Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Факультет информатики и вычислительной техники

М. В. Ануфриенко
Ю. В. Богомолов
Г. В. Шабаршина

Методические указания по практическому курсу «Теория функций комплексного переменного»

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2019

УДК 517.53(078)
ББК В161.55я73
А73

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2019 года

Рецензент
кафедра дискретного анализа
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова

А73 **Ануфриенко, Маргарита Вадимовна.**
Методические указания по практическому курсу «Теория функций комплексного переменного» : учебно-методическое пособие / М. В. Ануфриенко, Ю. В. Богомолов, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2019. – 56 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по программе курса «Комплексный анализ», который читается на факультете ИВТ по направлению «Прикладная математика и информатика». В пособии собраны материалы, которые позволят организовать аудиторную и внеаудиторную самостоятельную подготовку студентов.

УДК 517.53(078)
ББК В161.55я73

Введение

Стратегическим направлением модернизации и оптимизации высшего образования является увеличение времени на самостоятельную работу студентов. И это понятно: современные условия диктуют необходимость непрерывного образования, когда от студентов и в дальнейшем от выпускников университета требуется постоянное совершенствование знаний. Выпускник должен быть ориентирован на инициативу и самостоятельность, обладать способностью работать в различных рабочих командах, иметь высокую мотивацию к переобучению.

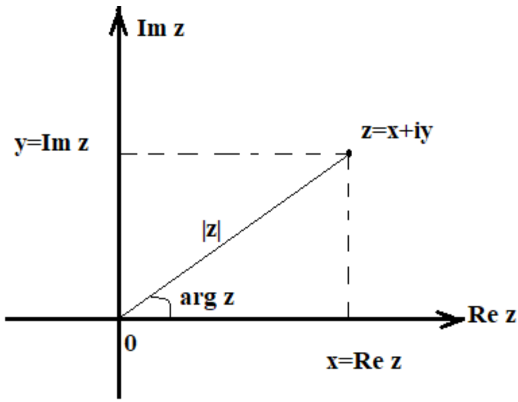
Одним из основных факторов, обеспечивающих эффективность процесса обучения и позволяющих достигнуть более высокого качества обучения, является сокращение аудиторной нагрузки, замена пассивного слушания лекций возрастанием доли самостоятельной работы студентов. Объем самостоятельной работы студентов определяется ФГОС и учебным планом направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к математическому и естественно-научному циклу, к вариативной части ОП бакалавриата, читается в 4 семестре. На изучение дисциплины отводится 180 часов, из которых 36 часов лекционных и 72 часа практических занятий. Остальные часы так или иначе связаны с самостоятельной подготовкой. Объем информации по этой дисциплине (полный набор вопросов приведен в приложении) весьма значителен. Отсюда совершенно естественно следует, что большая часть работы переносится на самостоятельную подготовку.

В предлагаемом пособии даны методические материалы по указанной дисциплине: для каждой темы приведены необходимые теоретические сведения и примеры решения задач, список экзаменационных вопросов, а также представлены варианты контрольных заданий. Все эти материалы призваны оказать помощь по организации самостоятельной работы, облегчить и оптимизировать внеаудиторную самостоятельную работу.

Комплексные числа и функции

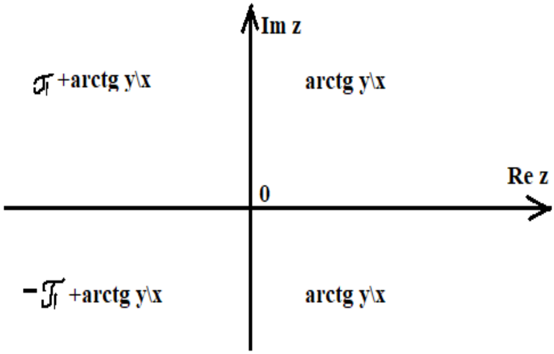
Занятие 1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи. Арифметические действия с комплексными числами. Формула Муавра – Лапласа.



Комплексное число $z = x + iy$ представляется точкой комплексной плоскости с декартовыми координатами (x, y). Это алгебраическая форма записи комплексного числа. Тригонометрическая форма записи использует такие характеристики, как модуль и аргумент комплексного числа. Модуль определяется как расстояние от точки до начала координат. Аргумент – угол между центральным лучом, проходящим через точку z, и положительным направлением действительной оси. Положительным считается направление против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке. Применив формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получим и показательную форму записи комплексного числа: $z = |z| \cos \arg z + i|z| \sin \arg z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z|\cdot e^{i\cdot \arg z}$.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до величины $2\pi k$. $Arg\, z – arg\, z – 2\pi k,\ k \in Z$. В правой части формулы – главное значение аргумента (пишется с маленькой буквы).

Это значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi;\pi]$. Далее приводится схема вычисления главного значения аргумента.



Сложение комплексных чисел: $z_1 + z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 + y_2)$.

Вычитание: $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)$.

Умножение и деление может быть произведено как в алгебраической, так и показательной формах. Приведём соответствующие формулы:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)$;

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{\arg z_1 + \arg z_2}$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + i(y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{\arg z_1 - \arg z_2}.$$

Сопряжение комплексного числа: $\overline{z} = x - iy$.

Возведение комплексного числа в степень ($n \in N$):

$z^n = |z|^n \cdot e^{n \cdot \arg z}$.

Формула Муавра – Лапласа: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Задача 1.1. Представить число $z = 1$ в показательной и тригонометрической формах.

Решение:

$$z = x + iy = 1 + i \cdot 0 = |z| \cdot e^{i\,Arg\,z} = \sqrt{1^2 + 0^2} \cdot e^{i(0 + 2\pi k)} = e^{2\pi k i} = \cos\, 2\pi k + i \sin 2\,\pi k.$$

Задача 1.2. Представить число $z=-1+i\sqrt{3}$ в показательной и тригонометрической формах.

Решение:

Точка, соответствующая числу, находится во 2-й четверти комплексной плоскости,

$$\Rightarrow \arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\pi+arctg\frac{\sqrt{3}}{-1}=\frac{2\pi}{3}$$

$$-1+i\sqrt{3}=\sqrt{1+3}\cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}=2\cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Задача 1.3. Получить формулу косинуса тройного аргумента, используя формулу Муавра – Лапласа.

Решение:

Составим формулу Муавра – Лапласа для $n=3$:

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=$$

$$=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi$$

Приравнивая действительные части выражения, получаем:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi.$$

Задача 1.3. Вычислить значение выражения $\frac{(1-i)^{8}\cdot\left(i+\sqrt{3}\right)}{i^{0}}$.

Решение:

Представим числа в показательной форме:

$$\frac{(1-i)^{8}\cdot\left(i+\sqrt{3}\right)}{i^{0}}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{8}\cdot 2\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{0}}=\frac{2^{0}\cdot e^{-i\frac{9\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{0\pi}{2}}}=$$

$$\frac{2^{0}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\pi}}=2^{0}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=2^{0}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{9}\cdot\left(i\sqrt{3}-1\right).$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.4. Представить следующие комплексные числа в показательной и тригонометрической формах.

а) $z = -2$ б) $z = i$ в) $z = -3i$ г) $z = -i - \sqrt{3}$.

Задача 1.5. Вычислить значение выражения $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7 \cdot (1+i)^8}{1-2i}$.

Задача 1.6. Доказать равенство $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$.

Занятие 2. Множества в комплексной плоскости. Основные определения

***ε*-окрестностью** точки z_0 называется множество точек комплексной плоскости, удалённых от неё на расстояние меньше ε. Используя свойство модуля разности двух чисел как расстояния между ними, можно записать: $O_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Открытым называется множество, состоящее только из внутренних точек.

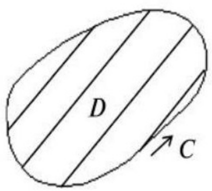
Границей множества называется совокупность всех граничных точек множества.

Связным называется множество, у которого две любые точки могут быть соединены непрерывной кривой, принадлежащей множеству.

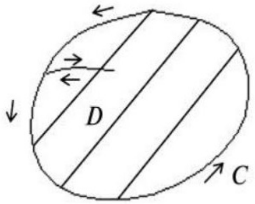
Область – это открытое, связное множество. Область с присоединённой границей называется связной областью.

Область называется **односвязной,** для любой замкнутой кривой, принадлежащей области, точки множества, границей которого является кривая, также принадлежат области. В противном случае область **многосвязная.** Многосвязная область называется **n-связной**, если её граница состоит из n связных компонент.

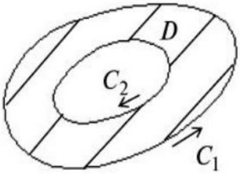
Рассмотрим примеры различных областей. Обход границы указан стрелками.



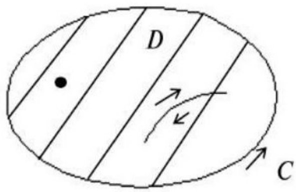
$n = 1$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Рассмотрим задание кривой в комплексной плоскости с помощью комплекснозначной функции действительной переменной. Пусть кривая в декартовой системе координат задаётся системой через параметр:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \ \Rightarrow z(t) = x + iy \ = \varphi(t) + i\psi(t).$$

Составим уравнение окружности:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \cos t \\ y = y_0 + R \cdot \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \ \Rightarrow z(t) = x_0 + R \cdot \cos t + i(y_0 + R \cdot \sin t) =$$

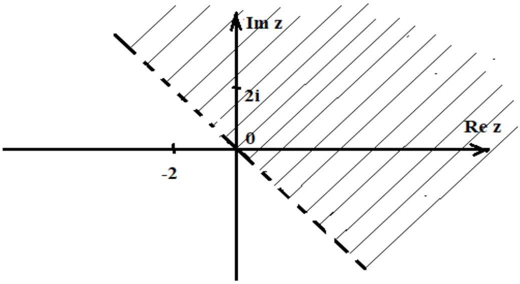
$$= z_0 + R \cdot e^{it}.$$

Задача 2.1. Изобразить в комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z - 2i| < |z + 2|$.

Решение:

Воспользуемся геометрическим смыслом модуля разности двух чисел как расстояния между ними. Неравенство задаёт множество точек, находящихся ближе к точке $2i$, чем к точке -2.

Множество является открытым. Границей множества является множество точек, равноудалённых от них.



Задача 2.2. Найти и описать множество точек комплексной плоскости, задаваемое уравнением $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.

Решение:

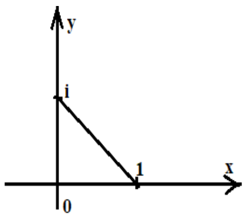
Перейдём к декартовой системе координат:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \mathrm{Re}\frac{1}{x+iy} = \mathrm{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2-2x=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2+y^2=1.$$

Таким образом, получено каноническое уравнение окружности с центром в точке 1 и радиусом 1.

Задача 2.3. Задать с помощью комплекснозначной функции отрезок, соединяющий точки 1 и i.

Решение:



Данный отрезок является участком прямой $y = 1 - x$, при $x \in [0;1]$. Составим параметрическую систему, взяв в качестве параметра независимую переменную x:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \quad z(t) = t + i(1-t) \quad t \in [0;1].$$

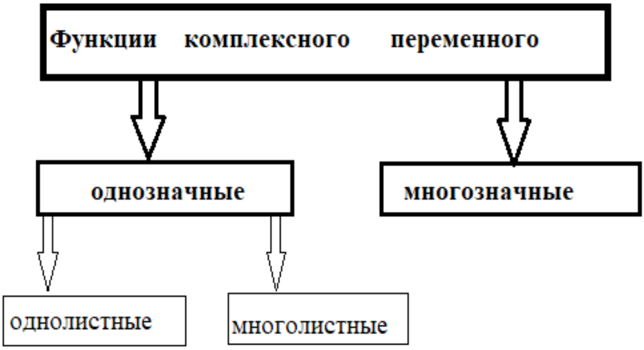
Задания для самостоятельной работы

Задача 2.4. Изобразить в комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z| > 2 + \mathrm{Re}z$.

Задача 2.5. Задать с помощью комплекснозначных функций совокупность прямых $\mathrm{Re}z = c$ и $\mathrm{Im}z = c$.

Занятие 3. Функции комплексного переменного

Основная классификация функций комплексного переменного



Рассмотрим представление комплексной функции в виде действительной и мнимой частей $f(z) – f(x+iy) – u(x,y) + iv(x,y)$.

Функции двух переменных u и v называются соответственно действительной и мнимой частями функции комплексного переменного.

Функция называется **однозначной**, если одному значению аргумента соответствует одно и только одно значение функции. В противном случае – функция **многозначная**.

Если любое значение функции w достигается на одном значении аргумента, то функция называется **однолистной,** в противном случае – **многолистной.**

Рассмотрим некоторые свойства и вычисление значений некоторых комплексных функций.

Корень n-й степени из комплексного числа

$f(z) = \sqrt[n]{z}$ является обратной к функции $f(z) = z^n$. Её значения определяются как корни уравнения $z^n = w$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1.$$

Функция является n-значной. Значения функции находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Обратная к ней функция $f(z) = z^n$ является n-листной.

Комплексная экспонента

$f(z) = e^x = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i\, sin\, y)$. Комплексная экспонента является бесконечнолистной функцией. Докажем, что её периодом является мнимое число $T = 2\pi k,\ k \in Z$.

$e^{z+2\pi k} = e^{x+i(y+2\pi k)} = e^x \cdot e^{i(y+2\pi k)} = e^x (\cos (y + 2\pi k) + i\, sin\, (y + 2\pi k)) = e^{x+iy} = e^z$.

Таким образом, множеством однолистности экспоненты (множество на котором функция однолистна) является любая горизонтальная полоса, ширина которой не превышает 2π.

$z \in \{z : y + 2\pi k < \mathrm{Im} z < y + 2\pi(k + 1), k \in Z$.

Комплексный логарифм

$f(z) = Ln\, z = \mathrm{Ln}\, |z| + i\, Arg\, z$. Функция является обратной к комплексной экспоненте и, следовательно, бесконечнозначной.

$f(z) =$ **ln** $z =$ **ln** $|z| + i$ **arg** z называется главным значением комплексного логарифма.

Основное логарифмическое тождество для комплексного логарифма: $e^{\mathrm{lnz}} = e^{\mathrm{ln|z|+iargz}} = e^{\mathrm{ln|z|}} \cdot e^{\mathrm{iargz}} = |z| \cdot e^{\mathrm{iargz}} = z$.

Тригонометрические и гиперболические комплексные функции

Вычислительные формулы: $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

$sh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$, $ch z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

Несложно проверить, что так же, как и тригонометрические функции действительного переменного, комплексные синус и косинус являются 2π – периодическими функциями. Но, в отличие от них, не являются ограниченными. Все эти функции бесконечнолистные.

Обратные тригонометрические и гиперболические комплексные функции

Функция $Arc\sin z$ определяется как множество решений уравнения $z = \sin\omega \Rightarrow \omega = Arc\sin z$:

$$z = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \;\Rightarrow\; e^{2iz} - 2iz \cdot e^{i\omega} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{i\omega} = iz + \sqrt{1 + (iz)^2} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{1}{i} \cdot Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогичным образом могут быть получены вычислительные формулы и для других функций:

$$Arc\cos z = \frac{1}{i} \cdot Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \quad Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right); \quad Arch z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz}; \qquad Arth z = \frac{1}{2} Ln \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Все функции являются бесконечнозначными.

Степенно-показательная функция

Как возвести комплексное число в комплексную степень?

$z_1^{z_2} = e^{z_2 \cdot \ln z_1}$

Задача 3.1. Вычислить $Ln\ 2i$.

Решение:

$$Ln\, 2i = \ln|2i| + iArg\, 2i = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

Задача 3.2. Вычислить i^i.

Решение:

$$i^i = e^{i \cdot Ln i} = e^{i\left(\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}.$$

Значения функции являются действительными и образуют геометрическую прогрессию.

Задача 3.3. Доказать, что формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\,sin\,z$ справедлива и для комплексного аргумента.

Решение:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{2e^{iz}}{2} = e^{iz}.$$

Задача 3.4. Найти Re($tg\,i$).

Решение:

$$tg\,i = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i}\cdot\frac{2}{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}} = i\cdot\frac{e^2-1}{e^2+1} \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(tg\,i) = 0.$$

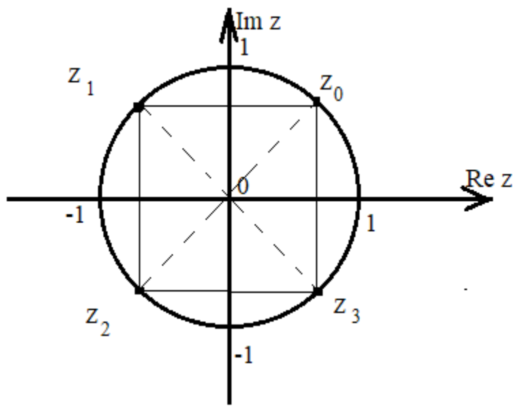
Re ($tg\,i$) = 0.

Задача 3.5. Вычислить и изобразить в комплексной плоскости значения комплексного корня $\sqrt[4]{-1}$.

Решение: Представим число –1 в показательной форме $-1 = e^{i(\pi\text{-}2\pi k)} \Rightarrow \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\cdot e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{4}}$. При $k = 0$ получаем $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приk=1 $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.При$k$=2 $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

При $k = 3$ $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Изобразим полученные значения корней в комплексной плоскости. Они находятся в вершинах правильного четырёхугольника (квадрата), вписанного в окружность с центром в начале координат, и радиуса 1.

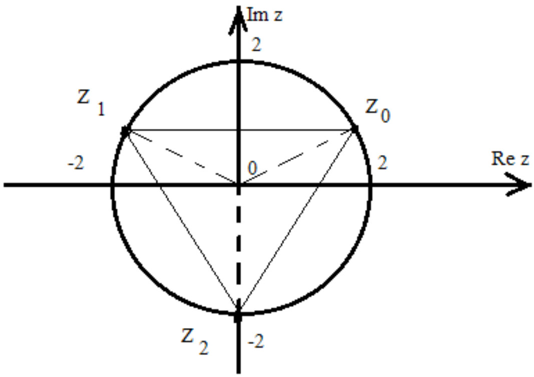


Задача 3.6. Вычислить и изобразить в комплексной плоскости значения комплексного корня $\sqrt[3]{8i}$.

Решение:

Представим число $8i$ в показательной форме $8i = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\cdot e^{\frac{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{3}}$. При $k = 0$ получаем $z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$.

При $k = 1$ $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}+i$. При $k = 2$ $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -2i$. Изобразим полученные значения корней в комплексной плоскости. Они находятся в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность с центром в нуле, и радиуса 2.



Задания для самостоятельной работы

Задача 3.7. Найти множество однолистности для функции $f(z) = \cos 2z$.

Задача 3.8. Найти $\mathrm{Re}(f(z))$ и $\mathrm{Im}(f(z))$, $f(z) = e^{z^2}$.

Задача 3.9. Решить уравнение $\sin z = i$.

Задача 3.10. Вычислить и изобразить в комплексной плоскости значения комплексного корня $\sqrt[6]{64}$.

Занятие 4. Производная комплексной функции. Свойства дифференцируемых функций

Производная комплексной функции в точке определяется так же, как и производная функции действительного переменного:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0).$$

Под дифференцируемостью функции в точке понимается существование и конечность указанного предела. Исходя из этого можно утверждать, что правила и формулы дифференцирования, известные из курса математического анализа, справедливы также и для комплексных функций.

Условия дифференцируемости функций

Пусть $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Между свойствами дифференцируемости функции комплексного переменного как функции точки плоскости и дифференцируемостью её действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных существует тесная связь.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные её действительной $u(x,y)$ и мнимой $v(x,y)$ частей и выполняются условия **Коши–Римана**:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y; \\ u'_y = -v'_x. \end{cases}$$

2. Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x_0;y_0)$ и в этой точке выполняются условия Коши–Римана, то функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0+y_0$.

3. Производная дифференцируемой функции может быть записана по одной из формул: $f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x + iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y + iu'_y$.

Задача 4.1. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = e^z$.

Решение:

Найдём действительную и мнимую части функции.

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)\ \Rightarrow\ u(x,y)=e^x\cdot\cos y,\quad v(x,y)=e^x\cdot\sin y.$$

Найдём частные производные действительной и мнимой частей:
$u'_x = e^x \cdot \cos y$, $u'_y = -e^x \cdot \sin y$, $v'_x = e^x \cdot \sin y$, $v'_y = e^x \cdot \cos y$.

Составим систему уравнений $\begin{cases} u'_x = e^x \cdot \cos y = v'_y = e^x \cdot \cos y \\ u'_y = -e^x \cdot \sin y = -v'_x = -e^x \cdot \sin y \end{cases}$.

Очевидно, что множеством решений системы является R^2. Таким образом, функция является дифференцируемой во всей комплексной плоскости.

Задача 4.2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \bar{z}^2$.

Решение:

Найдём действительную и мнимую части функции
$f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2xyi - y^2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = -2yx$.

Условия Коши–Римана $\begin{cases} u'_x = 2x = v'_y = -2x \\ u'_y = -2y = -v'_x = 2y \end{cases}$ выполняются только в точке $z = 0$. Следовательно, функция дифференцируема только в одной точке.

Задача 4.3. Найти модуль производной функции $f(z) = \dfrac{z}{z+i}$.

Решение:

$f(z) = \dfrac{z}{z+i} = \dfrac{z+i-i}{z+i} = 1 - \dfrac{i}{z+i} = 1 - i(z+i)^{-1}$. Найдём производную, используя формулу дифференцирования степенной функции:

$$f'(z) = \left(1 - i(z+i)^{-1}\right)' = \frac{i}{(z+i)^2} \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| = \frac{|i|}{|z+i|^2} = \frac{1}{x^2 + (1+y)^2} .$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 4.4. Выделить действительную и мнимую части функции, составить условия Коши–Римана, найти точки дифференцируемости функции $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

Задача 4.5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = |z|^2$.

Задача 4.6. Найти модуль и аргумент производной в точке $z = i$ для функции $f(z) = z^2$.

Занятие 5. Аналитические функции и их свойства. Гармонические функции. Уравнение Лапласа

Дадим несколько определений аналитической функции:

1) функция называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в ней и некоторой её окрестности;

2) функция является аналитической в области, если она является непрерывной и выполняются условия Коши–Римана в каждой точке области;

3) аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой;

4) функция является аналитической в области, если формально построенный ряд Тейлора сходится к значению функции в каждой точке области.

У аналитической функции действительная и мнимая части обладают особыми свойствами. $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дифференцируемыми, т. е. имеют непрерывные частные производные любого порядка. И, кроме того, являются **гармоническими**, т. е. удовлетворяющими в области аналитичности уравнению Лапласа: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются гармоническими, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа.

Если две гармонические функции удовлетворяет условиям Коши–Римана, то они называются **гармонически сопряжёнными.** Несложно показать и обратное: если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Кош–Римана, то они удовлетворяют и уравнению Лапласа. Продифференцируем уравнения из условий Коши–Римана $\begin{cases} u'_x = v'_y; \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ следующим образом: первое уравнение – по x, второе – по y. Получаем $\begin{cases} u''_{xx} = v''_{yx}; \\ u''_{yy} = -v''_{xy} \end{cases}$. Складываем полученные уравнения: $u''_x + u''_y = 0$. Аналогичные рассуждения можно провести и для функции $v(x,y)$. Для этого нужно продифференцировать первое уравнение условий Коши–Римана по y, а второе – по x и вычесть одно из другого.

Таким образом, упорядоченная пара гармонически сопряжённых функций образует аналитическую функцию $u(x,y) + iv(x,y)$.

Если существует гармоническая функция, то всегда для неё можно найти гармонически сопряжённую, используя условия Коши–Римана. Эта операция называется восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой частям.

Вывод:

В состав аналитической функции в качестве её действительной или мнимой частей может входить только гармоническая функция.

Задача 5.1. Исследовать на аналитичность функцию $f(z) = e^{i\bar{z}}$.

Решение:

Выделим действительную и мнимую части функции:

$f(z) = e^{iz} = e^{i(x-y)} = e^x \cdot e^y = e^y \cdot (\cos x + i\, sin\, x) \Rightarrow u(x,y) == e^y \cdot \cos x$, $v(x,y) = e^y \cdot \sin x$. Найдём частные производные и составим условия Коши–Римана. $u'_x = e^y \cdot \sin x$, $u'_y = e^y \cdot \cos x$, $v'_x = e^y \cdot \cos x$, $v'_y = e^y \cdot \sin x \Rightarrow \begin{cases} u'_x = -e^y \cdot \sin x = v'_y = e^y \cdot \sin x; \\ u'_y = e^y \cdot \cos x = -v'_x = -e^y \cdot \cos x \end{cases}$. В качестве решения получаем $\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{cases}$ пустое множество, так как система несовместна. Следовательно, функция всюду неаналитическая.

Задача 5.2. Исследовать на аналитичность функцию $f(z) = \sin z$.

Решение:

Выделим действительную и мнимую части функции. Воспользуемся формулами связи между комплексными тригонометрическими и гиперболическими функциями $\cos iy = ch\, y$ и $\sin iy = ish\, y$

$f(z) = \sin z = f(z) = \sin(x + y) = f(z) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y =$ $= \sin x \cdot ch\, y + i\cos x \cdot sh\, y \Rightarrow u(x,y) = \sin x \cdot ch\, y$, $v(x,y) = \cos x \cdot sh\, y$.

Находим частные производные: $u'_x = \cos x \cdot ch\, y$; $u'_y = \sin x \cdot ch\, y$; $v'_x = -\sin x \cdot ch\, y$; $v'_y = \cos x \cdot ch\, y$. Получим всюду верную систему уравнений: $\begin{cases}u'_x = \cos x \cdot ch\, y = v'_y = \cos x \cdot ch\, y;\\ u'_y = \sin x \cdot sh\, y = -v'_x = \sin x \cdot sh\, y.\end{cases}$ Функция $f(z) = \sin z$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Задача 5.3. Может ли функция $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$ быть действительной частью некоторой аналитической функции?

Решение:

Проверим функцию на гармоничность. Вычислим однородные производные второго порядка:

$$u'_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u''_{xx} = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$u'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad u''_{yy} = \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}; ?$$

Составим уравнение Лапласа: $u''_{xx} + u''_{yy} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0.$

Оно выполняется для всех точек области определения функции.

Функция $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ является гармонической и может быть действительной частью аналитической функции.

Задача 5.4. Может ли функция $v(x,y)=\frac{y}{x}$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции?

Решение:

Проверим функцию на гармоничность. Вычислим однородные производные второго порядка: $v'_x=-\frac{y}{x^2}$; $v'_y=\frac{1}{x}$; $v''_{xx}=\frac{2y}{x^3}$; $v''_{yy}=0$.

Решением уравнения Лапласа $v''_{xx}+v''_{yy}=\frac{2y}{x^3}=0$ является множество $x = 0$, $y = 0$. Это действительная ось с выколотой точкой 0. Данное множество не является областью, следовательно, функция не является гармонической и не может входить в состав аналитической функции.

Задача 5.5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по её действительной части $u(x,y) = x \cdot y$, удовлетворяющую условию $f(0) = 0$.

Решение:

Проверим функцию $u(x,y) = x \cdot y$ на гармоничность:

$u'_x = y$, $u'_y = x$, $u''_{xx} = 0$, $u''_{yy} = 0$. Таким образом, функция является гармонической, удовлетворяет уравнения Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Найдём гармонически сопряжённую к ней.

Воспользуемся первым уравнением условий Коши–Римана:

$u'_x=y=v'_y \quad \Rightarrow \quad v=\int v'_y dy=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}=\varphi(x)$. Найдём функцию $\varphi(x)$ из второго уравнения условий Коши–Римана: $u'_y=x=-v'_x=\left(-\frac{y^2}{2}-\varphi(x)\right)_x=-\varphi'_x \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=\int(-x)dx=-\frac{x^2}{2}+c$.

Следовательно, $v(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{2}+c$. Составим аналитическую функцию $f(x+iy)=u+iv=x\cdot y+i\left(\dfrac{y^2-x^2}{2}+c\right)$. Найдём константу c из условия $f(0)=0=i\cdot c\Rightarrow c=0$. Составим функцию от комплексного аргумента z:

$$f(x+iy)=x\cdot y+i\left(\frac{y^2-x^2}{2}+c\right)=\frac{-i}{2}\left(2xyi+x^2-y^2\right)=\frac{-i}{2}(x-iy)^2=\frac{-i}{2}z^2=f(z)$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 5.6. Исследовать на аналитичность функцию $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Задача 5.7. Исследовать на аналитичность функцию $f(z)=|z|^2$.

Задача 5.8. Исследовать на аналитичность функцию $f(z)=ch\,z$.

Задача 5.9. Является ли функция двух переменных $u(x,y)$ аналитической?

Задача 5.10. Может ли функция $u(x,y)=arctg\dfrac{y}{y}$ быть действительной частью некоторой аналитической функции?

Задача 5.11. Может ли функция $v(x,y)=\cos\dfrac{y}{x}$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции?

Задача 5.12. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по её мнимой части $v(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$, удовлетворяющую условию $f(i)=-1$.

Занятие 6. Числовые комплексные последовательности

Числовой комплексной последовательностью называется нумерованное множество комплексных чисел, или функция, определённая на множестве натуральных чисел $z_n = f(n)$.

Последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$.

Последовательность называется бесконечно большой, если она является бесконечно большой по модулю:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \qquad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |z_n| > \varepsilon$$

Справедливы следующие утверждения:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = z_0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} z_0$.

Справедливо и обратное утверждение;

2) для бесконечно большой последовательности справедливо лишь обратное утверждение. Если действительная и мнимая части последовательности являются бесконечно большими, то и комплексная последовательность тоже бесконечно большая. Можно привести пример бесконечно большой комплексной последовательности, действительная или мнимая части которой не являются бесконечно большими: $z_n = arctg\, n + i \cdot n$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся. В частности, расходящейся последовательностью является любая неограниченная последовательность, в том числе и бесконечно большая.

Задача 6.1. Доказать, что второй замечательный предел справедлив и для комплексной переменной $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Решение:

Возведём выражение в n-ю степень, представив основание в показательной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}\right)^n \cdot e^{in\, arctg\frac{y}{n+x}}.$$

Вычислим отдельно пределы модуля и аргумента как пределы функциональных последовательностей с действительными параметрами.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2}}=e^x;$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot arctg\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

Таким образом $\mathop{Lim}\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\cdot e^{iy}=e^z$.

Задача 6.2. Найти предел последовательности $z_n=\dfrac{n-2ni}{n+2}$.

Решение:

Выделим действительную и мнимую части последовательности и представим основание в показательной форме.

$z_n=\left(\dfrac{1-2i}{3+i}\right)^n=\left(\dfrac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\right)^n=\left(\dfrac{1-7i}{10}\right)^n=\sqrt{\dfrac{1}{2}}^{\,n}\cdot e^{i\varphi n}$, где φ аргумент основания. Очевидно, величина является бесконечно малой как произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$.

Задача 6.3. Найти предел последовательности $z_n=\left(\dfrac{1-2i}{3+i}\right)^n$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2ni}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-2i)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1-2i$.

Задача 6.4. Найти предел последовательности $z_n = \frac{1}{n} \cdot e^{in\frac{\pi}{4}}$.

Задача 6.5. Найти условие, при котором последовательность $z_n = z^n$ сходится.

Задача 6.6. Дано $z_n = a_n \cdot e^{i\,\arg b_n}$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $a_n \geq 0$. При каких характеристиках a_n и b_n последовательность z_n является:

а) ограниченной

б) неограниченной

в) стремящейся к числу z_0

г) бесконечно малой

д) бесконечно большой?

Вариант контрольной работы по теме: «Комплексные числа и функции»

1. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической формах и изобразить точкой в комплексной плоскости. а) $z = -1 - i\sqrt{3}$; б) $z = 2 - 5i$.

2. Найти значение выражения $\dfrac{\left(i-\sqrt{3}\right)^7 \cdot i^5}{3+i} =$

3. Найти значения комплексных корней, изобразить их в комплексной плоскости $\sqrt[3]{-8i} =$

4. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} \mathrm{Re}\, z > 2 \\ |z| < 4 \end{cases}$.

5. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z - 2i| \leq |z + 4i|$.

6. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Re}\left(\bar{z} \cdot (z + i)\right) \geq \mathrm{Im}\left(z^2\right) \cdot \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\, z}$.

7. Вычислить значения функций: а) $Ln(-e^3)$; б) $(-1)^{-i}$; в) $ch\dfrac{3\pi i}{2}$.

8. Найти точки дифференцируемости и аналитичности функции $f(z) = z \cdot \overline{(z + 2i)}$.

9. Может ли функция $u = \dfrac{\cos 2x}{e^x}$ быть действительной частью аналитической функции?

10. Проверить функцию $v = 2x - 3y + 2$ на гармоничность. Восстановить аналитическую функцию по её мнимой части, удовлетворяющую условию $f(0) = i$.

Комплексные интегралы и ряды

Занятие 7. Интегрирование функций комплексного переменного по кривой

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а C – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D. Интегральные суммы комплексного интеграла составляются следующим образом:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta z_i ,$$

где ξ_i – произвольная точка кривой, принадлежащая i-у участку разбиения, а $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$. Таким образом, $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_1 = \Delta x_1 + iy_1$, $dz = dx + idy$. Выделим действительную и мнимую части комплексного интеграла:

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u+iv)(dx+idy) = \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c v\,dx + u\,dy .$$

Таким образом, комплексный интеграл по кривой сводится к двум криволинейным интегралам II рода. Составим условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования для действительной и мнимой частей комплексного интеграла. Получим

$$\begin{cases} u'_x = v'_y; \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

не что иное, как условия Коши–Римана аналитичности подынтегральной функции. Таким образом, если подынтегральная функция является аналитической, то значение комплексного интеграла не зависит от формы кривой интегрирования, а определяется только начальной и конечной точками интегрирования. Имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_c f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A),$$

где $F'(z) = f(z)$.

В случае если подынтегральная функция не является аналитической, интеграл может быть вычислен непосредственным интегрированим по кривой следующим образом. Пусть кривая C задана параметрическими уравнениями, а промежуток изменения параметра соответствует начальной и конечной точкам интегрирования кривой C.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \ \Rightarrow z(t) = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t).$$

Вычисление комплексного интеграла по кривой сводится к вычислению определённого интеграла по параметру t:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot d\, z(t) = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt\,.$$

Задача 7.1. Вычислить интеграл $\int_c \left(1 + i + 2\bar{z}\right)dz$ по отрезку, соединяющему точки 0 и $1+i$.

Решение:

Подынтегральная функция является неаналитической, поэтому воспользуемся формулой непосредственного интегрирования по кривой. Зададим отрезок интегрирования в виде комплекснозначной функции:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \ \Rightarrow z(t) = t + it \ \Rightarrow \ \bar{z}(t) = t - it, \quad dz(t) = (1+i)dt.$$

Составим определённый интеграл:

$$\int_c \left(1 + i + 2\bar{z}\right)dz = (1+i)\cdot\int_0^1 \left(1 + i - 2(t - it)\right)dt =$$

$$= (1+i)\cdot\int_0^1 \left(1 + i - 2t(1-i)\right)dt = (1+i)\left((1+i)t - (1-i)\cdot t^2\right)\Big|_0^1 = -2 + 2i\,.$$

Задача 7.2. Вычислить интеграл $\int_c \left(z^2 + z\cdot\bar{z}\right)dz$ по дуге окружности $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$.

Решение:

Подынтегральная функция является неаналитической, поэтому воспользуемся формулой непосредственного интегрирования по кривой. Зададим полуокружность интегрирования в виде комплекснозначной функции: $z(\varphi)=e^{i\varphi} \quad\Rightarrow\quad \bar{z}=e^{-i\varphi}, \quad dz=i\cdot e^{i\varphi}\,d\varphi$.

Составим определённый интеграл:

$$\int_c \left(z^2+z\cdot\bar{z}\right)dz = i\int_0^{\pi}\left(e^{2i\varphi}+e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}\right)\cdot e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^{\pi}\left(e^{3i\varphi}+e^{i\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= i\left(\frac{e^{3i\varphi}}{3i}+\frac{e^{i\varphi}}{i}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left(\frac{e^{3i\varphi}}{3}+e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}.$$

Задача 7.3. Вычислить комплексный интеграл по замкнутой кривой (окружности радиуса 1, с центром в точке z_0), пробегаемой против часовой стрелки $\oint\limits_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}\quad n\in N$.

Решение:

Окружность интегрирования задаётся уравнением $z(\varphi)=z_0+e^{i\varphi}\Rightarrow dz=i\cdot e^{i\varphi}d\varphi$. Составим определённый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi n}}=\begin{cases}\text{при}\ \ n=1,\ \int_0^{2\pi} i\,d\varphi=2\pi i\\[2ex] \text{при}\ \ n>1,\ \int_0^{2\pi} i\cdot e^{i\varphi(1-n)}d\varphi=\dfrac{e^{i\varphi(1-n)}}{n}\Bigg|_0^{2\pi}=0.\end{cases}$$

Задача 7.4. Вычислить комплексный интеграл по кривой, соединяющей точки 0 и i $\int_0^i z\cdot\cos z\,dz$.

Решение:

Подынтегральная функция является аналитической в комплексной плоскости, поэтому значение интеграла не зависит от формы кривой интегрирования, что отражено в форме записи интеграла. Применим формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^i z\cos z\,dz=\int_0^i z(\sin z)'\,dz=(z\sin z)\Big|_0^i-\int_0^i\sin z\,dz=i\cdot\sin i+\cos z\Big|_0^i=\frac{1-e}{e}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 7.5. Вычислить комплексный интеграл по верхней половине окружности $|z| = 1$ ($-\pi \le \arg z \le 0$) в направлении по часовой стрелке $\int\limits_{|z|=1} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$.

Задача 7.6. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_{c} \operatorname{Re} z\, dz$, где c ломаная, состоящая из отрезка $[0,2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 2 + i$.

Задача 7.7. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_{0}^{i} (z-i) \cdot e^{-z} dz$.

Задача 7.8. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_{c} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по верхней половине окружности $|z| = 1$. Выбирается та ветвь функции $f(z) = \sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = 1$.

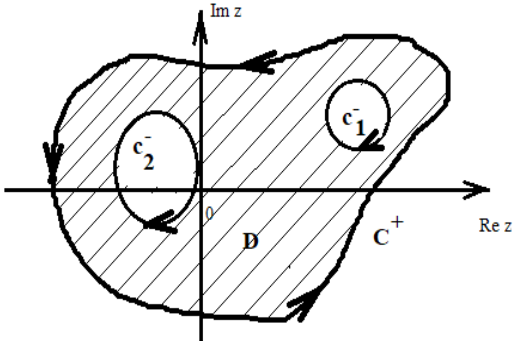
Задача 7.9. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_{c} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по полуокружности $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$ Выбирается та ветвь функции $f(z) = \sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-i} = (1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Занятие 8. Теорема и формула Коши. Интегральное представление производных аналитической функции

Теорема Коши для односвязной области: пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и на её границе ∂D – тогда справедливо следующее утверждение: $\oint\limits_{\partial D} f(z) dz = 0$. Или интеграл от аналитической функции по любому замкнутому контуру, принадлежащему её области аналитичности, равен нулю.

Теорема Коши для многосвязной области: пусть функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и на её границе ∂D – тогда справедливо следующее утверждение: суммарный интеграл по границе аналитичности равен нулю. При этом ориентация контуров, образующих границу, определяется по правилу левой руки: при обходе контура рассматриваемая область аналитичности должна оставаться слева. $\sum\limits_{c_i \in \partial D} \oint\limits_{c_i} f(z)dz = 0$.

Рассмотрим теорему для трёхсвязной области.



Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\sum_{c_i \in \partial D} \oint_{c_i} f(z)dz = 0 = \oint_{C^+} f(z)dz + \oint_{c_1^-} f(z)dz + \oint_{c_2^-} f(z)dz =$$

$$= \oint_{C^+} f(z)dz - \oint_{c_1^+} f(z)dz - \oint_{c_2^+} f(z)dz \quad \Rightarrow \quad \oint_{C^+} f(z)dz = \oint_{c_1^+} f(z)dz + \oint_{c_2^+} f(z)dz.$$

Таким образом, для многосвязной области справедливо следующее утверждение: интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам. Ориентация всех контуров положительная.

Интегральная формула Коши: если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D и на её границе C, то справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

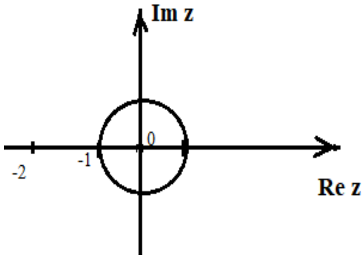
где точка z_0 принадлежит области D, а контур C обходится так, что область D остаётся слева.

При тех же самых условиях справедлива формула, которую ещё называют интегральным представлением производных аналитической функции:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz .$$

Задача 8.1. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz$. Ориентация контура – против часовой стрелки.

Решение:



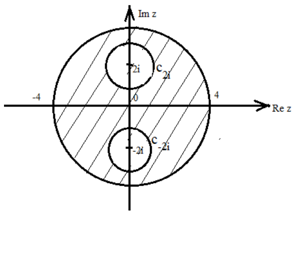
У подынтегральной функции две точки неаналитичности $z_1=0$ и $z_2=-2$. Внутри контура $|z|=1$ находится только $z_1=0$. Таким образом, функция $f(z)=\frac{e^z}{z+2}$ является аналитической внутри контура интегрирования.

Применим формулу Коши:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz=\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z\cdot(z+2)}dz=\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z+2)}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot\frac{e^0}{0+2}=\pi i.$$

Задача 8.2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=4}\frac{z}{z^2+4}dz$. Ориентация контура – против часовой стрелки.

Решение:



У подынтегральной функции две точки неаналитичности: $z_1=2i$ и $z_2=-2i$. Обе находятся внутри контура интегрирования.

Воспользуемся теоремой Коши для многозначной области:

$$\oint\limits_{|z|=4} f(z)dz = \oint\limits_{c_{2i}} f(z)dz + \oint\limits_{c_{-2i}} f(z)dz.$$

Вычислим интегралы по контурам, охватывающим точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Внутри каждого из них находится только одна точка неаналитичности подынтегральной функции. По формуле Коши имеем:

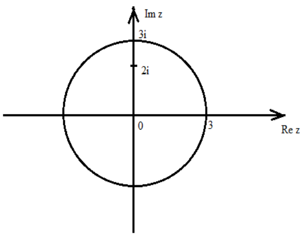
$$\oint\limits_{c_{2i}} \frac{z}{z^2+4} dz = \oint\limits_{c_{2i}} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)} dz = 2\pi i \cdot \frac{z}{z+2i}\bigg|_{z=2i} = \pi i.$$

$$\oint\limits_{c_{-2i}} \frac{z}{z^2+4} dz = \oint\limits_{c_{-2i}} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)} dz = 2\pi i \cdot \frac{z}{z-2i}\bigg|_{z=-2i} = \pi i.$$

Таким образом, $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z}{z^2+4} dz = 2\pi i$.

Задача 8.3. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin iz}{(z-2i)^3} dz$. Ориентация контура – против часовой стрелки.

Решение:



У подынтегральной функции одна точка неаналитичности – $z_1 = 2i$, находящаяся внутри контура интегрирования. Воспользуемся формулой Коши для интегрального представления производных. Составим её для $n = 2$

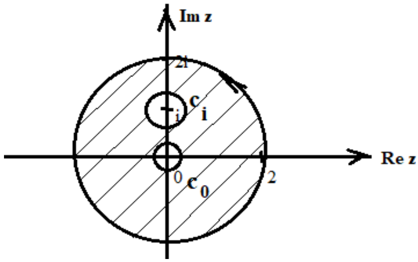
$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{c} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz.$$

Таким образом, получаем:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin iz}{(z-2i)^3} dz = \pi i \cdot (\sin iz)''\Big|_{z=2i} = \pi i \cdot \sin iz\Big|_{z=2i} = 2\pi \cdot \sin 2.$$

Задача 8.4. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - iz^2}$. Ориентация контура – против часовой стрелки.

Решение:



У подынтегральной функции две точки неаналитичности: $z_1 = 0$ и $z_1 = i$, находящиеся внутри контура интегрирования. Воспользуемся формулой Коши для многозначной области:

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz = \oint\limits_{c_i} f(z)dz + \oint\limits_{c_0} f(z)dz.$$

Вычислим интегралы по контурам, охватывающим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$. Внутри каждого из них находится только одна точка неаналитичности подынтегральной функции. Интеграл по контуру, охватывающему точку $z_1 = 0$, будем вычислять по формуле интегрального представления производных аналитической функции для $n = 1$ $f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i} \oint\limits_{c} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$.

По формуле Коши имеем: $\oint\limits_{c_i} \frac{dz}{z^3 - iz^2} = \oint\limits_{c_i} \frac{dz}{z^2(z-i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{z^2}\Big|_{z=i} = -2\pi i$,

$$\oint\limits_{c_0} \frac{dz}{z^3 - iz^2} = \oint\limits_{c_0} \frac{dz}{z^2(z-i)} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z-i}\right)'\Big|_{z=0} = -2\pi i \cdot \frac{1}{(z-i)^2}\Big|_{z=0} = 2\pi i.$$

Таким образом, $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - iz^2} = 0$.

Задания для самостоятельной работы

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

Задача 8.5. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$.

Задача 8.6. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z\,dz}{z^3}$.

Задача 8.7. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}dz}{(z-1)^2(z-3)}$.

Задача 8.8. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}$.

Занятие 9. Числовые комплексные ряды

Комплексный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = A$ сходится к числу $A \in C$, если сходится последовательность его n-х частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \to A$. Определение сходимости на языке кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon \qquad |A - S_n| < \varepsilon.$$

Комплексный числовой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей слагаемых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ является сходящимся, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

У комплексного числового ряда можно выделить его действительную и мнимую части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i\,y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n \ .$$

Сформулируем основные признаки сходимости комплексных числовых рядов:

1. Необходимое условие сходимости ряда. У сходящегося числового ряда общий член ряда по модулю является бесконечно малой последовательностью, или, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится;

2. Комплексный числовой ряд сходится, если сходятся его действительная $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и мнимая $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ части. Справедливо и обратное утверждение;

3. Признаки сравнения. Если положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и выполняется неравенство $|z| \le c_n$ для всех n, начиная с некоторого, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ также является сходящимся. Если положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится и выполняется неравенство $|z| \ge c_n$ для всех n, начиная с некоторого, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ также является расходящимся;

4. Признаки **Даламбера** и **Коши** сходимости комплексного числового ряда. Если существует предел последовательности Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$=A, то при A<1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится , при A>1

ряд расходится, при A = 1 ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Если существует предел последовательности Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=$A, то при A<1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, при A>1 ряд расходится, при A = 1 ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Задача 9.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$.

Решение:

Проверим необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^{in}}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ верно. Выделим действительную и мнимую части ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n + i\sin n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$. Оба ряда являются сходящимися по признаку Дирихле. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$ сходится.

Задача 9.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2-i}$.

Решение:

Так же, как и в предыдущей задаче, выделим действительную и мнимую части ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2-i} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+in)\cdot(n^2+i)}{(n^2-i)\cdot(n^2+i)} =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-n)+i(n^3+1)}{n^4+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^4+1} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+1}$. Составим степенные эквиваленты при $n\to\infty$ для общих слагаемых полученных рядов:

$$\frac{n^2-n}{n^4+1}\sim\frac{1}{n^2};\quad \frac{n^3+1}{n^4+1}\sim\frac{1}{n}.$$

Таким образом, действительная часть является сходящимся рядом ($\alpha = 2 > 1$), а мнимая – расходящимся ($\alpha = 1 \le 1$).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2-i}$. расходится, так как расходится его мнимая часть.

Задача 9.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n^3\cdot 2^n}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Коши $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{n^3\cdot 2^n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Следовательно , ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n^3\cdot 2^n}$. является сходящимся.

Задача 9.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2i)^n\cdot n}{(n+1)!}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(1-2i)^{n+1}\cdot(n+1)\right|\cdot(n+1)!}{(n+2)!\left|(1-2i)^n\right|\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1-2i|\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot n}=0<1,$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2i)^n\cdot n}{(n+1)!}$ является сходящимся.

Задания для самостоятельной работы

Задача 9.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{i}{n}\right)}{n}$.

Задача 9.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2i}{1+in^3}$.

Задача 9.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1-2i}\right)^n\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Задача 9.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}\cdot n^5}{(2n+1)!!}$.

Занятие 10. Функциональные комплексные ряды. Сходимость и равномерная сходимость

Функциональным комплексным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется ряд, суммирующий функции комплексного переменного. Функциональный ряд называется сходящимся в точке z_0, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Если функциональный ряд сходится в каждой точке множества E, то он называется сходящимся на множестве E.

Функциональный ряд равномерно сходится на множестве E, если последовательность его частичных сумм является равномерно сходящейся функциональной последовательностью $\sum_{i=1}^{n} f_i(z) = S_n(z) \rightrightarrows S(z)$ или остаток ряда равномерно сходится к 0 $\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(z) = r_n(z) \rightrightarrows 0$.

Необходимым условием равномерной сходимости функционального ряда является равномерное стремление к нулю его общего члена: $u_n(x) \Rightarrow 0$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда: если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно указать такой сходящийся числовой действительный положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех $n \geq n_0$ и для всех $z \in E$ выполняется неравенство $|f_n(z)| \leq a_n$, то ряд является равномерно сходящимся.

Задача 10.1. Найти множество сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|e^{inz}\right|}{n}}=\left|e^{iz}\right|=\left|e^{i(x+iy)}\right|=\left|e^{ix-y}\right|=\left|\frac{e^{ix}}{e^{y}}\right|=\frac{1}{e^{y}}<1 \quad\Rightarrow\quad e^{y}>1 \quad\Rightarrow\quad y>0.$$

Таким образом, ряд сходится на множестве $\operatorname{Im} z>0$, т. е. в верхней полуплоскости. Однако точки сходимости могут оказаться и для значений переменной, при которых предел равен 1. Исследуем их отдельно. Имеем при $y=0$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+i\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. Мнимая часть ряда сходится при любых значениях x, а действительная – при всех $x\neq 2\pi k$, $k\in Z$. Множество сходимости ряда: $\operatorname{Re} z\geq 0$, $z\neq 2\pi k$, $k\in Z$.

Задача 10.2. Найти множество сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^{n}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^{n}\right|}=\frac{|z+i|}{|z-1|}<1 \;\Rightarrow |z+i|<|z-1|.$$

Используя смысл модуля разности двух чисел как расстояния между ними, данное неравенство можно интерпретировать как множество точек, расположенных ближе к точке $-i$, чем к 1. Множество точек, равноудалённых от них, – это серединный перпендикуляр, то есть прямая $y=-x$. Множество сходимости ряда $\operatorname{Im} z<-\operatorname{Re} z$, нижняя полуплоскость с границей $y=-x$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 10.3. Найти множество сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in+z}}{3^{n+1}}$.

Задача 10.4. Найти множество сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2z+i}\right)^n$.

Занятие 11. Степенные комплексные ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Степенной ряд – это функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$, где c_n – это числовая комплексная последовательность, называемая общим членом степенного ряда, $z_0 \in R$ – центр степенного ряда. Область сходимости степенного ряда имеет вид $|z - z_0| < R$, где R – радиус сходимости, значение которого может быть вычислено по формуле Коши–Адамара $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ или по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. В указанной области степенной ряд сходится абсолютно и равномерно. Ряд можно почленно дифференцировать бесконечное количество раз: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n(z-z_0)^{n-1}$ и интегрировать по любой кривой, принадлежащей области сходимости: $\int_l f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \int_l (z-z_0)^n dz$.

Задача 11.1. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$.

Решение: $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$, $z_0 = 1$.

Находим радиус сходимости: $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$.

Областью сходимости ряда является круг с центром в 1 и радиусом $|z - 1| < 2$. Точки сходимости могут находиться также и на границе области. Проведём исследование сходимости ряда на окружности $z(\varphi) = 1 + 2^{i\varphi}$ $\varphi \in [0;2\pi]$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z(\varphi)-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2e^{i\varphi})^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi n}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\varphi n}{\sqrt{n}} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\varphi n}{\sqrt{n}}.$$

Мнимая часть сходится по признаку Дирихле при всех значениях параметра $\varphi \in [0;2\pi]$; действительная часть сходится при значениях $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 2\pi$, что соответствует точке $z(0) = 1 + 2e^{i\varphi} = 3$.

Таким образом, ряд сходится при $z \in \{|z-1| \le 2 \backslash 3\}$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 11.2. Найти множество сходимости степенных рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z-2i)^n \cdot n}{3^{n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 8^n}$.

Занятие 12. Ряды по целым степеням. Множество сходимости

Ряд по целым степеням – это ряд вида $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n, \quad n \in Z$,

где c_n – это числовая комплексная последовательность, называемая общим членом степенного ряда, $z_0 \in C$ – центр степенного ряда. Выделим правильную (по положительным степеням) и главную (по отрицательным степеням) части ряда:

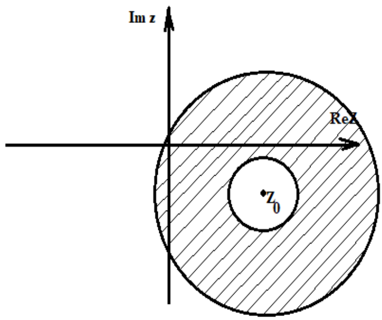
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Множество сходимости ряда по целым степеням определяется как пересечение множеств сходимости его правильной и главной частей. Область сходимости правильной части имеет вид $|z - z_0| < R$, где R – радиус сходимости, значение которого может быть вычислено по формуле Коши-Адамара: $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Найдём область сходимости главной части (ряд по отрицательным степеням) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$. С помощью замены $\frac{1}{z-z_0}=t \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\cdot t^n$ ряд сходится при $|t|<R$, $\frac{1}{|z-z_0|}<R$

или $|z-z_0|>\frac{1}{R}=r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$. В зависимости от соотношения радиусов сходимости правильной и главной частей возможны следующие варианты:



1. Если $R > r$ – множеством сходимости является кольцо $r < |z - z_0| < R$. Также точки сходимости ряда могут находиться на окружностях $|z-z_0| = R$ и $|z-z_0| = r$;

2. Если $R = r$ – точки сходимости могут находиться лишь на окружности $|z - z_0| = R = r$. Это требует проверки;

3. Если $R < r$, множество сходимости пусто.

Следует заметить, что значения R и r могут быть равны нулю или бесконечности. Тогда областью сходимости могут быть такие множества, как круг с выколотым центром, плоскость с выколотой точкой или внешность круга. Все эти множества будем условно называть кольцами.

Задача 12.1. Найти множество сходимости ряда по целым степеням $\sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

Решение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\cdot 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n\cdot 2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{-n}}{n^2\cdot 2^{-n}},\quad z_0=i,\quad c_n=\frac{1}{n^2\cdot 2^n},\qquad c_{-n}=\frac{2^n}{n^2}.$$

Находим радиус сходимости ряда по положительным степеням:

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2\cdot 2^n}}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2.$$

Находим радиус сходимости ряда по отрицательным степеням: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^2}\right|}=2.$

Точки сходимости могут находиться на окружности $|z-i|=2$. Проверим точки: $z(\varphi)=i+e^{i\varphi}$ $\varphi\in[0;2\pi]$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\cdot 2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{-n}}{n^2\cdot 2^{-n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i+2e^{i\varphi}-i\right)^n}{n^2\cdot 2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(i+2e^{i\varphi}-i\right)^{-n}\cdot 2^n}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i\varphi n}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-i\varphi n}}{n^2}\ -$$

– полученные ряды являются сходящимися для всех значений параметра. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\cdot 2^n}$ сходится при $|z-i|=2$.

Задача 12.2. Найти множество сходимости ряда по целым степеням $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}$.

Решение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{-n}}{1+3^{-n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(1+3^n)\cdot(z+1)^n}.$$

$$z_0=-1,\ c_n=\frac{1}{1+3^n},\quad c_{-n}=\frac{3^n}{1+3^n}\ .$$

Находим радиус сходимости правильной части ряда: $R^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+3^n}}=\frac{1}{3}\Rightarrow R=3.$

Находим радиус сходимости главной части ряда: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{1+3^n}\right|}=1.$ Областью сходимости ряда является кольцо $1<|z+i|<3$.

Исследуем поведение ряда на границе кольца сходимости. Границами являются окружности, внутренняя $z(\varphi)=-1+e^{i\varphi}$ $\varphi\in[0;2\pi]$ и внешняя $z(\varphi)=-1+3e^{i\varphi}$ $\varphi\in[0;2\pi]$. Уравнение внутренней окружности подставляем в главную часть ряда, а внешней – в правильную.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(1+3^n)\cdot(z+1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(1+3^n)\cdot\left(-1+e^{i\varphi}+1\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(1+3^n)\cdot e^{i\varphi n}}.$$

Ряд, очевидно, является расходящимся при всех значениях параметра, так как модуль общего слагаемого ряда стремится к 1, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1+3\cdot e^{i\varphi}+1\right)^n}{1+3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot e^{i\varphi n}}{1+3^n}.$$

Ряд является расходящимся при всех значениях параметра по тем же причинам, что и предыдущий. Следовательно, множеством сходимости ряда $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{1+3^n}$ является кольцо $1 < |z + i| < 3$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 12.3. Найти множество сходимости рядов по целым степеням:

a) $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty}\frac{n^2\cdot z^n}{1+n^3}$; b) $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty}\frac{(z+2i+2)^n}{n\cdot\left(2^n+4^n\right)}$.

Занятие 13. Ряд Тейлора. Разложение комплексной функции в степенной ряд в окрестности точки аналитичности

Теорема Тейлора. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и некоторой её окрестности. Тогда функция $f(z)$ представляется степенным рядом (рядом Тейлора) вида $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формуле $c_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{c^+}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где контур c^+ охватывает точку z_0 и принадлежит области аналитичности $f(z)$. Учитывая интегральную формулу Коши представления производных аналитической функции, получим известное выражение для вычисления коэффициентов Тейлора $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Область сходимости такого ряда определяется как расстояние от z_0 до ближайшей точки неаналитичности $f(z)$.

Разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора в окрестности точки 0:

1. Показательная функция: $e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;

2.Тригонометрические функции:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

3. Гиперболические функции:

$$ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad sh\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

4. Логарифмическая функция (главная ветвь комплексного логарифма):

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}.$$

Задача 13.1. Разложить функцию $f(z) = e^{2z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение:

Сделаем замену переменной и воспользуемся стандартным разложением Тейлора в 0 для показательной функции:

$$t = z - z_0 = z - 1 \Rightarrow \quad z = t + 1.$$

$$e^{2z} = e^{2(t+1)} = e^{2+2t} = e^2 \cdot e^{2t} = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \cdot t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \cdot (z-1)^n.$$

Задача 13.2. Разложить в степенной ряд функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ в окрестности точки $z_0 = -2$

Решение:

Воспользуемся методом почленного дифференцирования ряда $\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'$. а). Разложим в степенной ряд функцию $f(z)=-\dfrac{1}{z}$, используя формулу суммы геометрической прогрессии $\dfrac{a_1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_1\cdot q^n$, и б) полученный ряд продифференцируем:

$$\text{а)}\ -\frac{1}{z}=\frac{-1}{(z+2)-2}=\frac{1/2}{1-\frac{z+2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}};$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{z^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(z+2)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

По теореме Тейлора радиус сходимости ряда $R = 2$.

Задача 13.3. Разложить в степенной ряд функцию $f(z) = arctg\, z$ в окрестности точки 0.

Решение:

Воспользуемся методом почленного интегрирования степенного ряда $arctg\, z=\int\limits_0^z\dfrac{dt}{1+t^2}$. При разложении подынтегральной функции в степенной ряд воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_1\cdot q^n=\frac{a_1}{1-q}\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{1-(-t^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot(-t)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n}.$$

Проинтегрируем почленно полученный степенной ряд:

$$arctg\, z=\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\int_0^z t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^z=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{2n+1}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots.$$

С учётом того, что $Arctg\,z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz}$, находим радиус сходимости как расстояние до ближайших точек неаналитичности $z = \pm i$, $R = 1$

Задания для самостоятельной работы

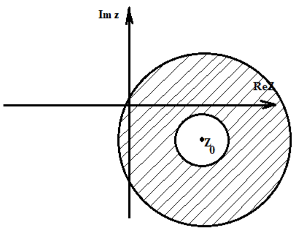
Задача 13.4. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0: а) $f(z) = \cos 2iz$, $z_0 = i$; б) $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2}$, $z_0 = 0$.

Занятие 14. Ряд Лорана. Разложение комплексной функции в ряд по целым степеням в окрестности точки неаналитичности или в кольце

Теорема Лорана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце с центром в точке z_0 вида $r < |z - z_0| < R$. Тогда функция $f(z)$ представляется рядом по целым степеням (рядом Лорана) вида $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формуле $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{c^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где контур c^+ охватывает точку z_0 и принадлежит кольцу $r < |z - z_0| < R$.

Правила разложения функции в ряд Лорана

Правило 1 для суммы функций. Применяется для случая, когда точка z_0 является точкой аналитичности $f(z)$.



Пусть функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы двух функций $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ таким образом, что $f_1(z)$ аналитична внутри круга $|z - z_0| < R$, а $f_2(z)$ аналитична во внешности круга $r < |z - z_0|$. В этом случае функция $f_1(z)$ раскладывается по положительным степеням $z - z_0$ и образует правильную часть ряда Лорана, а $f_2(z)$ – по отрицательным степеням $z - z_0$ и образует главную часть ряда Лорана.

Правило 2 для произведения функций. Применяется для случая, когда точка z_0 является точкой неаналитичности $f(z)$.

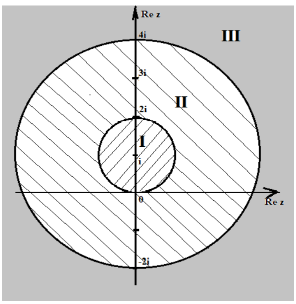
Пусть функцию $f(z)$ можно представить в виде произведения двух функций $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ таким образом, что $f_1(z)$ аналитична внутри круга $|z - z_0| < R$, а $f_2(z)$ аналитична во внешности круга $r < |z - z_0|$. В этом случае функция $f_1(z)$ раскладывается по положительным степеням $z - z_0$, а $f_2(z)$ – по отрицательным степеням $z - z_0$ Результаты разложений перемножаются.

Задача 14.1. Найти и описать все области аналитичности функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$ с центром в точке $z_0 = i$ и разложить в степенной ряд в каждой из них.

Решение:

У функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$ можно выделить 3 области аналитичности: **I.** $|z - i| < 1$. **II.** $1 < |z - i| < 3$. **III.** $|z - i| < 3$ (Рис. ниже.)

I. $|z - i| < 1$ Так как точка $z_0 = i$ является точкой аналитичности функции, следовательно, в области $|z - i| > 1$ функцию можно разложить в ряд Тейлора. Представим $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$ в виде суммы, т. е. разложим на простые дроби:



$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z-2i)(z-2i)} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z+2i} =$$

$$= \frac{A(z+2i) + B(z-2i)}{(z-2i)(z-2i)} = \begin{vmatrix} A + B = 0 \\ A - B = \dfrac{1}{2i} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1/4i}{z-2i} - \frac{1/4i}{z+2i} \quad .$$

Разложим каждую из дробей в степенной ряд по положительным степеням $z - i$, используя формулу суммы геометрической прогрессии: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot q^n = \dfrac{a_1}{1-q}$. Сделаем замену переменной $z - i = t$:

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{t-i}=\frac{i}{1-\frac{t}{i}}=\sum_{n=0}^{\infty} i\left(\frac{t}{i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^{n-1}};$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{t+3i}=\frac{1/3i}{1+\frac{t}{3i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3i}\left(\frac{t}{-3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{3^{n+1}i^{n+1}}.$$

В итоге имеем

$$\frac{1/4i}{z-2i}-\frac{1/4i}{z+2i}=\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^{n-1}}-\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{3^{n+1}i^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\cdot\frac{(z-i)^n}{i^n}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R = 1$.

II. $1 < |z-i| > 3$. Рассмотрим области аналитичности каждого из слагаемых:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\frac{1/4i}{z-2i}-\frac{1/4i}{z+2i}.$$

Функция $f_1(z)=\frac{1/4i}{z-2i}$ аналитична в области $|z-i| > 1$, следовательно, она должна быть представлена рядом по отрицательным степеням. Функция $f_1(z)=\frac{1/4i}{z+2i}$ аналитична в области $|z-i| > 3$, следовательно, она должна быть представлена рядом по положительным степеням.

Разложим $f_1(z)=\frac{1/4i}{z-2i}$ по отрицательным степеням. Сделаем замену переменной $z - i = t$:

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{t-i}=\frac{1/t}{1-\frac{i}{t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{t^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(z-i)^n}.$$

Радиус сходимости ряда $r = 1$. Функция $f_2(z)=\frac{1/4i}{z+2i}$ уже представлена рядом по положительным степеням на предыдущем шаге.

В результате имеем

$$f(z)=\frac{1/4i}{z-2i}-\frac{1/4i}{z+2i}=\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(z-i)^n}-\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{3^{n+1}i^{n+1}}=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-2}}{(z-i)^n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{3^{n+1}i^{n+2}}.$$

III. $|z-i|>3$. В этой области обе функции $f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\frac{1/4i}{z-2i}-\frac{1/4i}{z+2i}$ должны быть представлены рядом по отрицательным степеням. $f_1(z)=\frac{1/4i}{z-2i}$ уже представлена рядом по отрицательным степеням на предыдущем шаге. Разложим по отрицательным степеням $f_2(z)=\frac{1/4i}{z+2i}$:

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{t+3i}=\frac{1/t}{1+\frac{3i}{t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t}\left(-\frac{3i}{t}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n\cdot i^n}{(z-i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}\cdot i^{n-1}}{(z-i)^n}$$

В результате получаем

$$f(z)=\frac{1/4i}{z-2i}-\frac{1/4i}{z+2i}=\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(z-i)^n}-\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}\cdot i^{n-1}}{(z-i)^n}=$$

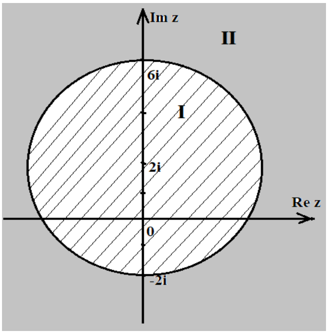
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\cdot 3^{n-1}\right)\frac{i^{n-2}}{(z-i)^n}.$$

Радиус сходимости ряда $r=3$.

Задача 14.2. Найти и описать все области аналитичности функции $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$ с центром в точке $z_0=2i$ и разложить в степенной ряд в каждой из них.

Решение:

У функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ можно выделить 2 области аналитичности с центром в точке $z_0 = 2i$. **I.** $0 < |z-2i| > 4$. **II.** $|z-2i| > 4$ (Рис. ниже.)



I. $0 < |z-2i| > 4$. Точка $z_0 = 2i$ является точкой неаналитичности функции.

Следовательно, в области $0 < |z-2i| > 4$ функция представляется рядом Лорана по степеням $z-2i$. Воспользуемся правилом для произведения двух функций. Представим $f(z)$ в виде произведения:

$$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)=\frac{1}{z-2i}\cdot\frac{1}{z+2i}.$$

Функция $f_1(z)=\dfrac{1}{z-2i}$ аналитична в области $0 < |z-2i|$. Следовательно, она должна быть представлена рядом по отрицательным степеням $z-2i$, но она сама по себе уже является (-1)-й степенью $z-2i$, поэтому не нуждается в дополнительных преобразованиях. Функция $f_2(z)=\dfrac{1}{z+2i}$ аналитична в области $|z-2i| > 4$. Следовательно она должна быть представлена рядом по положительным степеням $z-2i$. Сделаем замену переменной $z-2i=t$:

$$z-2i=t: \quad \frac{1}{z+2i}=\frac{1}{t+4i}=\frac{1/4i}{1+\frac{t}{4i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4i}\left(\frac{t}{-4i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{4^{n+1}i^{n+1}}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R=4$. Перемножим полученные разложения: $f(z)=\dfrac{1}{z-2i}\cdot$

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{4^{n+1}i^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^{n-1}}{4^{n+1}i^{n+1}}=\frac{1}{4i(z-2i)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^{n-1}}{4^{n+1}i^{n+1}}=\frac{1}{4i(z-2i)}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2i)^n}{4^{n+2}i^{n+2}}=\frac{1}{4i(z-2i)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{4^{n+2}i^n}.$$

II. $|z-2i|>4$ В этой области обе функции-множители должны быть представлены рядами по отрицательным степеням $z-2i$.

Осталось функцию $f_2(z)=\dfrac{1}{z+2i}$ представить рядом по отрицательным степеням $z-2i$. Сделаем замену переменной $z-2i=t$:

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{t+4i}=\frac{1/t}{1+\frac{4i}{t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t}\left(-\frac{4i}{t}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n\cdot i^n}{(z-2i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}\cdot i^{n-1}}{(z-i)^n}.$$ Перемножим полученные разложения

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}\cdot i^{n-1}}{(z-i)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}\cdot i^{n-1}}{(z-i)^{n+1}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 14.3. Выделить в области аналитичности функции $f(z)$ с центром в точке z_0 и разложить в каждой из них в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4i)}$, $z_0=-i$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4i)}$, $z_0=0$.

Вариант контрольной работы по теме «Комплексные интегралы и ряды»

1. Вычислить интеграл по отрезку АВ $\int\limits_{AB}(\bar{z}+1)dz$, A = 0, B = i.

2. Вычислить контурный интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^3-iz^2}$, используя интегральную формулу Коши .

3. Исследовать на сходимость числовой комплексный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{in+n^2}$.

4. Найти множество сходимости функционального комплексного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nz}}{n}$.

5. Найти множество сходимости степенного комплексного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

6. Найти множество сходимости комплексного ряда по целым степеням $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+4^n}$.

7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\ln(z-3i)$ в окрестности точки $z_0 - 2i$.

8. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{z(z+4i)}$ в кольце $1 < |z+i| < 3$.

9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z\cdot\sin\frac{1}{z+i-1}$ в окрестности точки $z_0 = 1 - i$.

10. Найти $f^{(7)}(0)$ для функции $f(z)=z^3\cdot e^{z^3}$, используя разложение в ряд Тейлора.

Литература

1. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для студентов вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1976. – 407 с.

2. Невский, М. В. Элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальности Компьютерная безопасность / М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2014. – 105 с.

3. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного: операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971. – 255 с.

4. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. – М., 1991. – 255 с.

Оглавление

Учебное издание

Ануфриенко Маргарита Вадимовна
Богомолов Юрий Викторович
Шабаршина Галина Владимировна

Методические указания по практическому курсу «Теория функций комплексного переменного»

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка Е. Б. Половкова

Подписано в печать 23.09.19. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 2 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета

Адрес типографии:
Ярославский государственный университет.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.