим, что оба способа дали одинаковую линейную функцию. Теперь найдём неподвижную точку. Условие $w(z_0) = z_0$ запишется в виде $-2iz_0 - 2 + 2i = z_0$, откуда $z_0(1 + 2i) = -2 + 2i$ и $z_0 = \dfrac{-2 + 2i}{1 + 2i} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}i$. Отображение можно записать и в таком виде:

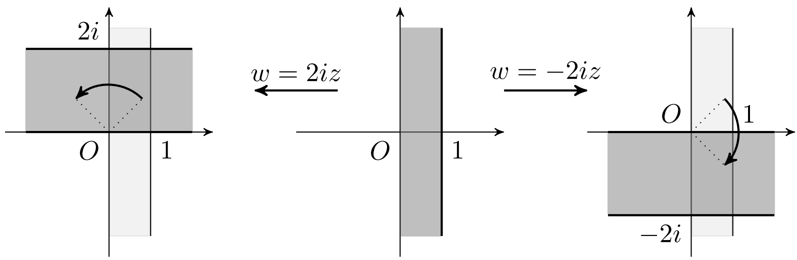
$$w - \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right) = -i\left(z - \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right)\right).$$

Это означает, что перевести исходный треугольник в требуемый можно было поворотом на $-\dfrac{\pi}{2}$ относительно точки $z_0 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}i$.

Пример 25. Опишите все линейные функции, переводящие полосу $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ в полосу $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

Будем описывать линейные преобразования (движения и преобразования подобия), переводящие одну полосу в другую. Граница исходной полосы — две вертикальные прямые, граница требуемой полосы — две горизонтальные прямые. Соответственно, множитель a в линейной функции может задавать поворот только на прямой угол, т.е. может иметь аргумент только $\dfrac{\pi}{2}$ или $-\dfrac{\pi}{2}$. Расстояние между исходными прямыми равно 1, а между результирующими прямыми (границами новой полосы) расстояние равно 2, поэтому модуль множителя a (коэффициент линейного растяжения) может быть равен только 2. Таким образом, коэффициент a может принимать только значения $a = 2e^{i\pi/2} = 2i$ или $a = 2e^{-i\pi/2} = -2i$, а искомая линейная функция может иметь вид $w = 2iz + b$ или $w = -2iz + b$.

Рассмотрим оба этих случая и в каждом из них опишем возможные значения b.



В первом случае после отображения $w = 2iz$ получается горизонтальная полоса $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2$. Параллельный перенос, переводящий её в полосу $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$, должен реализовывать смещение на 1 вниз и может добавлять любое смещение по горизонтали (на величину c). В результате имеем функцию $w = 2iz - i + c$, где c — произвольная действительная константа.

Аналогично во втором случае полосу нужно поднять вверх на 1 и можно добавить любое смещение по горизонтали (на величину c). Итоговая функция имеет вид $w = -2iz + i + c$, где c — произвольная действительная константа.

Обе найденные функции опишем так: $w = \pm i(2z - 1) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

5.3. Дробно-линейные отображения

Теперь обсудим некоторые любопытные свойства отображений, задаваемых отношениями линейных функций.

Определение 5.3.1. Отображение называется *дробно-линейным*, если задаётся функцией

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \qquad ad + bc \neq 0.$$

Условие $ad - bc \neq 0$ гарантирует, что числитель не пропорционален знаменателю (в противном случае отображение вырождается в константу).

В основном мы сейчас будем рассматривать отображения, в которых $c \neq 0$ (иначе дробно-линейное отображение становится просто линейным), но в определение это ограничение включать не будем, поскольку для некоторых свойств оно не требуется. Например, композиция дробно-линейных отображений тоже является дробно-линейным отображением (если рассматривать линейные в качестве частного случая).

Тем не менее при рассмотрении общих свойств дробно-линейных преобразований чаще будем подразумевать, что $c \neq 0$. Например, при этом условии можно говорить, что в точке $z = -\dfrac{d}{c}$ отображение не определено, а $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$. Удобно доопределить дробно-линейное отображение: $w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \dfrac{a}{c}$ — в результате получим отображение расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ на себя. Несложно доказать следующее его свойство:

Теорема 5.3.2. *Дробно-линейное отображение является непрерывным и взаимно-однозначным отображением $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$. При этом оно является конформным в расширенной комплексной плоскости.*

Непрерывность доказывается через общие свойства непрерывных функцией (кроме точек $z - \dfrac{d}{c}$ и ∞, в которых мы саму функцию непрерывно доопределили). Взаимную однозначность несложно обосновать непосредственным построением обратного отображения (которое тоже является дробно-линейным). Конформность устанавливается рассмотрением производной $w' = \dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2}$, отличной от 0 во всех конечных точках комплексной плоскости, кроме $z = -\dfrac{d}{c}$ (в которой дробно-линейная функция имеет простой полюс). Для бесконечно удалённой точки конформность показывается рассмотрением отображения $w(1/z)$, которое конформно в 0.

Прежде чем обсудим специфические свойства дробно-линейного отображения, построим образы некоторых линий «вручную».

Пример 26. Для функции $w = \dfrac{1}{z}$ найти образы следующих линий: (а) окружности $|z| = \dfrac{1}{2}$; (б) прямой $y = x\sqrt{3}$; (в) прямой $x + y = 1$; (г) окружности $|z - 2| = 2$; (д) окружности $|z - 4| = 2$.

(а) Для $z = re^{i\varphi}$ запишем: $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\varphi}$. Окружность $|z| = \dfrac{1}{2}$ состоит из точек с модулем $r = \dfrac{1}{2}$ и аргументами от $-\pi$ до π. Тогда при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ получим точки с модулем $\dfrac{1}{1/2} = 2$ и всеми возможными аргументами (пробегающими всю окружность). Поэтому образом будет вся окружность $|w| = 2$.

(б) Прямая $y = x\sqrt{3}$ состоит из двух лучей: точек с аргументами $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ и $\arg z = -\dfrac{2\pi}{3}$ (модули при этом пробегают все возможные значения от 0 до ∞). Соответственно, при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ получим все точки, у которых модули принимают любые значения, а аргументы $\arg w = -\arg z$, то есть принимают значения $-\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$. Это означает, что образом будет прямая под углом $-\dfrac{\pi}{3}$ к действительной оси (прямая $y = -x\sqrt{3}$). Отметим, что лежащая на прямой точка $z = 0$ отобразится в бесконечно удалённую точку, а бесконечно удалённая точка перейдёт в 0.

(в) Прямую $x + y = 1$ представим как множество точек z, для которых $x = t \in (-\infty, +\infty)$ и $y = 1 - x = 1 - t$, т. е. точек вида $z = t + i(1 - t)$. Тогда $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t + i(1 - t)} = \dfrac{t - i(1 - t)}{t^2 + (1 - t)^2} = u + iv$, где $u = \dfrac{t}{t^2+(1-t)^2}$ и $v = \dfrac{t-1}{t^2+(1-t)^2}$ — действительная и мнимая часть точки образа. Заметим, что $u^2+v^2 = \dfrac{1}{t^2+(1-t)^2}$, поэтому $u = t(u^2+v^2)$ и $v = (t-1)(u^2+v^2)$. Тогда $u - v = u^2+v^2$, откуда $u^2+v^2-u+v = 0$ или $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(v+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. Таким образом, образом прямой $x+y=1$ является окружность с центром в точке $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ и радиусом $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, проходящая через точку 0.

(г) Окружность $|z-2| = 2$ параметрически можно задать как множество точек $z = 2+2e^{it} = 2(1+\cos t + i\sin t)$, $-\pi < t \leqslant \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{z} &= \frac{1}{2(1+\cos t+i\sin t)} = \frac{1+\cos t - i\sin t}{2((1+\cos t)^2+\sin^2 t)} = \\ &= \frac{1+\cos t - i\sin t}{2(1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)} = \frac{1+\cos t - i\sin t}{4(1+\cos t)} = \\ &= \frac{1}{4} - i\frac{\sin t}{4(1+\cos t)} = \frac{1}{4} - i\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{8\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4} - i\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

При $-\pi < t \leqslant \pi$ значение $\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}$ пробегает все возможные действительные значения, поэтому получаем множество точек с действительной частью $u = \dfrac{1}{4}$ и мнимой частью $v \in \mathbb{R}$. Значит, образом является прямая $\operatorname{Re} w = \dfrac{1}{4}$.

(д) Аналогично пункту (г) зададим окружность $|z-4| = 2$ как $z = 4+2e^{it} = 2(2+\cos t+i\sin t)$, $-\pi < t \leqslant \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{z} &= \frac{1}{2(2+\cos t+i\sin t)} = \frac{2+\cos t - i\sin t}{2((2+\cos t)^2+\sin^2 t)} = \\ &= \frac{2+\cos t - i\sin t}{2(5+4\cos t)} = \frac{2+\cos t}{2(5+4\cos t)} - i\frac{\sin t}{2(5+4\cos t)} = u+iv. \end{aligned}$$

Заметим, что $\rho^2 = u^2+v^2 = \dfrac{1}{2(5+4\cos t)}$, поэтому $u = (2+\cos t)\rho^2$ и $v = -\sin t\cdot\rho^2$. Отсюда $\cos t = \dfrac{u}{\rho^2} - 2$ и $\sin t = -\dfrac{v}{\rho^2}$, а это позволяет по основному тригонометрическому тождеству записать, что

$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \left(\dfrac{u}{\rho^2} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{v}{\rho^2}\right)^2 = \dfrac{u^2+v^2}{\rho^4} - \dfrac{4u}{\rho^2} + 4$. Так как $u^2 + v^2 = \rho^2$, то уравнение принимает вид $1 = \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{4u}{\rho^2} + 4$ или $3\rho^2 - 4u + 1 = 0$. Отсюда $u^2 + v^2 - \dfrac{4}{3}u + \dfrac{1}{3} = 0$, что преобразуется к привычному уравнению окружности $\left(u - \dfrac{2}{3}\right) + v^2 = \dfrac{1}{9}$. Получили, что образом окружности $|z - 4| = 2$ является окружность с центром в $\dfrac{2}{3}$ и радиусом $\dfrac{1}{3}$.

Выше мы могли заметить, что окружность могла отобразиться в прямую, а могла — в окружность (и то же самое было справедливо для отображения прямых). Этот результат можно сформулировать для произвольного дробно-линейного отображения.

Теорема 5.3.3. *Пусть в точке $z_0 = -\dfrac{d}{c}$ знаменатель дробно-линейной функции $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ обращается в 0.*

1. *Окружность или прямая, проходящая через z_0, отображаются этой функцией в прямую.*

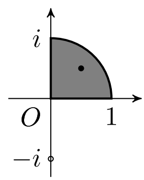
2. *Окружность или прямая, не проходящая через z_0, отображаются этой функцией в окружность.*

Можно считать и окружности (в привычном понимании), и прямые (дополненные бесконечно удалённой точкой) *окружностями на расширенной комплексной плоскости* $\bar{\mathbb{C}}$. Это довольно естественно с учётом того, что оба этих вида кривых являются стереографическими проекциями окружностей сферы Римана на комплексную плоскость. Поэтому прямую можно называть окружностью, проходящей через точку ∞. Такая интерпретация позволяет записать теорему более компактно:

Теорема 5.3.4. *Окружность в $\bar{\mathbb{C}}$ дробно-линейной функцией отображается на окружность в $\bar{\mathbb{C}}$.*

Доказывать это утверждение достаточно только для функции $w = \dfrac{1}{z}$ (другие дробно-линейные функции являются композициями функции $\frac{1}{z}$ и обычных линейных функций, которые сохраняют прямые и окружности). Преобразования могут быть аналогичны рассмотренному ранее примеру, но есть и более компактные способы (опирающиеся на общее уравнение прямой и окружности на комплексной плоскости).

Пример 27. Найти образ четверти круга $|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ при отображении $w = \dfrac{z}{z+i}$.



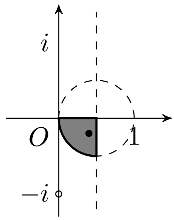
По принципу соответствия границ важно выяснить, куда отображается граница исходной области. Граница четверти круга из условия задачи состоит из отрезка действительной оси (между точками 0 и 1), отрезка мнимой оси (между 0 и i) и дуги окружности $|z| = 1$ (от 1 до i против часовой стрелки).

Знаменатель функции $w = \dfrac{z}{z+i}$ обращается в 0 при $z = -i$. Точка $-i$ лежит на мнимой оси, поэтому образом мнимой оси будет прямая. Любая прямая задаётся двумя точками, поэтому достаточно найти образы двух точек на мнимой оси. Рассмотрим $w(0) = 0$ и $w(i) = \dfrac{1}{2}$, откуда следует, что образ мнимой оси — прямая, проходящая через 0 и $\dfrac{1}{2}$, т. е. действительная ось.

Точка $-i$ также лежит на окружности $|z| = 1$, которая вследствие этого также отобразится в прямую. Выберем две точки на этой окружности и найдём их образы: $w(i) = \dfrac{1}{2}$, $w(1) = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$. Тогда окружность $|z| = 1$ отобразится в прямую, проходящую через точки $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ (вертикальная прямая).

Действительная ось не проходит через $-i$, поэтому образом этой прямой будет окружность. Она задаётся тремя точками, поэтому найдём образы трёх точек действительной прямой. Рассмотрим $w(0) = 0$, $w(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ и $w(-1) = \dfrac{-1}{-1+i} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Тогда окружность (образ действительной оси) проходит через 0, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ и $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ — это окружность с центром в $\dfrac{1}{2}$ и радиусом $\dfrac{1}{2}$.

Как показано выше, две прямые и окружность, фрагментами которых были участки границы четверти круга из условия задачи, отобразились в две прямые и окружность, разбивающие комплексную плоскость на несколько областей. Осталось выбрать из них ту, которая является образом исходной области.



Так как область отображается в область, выберем в исходной четверти круга любую внутреннюю точку, например $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, и найдём её образ. Так как $w\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+i} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$, то из областей, ограниченных найденными прямыми и окружностью, выберем ту, в которую попадает $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$. Делаем вывод, что образом исходной четверти круга является область, изображённая на чертеже выше.

Теперь обратимся к вопросу построения дробно-линейного отображения по заданному прообразу и образу. В отдельных случаях для решения соответствующей задачи достаточно подобрать коэффициенты, опираясь на некоторые известные свойства дробно-линейных функций.

Пример 28. Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$ с неподвижной точкой 0, для которой $w(1) = i$ и $w(i) = \infty$.

Функцию $w = \frac{az+b}{cz+d}$ делением числителя и знаменателя на c можно записать в виде $w = \frac{a_1 z + b_1}{z+d_1}$. Так как $w(i) = \infty$, то знаменатель в точке i обращается в 0, поэтому функцию запишем как $w = \frac{a_1 z+b_1}{z-i}$. Точка 0 неподвижна, поэтому $w(0) = 0$, а значит, в этой точке числитель обращается в 0 — это позволяет уточнить вид функции как $w = \frac{a_1 z}{z-i}$. Наконец, коэффициент a_1 найдём из условия $w(1) = i$. Действительно, $\frac{a_1 \cdot 1}{1-i} = i$, откуда $a_1 = i(1-i) = 1+i$. Таким образом, искомая функция равна $w = \frac{(1+i)z}{z-i}$.

В рассмотренном примере некоторые параметры функции были легко найдены из-за специфических свойств отображения. Однако в общем виде нахождение дробно-линейной функции, переводящей три заданные различные точки в три другие различные точки, может быть более трудной задачей. Здесь может помочь следующее утверждение.

Утверждение 5.3.5. *Дробно-линейная функция $w = f(z)$, отображающая различные точки z_1, z_2 и z_3 соответственно в точки w_1, w_2 и w_3 определяется следующим соотношением:*

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Несложно заметить, что для пары точек z_1 и w_1 левая и правая часть этого равенства обращаются в 0, для пары z_2 и w_2 — в ∞, а для пары z_3 и w_3 — в 1. Получить явное выражение функции w через z их приведённого соотношения можно несложными преобразованиями. Покажем это на примере.

Пример 29. Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую (а) точки 0, 1, i соответственно в точки i, $-i$, 0; (б) точки 0, 1, ∞ соответственно в точки 1, ∞, i.

(а) Запишем соотношение из ранее сформулированного утверждения для $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ и $w_1 = i$, $w_2 = -i$, $w_3 = 0$:

$$\frac{z}{z - 1} \cdot \frac{i - 1}{i} = \frac{w - i}{w + i} \cdot \frac{i}{-i}.$$

Его можно переписать в следующем виде:

$$\frac{w - i}{w + i} = \frac{(1 - i)z}{i(z - 1)}.$$

Так как $\dfrac{w - i}{w + i} = 1 - \dfrac{2i}{w + i}$, то преобразуем выражение

$$\frac{2i}{w + i} = 1 - \frac{(1 - i)z}{i(z - 1)} = \frac{i(z - 1) - (1 - i)z}{i(z - 1)} = \frac{(2i - 1)z - i}{i(z - 1)}.$$

Отсюда $\dfrac{w + i}{2i} = \dfrac{i(z - 1)}{(2i - 1)z - i}$, поэтому окончательно получаем

$$w = 2i\frac{i(z - 1)}{(2i - 1)z - i} - i = \frac{-2(z - 1) - i((2i - 1)z - i)}{(2i - 1)z - i} = \frac{iz + 1}{(2i - 1)z - i}.$$

(б) Проблема здесь может быть в наличии точек ∞: на первый взгляд непонятно, как преобразовывать соотношение с такими слагаемыми и множителями. Формально его можно записать в виде

$$\frac{z}{z-1} \cdot \frac{\infty - 1}{\infty} = \frac{w-1}{w-\infty} \cdot \frac{i-\infty}{i-1}.$$

Однако от них можно избавиться довольно простым способом. Левую часть можно переписать так:

$$\frac{z}{z-1} \cdot \frac{\infty - 1}{\infty} = \lim_{z_3 \to \infty} \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z_3 - 1}{z_3} = \frac{z}{z-1} \lim_{z_3 \to \infty} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z_3}}{1} = \frac{z}{z-1}.$$

Аналогично поступаем и с правой частью:

$$\frac{w-1}{w-\infty} \cdot \frac{i-\infty}{i-1} = \lim_{w_2 \to \infty} \frac{w-1}{w-w_2} \cdot \frac{i-w_2}{i-1} = \frac{w-1}{i-1} \lim_{w_2 \to \infty} \frac{\frac{i}{w_2} - 1}{\frac{w}{w_2} - 1} = \frac{w-1}{i-1}.$$

Иначе говоря, можно просто сократить множители (в числителе и знаменателе), содержащие ∞. Это справедливо для обеих частей соотношения. В результате получили более простую запись:

$$\frac{z}{z-1} = \frac{w-1}{i-1},$$

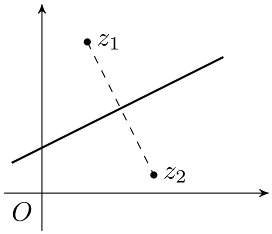
откуда несложно выразить w через z:

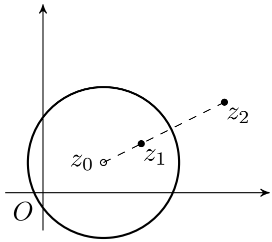
$$w = (i-1)\frac{z}{z-1} + 1 = \frac{(i-1)z + (z-1)}{z-1} = \frac{iz-1}{z-1}.$$

Ещё одним важным свойством дробно-линейных отображений является сохранение симметрии относительно прямой или окружности. Какие точки называются симметричными относительно прямой, нам хорошо известно ещё со школы. А для окружности аналогичное понятие введём несколько иначе.

Определение 5.3.6. Точки z_1 и z_2 называются *симметричными относительно окружности* с центром в z_0 радиуса R, если они расположены на одном луче, выходящем из z_0, а произведение расстояний от этих точек до z_0 равно R^2:

$$|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2, \quad \arg(z_1 - z_0) = \arg(z_2 - z_0).$$





Центру окружности (точке z_0) при этом будет симметрична бесконечно удалённая точка $z = \infty$, аналогично наоборот.

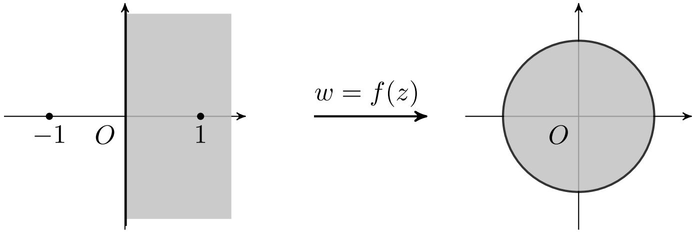
Определение 5.3.7. Геометрическое преобразование, которое сопоставляет каждой точке плоскости симметричную точку относительно некоторой окружности, называется *инверсией*.

Можно сказать, инверсия «выворачивает наизнанку» плоскость относительно окружности: внутренние точки окружности оказываются снаружи, внешние переходят внутрь окружности, а окружность остаётся на месте.

Теорема 5.3.8. *Дробно-линейная функция $w = f(z)$ отображает точки z_1 и z_2, симметричные относительно прямой или окружности, в точки w_1 и w_2, симметричные относительно образа этой прямой или окружности.*

Воспользуемся свойством симметрии для построения отображения полуплоскости на окружность.

Пример 30. Найти все дробно-линейные функции $w = f(z)$, отображающие правую полуплоскость ($\operatorname{Re} z \geqslant 0$) на единичный круг $|w| = 1$ так, что точка 1 переходит в центр круга (точку 0).



Из условия известен образ одной из точек: $w(1) = 0$. Ещё одну пару точек (прообраз и образ) можно найти из свойства сохранения симметрии. Действительно, граница исходной полуплоскости (мнимая ось) по принципу соответствия границ отобразится в границу круга (окружность $|w| = 1$). Точка -1 симметрична мнимой оси точке 1, поэтому её образ ($w(-1)$) будет симметричен образу точки 1 (точке $w(1) = 0$) относительно окружности $|w| = 1$. Но точка $w(1) = 0$ является центром этой окружности , поэтому симметричной ей является точка ∞. Таким образом, $w(-1) = \infty$.

Теперь достаточно произвольно выбрать $z_3 \neq \pm 1$ и соответствующую ей точку w_3, отличную от 0 и ∞. Если при этом z_3 выбрана в правой полуплоскости, то w_3 необходимо выбрать внутри окружности, если z_1 в левой полуплоскости — точка w_3 выбирается вне окружности, а точке z_3 на мнимой оси соответствует w_3 на единичной окружности.

По трём известным парам точек дробно-линейное отображение строится однозначно с помощью описанного ранее соотношения:

$$\frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{z_3+1}{z_3-1} = \frac{w}{w-\infty} \cdot \frac{w_3-\infty}{w_3}.$$

Как было отмечено в предыдущем примере, множители, содержащие ∞, можно сократить. В результате этого сокращения и после домножения на w_3 получаем

$$w = a\frac{z-1}{z+1}, \quad \text{где } a = w_3\frac{z_3+1}{z_3-1}.$$

Параметр a определяется параметрами z_3 и w_3. Докажем только, что $|a| = 1$. Рассмотрим произвольную точку ib на мнимой оси, отображающейся на окружность $|w| = 1$. Это означает, что

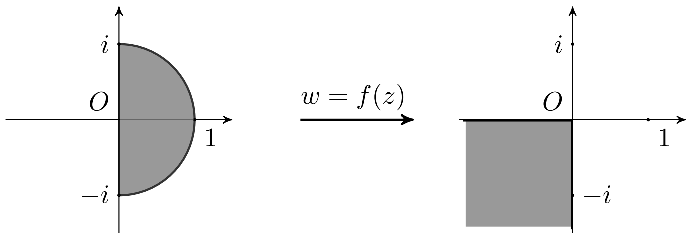
$$1 = |w(ib)| = \left|a\frac{ib-1}{ib+1}\right| = |a|\frac{|-1+ib|}{|1+ib|} = |a|.$$

Соответственно, параметр a можно записать в виде $a = e^{i\varphi}$.

Таким образом, все дробно-линейные функции, осуществляющие требуемое в условии отображение, описываются как $w = e^{i\varphi}\dfrac{z-1}{z+1}$ для произвольного параметра φ.

Для нахождения функций, отображающих заданную область в другую, полезно использовать принцип соответствия границ. При решении таких задач будем стараться выбрать функцию, которая отображает границу первой области в границу второй области или в набор линий, которые можем дальнейшими линейными преобразованиями привести к нужному виду.

Пример 31. Построить функцию, отображающую полукруг $|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ на третий квадрант (третью координатную четверть).

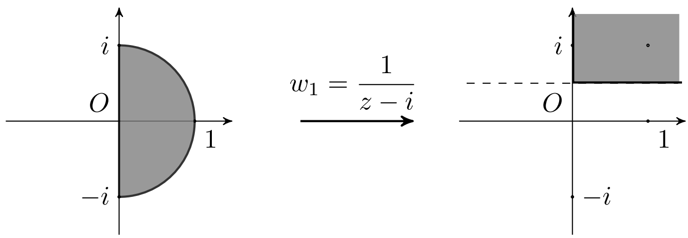


Граница полукруга состоит из полуокружности (части окружности $|z| = 1$) и отрезка (части мнимой оси). А образом должен стать квадрант, граница которого состоит из фрагментов двух прямых (действительной и мнимой оси). Поэтому необходимо построить функцию, отображающую прямую и окружность в две прямые.

Мы умеем строить дробно-линейное отображение с таким свойством: нужно, чтобы какая-то точка на исходной прямой и исходной окружности (а значит, на их пересечении) отобразилась на ∞. Пусть это будет точка i, тогда пока рассмотрим отображение $w_1 = \dfrac{1}{z - i}$.

Отметим, что так как исходные окружность и прямая пересекаются ещё в одной точке ($z = -i$) под прямым углом, то получившиеся две прямые будут пересекаться тоже под прямым углом (из свойства конформности) в точке $w_1(-i) = \dfrac{1}{-i - i} = \dfrac{i}{2}$. Теперь выберем ещё по одной точке на исходной окружности $|z| = 1$ и исходной прямой (мнимой оси), например точки 1 и 0, и выясним, куда они отображаются. Так как $w_1(1) = \dfrac{1}{1 - i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ и $w_1(0) = \dfrac{1}{0 - i} = i$, то образом окружности $|z| = 1$ будет прямая, проходящая через $\dfrac{i}{2}$ и $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, а образом мнимой оси — прямая, проходящая через $\frac{i}{2}$ и i.

Эти две прямые разбивают комплексную плоскость на четыре области, выбрать искомую можно так: возьмём в исходном полукруге точку $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, она отображается в $w_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1+i$ (отмеченная точка в закрашенной области на рисунке выше).



Теперь сдвинем полученную область вниз на $\frac{1}{2}$ (для этого нужно прибавить $-\frac{1}{2}i$, что обеспечит нужный параллельный перенос) — получится первый квадрант. А отобразить первый квадрант на третий можно поворотом на π (для этого умножаем на $e^{i\pi} = -1$). В результате получим искомую функцию:

$$w=\left(w_1-\frac{1}{2}i\right)\cdot(-1)=-\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{iz-1}{2(z-i)}.$$

5.4. Примеры для самостоятельной работы

1. Найти две линейные функции, отображающие отрезок между точками -1 и $1+2i$ в отрезок между точками i и $3-2i$. Найти неподвижные точки для каждой из этих функций.

2. Найти образ полукруга $|z-2|\leqslant 2$, $\operatorname{Re} z\leqslant 2$ при отображении $w=(\sqrt{3}+i)z-2+i$.

3. Найти общий вид линейной функции, отображающей левую полуплоскость на верхнюю полуплоскость.

4. Для отображения $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ найти образ (а) верхней полуплоскости; (б) полукруга $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$; (в) кольца $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.

5. Найти дробно-линейную функцию, имеющую неподвижную точку 0 и отображающую точки 1 и 2: (а) в 2 и 1; (б) в 3 и ∞ соответственно.

6. Найдите функцию, переводящую область между окружностями $|z-1| = 1$ и $|z-2| = 2$ в полосу $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$. Найдите все неподвижные точки построенной функции.

Ответы и указания

Изолированные особые точки

1. Точка $z = 0$ — устранимая, точка $z = i$ — полюс первого порядка, точка $z = \infty$ — существенно особая.

2. Точки $z_k = 2\pi k$, $k = 0$, ± 1, ± 2, $\ldots$ — полюса первого порядка, точка $z = \infty$ — особая точка для любой функции уже в силу своего определения. Но в данном случае она не является изолированной. Это предельная точка полюсов $z_k = 2\pi k$.

3. Точка $z = 0$ — полюс второго порядка, точки $z_k = 2\pi k i$, $k = \pm 1$, ± 2, $\ldots$ — полюса первого порядка.

4. Точка $z = 0$ — существенно особая точка, точка $z = \infty$ — устранимая.

Вычеты

1. $2\pi i \left(4 - \dfrac{\sin 1}{(1 - \cos 1)^2}\right)$

2. $-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$

3. 2π

4. $\dfrac{\pi}{e}$

Вычисление интегралов с помощью вычетов

1. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

2. $\dfrac{5\pi}{12}$

3. $\dfrac{5\pi}{36}$

4. $\dfrac{2(3\sqrt{5}-7)}{3\sqrt{5}-5}$

5. $\dfrac{\pi}{6}$

6. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(\cos\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

7. $\dfrac{\pi}{3}e^{-2}(4-e)$

Логарифмический вычет и его приложения

1. (а) 4 в точке 0; 2 в точке 1; -3 в точках $\pm 2i$;
(б) -1; (в) 9; (г) -1; (д) 5
2. (а) 0; (б) 6
3. (а) 3; (б) 1 (без учёта координатных осей)
4. n
5. 0 (нет корней)

Конформные отображения

1. $w=-\dfrac{3}{2}iz-\dfrac{1}{2}i$, $z_0=-\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$; $w=\dfrac{3}{2}iz+3-\dfrac{1}{2}i$, $z_0=\dfrac{15}{13}+\dfrac{16}{13}i$

2. Указание: умножение на $\sqrt{3}+i=2e^{i\pi/6}$ — растяжение в 2 раза с поворотом на $\dfrac{\pi}{6}$ (всё относительно 0), далее параллельный перенос на 2 влево и 1 вниз.

3. $w=-aiz+b$, где a, $b\in\mathbb{R}$, $a>0$

4. (а) область вне круга: $|w|\geqslant 1$;
(б) третий квадрант ($\operatorname{Re}w\leqslant 0$, $\operatorname{Im}w\leqslant 0$);
(в) правая полуплоскость ($\operatorname{Re}w\geqslant 0$) вне круга $\left(\left|w-\frac{5}{3}\right|\geqslant\frac{4}{3}\right)$

5. (а) $w=\dfrac{2z}{3z-2}$; (б) $w=\dfrac{3z}{2-z}$

6. Указание: рассмотрите функцию, отображающую 0 на ∞, — образом исходной области станет полоса, которую останется только перевести в требуемую. Подходит, к примеру, отображение $w = \frac{4i}{z} - i$, его неподвижные точки — корни уравнения $z^2 + iz - 4i = 0$.

Литература

[1] *Волковыский, Л. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – 4-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

[2] *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной : учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стереотип. – М. : Физматлит. – 2010. – 335 с.

[3] *Зафиевская, Л. А.* Ряды и интегралы в комплексной плоскости : метод. указания / Л. А. Зафиевская, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2004. – Ч. 2. – 18 с.

[4] *Невский, М. В.* Элементы теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальности Компьютерная безопасность / М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т – Ярославль : ЯрГУ, 2014. – 105 с.

[5] *Краснов, М. Л.* Функции комплексного переменного : операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971. – 255 с.

[6] *Пантелеев, А. В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург : Лань, 2015. – 448 с. – Режим доступа: `https://e.lanbook.com/book/67463`

Приложение 1

Примерные варианты контрольных работ

Ряды и вычеты

1. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1} + 3e^{-z+1}$ и найти радиус сходимости полученного разложения.

2. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2z-3}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 3$.

3. Найти особые точки функций и выяснить их характер:
   (а) $\dfrac{2z^2 + \cos 2z - 1}{z^6}$; (б) $(z+1)e^{1-1/z}$.

4. Вычислить $\operatorname{res}\left((z-2)^3\left(e^{2/z} + \cos\frac{1}{2z^2}\right);\ 0\right)$.

5. Вычислить $\displaystyle\oint\limits_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz$, где C — контур $|z\breve{\ }1| = 2$, пробегаемый против часовой стрелки.

6. Вычислить $\displaystyle\oint\limits_C \frac{z^3}{(z^2-16)(z^7-1)}dz$, где C — контур $|z| = 2$, пробегаемый против часовой стрелки.

Конформные отображения

1. (а) Найдите линейную функцию (хотя бы одну), отображающую отрезок $[A(2{,}3); B(-2{,}1)]$ на отрезок $[O(0{,}0); C(1{,}1)]$.
   (б) Найдите неподвижную точку этого отображения.
   (в) Выясните, куда при этом отображается отрезок $[O(0{,}0); C(1{,}1)]$.

2. Опишите параметры a и b, при которых функция $w = az + b$ отображает отрезок $[A(0{,}0); B(3{,}0)]$ на отрезок, целиком лежащий на действительной прямой.

3. Постройте дробно-линейную функцию с неподвижной точкой 0 и отображающую точки 1 и 2: (а) в 2 и 1; (б) в 3 и ∞ соответственно.

4. Найдите все неподвижные точки отображения $w = \dfrac{z+i}{z-i}$.

5. Найдите образ третьей четверти ($\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$) при отображении $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.

6. Найдите функцию, переводящую область между окружностями $|z-1| = 1$ и $|z-2| = 2$ в полосу $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

Приложение 2

Примерный вариант экзаменационной работы

1. Пусть функция $f(z)$ определена в области D и дифференцируема в точке z_0. Для гладких кривых γ_1 и γ_2, проходящих через точку z_0, выполнены условия $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$, $z \in \gamma_1$; $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, $z \in \gamma_2$. Докажите, что если $f'(z_0) \neq 0$, то кривые пересекаются под прямым углом.

2. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = 3x^2y - y^3$, $f(i) = 2i - 1$.

3. Найти общий вид дробно-линейного отображения, имеющего две неподвижные точки.

4. Сформулировать определение конформного отображения. Сформулировать теорему Римана.

5. Сформулировать и доказать теорему Коши.

6. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D и непрерывная в $\bar{D}$. Доказать, что если модуль $f(z)$ есть константа на ∂D, то функция или постоянная в области D или обращается в ноль хотя бы в одной точке.

7. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти области G и все функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области G, то сумма ряда будет аналитической функцией в этой области.

8. Аналитическая функция $f(z)$ может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области.

9. Сформулировать и доказать теорему Руше.

10. Найти $\operatorname{res}\left(\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)};\ z_0\right)$, если функция $\varphi(z)$ аналитическая, а z_0 — полюс n-го порядка функции $f(z)$.

11. Пусть $z = a$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и $|f(z)| < \dfrac{M}{|z-a|^\alpha}$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Доказать, что $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$, где Γ — замкнутый контур, лежащий в проколотой окрестности точки a.

Учебное издание

Методические указания по практическому курсу

«Теория функций комплексного переменного»

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Авторы: **Ануфриенко** Маргарита Вадимовна
Богомолов Юрий Викторович
Шабаршина Галина Владимировна

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка Ю. В. Богомолов

Подписано в печать 30.09.2020. Формат 60x84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 4,4. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 5 экз.

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Ярославский государственный университет
150003 Ярославль, ул. Советская, 14.