Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

А. В. Николаев

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Практикум

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 514.14(076)
ББК В151.61я73
Н63

Рекомендовано
Редакционно издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2018 года.

Рецензенты:
кафедра дискретного анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова

Николаев, Андрей Валерьевич.
Н63 Аффинные пространства : практикум / А. В. Николаев ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2018. – 90 с.

В практикуме изложена базовая теория и приведены подробные решения основных практических задач на векторные и аффинные пространства. По каждому разделу предложены задачи для самостоятельно решения.

Практикум «Аффинные пространства» предназначен для студентов младших курсов, изучающих алгебру и геометрию.

УДК 514.14(076)
ББК В151.61я73

Оглавление

Введение

Практикум «Аффинные пространства» предназначен в помощь студентам по решению основных практических задач на векторные и аффинные пространства. По каждому разделу в практикуме приведены базовые теоретические понятия, подробные примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения и закрепления навыков.

В первой главе представлен необходимый минимум по теории групп и полей. Рассмотрены задачи о проверке выполнения свойств группы или поля для заданного множества.

Во второй главе приведены основные понятия векторных пространств: линейная зависимость и независимость, базис, размерность, линейная оболочка, сумма и пересечение подпространств. Рассматриваются следующие задачи: определить, является ли система векторов линейно независимой, найти базис и размерность векторного пространства, найти координаты вектора в базисе, найти общее решение и фундаментальную систему решений системы линейных уравнений, найти базисы суммы и пересечения векторных подпространств.

Основная третья глава посвящена аффинным пространствам. Приведены основные способы представления линейных многообразий: аффинная оболочка, параметрическое и общее уравнения. Подробно описаны возможные конфигурации взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в аффинных пространствах. Дополнительно рассмотрены конструкции выпуклых конусов и многогранников. Основные задачи третьей главы: проверить точки на аффинную независимость, составить параметрическое и общее уравнения линейного многообразия, определить взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в трёхмерном и многомерном пространствах, найти выпуклую оболочку множества точек.

Ответы ко всем задачам для самостоятельного решения приведены в конце практикума.

Глава 1

Группы и поля

1.1. Бинарные операции и группы

Прежде чем перейти к решению задач, необходимо ввести некоторые базовые определения. И начнём мы совсем издалека, а именно с определения абстрактной бинарной операции и связанным с этим понятием группы.

Пусть X – некоторое множество. Обозначим через X^2 – декартово произведение множества X на себя, т. е. упорядоченное множество пар элементов из X:

$$X^2 = X \times X = \{(a, b) \mid a, b \in X\}.$$

Определение 1.1.1. *Бинарная операция* $*$ на множестве X — это отображение $* : X^2 \to X$, т. е. некоторое правило, которое каждой паре элементов $a, b \in X$ сопоставляет однозначно определённый элемент $c = a * b \in X$.

Так, на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ можно рассмотреть бинарные операции сложения $(a + b)$, вычитания $(a - b)$ и умножения $(a \cdot b)$. Отметим, что деление действительных чисел $(a : b)$ не подходит под определение бинарной операции, так как не для всех пар действительных чисел определён результат деления (деление на 0).

Определение 1.1.2. Множество G с заданной на нём бинарной операцией $* : G^2 \to G$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие условия (аксиомы):

1) ассоциативность

$$\forall x, y, z \in G : \ (x * y) * z = x * (y * z);$$

2) существование нейтрального элемента

$$\exists e \in G, \forall x \in G: \ x * e = e * x = x;$$

3) существование обратного элемента

$$\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G: \ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Определение 1.1.3. Группа $(G, *)$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если выполнена ещё одна аксиома:

4) коммутативность

$$\forall x, y \in G: \ x * y = y * x.$$

Примеры групп

1. $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}, \cdot)$ — множество действительных чисел относительно операций сложения и умножения. Бинарная операция вычитания не является ассоциативной и коммутативной, поэтому не подходит.

2. $(Mat_n(\mathbb{R}), +)$ — множество квадратных $n \times n$ матриц, состоящих из действительных чисел, относительно операции сложения. Отметим, что множество квадратных $n \times n$ матриц относительно умножения не будет группой, так как не для любой матрицы существует обратная. А вот множество невырожденных $n \times n$ матриц из действительных чисел относительно умножения удовлетворяет свойствам группы. Однако и для него не выполнена коммутативность умножения.

Задача 1.1.4. Доказать, что $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$ — множество комплексных корней степени n из 1 — является коммутативной группой относительно операции умножения.

Решение. Для доказательства того, что множество $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$ является коммутативной группой, следует проверить выполнение всех аксиом из определений 1.1.2 и 1.1.3.

0) Начать проверку следует с условия, не отмеченного номером, а именно, доказать что операция умножения определена на множестве комплексных корней n-ой степени из 1. Т. е. проверить, замкнуто ли множество $\{\sqrt[n]{1}\}$ относительно операции умножения:

$$\forall z_1, z_2 \in \{\sqrt[n]{1}\} : z_1 \cdot z_2 \in \{\sqrt[n]{1}\}.$$

Отметим, что
$$z \in \{\sqrt[n]{1}\} \Leftrightarrow z^n = 1.$$
Пусть $z_1^n = 1$ и $z_2^n = 1$, тогда
$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = 1 \cdot 1 = 1,$$
откуда получаем, что произведение двух комплексных корней степени n из 1 тоже комплексный корень степени n из 1.

1) Ассоциативность умножения выполнена для всех комплексных чисел, в частности и для корней из 1.

2) Нейтральным элементом относительно умножения является 1, которая всегда принадлежит множеству $\{\sqrt[n]{1}\}$, так как $1^n = 1$.

3) Докажем, что для любого $z \in \{\sqrt[n]{1}\}$ обратное число z^{-1} также является корнем n-й степени из 1. Можно провести рассуждение в общем виде аналогично пункту 0). Однако мы воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа.

   Пусть $z \in \{\sqrt[n]{1}\}$, тогда
$$z = e^{\frac{2\pi k}{n} i} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ где } k \in \mathbb{N},$$
$$z^{-1} = e^{-\frac{2\pi k}{n} i} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$
   Отметим, что обратным к z является комплексно-сопряжённое число. Остаётся проверить, что
$$(z^{-1})^n = e^{-2\pi k i} = \cos 2\pi k - i\sin 2\pi k = 1 - i \cdot 0 = 1.$$
   Таким образом, обратный элемент z^{-1} также является комплексным корнем степени n из 1.

4) Коммутативность умножения выполнена для всех комплексных чисел, в частности и для корней из 1. Отметим, что коммутативностью и ассоциативностью умножения комплексных чисел мы воспользовались при доказательстве пункта 0).

Таким образом, все аксиомы группы выполнены, а значит, множество $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$ является коммутативной (абелевой) группой. Пример комплексных корней степени 6 из 1 приведен на рисунке 1.1. □

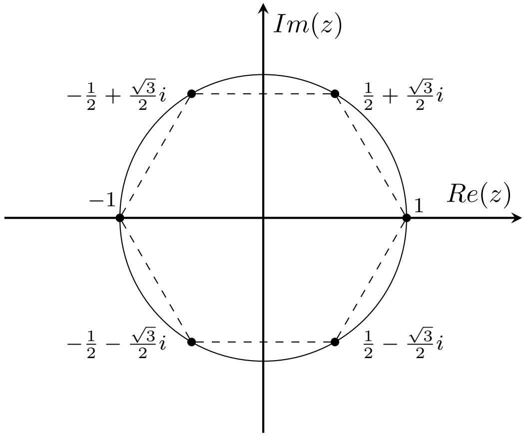


Рис. 1.1. Комплексные корни 6-й степени из 1

Задача 1.1.5. Образует ли группу пара $(\{-1, 1\}, \cdot)$?

Задача 1.1.6. Образует ли группу множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно операции умножения?

Задача 1.1.7. Образует ли группу множество симметрических (кососимметрических) матриц одного размера относительно операции сложения?

Задача 1.1.8. Образует ли группу множество симметрических (кососимметрических) матриц одного размера относительно операции умножения?

1.2. Поля

Введя в предыдущем разделе абстрактные бинарные операции, мы можем теперь рассмотреть абстрактные числа.

Определение 1.2.1. Множество F, на котором определены две бинарные операции сложения «$+$» и умножения «$\cdot$», называется *полем*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $(F, +)$ — коммутативная группа по сложению

   а) $\forall x, y, z \in F : (x + y) + z = x + (y + z)$;

   б) $\exists 0 \in F, \forall x \in F : x + 0 = x$;

   в) $\forall x \in F, \exists (-x) \in F, : x + (-x) = 0$;
   г) $\forall x, y \in F : x + y = y + x$;

2) $(F \backslash \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа по умножению

   а) $\forall x, y, z \in F : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
   б) $\exists 1 \in F, \forall x \in F : 1 \cdot x = x$;
   в) $\forall x \in F \backslash \{0\}, \exists x^{-1} \in F, : x \cdot x^{-1} = 1$;
   г) $\forall x, y \in F : x \cdot y = y \cdot x$;

3) умножение дистрибутивно относительно сложения

$$\forall x, y, z \in F : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Примеры полей

1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ и множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ являются полями.

   Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ — не поле, так как не является группой по сложению: не содержит нейтрального элемента (0) и противоположных чисел, например -1.

   Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ также не поле, так как не является группой по умножению: не содержит обратных чисел, например $\frac{1}{2}$.

2. Напомним, что два целых числа a и b *сравнимы по модулю* p, обозначение $a \equiv b \pmod{p}$, если $a = kp + b$, где k — некоторое целое число. Например,

$$19 \equiv 5 \pmod{7}, \text{ так как } 19 = 2 \cdot 7 + 5,$$
$$-8 \equiv 2 \pmod{5}, \text{ так как } -8 = -2 \cdot 5 + 2.$$

   Кольцом вычетов по модулю p называется множество

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \ldots, p - 1\},$$

   на котором определены операции сложения и умножения по модулю p:

$$a + b \pmod{p} \quad \text{и} \quad a \cdot b \pmod{p}.$$

   Например,

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$4 + 5 = 9 \equiv 2 \pmod{7},$$
$$4 \cdot 5 = 20 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Теорема 1.2.2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ является полем тогда и только тогда, когда p — простое число.

Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ по модулю простого числа называется *полем вычетов по модулю p* и представляет интересный пример поля с конечным числом элементов.

Задача 1.2.3. Является ли полем множество действительных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$?

Решение. Как и во всех задачах вида: «подходит ли объект A под определение B?», необходимо проверить, выполнены ли для A свойства из определения B.

0) Прежде всего проверим, что рассматриваемое множество замкнуто относительно операций сложения и умножения.

$$(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = (x + a) + (y + b)\sqrt{2},$$

где $(x + a)$ и $(y + b)$ — рациональные числа, а значит, множество замкнуто относительно сложения.

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) &= xa + xb\sqrt{2} + ya\sqrt{2} + 2yb \\ &= (xa + 2yb) + (xb + ya)\sqrt{2},\end{aligned}$$

где $(xa+2yb)$ и $(xb+ya)$ — рациональные числа, а значит, множество замкнуто относительно умножения.

1) Проверим свойства коммутативной группы по сложению.

   а) Ассоциативность сложения выполнена для всех действительных чисел, в том числе и для чисел специального вида.

   б) Нейтральным элементом относительно сложения является нуль, который можно представить в виде

   $$0 = 0 + 0\sqrt{2}.$$

   в) Для любого числа в рассматриваемом множестве найдётся противоположное:

   $$(x + y\sqrt{2}) + (-x - y\sqrt{2}) = 0 + 0\sqrt{2} = 0.$$

   г) Коммутативность сложения выполнена для всех действительных чисел.

2) Проверим свойства коммутативной группы по умножению для ненулевых элементов множества.

   а) Ассоциативность умножения выполнена для всех действительных чисел.

   б) Нейтральным элементом относительно умножения является единица, которую можно представить в виде

$$1 = 1 + 0\sqrt{2}.$$

   в) Для любого ненулевого числа в рассматриваемом множестве найдётся обратное:

$$\begin{aligned}(x+y\sqrt{2})^{-1} &= \frac{1}{x+y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x-y\sqrt{2}}{(x+y\sqrt{2})\cdot(x-y\sqrt{2})} \\ &= \frac{x+y\sqrt{2}}{x^2-2y^2} \\ &= \frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2},\end{aligned}$$

   где

$$\frac{x}{x^2-2y^2} \in \mathbb{Q} \text{ и } \frac{y}{x^2-2y^2} \in \mathbb{Q}.$$

   Отметим, что знаменатель в этих выражениях не может обратиться в нуль, так как уравнение $x^2 = 2y^2$ имеет в рациональных числах единственное решение $x = y = 0$. А, по определению поля (1.2.1), обратным по умножению должны обладать все элементы, кроме нуля.

   г) Коммутативность умножения выполнена для всех действительных чисел.

3) Дистрибутивность умножения относительно сложения выполнена для всех действительных чисел.

Таким образом, все аксиомы поля выполнены, а значит, множество чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$, является полем. $\square$

Задача 1.2.4. Является ли полем множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p?

Задача 1.2.5. Является ли полем множество действительных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$?

Задача 1.2.6. Является ли полем множество матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ky & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

где k — фиксированное целое число.

Задача 1.2.7. Является ли полем множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$?

Глава 2

Векторные пространства

2.1. Определение векторного пространства

Введём понятие абстрактных векторов над абстрактными числовыми множествами.

Определение 2.1.1. *Векторное (или линейное) пространство над полем* F — это множество L, на котором определены две бинарные операции:

а) сложения векторов

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L: \ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L;$$

б) умножения вектора на число

$$\forall \mathbf{x} \in L, \forall \lambda \in F: \ \lambda \mathbf{x} \in L$$

и выполнены следующие 8 аксиом:

1) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$;

2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$;

3) существует такой вектор $\mathbf{0} \in L$, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in L$, называемый *нулевым вектором*;

4) для любого вектора $\mathbf{x} \in L$ существует такой элемент $-\mathbf{x} \in L$, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, называемый вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{x}$;

5) $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x} \in L$ и $\alpha, \beta \in F$;

6) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in L$;

7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x} \in L$ и $\alpha, \beta \in F$;

8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ и $\alpha \in F$.

Элементы векторного пространства L называются *векторами*.

Отметим, что аксиомы 1) - 4) в определении векторного пространства означают, что множество L образует группу относительно операции сложения векторов.

Простейшим следствием из аксиом векторного пространства является тот факт, что $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in L$. Действительно,

$$0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x},$$

откуда, прибавив к левой и правой части вектор, противоположный к $0\mathbf{x}$, получим, что $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Замечание 2.1.2. Определение 2.1.1 абстрактного векторного пространства расширяет и обобщает школьное определение вектора как «направленного отрезка». Теперь в качестве векторов мы можем рассматривать любые объекты, которые можно складывать и умножать на число. Идея этого подхода заключается в том, что свойства абстрактных векторов будут верны для любых объектов, которые подойдут под определение 2.1.1.

Примеры векторных пространств

1. Простейшим примером векторного пространства является *нулевое пространство* $L = \{\mathbf{0}\}$, состоящее из одного нулевого вектора, над любым полем F.

2. Классические геометрические векторы со стандартными операциями сложения, определённого по правилам треугольника или параллелограмма (рис. 2.1), и умножения на число (рис. 2.2) также образуют векторное пространство.

3. Арифметическое n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ над полем действительных чисел — пространство столбцов высоты n (или строк длины n) с действительными элементами. Операции сложения столбцов и умножения столбца на число осуществляются покомпонентно.

4. Пространство $Mat_{m,n}(F)$ прямоугольных $m \times n$ матриц с элементами из поля F. Действительно, сумма двух $m \times n$ матриц — вновь

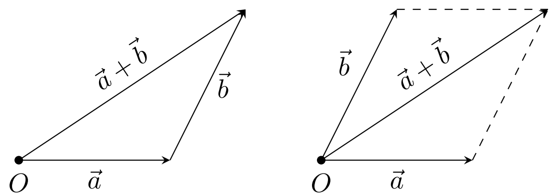


Рис. 2.1. Правила треугольника и параллелограмма сложения векторов

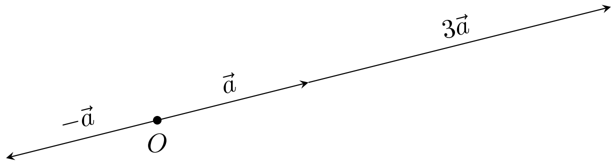


Рис. 2.2. Умножение вектора на число

$m \times n$ матрица. Произведение матрицы на число — матрица того же размера. Выполнение аксиом векторного пространство прямо следует из свойств операций с матрицами.

5. Пространство $F[x]$ алгебраических многочленов над полем F. Аналогично предыдущему примеру сумма двух многочленов — это многочлен, произведение многочлена на число — многочлен. Отметим, что множество $F[x]_n$ алгебраических многочленов степени не больше n над полем F также образует векторное пространство.

Определение 2.1.3. Пусть L — векторное пространство над полем F. Подмножество $L' \subseteq L$ называется *векторным подпространством* пространства L, если оно также образует векторное пространство над F.

Задача 2.1.4. Является ли векторным подпространством соответствующего пространства каждая из следующих совокупность векторов:

а) векторы плоскости с началом в точке O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке O;

б) векторы плоскости с началом в точке O, концы которых лежат на данной прямой;

в) векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти;

г) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;

д) множество векторов трёхмерного пространства, перпендикулярных данной прямой.

2.2. Линейная зависимость и независимость

Одним из основных понятий линейной алгебры является линейная зависимость и независимость векторов.

Определение 2.2.1. Пусть L — векторное пространство над полем F, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in L$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$, тогда вектор

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Линейная комбинация

$$0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

называется *тривиальной*.

Определение 2.2.2. Система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ векторного пространства L над полем F называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация:

$$\exists i \ (1 \le i \le k): \ \lambda_i \ne 0,$$
$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Определение 2.2.3. Система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ векторного пространства L над полем F называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация равна нулю:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \forall i \ (1 \le i \le k): \ \lambda_i = 0. \tag{2.1}$$

Задача 2.2.4. Доказать линейную независимость над полем $\mathbb{R}$ системы функций

$$1, \sin(x), \cos(x).$$

Решение. Отметим, что множество непрерывных на отрезке функций также образует векторное пространство. Действительно, сумма двух непрерывных функций — тоже непрерывная функция, произведение непрерывной функции на число — непрерывная функция. Таким образом, функции из условия задачи также являются векторами.

Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию:

$$\alpha + \beta \sin(x) + \gamma \cos(x) = 0, \tag{2.2}$$

где α, β, γ — действительные числа.

Идея заключается в том, что равенство 2.2 выполнено именно для функций, т. е. для любых значений переменной x (для любого x из отрезка, на котором определены функции). Так как равенство содержит три независимых параметра α, β, γ, подставим в 2.2 три различных значения переменной x:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0, & \text{при } x = 0, \\ \alpha + \beta = 0, & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \\ \alpha - \gamma = 0, & \text{при } x = \pi. \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений имеет единственное решение:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Таким образом, линейная комбинация векторов $1, \sin(x), \cos(x)$ равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю (уравнение 2.1), а значит, система линейно независима. □

Задача 2.2.5. Доказать линейную независимость над полем $\mathbb{R}$ систем функций:

а) $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx)$;

б) $1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx)$;

в) $1, \sin(x), \sin^2(x), \ldots, \sin^n(x)$.

Определение 2.2.6. Пусть L — векторное пространство над полем F, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in L$. Множество всех линейных комбинаций (со всеми возможными коэффициентами $\lambda_i \in F$) называется *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$:

$$\operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k : \lambda_i \in F\}. \tag{2.3}$$

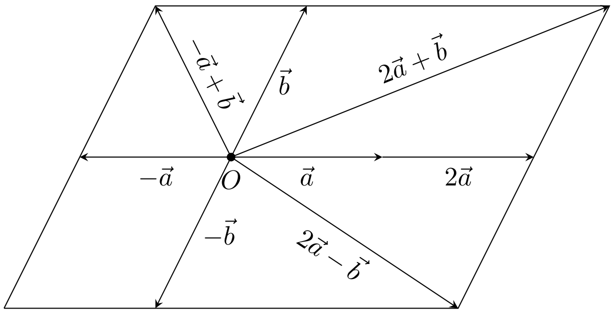


Рис. 2.3. Пример плоскости $\mathrm{span}(\vec{a}, \vec{b})$

Для обозначения линейной оболочки также часто применяется запись $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$, однако мы, чтобы не путаться, будем применять угловые скобки только для скалярного произведения.

Линейная оболочка системы векторов — это один из основных способов задать векторное пространство / подпространство.

Лемма 2.2.7. Пусть L — векторное пространство над полем F, векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in L$, тогда линейная оболочка $\mathrm{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ определяет векторное подпространство пространства L.

На рис. 2.3 приведён пример плоскости, заданной как линейная оболочка двух векторов.

Для понимания определения линейной зависимости и независимости удобно переформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.2.8 (Об основном свойстве линейно зависимой системы)**.** Пусть L — векторное пространство над полем F, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in L$, тогда

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \\ \text{линейно зависима} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists i \ (1 \le i \le k) : \\ \mathbf{u_i} \in \mathrm{span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u_{i-1}}, \mathbf{u_{i+1}}, \ldots, \mathbf{u}_k). \end{array}$$

Таким образом, векторы линейно зависимы, если один из векторов можно линейно выразить через остальные; векторы линейно независимы, если ни один из векторов не выражается линейно через другие векторы системы.

Для геометрических векторов линейная зависимость обобщает понятия коллинеарных (два вектора на одной / параллельных прямых) и компланарных (три вектора в одной / параллельных плоскостях).

2.3. Базис и размерность. Координаты вектора

Следующими фундаментальными понятиями векторных пространств являются базис и размерность.

Определение 2.3.1. Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ называется базисом векторного пространства L над полем F, если выполнены два условия:

а) система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ линейно независима;

б) система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ полна, т. е. $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d) = L$.

Другими словами, базис векторного пространства — это система векторов, ни один из которых нельзя выразить линейно через остальные и через которые можно линейно выразить все векторы пространства.

Определение 2.3.2. Если векторное пространство L обладает базисом с конечным числом векторов, то L называется *конечномерным векторным пространством*. В противном случае L — *бесконечномерное векторное пространство*.

Примеры

1. Базисом векторной плоскости будет система из двух линейно независимых векторов (рис. 2.3). Таким образом, плоскость — это конечномерное векторное пространство.

2. Векторное пространство алгебраических многочленов $\mathbb{R}[x]$ над действительными числами является бесконечномерным, так как для любой конечной системы многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ можно рассмотреть многочлен большей степени $f_{k+1}(x) \in \mathbb{R}[x]$, который линейно не выражается через $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$, а значит, система $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ неполна.

Теорема 2.3.3. Если L — конечномерное векторное пространство, то все базисы L содержат одинаковое число векторов.

Замечание 2.3.4. Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением только конечномерных векторных пространств.

Теорема 2.3.3 позволяет ввести понятие размерности для абстрактного векторного пространства.

Определение 2.3.5. Пусть L — векторное пространство над полем F, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ — базис L, тогда число векторов в базисе называется *размерностью векторного пространства* (обозначение $\dim L = d$.)

Задача 2.3.6. Выяснить, какие из следующих множеств квадратных $n \times n$ матриц с действительными элементами образуют векторные пространства, найти их базисы и размерность:

а) все квадратные $n \times n$ матрицы;

б) симметрические матрицы;

в) вырожденные матрицы.

Решение. а) Множество матриц одного размера было одним из примеров векторных пространств в разделе 2.1. В качестве базиса можно выбрать матричные единицы $E_{i,j}$ — матрицы, у которых только один элемент в i-й строке и j-м столбце равен 1, а остальные равны 0. Например, для $n = 2$ получим матрицы:

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные единицы линейно независимы, так как каждая имеет уникальный элемент, который для неё равен 1, а для всех остальных матричных единиц равен 0, т. е. никакую матричную единицу нельзя получить как линейную комбинацию других матричных единиц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$1 = \alpha 0 + \beta 0 + \gamma 0 \ \Rightarrow\ \text{нет решений.}$$

С другой стороны, любую $n \times n$ матрицу можно представить в виде линейной комбинации матричных единиц (система полна):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность пространства квадратных $n \times n$ матриц равна числу матричных единиц (векторов в базисе), которое совпадает с числом элементов квадратной $n \times n$ матрицы и равно n^2.

б) Напомним, что квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A^T = A$. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что симметрические матрицы одного размера подходят под определение 2.1.1. Действительно, множество замкнуто относительно сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$A^T = A,\ B^T = B,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A.$$

Аксиомы векторного пространства выполнены для всех квадратных матриц, а значит, и для частного случая симметрических матриц. Необходимо только проверить, что нулевая матрица является симметрической и для любой матрицы A противоположная матрица $-A$ также симметрическая.

В качестве базиса можно выбрать матрицы вида $E_{i,i}$ и $E_{i,j} + E_{j,i}$, где $i < j$. Например, для $n = 3$ получим следующие 6 матриц:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы подобного вида образуют базис в пространстве симметрических матриц по той же логике, что матричные единицы в предыдущей задаче.

Размерность пространства равна числу элементов квадратной $n \times n$ матрицы, стоящих на главной диагонали или выше главной диагонали:

$$\dim L = 1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

в) Напомним, что квадратная матрица называется *вырожденной*, если её определитель равен нулю (матрица не имеет обратной).

Множество вырожденных матриц одного размера не образует векторного пространства, так как не замкнуто относительно операции сложения матриц:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\det A=0} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\det B=0} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\det(A+B)=1}.$$

$\square$

Задача 2.3.7. Выяснить, какие из следующих множеств квадратных $n \times n$ матриц с действительными элементами образуют векторные пространства, найти их базисы и размерность:

а) множество кососимметрических матриц;

б) множество невырожденных матриц;

в) множество матриц со следом (сумма элементов главной диагонали), равным нулю.

Кроме размерности векторного пространства, базис также позволяет ввести понятие координат вектора.

Определение 2.3.8. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ — базис векторного пространства L над полем F. Пусть для вектора $\mathbf{x} \in L$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d, \text{ где } x_1, x_2, \ldots, x_d \in F,$$

тогда набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_d$ называется *координатами вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ (обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$).

Замечание 2.3.9. Основная идея с введением координат вектора заключается в том, что теперь неважно, чем изначально были абстрактные векторы (матрицы, многочлены, функции и т. д.). Введя базис векторного пространства, любой вектор можно заменить на его координаты в базисе. Тогда достаточно уметь работать с координатами вектора.

Операции с векторами в координатах. Пусть векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$.

1. Сложение векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d) + (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_d\mathbf{e}_d)\\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_d + y_d)\mathbf{e}_d,\end{aligned}$$

следовательно,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) + (y_1, y_2, \ldots, y_d) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d).$$

2. Умножение вектора на число:

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d) = \lambda x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda x_d\mathbf{e}_d,$$

следовательно,

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_d)) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_d).$$

Таким образом, операции с векторами в координатах осуществляются покоординатно.

Задача 2.3.10. Векторы

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 2),\ \mathbf{e}_2 = (2, 3, 2),\ \mathbf{e}_3 = (1, 3, 2),\ \mathbf{x} = (8, 12, 14)$$

заданы своими координатами в некотором базисе трёхмерного пространства. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ также образуют базис пространства. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Решение. Координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — это коэффициенты разложения по базису:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Учитывая, что векторы складывают и умножаются на число покоординатно, уравнение 2.4 примет вид системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решим систему 2.5 методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\cdot\text{II}]{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot\text{III}]{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-2\text{II}]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

и вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(1, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Проверка:

$$(8, 12, 14) = (1, 1, 2) + 2 \cdot (2, 3, 3) + 3 \cdot (1, 3, 2).$$

$\square$

Задача 2.3.11. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе:

а) $\mathbf{e}_1 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{e}_3 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{x} = (10, -3, 1)$;

б) $\mathbf{e}_1 = (2, 1, 1, 3)$, $\mathbf{e}_2 = (4, 3, 2, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 3, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (3, 2, 0, 2)$, $\mathbf{x} = (0, 1, 4, -4)$.

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$, также образуют базис пространства. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

2.4. Геометрический смысл ранга матрицы

Напомним определение ранга матрицы через миноры.

Определение 2.4.1. *Ранг матрицы* (обозначение $\operatorname{rg} A$) — это порядок наибольшего по размеру ненулевого минора в матрице. Такой минор называется *базисным*.

Слово «базисный» в названии минора не случайно. Понятие ранга матрицы напрямую связано с базисом и размерностью векторного пространства.

Теорема 2.4.2 (О геометрическом смысле ранга матрицы)**.** Пусть A — $m \times n$ матрица над полем F, A_j — j-й столбец A, $A_{[i]}$ — i-я строка A, тогда

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{span}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{span}(A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[m]}),$$

причём базис образуют те строки/столбцы матрицы A, которые содержат базисный минор.

Часто теорему 2.4.2 используют как альтернативное определение ранга матрицы: ранг матрицы равен числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

С помощью теоремы 2.4.2 можно легко найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов, заданных своими координатами. Достаточно записать векторы в матрицу по строкам или столбцам (мы будем обычно записывать по столбцам) и вычислить ранг получившейся матрицы.

Задача 2.4.3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов

$$\mathbf{a}_1 = (1,2,1,3),\ \mathbf{a}_2 = (2,1,3,4),\ \mathbf{a}_3 = (3,0,5,5),$$
$$\mathbf{a}_4 = (1,5,0,5),\ \mathbf{a}_5 = (4,1,0,3).$$

Решение. Запишем векторы в матрицу по столбцам и найдём её ранг методом Гаусса (напомним, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над строками (стобцами)):

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\underset{\mathrm{IV}-3\mathrm{II}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+3\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}+2\mathrm{II}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{19}\cdot\mathrm{III}}{\underset{\mathrm{IV}+17\mathrm{III}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Минор

$$M_{1,2,3}^{1,2,5} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

является базисным, так как он не равен нулю, и любой минор большего порядка содержит нулевую 4-ю строку и равен нулю.

Таким образом,

$$\dim \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = 3.$$

Базис линейной оболочки образуют векторы-столбцы, содержащие базисный минор: $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_5$.

Отметим, что базис определён неоднозначно. Например, вместо вектора $\mathbf{a}_2$ можно выбрать векторы $\mathbf{a}_3$ или $\mathbf{a}_4$. $\square$

Задача 2.4.4. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов:

а) $\mathbf{a}_1 = (4, -1, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (8, -2, 6, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, 4, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (6, -2, 8, -4)$.

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 0, 3, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 3, 2, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (2, 6, 1, 0)$.

Задача 2.4.5. Найти какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

$$\mathbf{a}_1 = (2, 1, -2, 3),\ \mathbf{a}_2 = (3, 2, 0, 4),\ \mathbf{a}_3 = (3, 1, -6, 5),$$
$$\mathbf{a}_4 = (5, 2, 3, 2),\ \mathbf{a}_5 = (4, 2, 7, 0).$$

Решение. На первом шаге найдём базис и размерность линейной оболочки векторов. Для этого запишем векторы в матрицу по столбцам и найдём её ранг методом Гаусса:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[\mathrm{IV}-3\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+2\mathrm{I}}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xlongequal[\mathrm{IV}-2\mathrm{II}]{\mathrm{III}+4\mathrm{II}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[\mathrm{IV}+6\mathrm{III}]{\frac{1}{11}\cdot\mathrm{III}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Минор

$$M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

является базисным, так как он не равен нулю, и любой минор большего порядка содержит нулевую 4-ю строку и равен нулю.

Таким образом,

$$\dim \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = 3.$$

Базис линейной оболочки образуют векторы-столбцы, содержащие базисный минор: $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_4$.

На втором шаге найдём координаты векторов, не попавших в базис, т. е. $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_5$, в базисе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3, \\ \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_5. \end{cases} \tag{2.6}$$

Отметим, что уравнения в системе 2.6 отличаются только неизвестными и правой частью. Поэтому систему 2.6 можно записать в виде одной расширенной матрицы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-7\text{III}]{\text{I}-2\text{III}}$$

$$\xrightarrow[\text{II}-7\text{III}]{\text{I}-2\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\cdot\text{II}]{\text{I}+2\text{II}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Откуда получаем, что

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

Векторы $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_5$ имеют в базисе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ координаты $(3, -1, 0)$ и $(-2, 1, 1)$ соответственно.

Проверка:

$$(3, 1, -6, 5) = 3 \cdot (2, 1, -2, 3) - (3, 2, 0, 4),$$

$$(4, 2, 7, 0) = -2 \cdot (2, 1, -2, 3) + (3, 2, 0, 4) + (5, 2, 3, 2).$$

$\square$

Задача 2.4.6. Найти какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

а) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 2, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, -7)$;

б) $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 7, 8, -11, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, 1, -2, 3)$;

в) $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3, 4, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (5, -5, 12, 11, -5)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -3, 6, 3, -3)$.

2.5. Фундаментальная система решений

Выше было отмечено, что один из основных способов задать векторное подпространство — это линейная оболочка системы векторов. Вторым основным способом является множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Определение 2.5.1. Система алгебраических линейных уравнений с нулевой правой частью ($Ax = 0$) называется *однородной*.

Лемма 2.5.2. Пусть L — векторное пространство над F, $\dim L = n$, $A \in Mat_{m,n}(F)$, тогда множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$L' = \{x \in L \ (x \in F^n) \mid Ax = 0\}$$

образует векторное подпространство пространства L.

Определение 2.5.3. Базис пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений называется *фундаментальной системой решений*.

Напомним, что *общим решением системы линейных уравнений* называется представление системы в виде (с точностью до переобозначения неизвестных):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,k+1}x_{k+1} + \alpha_{1,k+2}x_{k+2} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n, \\ x_2 = \alpha_{2,k+1}x_{k+1} + \alpha_{2,k+2}x_{k+2} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n, \\ \ldots \\ x_k = \alpha_{k,k+1}x_{k+1} + \alpha_{k,k+2}x_{k+2} + \ldots + \alpha_{k,n}x_n, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *главными*, а $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ — *свободными*.

Алгоритм построения фундаментальной системы решений

Шаг 1. Найти общее решение системы уравнений.

Шаг 2. Построить по одному базисному решению для каждой свободной переменной, приняв её за 1 (или любое другое число, неравное 0), а все остальные свободные переменные за 0.

Учитывая, что число главных переменных в общем решении равно рангу матрицы, получаем следствие о размерности пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Лемма 2.5.4.

$$\dim\{x \in L \mid Ax = 0\} = \dim L - \operatorname{rg} A.$$

Задача 2.5.5. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Шаг 1. Найдём общее решение системы методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I-II}]{\mathrm{IV-I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III-5I}]{\mathrm{II-2I}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III-5I}]{\mathrm{II-2I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I+II}]{\substack{\mathrm{III-II} \\ \mathrm{IV-5II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_4 = 0, \\ -7x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Переменная x_1 присутствует только в первом уравнении, переменная x_3 — только во втором. Выберем их в качестве главных переменных:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 - 4x_4, \\ x_3 = -\frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_4. \end{cases}$$

Шаг 2. Построим по одному базисному решению для каждой свободной переменной (x_2 и x_4):

1) $x_2 = 2, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 8, x_3 = -7;$

2) $x_2 = 0, x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = -8, x_3 = 5.$

Мы выбрали значение 2 для свободных переменных, чтобы избежать дробей. Вместо 2 можно было взять любое другое ненулевое значение.

Таким образом, получаем фундаментальную систему решений:

$$\mathbf{a}_1 = (8, 2, -7, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-8, 0, 5, 2).$$

□

Задача 2.5.6. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

а)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Интерес представляет и обратная задача: как по базису векторного подпространства L' построить систему линейных однородных уравнений, определяющих подпространство L'.

Задача 2.5.7. Векторное подпространство L' задано как линейная оболочка системы векторов:

$$L' = \operatorname{span}((1, -1, 1, 1), (-1, -5, 1, 3), (3, 0, 2, 1)).$$

Найти систему линейных уравнений, задающую подпространство L'.

Решение. Нам необходимо составить систему линейных уравнений по множеству её решений. Найдём уравнения для координат векторов, верные для всех векторов в L'. Для этого запишем векторы в матрицу по столбцам и припишем столбец с неизвестными:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ -1 & -5 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\substack{\text{II}+\text{I}\\ \text{III}-\text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & -6 & 3 & x_2+x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_3-x_1 \\ 0 & 4 & -2 & x_4-x_1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}$$

$$\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_3-x_1 \\ 0 & -6 & 3 & x_2+x_1 \\ 0 & 4 & -2 & x_4-x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-2\text{II}]{\text{III}+3\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1+x_2+3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1-2x_3+x_4 \end{array}\right).$$

Для всех трёх векторов имеют место уравнения:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=0, \\ x_1-2x_3+x_4=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ранг матрицы из векторов L' равен 2, следовательно, $\dim L' = 2$. Искомая система $Ax = 0$, по лемме 2.5.4, должна содержать

$$\underset{4}{\dim L} - \underset{2}{\dim L'} = \underset{2}{\operatorname{rg} A}$$

линейно независимых уравнения.

Таким образом, система 2.7 является решением задачи. □

Задача 2.5.8. Векторное подпространство L' задано как линейная оболочка системы векторов:

а) $L' = \operatorname{span}((1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$;

б) $L' = \operatorname{span}((1,-1,1,-1,1),(1,1,0,0,3),(3,1,1,-1,7))$.

Найти систему линейных уравнений, задающую подпространство L'.

2.6. Сумма и пересечение подпространств

Двумя основными операциями с векторными подпространствами являются сумма и пересечение.

Определение 2.6.1. *Суммой векторных подпространств* L_1 и L_2 пространства L над полем F называется множество векторов:

$$L_1 + L_2 = \{x + y \mid x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Таким образом, сумма векторных подпространств содержит суммы всех возможных пар векторов из L_1 и L_2. Например, суммой двух линейно независимых векторных прямых будет векторная плоскость (рис. 2.4)

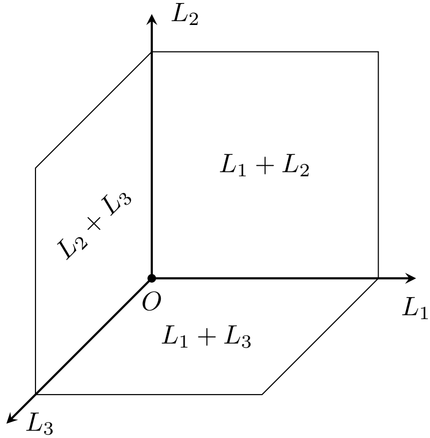


Рис. 2.4. Координатные плоскости как сумма осей координат

Определение 2.6.2. *Пересечением векторных подпространств* L_1 и L_2 пространства L над полем F называется множество векторов

$$L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Лемма 2.6.3. Пусть L_1 и L_2 — векторные подпространства пространства L над полем F, тогда их сумма $L_1 + L_2$ и пересечение $L_1 \cap L_2$ также являются векторными подпространствами пространства L.

Размерности суммы и пересечения векторных подпространств связаны по формуле Грассмана.

Теорема 2.6.4 (Формула Грассмана)**.** Пусть L_1 и L_2 — векторные подпространства пространства L над полем F, тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Например, для двух координатных плоскостей, пересекающихся по прямой (рис. 2.5), имеем:

$$\underset{3}{\dim(L_1 + L_2)} = \underset{2}{\dim L_1} + \underset{2}{\dim L_2} - \underset{1}{\dim(L_1 \cap L_2)}.$$

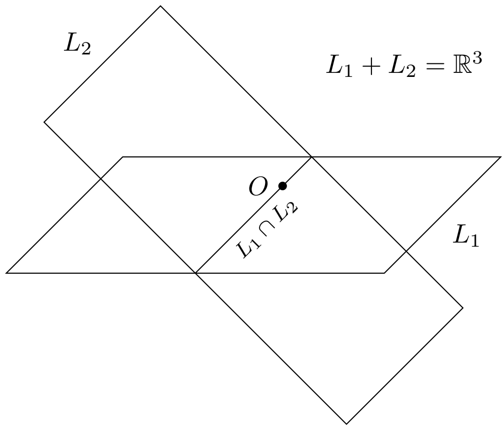


Рис. 2.5. Сумма и пересечение плоскостей

Если векторные подпространства заданы как линейные оболочки систем векторов, то сумму и пересечение подпространств можно найти по следующей лемме.

Лемма 2.6.5. Пусть

$$L_1 = \operatorname{span}(a_1, a_2, \ldots, a_k),\ L_2 = \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_s)$$

— векторные подпространства пространства L над полем F, тогда

$$L_1 + L_2 = \operatorname{span}(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s),$$
$$L_1 \cap L_2 = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k\} = \{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_s b_s\},$$

где

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_s b_s. \tag{2.8}$$

Задача 2.6.6. Найти базисы суммы и пересечения векторных подпространств:

$$L_1 = \operatorname{span}((2,1,1,3),(3,-1,2,2),(5,-5,4,0)),$$
$$L_2 = \operatorname{span}((5,2,-3,1),(2,-1,7,7),(-8,-5,13,5)).$$

Решение. Найдём базисы и размерности подпространств L_1 и L_2. Этот шаг является необязательным, однако значительно упростит дальнейшее решение.

$$\dim L_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\underset{\mathrm{IV}-3\mathrm{I}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ 0 & 5 & 15\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 5 & 15\end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II}\\ \mathrm{III}-3\mathrm{II}}}{\underset{\mathrm{IV}-5\mathrm{II}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}-5\\ 3\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\end{pmatrix} = 2.$$

В базис L_1 возьмём столбцы, содержащие базисный минор:

$$L_1 = \operatorname{span}(\underset{\mathbf{a}_1}{(2,1,1,3)}, \underset{\mathbf{a}_2}{(3,-1,2,2)}).$$

Отметим, что любые два столбца матрицы (любые два вектора) линейно независимы.

$$\dim L_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}5 & 2 & -8\\ 2 & -1 & -5\\ -3 & 7 & 13\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\\ 2 & -1 & -5\\ -3 & 7 & 13\\ 5 & 2 & -8\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{III}+3\mathrm{I}}}{\underset{\mathrm{IV}-5\mathrm{I}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\\ 0 & -15 & -15\\ 0 & 28 & 28\\ 0 & -33 & -33\end{pmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{15}\cdot\mathrm{II}\\ \mathrm{III}-28\mathrm{II}}}{\underset{\mathrm{IV}+33\mathrm{II}}{=\!=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 7\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}5\\ 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\end{pmatrix} = 2.$$

В базис L_2 возьмём столбцы, содержащие базисный минор:

$$L_2 = \operatorname{span}(\underset{\mathbf{b}_1}{(5,2,-3,1)}, \underset{\mathbf{b}_2}{(2,-1,7,7)}).$$

Пересечение $L_1 \cap L_2$ можно найти, решив уравнение:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\\ 2\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}5\\ 2\\ -3\\ 1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 7\\ 7\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Так как векторы складываются и умножаются на число покоординатно, уравнение 2.9 представляет собой систему из четырёх линейных уравнений. Запишем эту систему в виде расширенной матрицы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-3\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}-3\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}\leftrightarrow\mathrm{II}]{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-5\mathrm{II}]{\mathrm{III}-3\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}-5\mathrm{II}]{\mathrm{III}-3\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-6\mathrm{III}]{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Остановимся здесь и отметим, что мы нашли базис и размерность суммы подпространств $L_1 + L_2$. Действительно,

$$\dim(L_1 + L_2) = \mathrm{rg} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\dots}{=} \mathrm{rg} \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} & 0 \end{array} \right) = 3.$$

В базис суммы $L_1 + L_2$ можно выбрать векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$.

Вернёмся к решению уравнения 2.9:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{II}]{\substack{\mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III}}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array},$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_2, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ 0 = \beta_1 - \beta_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_2, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \beta_1 = \beta_2. \end{cases} \tag{2.10}$$

По формуле Грассмана (теорема 2.6.4) можно найти размерность пересечения:

$$\underset{1}{\dim(L_1 \cap L_2)} = \underset{2}{\dim L_1} + \underset{2}{\dim L_2} - \underset{3}{\dim(L_1 + L_2)}.$$

Векторные плоскости L_1 и L_2 пересекаются по прямой (рис. 2.5).

Базис прямой $L_1 \cap L_2$ можно найти, построив любое ненулевое частное решение системы 2.10 и подставив его в уравнение 2.9:

$$\beta_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1,$$

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

- $\dim(L_1 + L_2) = 3$, базис суммы: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$;
- $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, базис пересечения: $(7, 1, 4, 8)$.

□

Если размерность пересечения не равна 1, то следует построить фундаментальную систему решений для уравнения 2.8. Каждому базисному решению будет соответствовать линейно независимый вектор пересечения $L_1 \cap L_2$.

Задача 2.6.7. Найти базисы суммы и пересечения векторных подпространств $L_1 = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ и $L_2 = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s)$:

а) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 8, -6, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 10, -5, 8)$,
$\mathbf{b}_1 = (1, 4, -1, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -2, 6, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 2, 5, 8)$;

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 1, 3)$,
$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 3, 3, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (0, 0, 1, 1)$;

в) $\mathbf{a}_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$,
$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -2, 0, -1, -5)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 2, 1, -3)$.

Глава 3

Аффинные пространства

3.1. Определение аффинного пространства

Определение 3.1.1. *Аффинное пространство* — это множество V, определённое совместно с векторным пространством L над полем F, на котором заданы две операции:

а) сопоставление вектора паре точек:

$$\forall P, Q \in V: \ \overrightarrow{PQ} \in L;$$

б) сложение точки и вектора:

$$\forall P \in V, \forall x \in L: \ P + x \in V$$

и выполнены следующие 3 аксиомы:

1) $(P + x) + y = P + (x + y)$, для любых $P \in V$ и $x, y \in L$;

2) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$, для любых $P, Q \in V$;

3) $\overrightarrow{P, P + x} = x$, для любых $P \in V$ и $x \in L$.

Элементы аффинного пространства V называются *точками*. Векторное пространство L — *направляющим пространством*.

Наиболее простым и привычным примером являются геометрические точки и векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $d = 1, 2, 3$. Однако, как и ранее, любые абстрактные объекты, которые подойдут под определение 3.1.1, например матрицы, многочлены, непрерывные функции и т. д. образуют аффинное пространство.

Задача 3.1.2. Доказать, что в аффинном пространстве V:

а) $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$ для любой точки $P \in V$;

б) $P + \mathbf{0} = P$ для любой точки $P \in V$;

в) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ для любых точек $P, Q \in V$.

Таким образом, вместе с абстрактными числами и векторами мы ввели понятие абстрактных точек.

3.2. Аффинная система координат

Основная идея, как и в случае векторных пространств, заключается в том, что нам абсолютно неважно, какие объекты образовали аффинное пространство. Все точки пространства мы заменим на их координаты, тогда достаточно будет уметь работать с координатами точек.

Определение 3.2.1. Пусть V — аффинное пространство над L и F. Зафиксируем точку $O \in V$ и назовём её *полюсом*. Тогда каждой точке $P \in V$ однозначно соответствует *радиус-вектор* $\overrightarrow{OP}$. Совокупность точки $O \in V$ и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ векторного пространства L определяет *аффинную систему координат*. *Координаты точки* P в аффинной системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ — это координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$.

Операции с точками в координатах. Пусть точки P и Q имеют координаты $(p_1, p_2, \ldots, p_d)$ и $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ в аффинной системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$, вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$.

1. Сопоставление вектора паре точек. Применим правило треугольника (рис. 3.1):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + \ldots + q_d\mathbf{e}_d) - (p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \ldots + p_d\mathbf{e}_d) \\ &= (q_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (q_2 - p_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (q_d - p_d)\mathbf{e}_d.\end{aligned}$$

   Следовательно, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$, необходимо из координат точки «конца вектора» вычесть координаты точки «начала вектора»:

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_d - p_d).$$

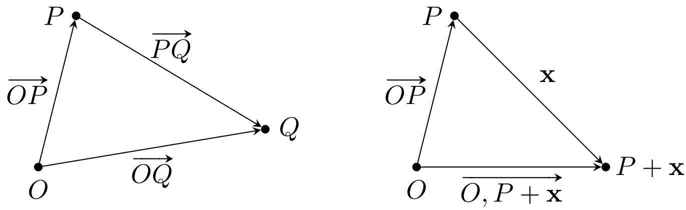


Рис. 3.1. Операции с точками и радиус-векторами

2. Сложение точки и вектора. По правилу треугольника (рис. 3.1) получаем, что

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O, P + x} &= \overrightarrow{OP} + \mathbf{x} \\ &= (p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \ldots + p_d\mathbf{e}_d) + (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d) \\ &= (p_1 + x_1)\mathbf{e}_1 + (p_2 + x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (p_d + x_d)\mathbf{e}_d.\end{aligned}$$

Следовательно, координаты точки и вектора просто складываются:

$$P + \mathbf{x} = (p_1 + x_1, p_2 + x_2, \ldots, p_d + x_d).$$

3.3. Линейное многообразие

Определение 3.3.1. Пусть V — аффинное пространство над векторным пространством L и полем F. Подмножество $V' \subseteq V$ называется *аффинным подпространством* пространства V, если оно является аффинным пространством над векторным подпространством $L' \subseteq L$ и полем F.

Однако термин «аффинное подпространство» применяется крайне редко. Как правило, вместо него рассматривают другой объект — линейное многообразие.

Определение 3.3.2. Пусть V — аффинное пространство над L и F, точка $P \in V$ и L' — векторное подпространство пространства L. Множество точек

$$V' = P + L' = \{P + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in L'\} \tag{3.1}$$

называется *линейным многообразием*.

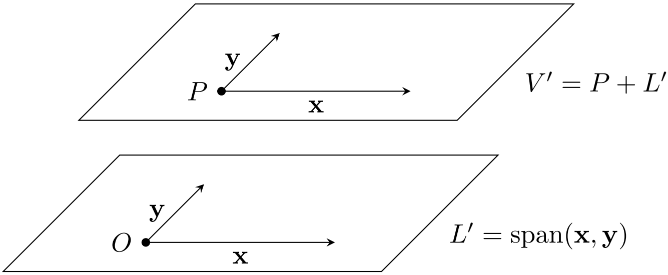


Рис. 3.2. Пример линейного многообразия

Векторное пространство L' из определения 3.3.2 называется *направляющим подпространством* линейного многообразия.

Задача 3.3.3. Проверить, удовлетворяет ли линейное многообразие определению аффинного пространства.

Пример линейного многообразия (плоскости) приведён на рис. 3.2

Отметим, что через радиус-вектор можно установить взаимно однозначное соответствие между точками и векторами, поэтому линейное многообразие можно рассматривать и как подмножество векторов векторного пространства. Основное отличие заключается в следующем: любое векторное пространство содержит нулевой вектор. Если ввести систему координат, то векторное подпространство L' «привязано» к началу координат, т. е. проходит через O. Аффинное подпространство (линейное многообразие) V' получается переносом векторного подпространства L' (начала координат) в произвольную точку P.

Определение 3.3.4. *Размерность аффинного пространства* (линейного многообразия) — это размерность его направляющего векторного пространства:

$$\dim V' = \dim(P + L') = \dim L'.$$

Определение 3.3.5. Линейное многообразие размерности k называется *k-мерной плоскостью*.

Определение 3.3.6. Пусть V — аффинное пространство, линейное многообразие V' размерности $\dim V - 1$ называется *гиперплоскостью*.

Примерами гиперплоскостей являются: прямая на плоскости, плоскость в трёхмерном пространстве.

3.4. Сумма Минковского

Сумма векторных подпространств и сумма точки и направляющего пространства из определения линейного многообразия являются частными случаями суммы Минковского.

Определение 3.4.1. Пусть A и B — подмножества векторного пространства L (аффинного пространства V), тогда *суммой Минковского* называется множество

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Например, если

$$A = \{(0, -1), (0, 1), (1, 0)\} \text{ и } B = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\},$$

то

$$A + B = \{(0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (1, -2), (2, -1)\}.$$

А если взять в качестве множеств A и B треугольники с вершинами в тех же точках, то суммой $A + B$ будет шестиугольник (рис. 3.3).

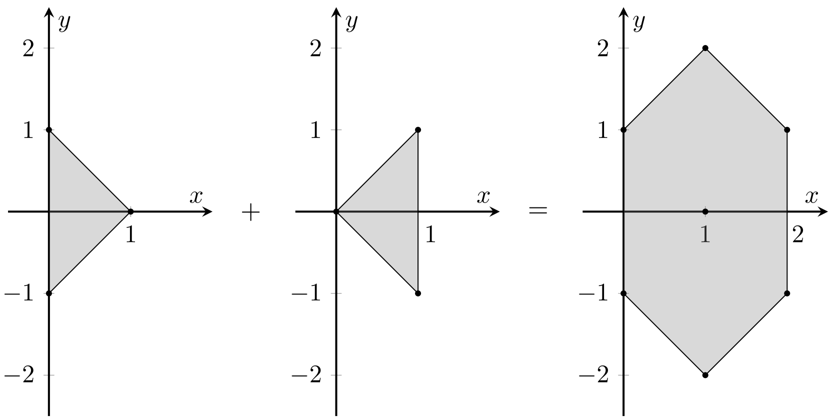


Рис. 3.3. Сумма Минковского двух треугольников

Суммой окружности $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $z = t$ (рис. 3.4) будет цилиндр

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = t. \end{cases}$$

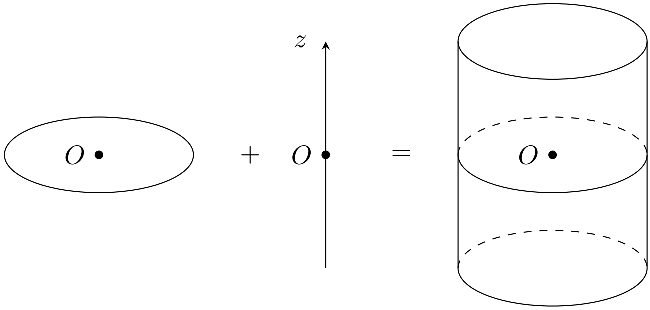


Рис. 3.4. Сумма Минковского окружности и прямой

Сумма Минковского применяется в различных алгоритмах компьютерной графики и обработки изображений, в математической морфологии и других областях.

Аналогично *разность Минковского* определяется как

$$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Разность Минковского имеет огромное значние в алгоритмах обнаружения столкновений в компьютерной графике (например, в алгоритме Гилберта-Джонсона-Кёрти). В основе алгоритма лежит следующее утверждение.

Лемма 3.4.2. Пусть A и B — подмножества векторного пространства L (аффинного пространства V), тогда

$$A \cap B \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \mathbf{0} \in A - B.$$

Таким образом, чтобы определить, сталкиваются (пересекаются) ли два объекта, можно построить разность Минковского и проверить, содержит ли она нулевой вектор (начало координат). На рис. 3.5 приведён пример разности Минковского для треугольника и четырёхугольника.

Задача 3.4.3. Найти сумму Минковского $A + B$, если:

а) A — треугольник с вершинами в точках $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$, B — квадрат с вершинами в точках $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$;

б) A — отрезок $[(1, 1), (4, 1)]$, B — отрезок $[(-2, 1), (0, 3)]$;

в) A — окружность $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, B — окружность $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

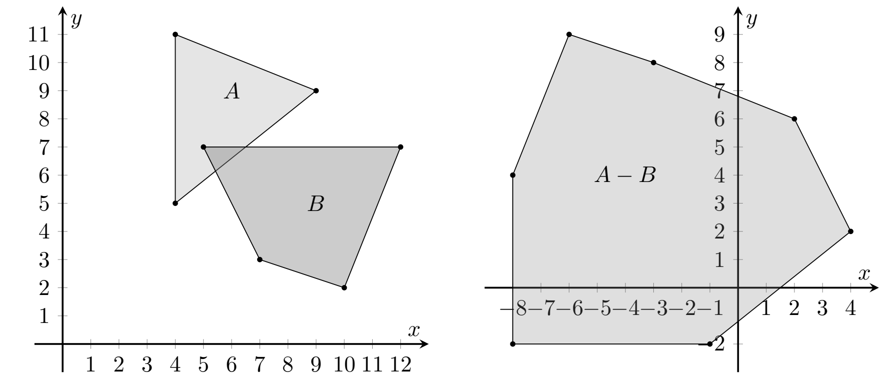


Рис. 3.5. Обнаружение столкновений с помощью разности Минковского

3.5. Аффинная оболочка

Рассмотрим различные способы задать линейное многообразие.

Напомним, что векторное подпространство можно представить, с одной стороны, как линейную оболочку системы векторов, а с другой стороны, как множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Аналогично первым способом задания линейного многообразия является аффинная оболочка конечного множества точек.

Определение 3.5.1. Пусть V — аффинное пространство над L и F, точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$, тогда линейная комбинация

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$$

называется *аффинной* (или *плоской*), если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1.$$

Определение 3.5.2. Пусть V — аффинное пространство над L и F. Множество всех аффинных комбинаций точек $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$:

$$\operatorname{aff}(P_1, P_2, \ldots, P_k) = \{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F\}$$

называется *аффинной оболочкой* множества точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Лемма 3.5.3. Пусть V — аффинное пространство над L и F, точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$, тогда аффинная оболочка $\operatorname{aff}(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ является линейным многообразием.

Примеры

1. Аффинная оболочка любых двух точек будет прямой, проходящей через эти точки (рис. 3.6).

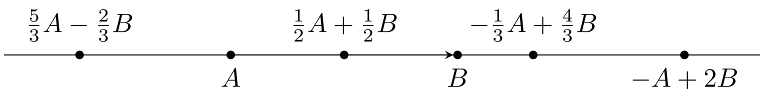


Рис. 3.6. Аффинная оболочка точек A и B

2. Аффинная оболочка трёх точек, не лежащих на одной прямой, определяет плоскость (рис. 3.7).

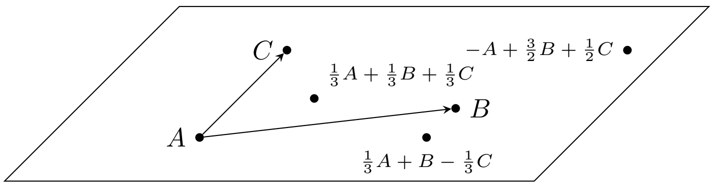


Рис. 3.7. Аффинная оболочка трёх точек

3. Аффинной оболочкой четырёх точек, не лежащих в одной плоскости, будет трёхмерное пространство и т. д.

Определение 3.5.4. Пусть V — аффинное пространство над L и F. Точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$ называются *аффинно зависимыми*, если хотя бы одну из точек можно представить в виде аффинной комбинации остальных точек:

$$\exists i\ (1 \leq i \leq k) : P_i = \lambda_1 P_1 + \ldots \lambda_{i-1} P_{i-1} + \lambda_{i+1} P_{i+1} + \ldots + \lambda_k P_k,$$

$$\lambda_1 + \ldots \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_k = 1.$$

Точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$ называются *аффинно независимыми*, если ни одну из точек нельзя представить в виде аффинной комбинации остальных точек:

$$\forall i\ (1 \leq i \leq k) :\ P_i \notin \operatorname{aff}(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k).$$

Задача 3.5.5. Определить, являются ли точки

$$A = (1, 4, 2), B = (1, 7, 3), C = (2, 3, 3), D = (3, -7, 1)$$

аффинно независимыми?

Решение. Четыре точки аффинно независимы, если они не лежат в одной плоскости. Построим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1,7,3) - (1,4,2) = (0,3,1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,3) - (1,4,2) = (1,-1,1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (3,-7,1) - (1,4,2) = (2,-11,-1).$$

Размерность аффинной оболочки точек A, B, C, D равна размерности направляющего векторного подпространства:

$$\dim \operatorname{aff}(A,B,C,D) = \dim \operatorname{span}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) =$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -11 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-3\mathrm{III}}{=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+4\mathrm{I}}{=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 1} & 2 \\ 0 \quad 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad 1} & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линейно зависимы, следовательно, точки A,B,C и D принадлежат одной плоскости и являются аффинно зависимыми. □

Задача 3.5.6. Определить, являются ли аффинно независимыми точки:

а) $A = (1,3,-1)$, $B = (5,1,5)$ и $C = (-1,4,-4)$;

б) $A = (1,2,6)$, $B = (2,1,1)$, $C = (5,3,1)$ и $D = (4,1,0)$;

в) $A = (1,1,1,0)$, $B = (3,0,2,2)$, $C = (4,2,0,1)$ и $D = (2,-2,4,3)$;

г) $A = (2,1,3,1)$, $B = (3,-1,2,3)$, $C = (4,2,2,2)$, $D = (1,1,5,4)$ и $E = (-1,-1,3,2)$.

3.6. Параметрическое и общее уравнения линейного многообразия

Вторым способом задания линейного многообразия является параметрическое уравнение. Распишем выражении $V' = P + L'$ через базис направляющего подпространства L'.

Определение 3.6.1. Пусть V — аффинное пространство над L и F. Точка P имеет координаты $(p_1, p_2, \dots, p_d)$ в аффинной системе координат

$O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$. Векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ имеют координаты

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{d1}),\\
&\mathbf{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{d2}),\\
&\ldots\\
&\mathbf{u}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{dk})
\end{aligned}$$

в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$. Векторное подпространство $L' = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$. Тогда любую точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ линейного многообразия $V' = P + L'$ можно представить в виде

$$x = P + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \ldots + t_k\mathbf{u}_k$$

или покоординатно:

$$\begin{cases}
x_1 = p_1 + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1k}t_k,\\
x_2 = p_2 + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2k}t_k,\\
\vdots\\
x_d = p_d + a_{d1}t_1 + a_{d2}t_2 + \ldots + a_{dk}t_k,
\end{cases} \tag{3.2}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$. Система 3.2 называется *параметрическим уравнением линейного многообразия* V'.

Примеры параметрических уравнений

1. Уравнение
$$\begin{cases}
x = x_0 + at,\\
y = y_0 + bt,
\end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$
называется *параметрическим уравнением прямой на плоскости*.

   Здесь (x_0, y_0) — координаты известной точки прямой, (a, b) — координаты направляющего вектора, t — параметр. При подстановке значения параметра t в уравнение 3.3 мы получим координаты соответствующей точки (x, y) на прямой, отложив вектор (a, b) от точки (x_0, y_0) пропорционально t раз (рис. 3.8).

2. Уравнение
$$\begin{cases}
x = x_0 + at,\\
y = y_0 + bt,\\
z = z_0 + ct,
\end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

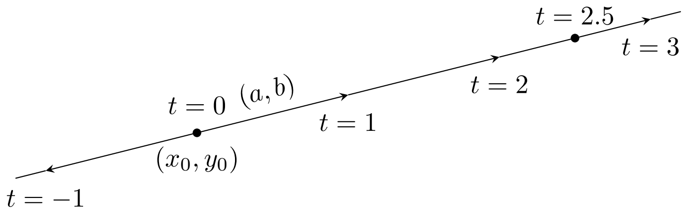


Рис. 3.8. Параметрическое уравнение прямой на плоскости

называется *параметрическим уравнением прямой в трёхмерном пространстве*.

Уравнение 3.4 полностью повторяет уравнение 3.3 и отличается лишь наличием третьей координаты z.

Замечание 3.6.2. Близким по форме к параметрическому уравнению является *каноническое уравнение прямой в трёхмерном пространстве*:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{3.5}$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки на прямой, (a, b, c) — направляющий вектор прямой. Уравнение 3.4 можно легко получить из канонического, если представить уравнение 3.5 в виде

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Каноническое уравнение прямой следует воспринимать как «сокращённую» запись параметрического уравнения. При непосредственной работе с каноническим уравнением можно столкнуться с неприятными моментами. В частности, координаты направляющего вектора могут быть равны нулю. Например, уравнение

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$$

является корректным уравнением прямой

$$\begin{cases} x=1+2t, & \\ y=2, & t\in\mathbb{R}. \\ z=3-t, & \end{cases}$$

3. Аналогично уравнение

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + a_1 t, \\ x_2 = p_2 + a_2 t, \\ \vdots \\ x_d = p_d + a_d t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве* $\mathbb{R}^d$. Здесь $(p_1, p_2, \ldots, p_d)$ — координаты известной точки прямой, $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ — координаты направляющего вектора, t — параметр.

4. Уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v, \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v, \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

называется *параметрическим уравнением плоскости в трёхмерном пространстве*.

Как и прежде (x_0, y_0, z_0) — координаты известной точки плоскости, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — направляющие векторы, u и v — параметры. Отметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть линейно независимы, иначе уравнение 3.6 вырождается в уравнение прямой.

В отличие от уравнения прямой плоскость задаётся двумя направляющими векторами и двумя параметрами. При подстановке значений параметров u и v в уравнение 3.6 мы получим координаты соответствующей точки (x, y, z) на плоскости, отложив вектор $u\vec{a} + v\vec{b}$ от точки (x_0, y_0, z_0) (рис. 3.9).

5. Уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v + c_1 w, \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v + c_2 w, \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v + c_3 w, \\ t = t_0 + a_4 u + b_4 v + c_4 w, \end{cases} \quad u, v, w \in \mathbb{R}$$

называется *параметрическим уравнением трёхмерного подпространства четырёхмерного пространства.*

И, наконец, третьим способом представления линейного многообразия, по аналогии с множеством решений однородной системы линейных уравнений для векторных подпространств, является общее уравнение.

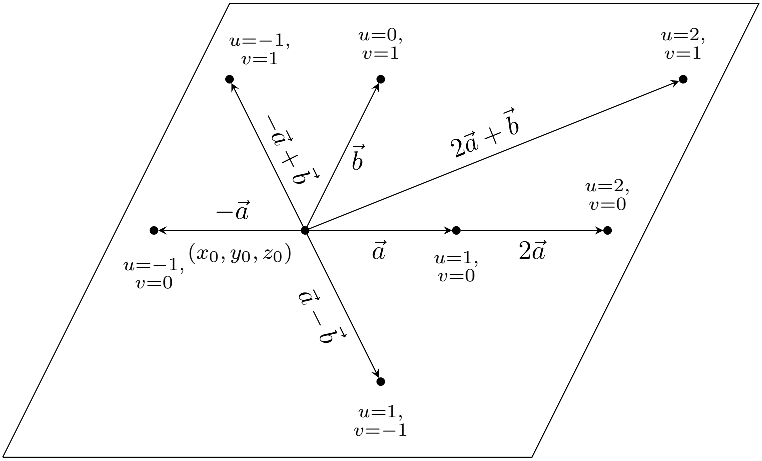


Рис. 3.9. Параметрическое уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$

Теорема 3.6.3 (Об общем уравнении линейного многообразия)**.** Пусть V — аффинное пространство над L и F, A — $m \times n$ матрица над F, $\mathbf{b} \in F^m$, система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совместна, тогда множество

$$V' = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

является линейным многообразием, причём направляющим для него служит подпространство

$$L' = \{\mathbf{x} \in L \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Следствие 3.6.4.

$$\dim V' = \dim V - \operatorname{rg} A.$$

Следствие 3.6.5. Множество решений одного линейного уравнения — это гиперплоскость.

Определение 3.6.6. Представление линейного многообразия V' в форме множества решений совместной системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ называется *общим уравнением линейного многообразия*.

Примеры общих уравнений

1. Уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.7}$$

называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Здесь вектор (A, B) является вектором нормали (перпендикуляром) к прямой (рис. 3.10), константу C можно найти из *уравнения прямой, проходящей через точку* (x_0, y_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3.8}$$

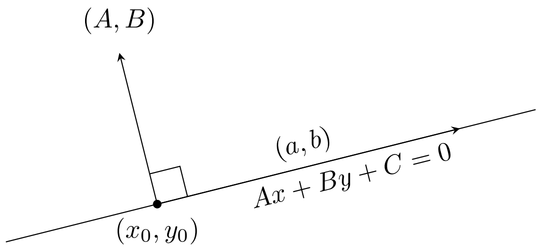


Рис. 3.10. Общее уравнение прямой на плоскости

Замечание 3.6.7. Следует отметить, что для аффинных пространств не определено понятие «угла между векторами». Углы и расстояния порождаются операцией скалярного произведения и вводятся для евклидовых векторных пространств, которые не рассматриваются в этом практикуме. Однако рассматривать уравнения прямой на плоскости, прямой и плоскости в трёхмерном пространстве без векторов нормали крайне неудобно. Поэтому мы воспользуемся тем, что углы, расстояния и скалярное произведение для пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ вводятся в стандартной школьной программе по геометрии.

2. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.9}$$

называется *общим уравнением плоскости в трёхмерном пространстве*.

Аналогично вектор (A, B, C) является вектором нормали к плоскости, константу D можно найти из *уравнения плоскости, проходящей через точку* (x_0, y_0, z_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.10}$$

Для построения общего уравнения плоскости в трёхмерном пространстве очень удобно воспользоваться операцией векторного произведения векторов (рис. 3.11).

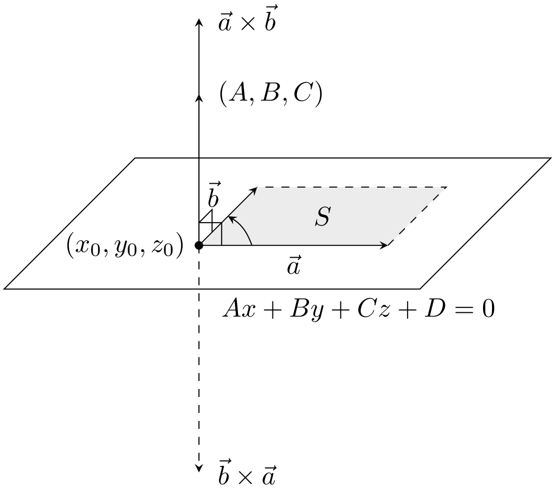


Рис. 3.11. Общее уравнение плоскости в трёхмерном пространстве

Определение 3.6.8. *Векторное произведение* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидова трёхмерного пространства $\mathbb{R}^3$ — это вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равный по длине площади параллелограмма на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный по «правилу правой руки» (тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ правая, рис. 3.11).

Координаты вектора векторного произведения можно вычислить через определитель матрицы с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.6.9 (О вычислении векторного произведения через координаты)**.** Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) в прямоугольной системе координат $O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, тогда координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ в той же системе координат равны (c_x, c_y, c_z), где

$$c_x x + c_y y + c_z z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Объединив теорему 3.6.9 и уравнение 3.10, получим новый вариант *уравнения плоскости, проходящей через точку* (x_0, y_0, z_0), с направляющими векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \tag{3.11}$$

3. Уравнение

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

называется *общим уравнением прямой в трёхмерном пространстве*.

С точки зрения общего уравнения прямая в трёхмерном пространстве — это пересечение двух плоскостей (рис. 3.12).

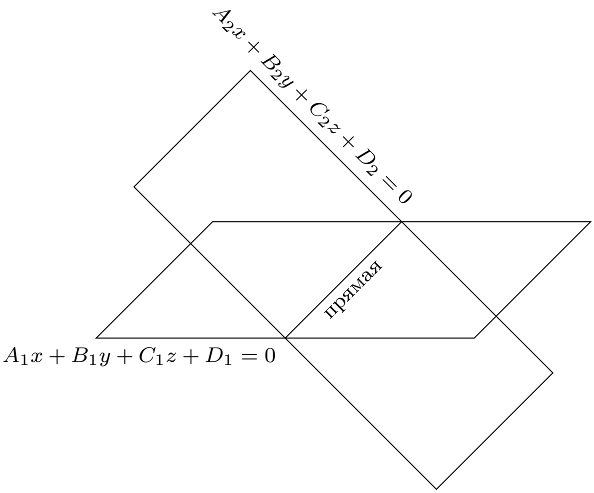


Рис. 3.12. Общее уравнение прямой в трёхмерном пространстве

4. Уравнение

$$Ax + By + Cz + Dt + E = 0$$

называется *общим уравнением трёхмерного подпространства в четырёхмерном пространстве.*

Задача 3.6.10. Составить параметрическое и общее уравнения прямой, проходящей через точки $P = (1, 3)$ и $Q = (3, -2)$.

Решение. Найдём координаты направляющего вектора прямой:

$$\overrightarrow{PQ} = (3, -2) - (1, 3) = (2, -5).$$

Подставим координаты направляющего вектора $\overrightarrow{PQ}$ и любой из точек прямой, например P, в уравнение 3.3. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки P и Q, имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 - 5t. \end{cases}$$

Найдём вектор нормали $\vec{n} = (A, B)$ к прямой. Так как $\vec{n}$ перпендикулярен направляющему вектору PQ, то скалярное произведение векторов равно

$$\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 2A - 5B = 0. \tag{3.13}$$

Нам подойдёт любое ненулевое решение уравнения 3.13, например выберем $A = 5, B = 2$. Подставим координаты вектора нормали в общее уравнение 3.8 прямой, проходящей через точку P:

$$5(x - 1) + 2(y - 3) = 0.$$

Раскрыв скобки, получим общее уравнение прямой, проходящей через точки P и Q:

$$5x + 2y - 11 = 0.$$

□

Задача 3.6.11. Составить параметрическое и общее уравнение прямой, если:

а) прямая проходит через точки $A = (5, 1)$ и $B = (1, 4)$;

б) прямая проходит через точку $A = (3, -1)$ и параллельна оси Oy;

в) прямая проходит через точку $A = (1, 2)$ и равноудалена от точек $B = (5, 3)$ и $C = (7, -1)$.

Задача 3.6.12. Составить параметрическое и общее уравнения плоскости, проходящей через точки $A = (1, 1, -2)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (2, 3, 2)$.

Решение. Выберем одну из точек плоскости, например A, и найдём координаты направляющих векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, 1) - (1, 1, -2) = (2, -1, 3),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 2) - (1, 1, -2) = (1, 2, 4).$$

Подставим координаты точки A и направляющих векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в уравнение 3.6 и получим параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C:

$$\begin{cases} x = 1 + 2u + v, \\ y = 1 - u + 2v, \\ z = -2 + 3u + 4v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Теперь подставим координаты точки A и направляющих векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в уравнение 3.11:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель и сократив выражение на -5, получим общее уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C:

$$2x + y - z - 5 = 0.$$

□

Задача 3.6.13. Составить параметрическое и общее уравнение плоскости, если:

а) плоскость проходит через точки $A = (2, -1, 2)$, $B = (3, 1, 4)$ и $C = (0, 3, 3)$;

б) плоскость проходит через точку $A = (-3, 1, 3)$ и прямую

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{0};$$

в) плоскость проходит через прямую

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

и равноудалена от точек $A = (4, 2, -1)$ и $B = (0, 4, 3)$.

Задача 3.6.14. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (1, 4, -1, 3)$, $B = (2, 2, 3, 4)$ и $C = (3, 1, 4, 0)$.

Решение. Общим уравнением плоскости в четырёхмерном пространстве будет система из двух линейных уравнений (плоскость как пересечение двух трёхмерных гиперплоскостей). Соответственно, нам необходимо составить систему уравнений, для которой координаты точек A, B, C будут решениями. Воспользуемся методом из задачи 2.5.7.

Найдем координаты направляющих векторов плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3, 4) - (1, 4, -1, 3) = (1, -2, 4, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 4, 0) - (1, 4, -1, 3) = (2, -3, 5, -3).$$

Составим однородную систему линейных уравнений, задающую векторное подпространство $\operatorname{span}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & -3 & y \\ 4 & 5 & z \\ 1 & -3 & t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\substack{\text{II}+2\text{I} \\ \text{III}-4\text{I}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y+2x \\ 0 & -3 & z-4x \\ 0 & -5 & t-x \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}+5\text{II}]{\text{III}+3\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y+2x \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \\ 0 & 0 & 9x+5y+t \end{array}\right).$$

Таким образом, линейную оболочку $\operatorname{span}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ можно представить в виде множества решений системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 9x + 5y + t = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Остаётся перенести аффинную плоскость, параллельную векторной, в любую из точек A, B, C. Для этого подставим координаты точки A в систему 3.14:

$$\begin{cases} 2(x-1) + 3(y-4) + (z+1) = 0, \\ 9(x-1) + 5(y-4) + (t-3) = 0. \end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим искомое общее уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 13 = 0, \\ 9x + 5y + t - 32 = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

В качестве проверки можно убедиться, что координаты точек A, B, C удовлетворяют системе 3.15. □

Задача 3.6.15. Составить общее уравнение

а) прямой, проходящей через точки $A = (1, -3, 2)$ и $B = (3, 0, 1)$;

б) плоскости, проходящей через точки $A = (0, 4, 2, 1)$, $B = (2, 1, 1, 2)$ и $C = (3, 5, 0, 2)$;

в) трёхмерного пространства, проходящего через точки $A = (1, 2, 1, 1)$, $B = (1, 3, 2, 4)$, $C = (2, 4, 2, 1)$ и $D = (4, 1, 3, 4)$.

Отдельно рассмотрим задачу о том, как по общему уравнению прямой в трёхмерном пространстве составить параметрическое уравнение.

Задача 3.6.16. Составить параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 4z - 2 = 0, \\ 3x + 2y - z - 10 = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Решение. Решим задачу двумя разными способами.

Способ 1 (алгебраический). Непосредственно решим систему линейных уравнений 3.16:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - z = 10, \end{cases} \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \begin{cases} 2x - y + 4z = 2, \\ 7x + 7z = 14, \end{cases} \xrightarrow[\text{I}-2\text{II}]{\frac{1}{7}\cdot\text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{I}-2\text{II}]{\frac{1}{7}\cdot\text{II}} \begin{cases} -y + 2z = -2, \\ x + z = 2, \end{cases} \to \begin{cases} y = 2z + 2, \\ x = 2 - z. \end{cases}$$

Параметрическое уравнение прямой можно получить из общего решения, если принять свободную переменную z за параметр t:

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = t. \end{cases} \tag{3.17}$$

Способ 2 (геометрический). В общем уравнении прямая представлена как пересечение двух плоскостей. Заметим, что векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ векторов нормали плоскостей по построению параллельно направляющему вектору прямой пересечения (рис. 3.13).

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7(-x + 2y + z).$$

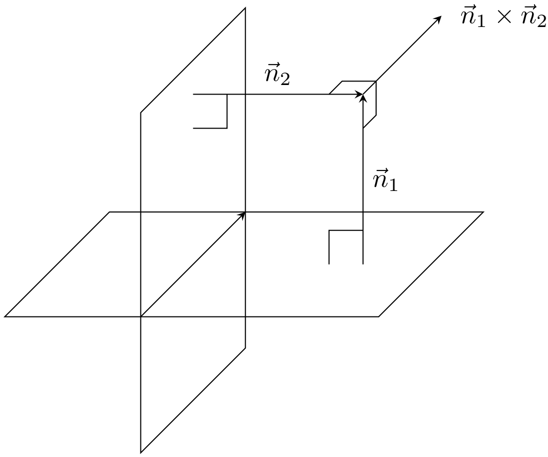


Рис. 3.13. Векторное произведение векторов нормали плоскостей

Таким образом, направляющим вектором прямой служит вектор $(-1, 2, 1)$. Остаётся найти координаты некоторой точки прямой. Для этого мы можем задать любой из переменных системы 3.16 конкретное значение (пересечение прямой с соответствующей плоскостью). Например, при $z = 0$ получаем:

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x + 2y = 10, \end{cases}$$

откуда, $x = y = 2$. Подставив направляющий вектор и координаты точки в параметрическое уравнение прямой, получим то же самое параметрическое уравнение 3.17. □

Задача 3.6.17. Составить параметрическое уравнение

а) прямой

$$\begin{cases} 5x + 3y - z - 4 = 0, \\ 2x + 3y + 2z + 2 = 0; \end{cases}$$

б) прямой

$$\begin{cases} -3x + 4y - 5z - 2 = 0, \\ 2x - 3y + 6z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.7. Взаимное расположение прямых, плоскостей и точек

В этом разделе мы рассмотрим задачи определения взаимного расположения прямых, плоскостей и точек.

3.7.1. Две плоскости в трёхмерном пространстве

Для двух плоскостей в трёхмерном пространстве возможны три вида взаимного расположения (рис. 3.14):

1) пересекаются (векторы нормали не коллинеарны);
2) параллельны (векторы нормали коллинеарны, нет общих точек);
3) совпадают (векторы нормали коллинеарны, бесконечно много общих точек).

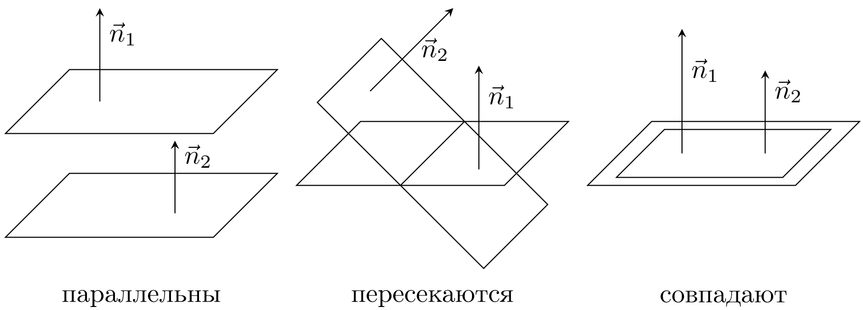


Рис. 3.14. Взаимное расположение плоскостей в $\mathbb{R}^3$

Задача 3.7.1. Определить взаимное расположение пар плоскостей:

а) $5x + 2y - 3z + 2 = 0$ и $x - 3y + 6z - 4 = 0$;

б) $3x - 2y - 5z + 3 = 0$ и $9x - 6y - 15z + 3 = 0$;

в) $2x - y + 3z - 2 = 0$ и $-8x + 4y - 12z + 8 = 0$.

Решение. а) Векторы нормали плоскостей $(5, 2, -3)$ и $(1, -3, 6)$ не коллинеарны:

$$\frac{5}{1} \neq \frac{2}{-3} \neq \frac{-3}{6},$$

следовательно, плоскости пересекаются.

б) Векторы нормали плоскостей $(3, -2, -5)$ и $(9, -6, -15)$ коллинеарны:
$$\frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} = \frac{-5}{-15},$$
следовательно, плоскости параллельны или совпадают.

Система, определяющая пересечение плоскостей:
$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z + 3 = 0, \\ 9x - 6y - 15z + 3 = 0, \end{cases}$$
несовместна. Плоскости не имеют общих точек, а значит, они параллельны.

в) Векторы нормали плоскостей $(2, -1, 3)$ и $(-8, 4, -12)$ коллинеарны:
$$\frac{2}{-8} = \frac{-1}{4} = \frac{3}{-12},$$
следовательно, плоскости параллельны или совпадают.

Система, определяющая пересечение плоскостей:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 2 = 0, \\ -8x + 4y - 12z + 8 = 0, \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений. Общие точки плоскостей существуют, следовательно, плоскости совпадают.

□

Задача 3.7.2. Определить взаимное расположение пар плоскостей:

а)
$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = 2 - 2u + 4v, \\ z = 1 + u + 3v; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -1 + 2u + v, \\ y = u + 2v, \\ z = 1 + 3v. \end{cases}$$

3.7.2. Прямая и плоскость в трёхмерном пространстве

Для прямой и плоскости в трёхмерном пространстве возможны три вида взаимного расположения (рис. 3.15):

1) прямая пересекает плоскость (одна общая точка);
2) прямая параллельна плоскости (нет общих точек);
3) прямая лежит в плоскости (бесконечно много общих точек).

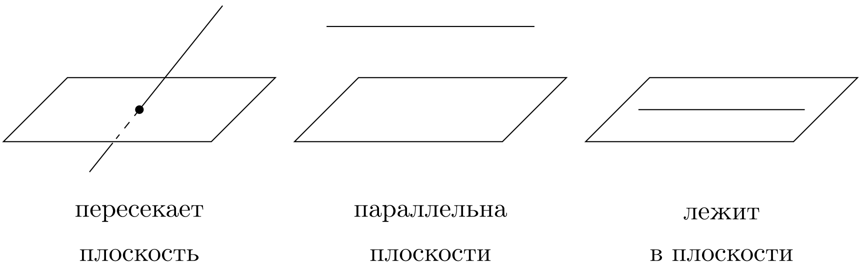


Рис. 3.15. Взаимное расположение прямой и плоскости в $\mathbb{R}^3$

Задача 3.7.3. Определить взаимное расположение

а) прямой
$$\frac{x-9}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$$
и плоскости $3x+6y-2z+3=0$;

б) прямой
$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{5}$$
и плоскости $2x-5y+z-7=0$;

в) прямой
$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-1}{1}$$
и плоскости $4x+y-5z-4=0$.

Решение. а) Составим параметрическое уравнение прямой:

$$\frac{x-9}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1} = t,$$

$$\begin{cases} x = 9 + 2t, \\ y = 5 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t, \end{cases}$$

Построим пересечение прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x = 9 + 2t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -t, \\ 3x + 6y - 2z + 3 = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Отметим, что в системе 3.18 переменные x, y, z выражены через параметр t (параметрическое уравнение прямой), поэтому достаточно подставить эти выражения в уравнение плоскости:

$$3(9 + 2t) + 6(5 + 2t) - 2(-t) + 3 = 0,$$

$$60 + 20t = 0,$$

$$t = -3,$$

$$x = 3, y = -1, z = 3.$$

Система 3.18 имеет единственное решение, следовательно, прямая пересекает плоскость. Координаты точки пересечения: $(3, -1, 3)$.

б) Составим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = 2 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 5t, \end{cases}$$

Построим пересечение прямой и плоскости:

$$2(-1 + 5t) - 5(2 + 3t) + (4 + 5t) - 7 = 0,$$

$$-15 + 0t = 0. \tag{3.19}$$

Уравнение 3.19 не имеет решений ни при каком значении параметра t, следовательно, прямая параллельна плоскости.

в) Составим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = -7 + 9t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Построим пересечение прямой и плоскости:

$$4(4 - t) + (-7 + 9t) - 5(1 + t) - 4 = 0,$$
$$0 + 0t = 0. \tag{3.20}$$

Уравнение 3.20 имеет бесконечно много решений, любая точка прямой принадлежит плоскости, следовательно, прямая лежит в плоскости.

□

Задача 3.7.4. Определить взаимное расположение

а) прямой
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{3}$$
и плоскости $3x + 5y - 4z + 2 = 0$;

б) прямой
$$\frac{x}{-1} = \frac{y-9}{2} = \frac{z-3}{3}$$
и плоскости $4x - y + 2z + 3 = 0$;

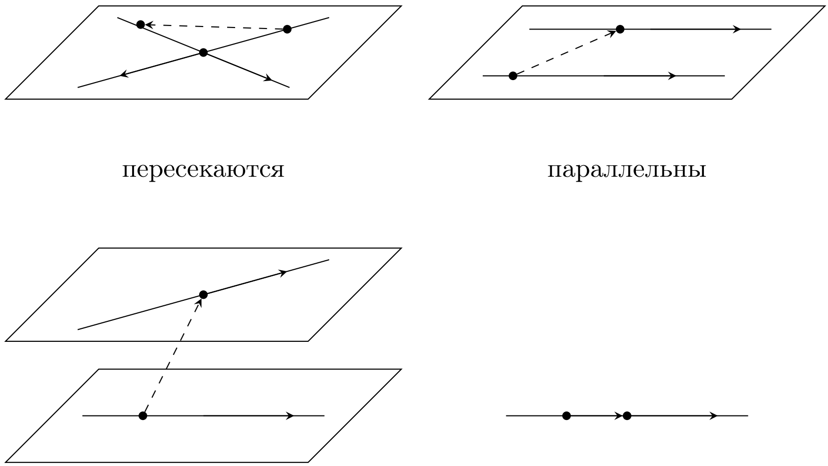
в) прямой
$$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{2}$$
и плоскости $x + 2y + 3z + 8 = 0$.

3.7.3. Две прямых в трёхмерном пространстве

Для двух прямых в трёхмерном пространстве возможны четыре вида взаимного расположения (рис. 3.16):

1) пересекаются (направляющие векторы неколлинеарны, одна общая точка);

2) параллельны (направляющие векторы коллинеарны, нет общих точек);



пересекаются параллельны

скрещиваются совпадают

Рис. 3.16. Взаимное расположение двух прямых $\mathbb{R}^3$

3) скрещиваются (направляющие векторы неколлинеарны, нет общих точек);

4) совпадают (направляющие векторы коллинеарны, бесконечно много общих точек).

Отметим, что параллельные и пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости, скрещивающиеся прямые — в параллельных плоскостях.

Задача 3.7.5. Определить взаимное расположение пар прямых:

а)
$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z+3}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y-8}{2}=\frac{z-6}{1};$$

б)
$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{12} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{-6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{-8};$$

в)
$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{0} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-5};$$

г)
$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-5}{12} = \frac{z}{8} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z-2}{-6}.$$

Решение. а) Направляющие векторы прямых $(2, -2, 3)$ и $(-1, 2, 1)$ неколлинеарны:
$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{2} \neq \frac{3}{1},$$
следовательно, прямые пересекаются или скрещиваются.

Найдём параметрические уравнения прямых и построим пересечение:
$$\begin{cases} \begin{cases} x = -3 + 2t_1, \\ y = 6 - 2t_1, \\ z = -3 + 3t_1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 - t_2, \\ y = 8 + 2t_2, \\ z = 6 + t_2. \end{cases} \end{cases} \tag{3.21}$$

Отметим, что параметры t_1 и t_2 в уравнениях прямых независимы.

Решим систему 3.21, приравняв координаты x, y, z:
$$\begin{cases} -3 + 2t_1 = -2 - t_2, \\ 6 - 2t_1 = 8 + 2t_2, \\ -3 + 3t_1 = 6 + t_2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 1, \\ -2t_1 - 2t_2 = 2, \\ 3t_1 - t_2 = 9, \end{cases} \xrightarrow[\text{III}-3\text{II}]{\substack{-\frac{1}{2}\cdot\text{II} \\ \text{I}-2\text{II}}} \begin{cases} -t_2 = 3, \\ t_1 + t_2 = -1, \\ -4t_2 = 12, \end{cases}$$
$$t_1 = 2, t_2 = -3,$$
$$x = 1, y = 2, z = 3.$$

Система 3.21 имеет единственное решение, следовательно, прямые пересекаются. Координаты точки пересечения: $(1, 2, 3)$.

б) Направляющие векторы прямых $(9, -3, 12)$ и $(-6, 2, -8)$ коллинеарны:
$$\frac{9}{-6} = \frac{-3}{2} = \frac{12}{-8},$$
следовательно, прямые параллельны или совпадают.

Можно, как и в предыдущей задаче, искать общие точки прямых. Однако намного проще подставить любую из точек первой прямой, например $(1, 2, 0)$, в уравнение второй прямой:
$$\frac{1-3}{6} \neq \frac{2-4}{2} \neq \frac{0+2}{-8}.$$

Существует точка первой прямой, не удовлетворяющая уравнению второй прямой, прямые не совпадают, следовательно, прямые параллельны.

в) Направляющие векторы прямых $(2,-3,0)$ и $(3,1,-5)$ неколлинеарны, следовательно, прямые пересекаются или скрещиваются.

Построим пересечение прямых:

$$\begin{cases} -4+2t_1 = 1+3t_2, \\ 3-3t_1 = 1+t_2, \\ 1 = 3-5t_2, \end{cases} \xrightarrow{3\cdot\mathrm{I}} \begin{cases} -12+6t_1 = 3+9t_2, \\ 3-3t_1 = 1+t_2, \\ 5t_2 = 2, \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+2\mathrm{II}} \begin{cases} -6 = 5+11t_2, \\ 3-3t_1 = 1+t_2, \\ 5t_2 = 2, \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}+2\mathrm{II}} \begin{cases} t_2 = -1, \\ 3-3t_1 = 1+t_2, \\ t_2 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Система не имеет решений, для прямых нет ни одной общей точки, следовательно, прямые скрещиваются.

г) Направляющие векторы прямых $(-4,12,8)$ и $(3,-9,-6)$ коллинеарны:

$$\frac{-4}{3} = \frac{12}{-9} = \frac{8}{-6},$$

следовательно, прямые параллельны или совпадают.

Подставим координаты точки $(1,5,0)$ первой прямой в уравнение второй прямой:

$$\frac{1}{3} = \frac{5-8}{-9} = \frac{0-2}{-6}.$$

Точка первой прямой удовлетворяет уравнению второй прямой, у прямых есть хотя бы одна общая точка, следовательно, прямые совпадают.

□

Задача 3.7.6. Определить взаимное расположение пар прямых. Если прямые пересекаются или параллельны, то составить уравнение плоскости, их содержащей:

а)

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{5};$$

б)
$$\frac{x}{-10} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{15} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+7}{-12};$$

в)
$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+5}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z}{1};$$

г)
$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{6} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{9}.$$

Рассмотрим также алгебраический подход к определению взаимного расположения двух прямых.

Задача 3.7.7. Даны две прямые:
$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$$
С помощью рангов матриц
$$r = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$
выразить необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямые пересекались, скрещивались, были параллельны, совпадали.

Решение. Определим, какие значения могут принимать ранги r и R. Во-первых, r не может равняться нулю, так как направляющие векторы прямых ненулевые. Во-вторых, R не может превосходить r более чем на единицу, так как матрицы отличаются только одним столбцом.

Рассмотрим все возможные варианты (рис. 3.16):

1) $r = R = 1$, направляющие векторы и вектор, соединяющий две точки на прямых, коллинеарны, следовательно, прямые совпадают;

2) $r = 1, R = 2$, направляющие векторы коллинеарны между собой, но не с вектором, соединяющим точки на прямых, следовательно, прямые параллельны;

3) $r = R = 2$, направляющие векторы неколлинеарны; вектор, соединяющий точки на прямых, линейно зависим с направляющими векторами (лежат в одной плоскости), следовательно, прямые пересекаются;

4) $r = 2, R = 3$, направляющие векторы и вектор, соединяющий точки на прямых, линейно независимы (не лежат в одной плоскости), следовательно, прямые скрещиваются.

□

3.7.4. Две прямых на плоскости

Для двух прямых на плоскости существует три вида взаимного расположения: пересекаются, параллельны, совпадают. Определение взаимного расположения прямых на плоскости — это простая школьная задача, поэтому ограничимся небольшими замечаниями на примере.

Задача 3.7.8. Определить взаимное расположение пар прямых:

а)
$$2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 6y - 7 = 0;$$

б)
$$\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 7 + t; \end{cases}$$

в)
$$3x + 9y + 5 = 0 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -t. \end{cases}$$

Решение. а) Задача эквивалентна задаче с двумя плоскостями в трёхмерном пространстве. Векторы нормали прямых $(2, 3)$ и $(4, 6)$ коллинеарны, следовательно, прямые параллельны или совпадают. Система
$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0, \\ 4x + 6y - 7 = 0 \end{cases}$$
не имеет решений, общих точек нет, значит, прямые параллельны.

б) Задача эквивалентна задаче с двумя прямыми в трёхмерном пространстве. Направляющие векторы $(4, -2)$ и $(-2, 1)$ коллинеарны, следовательно, прямые параллельны или совпадают. Система
$$\begin{cases} 5 + 4t_1 = 1 - 2t_2, \\ -2 - 2t_1 = 7 + t_2 \end{cases}$$
не имеет решений, общих точек нет, значит, прямые параллельны.

в) Задача эквивалентна задаче о прямой и плоскости в трёхмерном пространстве. Система

$$\begin{cases} 3x + 9y + 5 = 0, \\ x = 2 + 3t, \\ y = -t \end{cases}$$

не имеет решений, общих точек нет, значит, прямые параллельны.

□

3.7.5. Точка и плоскость в трёхмерном пространстве

В общем случае для точки и линейного многообразия возможны два взаимных расположения: точка принадлежит линейному многообразию и точка не принадлежит линейному многообразию.

Однако в частном случае линейного многообразия вида гиперплоскости (прямой на плоскости, плоскости в трёхмерном пространстве и т. д.) взаимных расположений три. Дело в том, что гиперплоскость «разрезает» пространство на два полупространства, условно называемых «выше гиперплоскости» и «ниже гиперплоскости». Полупространство «выше» определяется по направлению вектора нормали гиперплоскости. Рассмотрим задачу на примере точки и плоскости в трёхмерном пространстве.

Для точки и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ возможны три вида взаимного расположения (рис. 3.17):

а) точка (x_0, y_0, z_0) лежит в плоскости, если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;

б) точка (x_1, y_1, z_1) лежит выше плоскости (по направлению вектора нормали (A, B, C)), если $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$;

в) точка (x_2, y_2, z_2) лежит ниже плоскости (противоположно направлению вектора нормали (A, B, C)), если $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D < 0$.

Задача 3.7.9. Даны три точки: $A = (2, 4, -2)$, $B = (3, 2, 6)$, $C = (4, 5, -3)$ — и плоскость $4x - 5y - 2z + 7 = 0$. Определить, пересекают ли отрезки $[A, B]$ и $[A, C]$ плоскость.

Решение. Подставим координаты точек в уравнение плоскости:

$$A : 4 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) + 7 = -1 < 0,$$

$$B : 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 7 = -3 < 0,$$

$$C : 4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) + 7 = 4 > 0.$$

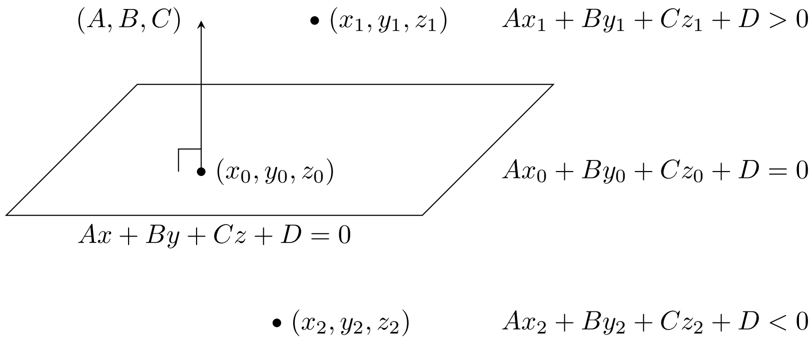


Рис. 3.17. Взаимное расположение точки и плоскости в $\mathbb{R}^3$

Точки A и B лежат с одной стороны от плоскости, точка C — с другой стороны от плоскости. Таким образом, отрезок $[A, B]$ не пересекает плоскость, отрезок $[A, C]$ пересекает плоскость. $\square$

Задача 3.7.10. Среди представленных ниже отрезков выбрать те, которые пересекают плоскость

$$3x - 5y + z - 3 = 0,$$

а) $[A, B]$, где $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 2, 1)$;

б) $[C, D]$, где $C = (0, 2, 5)$, $D = (3, 1, 0)$;

в) $[E, F]$, где $E = (1, 0, 2)$, $F = (2, 1, 1)$;

г) $[G, H]$, где $G = (4, 2, 2)$, $H = (2, 1, 3)$.

Отметим, что значение $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ также характеризует расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости.

Задача 3.7.11. Найти расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение. Расстоянием от точки до плоскости будет длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Построим прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), направляющим для которой будет вектор нормали плоскости (A, B, C):

$$\begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct. \end{cases}$$

Найдём пересечение прямой и плоскости:

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (A^2 + B^2 + C^2)t = 0,$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Параметр t характеризует длину перпендикуляра в векторах нормали. Длина вектора нормали в стандартном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Откуда, с учётом того, что расстояние не может быть отрицательным, получаем формулу:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$\square$

Задача 3.7.12. Даны вершины тетраэдра $A = (2, 2, 3)$, $B = (-3, 1, 4)$, $C = (9, 3, 1)$ и $D = (5, 4, 3)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

3.7.6. Линейные многообразия в многомерных пространствах

В общем случае задачи о взаимном расположении линейных многообразий в аффинных пространствах произвольной размерности решаются аналогично. Однако с повышением размерности возможные конфигурации становятся всё более причудливыми. Так, для двух плоскостей в d-мерном пространстве возможны шесть видов взаимного расположения:

1) совпадают;

2) параллельны;

3) пересекаются по прямой;

4) пересекаются по точке;

5) скрещиваются параллельно прямой;

6) абсолютно скрещиваются (нет прямых, параллельных обеим плоскостям).

Определить верную конфигурацию можно по пересечению и размерности суммы направляющих подпространств.

Задача 3.7.13. Определить взаимное расположение плоскостей ABC и PQR, где

$$A = (1,1,1,1), B = (2,-1,-1,0), C = (-1,3,2,0),$$
$$P = (1,0,0,0), Q = (2,-1,0,1), R = (-1,0,-2,1).$$

Решение. Составим уравнение плоскости ABC аналогично задаче 3.6.14.

$$\overrightarrow{AB} = (1,-2,-2,-1), \overrightarrow{AC} = (-2,2,1,-1),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ -2 & 2 & y \\ -2 & 1 & z \\ -1 & -1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV+I}]{\substack{\text{II+I} \\ \text{III+2I}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & -2 & y+2x \\ 0 & -3 & z+2x \\ 0 & -3 & t+x \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{II}]{\substack{\text{IV}-\text{III} \\ 2\cdot\text{III}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & -2 & y+2x \\ 0 & 0 & -2x-3y+2z \\ 0 & 0 & -x-z+t \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} (x-1)+(z-1)-(t-1)=0, \\ 2(x-1)+3(y-1)-2(z-1)=0. \end{cases}$$

Общее уравнение плоскости ABC:

$$\begin{cases} x+z-t=1, \\ 2x+3y-2z=3. \end{cases}$$

Аналогично общее уравнение плоскости PQR:

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2y+z+2t=0. \end{cases}$$

Построим пересечение плоскостей:

$$\begin{cases} x+z-t=1, \\ 2x+3y-2z=3, \\ x+y-z=1, \\ 2y+z+2t=0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Система 3.22 имеет единственное решение:

$$x=0, y=1, z=0, t=-1.$$

Таким образом, плоскости пересекаются по точке $(0,1,0,-1)$. □

Задача 3.7.14. Определить взаимное расположение:

а) плоскости ABC и прямой PQ, где

$$A = (1, 0, 0, 0), B = (1, 1, 3, 1), C = (0, 2, 5, 1),$$
$$P = (2, 1, 0, 1), Q = (1, 3, 1, 0);$$

б) плоскостей ABC и PQR, где

$$A = (1, 1, 1, 1), B = (2, 3, 0, 1), C = (3, -1, 1, 2),$$
$$P = (1, 2, 1, 2), Q = (2, -2, 2, 3), R = (5, 4, -1, 3);$$

в) плоскостей ABC и PQR, где

$$A = (1, 0, 1, 0), B = (3, 1, 0, 2), C = (0, 3, 1, 1),$$
$$P = (1, 1, 1, 2), Q = (4, -1, 0, 3), R = (-1, 2, 3, 1).$$

3.8. Коническая и выпуклая оболочки

В дополнение к аффинным комбинациями рассмотрим ещё два вида линейных комбинаций точек в аффинном пространстве над полем действительных чисел.

Определение 3.8.1. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$, точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$$

называется *конической*, если все коэффициенты λ_i неотрицательны.

Определение 3.8.2. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$. Множество всех конических комбинаций точек $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$:

$$\mathrm{cone}(P_1, P_2, \ldots, P_k) = \{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k \mid \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k\}$$

называется *конической оболочкой* множества точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Коническая оболочка получила такое название потому, что в результате получится выпуклый конус.

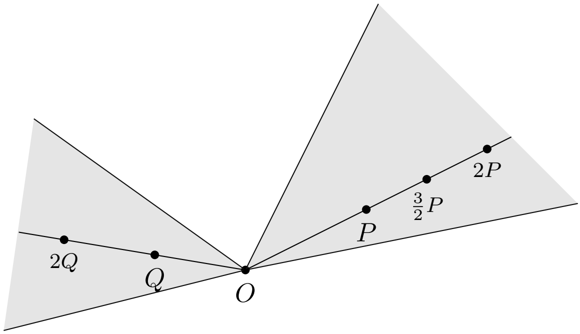


Рис. 3.18. Пример конуса

Определение 3.8.3. Подмножество K аффинного пространства V над L и $\mathbb{R}$ называется *конусом*, если

$$\forall P \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \alpha P \in K.$$

Таким образом, конус вместе с любой точкой P содержит также луч, проходящий через P, с началом в точке O — начале координат (рис. 3.18).

Отметим, что аналогично конус можно ввести и как подмножество векторного пространства L.

Определение 3.8.4. Пусть P и Q — точки аффинного пространства V над L и $\mathbb{R}$, тогда *отрезком* $[P, Q]$ называется множество точек

$$\lambda P + (1 - \lambda) Q,$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 3.8.5. Множество S в аффинном пространстве V над L и $\mathbb{R}$ называется *выпуклым*, если для любой пары точек $P, Q \in S$ отрезок $[P, Q]$ также принадлежит S (рис. 3.19).

Лемма 3.8.6. Коническая оболочка $\mathrm{cone}(S)$ определяет выпуклый конус.

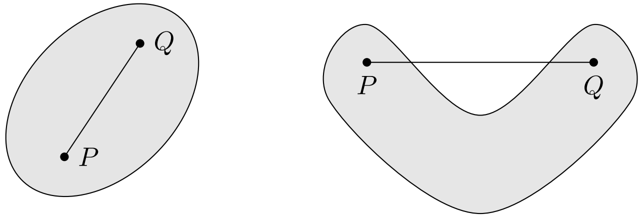
Пример конической оболочки двух точек приведён на рис. 3.20.

Другим важным примером конуса является полиэдральный конус.

Определение 3.8.7. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$ размерности d. Множество точек с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, где

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_d x_d \leq b$$

называется *замкнутым полупространством*.



выпуклое множество невыпуклое множество

Рис. 3.19. Примеры выпуклого и невыпуклого множеств

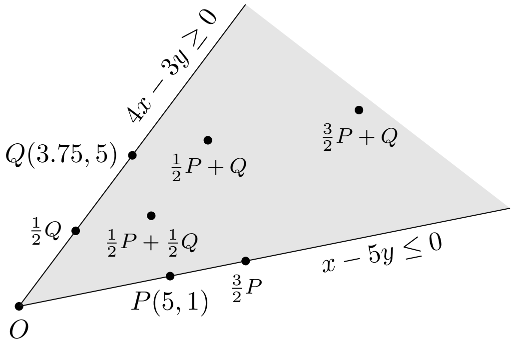


Рис. 3.20. Пример выпуклого конуса cone(P, Q)

Одно линейное уравнение определяет гиперплоскость, которая «разрезает» пространство на два полупространства, и мы рассматриваем точки только с одной стороны от гиперплоскости. Отметим, что если гиперплоскость проходит через начало координат ($b = 0$), то замкнутое полупространство будет выпуклым конусом.

Определение 3.8.8. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$ размерности d, A — $m \times d$ матрица над $\mathbb{R}$, тогда множество точек:

$$K = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

называется *полиэдральным конусом*.

Таким образом, полиэдральный конус представляет собой пересечение замкнутых полупространств, каждое из которых содержит начало координат. Коническая оболочка и полиэдральные конусы связаны по теореме Вейля-Минковского.

Теорема 3.8.9 (Вейля-Минковского для конусов)**.** Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$ размерности d, $S \subset V$ — конечное множество точек, A — $m \times d$ матрица над $\mathbb{R}$, $K \subset V$ — выпуклый конус, тогда

$$K = \mathrm{cone}(S) \;\Leftrightarrow\; K = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}\,.$$

Другими словами, коническая оболочка конечного множества точек — это полиэдральный конус и любой полиэдральный конус можно представить в виде конической оболочки конечного множества точек (рис. 3.20).

Отрезок, соединяющий две точки, в свою очередь, является частным случаем выпуклой оболочки точек.

Определение 3.8.10. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$, точки $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$$

называется *выпуклой*, если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1,$$
$$\forall i\ (1 \leq i \leq k) : \lambda_i \geq 0.$$

То есть линейная комбинация называется выпуклой, если она одновременно аффинная и коническая.

Определение 3.8.11. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$. Множество всех выпуклых комбинаций точек $P_1, P_2, \ldots, P_k \in V$:

$$\mathrm{conv}(P_1, P_2, \ldots, P_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k \right\}$$

называется *выпуклой оболочкой* множества точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Пример выпуклой оболочки приведён на рис. 3.21.

Выпуклая оболочка конечного множества точек определяет выпуклый многогранник. Это так называемое внутреннее описание многогранника через вершины. Для строгого определения многогранника нам необходима теория метрических пространств. Приведём лишь основные понятия.

Определение 3.8.12. Пусть X – некоторое множество, а функция $\rho = \rho(x, y)$, где $x, y \in X$, принимает действительные значения и удовлетворяет следующим условиям – *аксиомам метрики*:

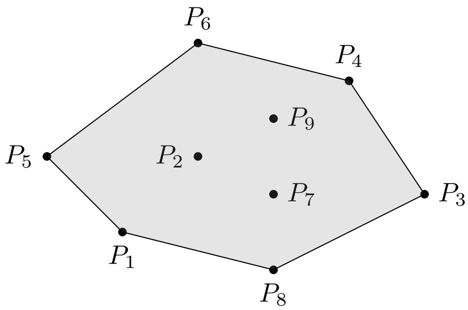


Рис. 3.21. Пример выпуклой оболочки

а) для любых $x, y \in X$ значение $\rho(x, y)$ неотрицательно и $\rho(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $x = y$;

б) для любых $x, y \in X$ выполняется равенство $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

в) для любых $x, y, z \in X$ выполняется *неравенство треугольника*:

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Тогда пара (X, ρ) образует *метрическое пространство*, а функция $\rho = \rho(x, y)$ называется *метрикой*, или *расстоянием.*

Определение 3.8.13. Подмножество S метрического пространства (X, ρ) называется *ограниченным*, если оно содержится внутри шара конечного радиуса, т. е. найдётся $x_0 \in X$ и $r > 0$, что

$$\forall s \in S : \ \rho(s, x_0) < r.$$

Определение 3.8.14. Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$ размерности d, A — $m \times d$ матрица над $\mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, тогда множество точек:

$$P = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$$

называется *выпуклым полиэдром*. Ограниченный выпуклый полиэдр называется *выпуклым многогранником*.

Таким образом, выпуклый полиэдр, как и полиэдральный конус, является пересечением конечного числа замкнутых полупространств (внешнее описание). Однако, по сравнению с конусом, полиэдр не «привязан»

$$P_1 = \begin{cases} 2x - y & \geq 0, \\ x + y & \geq 3, \\ y & \geq 1, \\ -x + 2y & \geq -1. \end{cases} \qquad P_2 = \begin{cases} 2x + y & \geq 7, \\ y & \geq 1, \\ -4x + y & \geq -19, \\ x - 2y & \geq -4. \end{cases}$$

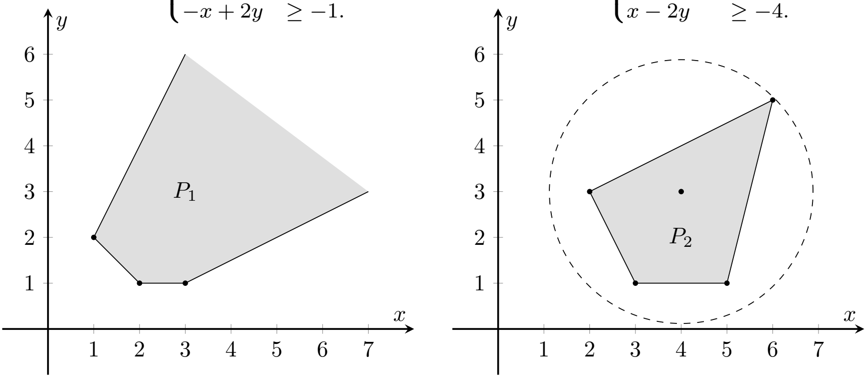


Рис. 3.22. Выпуклый полиэдр и выпуклый многогранник

к началу координат. Выпуклый многогранник является частным случаем полиэдра, если множество ограничено (рис. 3.22).

Выпуклая оболочка и выпуклые многогранники также связаны по теореме Вейля-Минковского.

Теорема 3.8.15 (Вейля-Минковского для многогранников)**.** Пусть V — аффинное пространство над L и $\mathbb{R}$ размерности d, $S \subset V$ — конечное множество точек, A — $m \times d$ матрица над $\mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $P \subset V$ — выпуклый многогранник, тогда

$$P = \operatorname{conv}(S) \;\Leftrightarrow\; P = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

Другими словами, выпуклая оболочка конечного множества точек — это выпуклый многогогранник и любой выпуклый многогранник можно представить в виде выпуклой оболочки конечного множества точек (своих вершин, см. рис. 3.22).

Построение выпуклой оболочки — одна из основных задач вычислительной геометрии. Она применяется в таких областях, как распознавание образов, обработка изображений, геоинформационные системы, статический анализ кода и многих других. Особое значение выпуклая оболочка имеет в алгоритмах компьютерной графики, например в алгоритмах обнаружения столкновений (раздел 3.4).

Задача 3.8.16. Определить вид многогранника с вершинами в точках $A = (2, 5, 2)$, $B = (0, 5, 1)$, $C = (1, 1, 3)$, $D = (2, 4, 1)$, $E = (3, -1, 1)$ и $F = (0, 1, 0)$.

Решение. Построим выпуклую оболочку точек A, B, C, D, E, F. Сразу отметим, что задача построения выпуклой оболочки — это задача для машинного, а не ручного счёта. Поэтому мы ограничимся лишь основными шагами.

Существуют различные алгоритмы построения выпуклой оболочки точек в трёхмерном пространстве, например алгоритм «заворачивания подарков» или алгоритм быстрой оболочки (аналог быстрой сортировки), но мы используем лобовой подход полного перебора или грубой силы.

Идея: если через 3 точки, не лежащие на одной прямой, можно провести такую плоскость, что все оставшиеся точки попадут строго в одно полупространство или на саму плоскость, то эта плоскость называется *опорной* и содержит грань искомого многогранника.

С таким подходом для построения выпуклой оболочки n точек в трёхмерном пространстве придётся построить

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

плоскостей через каждые 3 точки. В нашем случае это 20 плоскостей. Поэтому это алгоритм не для ручного счёта. Рассмотрим лишь две плоскости.

Уравнение плоскости ABC:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -1),\ \overrightarrow{AC} = (-1, -4, 1),$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-4x + 3y + 8z - 23 = 0.$$

Проверим остальные точки:

$$D:\ -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 1 - 23 = -11 < 0,$$

$$E:\ -4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 - 23 = -30 < 0,$$

$$F:\ -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 23 = -20 < 0.$$

Точки D, E, F лежат с одной стороны от плоскости ABC, следовательно, эта плоскость является опорной. Так как только три точки A, B и C

принадлежат опорной плоскости, то треугольник ABC образует грань искомого многогранника.

Отметим также, что все точки многогранника удовлетворяют неравенству

$$-4x+3y+8z \leq 23,$$

которое войдёт во внешнее описание многогранника.

Уравнение плоскости ABE:

$$\overrightarrow{AB}=(-2,0,-1),\ \overrightarrow{AE}=(1,-6,-1),$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$2x+y-4z-1=0.$$

Проверим остальные точки:

$$C: 2\cdot 1+1\cdot 1-4\cdot 3-1=-10<0,$$

$$D: 2\cdot 2+1\cdot 4-4\cdot 1-1=3>0,$$

$$F: 2\cdot 0+1\cdot 1-4\cdot 0-1=0.$$

Точки C и D лежат с разных сторон от плоскости ABE, значит, эта плоскость не является опорной и не содержит грани многогранника. Точка F принадлежит плоскости ABE.

Аналогично найдём остальные грани многогранника:

$$ABD:\ -x-2y+2z+8=0,$$

$$AEC: x+z-4=0,$$

$$AED:\ -5x-y+z+13=0,$$

$$BFC:\ -12x-y+4z+1=0,$$

$$BFD:\ -x-2y+8z+2=0,$$

$$EFC:\ -3x-4y+z+4=0,$$

$$EFD:\ -5x-y+13z+1=0.$$

Многогранник имеет 8 треугольных граней. Точки A, B, E, F лежат в одной плоскости, причём точки C и D лежат с разных сторон от плоскости $ABEF$. Таким образом, искомый многогранник является октаэдром (рис. 3.23).

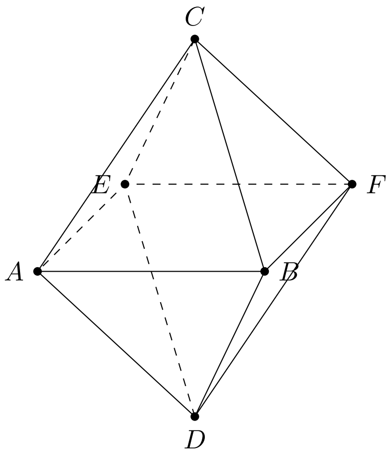


Рис. 3.23. Октаэдр $ABCDEF$

С точки зрения внешнего описания октаэдр $ABCDEF$ определён как множество решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} -3x - 4y + z & \leq -4, \\ -12x - y + 4z & \leq -1, \\ 5x + y - 13z & \leq 1, \\ x + 2y - 8z & \leq 2, \\ x + z & \leq 4, \\ x + 2y - 2z & \leq 8, \\ 5x + y - z & \leq 13, \\ -4x + 3y + 8z & \leq 23. \end{cases}$$

Определив вид многогранника, можно решать более сложные задачи. Например, объём октаэдра $ABCDEF$ можно найти, если триангулировать его на 4 тетраэдра. □

Задача 3.8.17. Определить вид многогранника с вершинами в точках $A = (3, 3, 4)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (4, 3, 1)$, $D = (-1, 1, 2)$, $E = (0, 0, 1)$, $F = (0, 1, 5)$.

3.9. Памятка описаний подмножеств аффинных и векторных пространств

Мы рассмотрели несколько видов подмножеств векторных и аффинных пространств. Каждое из них предполагает, как минимум, два вида описания. Сводная информация представлена в следующей таблице.

Таблица

Два способа описания подмножеств аффинных и векторных пространств

Объект	**Внутреннее описание**	**Внешнее описание**
Векторное подпространство	Линейная оболочка векторов $\mathrm{span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) =$ $= \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k\}$	Множество решений однородной системы линейных уравнений $\{\mathbf{x} \in L \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
Линейное многообразие	Аффинная оболочка точек $\mathrm{aff}(P_1, \ldots, P_k) =$ $= \{\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k\}$, где $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$	Множество решений системы линейных уравнений $\{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
Полиэдральный конус	Коническая оболочка точек (векторов) $\mathrm{cone}(P_1, \ldots, P_k) =$ $= \{\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k\}$, где $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$	Множество решений системы линейных однородных неравенств $\{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$
Выпуклый многогранник	Выпуклая оболочка точек $\mathrm{conv}(P_1, \ldots, P_k) =$ $= \{\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k\}$, где $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$	Ограниченное множество решений системы линейных неравенств $\{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

Ответы

Задача 1.1.5. Коммутативная группа.

Задача 1.1.6. Группа только при $r = 1$ или $r = 0$.

Задача 1.1.7. Коммутативная группа.

Задача 1.1.8. Множество симметрических (кососимметрических) матриц не замкнуто относительно операции умножения.

Задача 1.2.4. Множество не является полем, не выполнена аксиома существования обратных элементов по умножению.

Задача 1.2.5. Множество не является полем, так как не замкнуто относительно умножения.

Задача 1.2.6. Множество является полем только при условии, что $k < 0$.

Задача 1.2.7. Множество не является полем, так как обратные функцию могут не быть непрерывными на отрезке $[a.b]$. Например, обратная функция к $f(x) = x - \frac{a+b}{2}$ не определена в точке $\frac{a+b}{2}$.

Задача 2.1.4. б) Если прямая проходит через O, г), д).

Задача 2.2.5. а) и б) Линейную комбинацию можно дважды продифференцировать, а затем применить индукцию.
в) Воспользоваться определителем Вандермонда.

Задача 2.3.7. а) Базис $E_{i,j} - E_{j,i}$, где $i < j$, размерность $\frac{n(n-1)}{2}$.
б) Множество не является векторным пространством.
в) Базис состоит из матриц вида $E_{1,1} - E_{i,i}$, где $1 \leq i \leq n$, и $E_{i,j}$, где $i \neq j$, размерность $n^2 - 1$.

Задача 2.3.11. а) $(-2, -2, 5)$; б) $(-1, 1, 1, -1)$.

Задача 2.4.4. а) Размерность равна 2, базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$.
б) Размерность равна 3, базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$.

Задача 2.4.6. а) Базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$.
б) Базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.
в) Базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, вектор $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

Задача 2.5.6. а) Общее решение:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - 2x_2, \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1, -2),\ \ \mathbf{a}_2 = (0, 1, -2, -3).$$

б) Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений: $\mathbf{a} = (-1, 1, 1, 0)$.

Задача 2.5.8. а)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Задача 2.6.7.

а) Размерность суммы равна 3; базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(2, -6, 7, -2)$.

б) Размерность суммы равна 4; базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_4$. Размерность пересечения равна 2; базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$.

в) Размерность суммы равна 4; базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$. Размерность пересечения равна 2; базис: $(1, 1, 1, 1, 1), (0, 2, 3, 1, -1)$.

Задача 3.4.3.

а) Шестиугольник с вершинами в точках $(-2,-1),(0,-2),(2,-2),(2,2),(0,2),(-2,1)$.

б) Параллелограмм с вершинами в точках $(0,2),(3,2),(5,4),(2,4)$.

в) Окружность $x^2+y^2-6x=0$.

Задача 3.5.6. а) точки аффинно зависимы (лежат на одной прямой); б) точки аффинно независимы (не принадлежат одной плоскости); в) точки аффинно зависимы (принадлежат одной плоскости); г) точки аффинно независимы (не принадлежат одному трёхмерному подпространству).

Задача 3.6.11.

а) Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x=5-4t, \\ y=1+3t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $3x+4y-19=0$.

б) Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x=3, \\ y=-1+t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $x-3=0$.

в) Два решения. Если точки B и C лежат с разных сторон от прямой, то параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x=1+6t, \\ y=2-t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $x+5y-11=0$.

Если точки B и C лежат с одной стороны от прямой, то параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-4t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $4x+2y-10=0$.

Задача 3.6.13.

а) Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = 2 + u - 2v, \\ y = -1 + 2u + 4v, \\ z = 2 + 2u + v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $6x + 5y - 8z + 9 = 0$.

б) Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = -3 + 2u + 5v, \\ y = 1 - u - 3v, \\ z = 3 - 4v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $4x + 8y - z + 7 = 0$.

в) Два решения. Если точки A и B лежат с разных сторон от плоскости, то параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = 1 + 3u + v, \\ y = -2 + 2u + 5v, \\ z = 2 - u - v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $3x + 2y + 13z - 25 = 0$. Если точки A и B лежат с одной стороны от плоскости, то параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = 1 + 3u - 4v, \\ y = -2 + 2u + 2v, \\ z = 2 - u + 4v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Общее уравнение: $5x - 4y + 7z - 27 = 0$.

Задача 3.6.15. а)

$$\begin{cases} x + 2z - 5 = 0, \\ y + 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y + 4z + 7t - 19 = 0, \\ x + z - t - 1 = 0. \end{cases}$$

в) $2x + y - 4z + t - 1 = 0.$

Задача 3.6.17. а)

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -2 - 4t, z = 3t. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x = -2 + 9t, \\ y = -1 + 8t, z = t. \end{cases}$$

Задача 3.7.2. а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

Задача 3.7.4. а) прямая параллельна плоскости; б) прямая пересекает плоскость в точке $(2, 5, -3)$; в) прямая лежит в плоскости.

Задача 3.7.6. а) прямые скрещиваются; б) прямые параллельны, уравнение плоскости $3y - z - 4 = 0$; в) прямые пересекаются в точке $(1, 0, -1)$, уравнение плоскости $9x + 2y + 17z + 8 = 0$; г) прямые совпадают.

Задача 3.7.10. Отрезки $[C, D]$ и $[E, F]$ пересекают плоскость.

Задача 3.7.12. $\frac{3}{\sqrt{14}}$. Подсказка: найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

Задача 3.7.14. а) прямая и плоскость скрещиваются; б) плоскости параллельны; в) плоскости скрещиваются параллельно вектору $(3, -2, -1, 1)$.

Задача 3.8.17. Пирамида с пятиугольником $ACBEF$ в основании и вершиной D. Внешнее описание:

$$\begin{cases} -x - z & \leq -1, \\ -x + 2y - z & \leq 1, \\ 3x - 4y + z & \leq 1, \\ -3x - 4y + z & \leq 1, \\ -3x + 7y - z & \leq 8, \\ -3x + 5y + z & \leq 10. \end{cases}$$

Предметный указатель

Учебное издание

Николаев Андрей Валерьевич

Аффинные пространства

Практикум

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Вёрстка А. В. Николаев

Подписано в печать 15.11.2018. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 3 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.