

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Теория вероятностей**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Учебная дисциплина «Теория вероятностей» реализует требования федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

Цель дисциплины - формирование у студентов, будущих специалистов, способности применять основные методы теории вероятностей и математической статистики при решении задач в их будущей профессиональной деятельности (научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической), а также формирование на основе этой способности иных необходимых общекультурных и профессиональных компетенций.

Задачи дисциплины - дать обучаемым необходимые знания по основным разделам современной теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики; ознакомить их с принципами проведения физического эксперимента и обработки его результатов; привить им умения и навыки применения стандартных методов и моделей к решению теоретико-вероятностных и статистических задач, и использования при этом расчетных формул, таблиц, графиков, библиотек и пакетов прикладных компьютерных программ; способствовать развитию у обучаемых строгого математического и творческого мышления.

Учебная дисциплина «Теория вероятностей» является составной частью профессиональной подготовки по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика II».

Знания и умения, приобретаемые обучаемыми по дисциплине «Теория вероятностей», затем непосредственно используются ими при изучении дисциплин базового цикла:

- «Физика»;
- «Теория информации»,
- и дисциплин профессионального цикла:
- «Криптографические методы защиты информации»;
- «Сети и системы передачи информации».

Знания и практические навыки, полученные в результате освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», используются студентами при разработке курсовых и дипломных работ, в научно-исследовательской работе.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
---	--	---

<b>Общепрофессиональные компетенции</b>
---

<p><b>ОПК-3</b> Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности;</p>	<p><b>И- ОПК3_1</b> Способен использовать в профессиональной деятельности аппарат и методы теории вероятности и математической статистики</p> <p><b>И-ОПК-3_2</b> Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения</p> <p><b>И-ОПК-3_3</b> Применяет математический аппарат для решения прикладных и теоретических задач</p>	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- аксиоматику и основные понятия теории вероятностей;</li> <li>-основные правила вычисления вероятностей событий, классические вероятностные схемы (модели);</li> <li>-основные числовые и функциональные характеристики распределений случайных величин и их свойства;</li> <li>-понятия сходимости случайных величин и классические предельные теоремы теории вероятностей;</li> <li>-основные теоретико-вероятностные и статистические распределения и их свойства;</li> <li>-основные неравенства теории вероятностей;</li> <li>-основные понятия теории случайных</li> </ul>
--	--	---

		<p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками научного исследования с применением вероятностно-статистических методов;</li> <li>— навыкам и поиска научной информации в библиотеках и интернете;</li> <li>— опытом работы с реферативной, справочной, периодической и монографической литературой с целью получения новых знаний по теории вероятностей и математической статистике;</li> <li>— навыкам и использования библиотек прикладных программ для решения прикладных вероятностных и статистических задач с использованием компьютера.</li> </ul>
--	--	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 288 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
	Раздел 1. Теория вероятностей. Понятие вероятности. Алгебра событий.								
1	Понятие случайного события и его вероятности. Классическая вероятностная модель для случая равновозможных исходов. Приложения комбинаторики в теории вероятностей.	5	2	2				2	
2	Геометрическая вероятность. Задача Бюффона. Понятие о методах Монте-Карло.	5	2	2				2	
3	Операции над событиями. Теорема сложения. Формула включения и исключения. $\sigma$ -алгебра. Борелевские множества. Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры.	5	2	2				4	
4	Непрерывность вероятности. Теоремы конструкции и реконструкции.	5	2	2				4	

5	Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	5	2	2				2	
6	Схема независимых испытаний Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Полиномиальная схема.	5	2	2				4	
7	Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Приложения к математической статистике.	5	4	4	2			6	Контрольная работа 1
	Раздел 2. Теория вероятностей. Случайные величины .								
8	Случайная величина и ее распределение. Функция распределения. Дискретные и непрерывные распределения. Сингулярные распределения. Плотность распределения	5	4	4				4	
9	Основные числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, моменты высших порядков, асимметрия, эксцесс).	5	2	2				4	
10	Основные дискретные распределения и их свойства (биномиальное, пуассоновское, геометрическое)	5	2	2				2	
11	Основные непрерывные распределения и их свойства (равномерное, показательное, нормальное)	5	2	2				4	
12	Функция от случайной величины.	5	2	2				4	
13	Многомерные случайные величины. Совместное и частные распределения. Совместная таблица, функция и плотность	5	2	2				4	

	распределения. Независимость случайных величин.								
14	Распределения суммы, разности, произведения и частного независимых случайных величин. Примеры.	5	2	2				2	
15	Неравенства Коши-Буняковского (Шварца), Чебышёва. Математическое ожидание. Связь с интегралом Лебега.	5	4	4	2			6	Самостоятельная работа 1
		5			3		0,3	10,7	зачет
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								
	<b>Итого за 5 семестр 144 часа</b>		<b>36</b>	<b>36</b>	<b>7</b>		<b>0,3</b>	<b>64,7</b>	
16	Мера линейной зависимости случайных величин, свойства. Многомерное нормальное распределение. Линейная регрессия.	6	4	4				4	
17	Условные распределения и условные математические ожидания (одной случайной величины по другой).	6	4	4				4	
18	Производящая функция, свойства. Характеристическая функция. Свойства	6	4	4				4	
19	Различные виды сходимости случайных последовательностей, их взаимосвязь. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	6	2	2				2	Самостоятельная работа 2
	Раздел 3. Понятие случайного процесса.								
20	Основные понятия. Марковские цепи. Процессы с непрерывным временем: пуассоновский и винеровский.	6	4	4	1			3	Контрольная работа 2



	Раздел 4. Математическая статистика.							
21	Задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Полигон частот.	6	4	4	2		2	
22	Оценки неизвестных параметров распределения. Несмещённость, состоятельность, эффективность статистических оценок неизвестных параметров распределения. Неравенство Рао-Крамера. Примеры.	6	4	4			4	
23	Выборочные оценки математического ожидания, дисперсии. Методы получения оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия	6	4	4			4	
24	Построение доверительных интервалов для оценки параметров на примере биномиального распределения. Построение доверительных интервалов для оценки параметров нормального распределения: а) для математического ожидания в случае известной дисперсии; б) для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии; в) для дисперсии и среднеквадратичного отклонения $\sigma$ .	6	4	4	2		2	
25	Проверка статистических гипотез. Проверка независимости случайных величин. Однородность случайных выборок. Критерий $\chi^2$ . Ошибки 1-го и 2-го рода.	6	4	4	2		2	Самостоятельная работа 3

	Критерий Вилкоксона. Другие критерии								
					2		0,5	33,5	Экзамен
	<b>Итого за 6 семестр 144 часа</b>		<b>36</b>	<b>36</b>	<b>9</b>		<b>0,5</b>	<b>62,5</b>	
	<b>ИТОГО</b>		<b>72</b>	<b>72</b>	<b>16</b>		<b>0,8</b>	<b>127,2</b>	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Раздел 1. Теория вероятностей. Понятие вероятности. Алгебра событий.

Понятие случайного события и его вероятности. Классическая вероятностная модель для случая равновероятных исходов. Приложения комбинаторики в теории вероятностей.

Геометрическая вероятность. Задача Бюффона. Понятие о методах Монте-Карло.

Операции над событиями. Теорема сложения. Формула включения и исключения.  $\sigma$ -алгебра.

Борелевские множества. Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры.

Непрерывность вероятности. Теоремы конструкции и реконструкции.

Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула полной вероятности для условных вероятностей.

Схема независимых испытаний Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Полиномиальная схема.

Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Приложения к математической статистике.

##### Раздел 2. Теория вероятностей. Случайные величины .

Случайная величина и ее распределение. Функция распределения. Дискретные и непрерывные распределения. Сингулярные распределения. Плотность распределения

Основные числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, моменты высших порядков, асимметрия, эксцесс).

Основные дискретные распределения и их свойства (биномиальное, пуассоновское, геометрическое)

Основные непрерывные распределения и их свойства (равномерное, показательное, нормальное) Функция от случайной величины.

Многомерные случайные величины. Совместное и частные распределения. Совместная функция и плотность распределения. Независимость случайных величин.

Распределения суммы, разности, произведения и частного независимых случайных величин.

Примеры.

Неравенства Коши-Буняковского (Шварца) и Чебышёва. Математическое ожидание. Связь и интегралом Лебега.

Мера линейной зависимости случайных величин, свойства. Линейная регрессия. Многомерное нормальное распределение. Связь независимости и некоррелируемости случайных величин.

Условные распределения и условные математические ожидания (одной случайной величины по другой).

Производящая функция, свойства. Характеристическая функция. Свойства

Различные виды сходимости случайных последовательностей, их взаимосвязь. Закон больших чисел (теоремы Чебышева и Бернулли), усиленный закон больших чисел (теорема Колмогорова), центральная предельная теорема (Линдберга-Леви, Ляпунова).

##### Раздел 3. Понятие случайного процесса.

### Основные понятия

Случайные процессы, основные понятия, основные функциональные характеристики. Классификация случайных процессов на основе взаимных корреляционных свойств сечений: с независимыми приращениями, стационарные, стохастически непрерывные, марковские.

### Цепи Маркова

Конечные однородные цепи Маркова. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Простейшая классификация состояний конечной цепи Маркова. Стационарное распределение цепи Маркова. Эргодическое (финальное) распределение. Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова.

### Марковские процессы с непрерывным временем

Марковский однородный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Переходные вероятностные функции. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Интенсивности переходов. Непрерывность и дифференцируемость переходных вероятностных функций. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнения Колмогорова, и их решение. Стационарное распределение и система уравнений для его отыскания.

### Пуассоновский случайный процесс (простейший поток однородных событий)

Пуассоновский случайный процесс, его марковость, однородность, стохастическая непрерывность, и консервативность. Простейший поток однородных событий, его связь с пуассоновским процессом. Распределение интервалов между моментами смены состояний пуассоновского процесса.

### Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс, его марковость, однородность и стохастическая непрерывность. Свойства траекторий. Броуновское движение. Стандартный винеровский процесс. Принцип отражения. Распределение основных функционалов стандартного винеровского процесса: момента первого достижения заданного уровня; максимума траектории на отрезке; первого момента достижения максимума (закон арксинуса).

## **Раздел 4. Математическая статистика.**

Задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Полигон частот.

Оценки неизвестных параметров распределения. Несмещенность, состоятельность, эффективность статистических оценок неизвестных параметров распределения. Неравенство Рао-Крамера. Примеры .

Выборочные оценки математического ожидания, дисперсии.

Методы получения оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия

Построение доверительных интервалов для оценки параметров на примере биномиального распределения. Построение доверительных интервалов для оценки параметров нормального распределения в случаях : а) для математического ожидания в случае известной дисперсии; б) для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии; в) для дисперсии и среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ .

Задача проверки статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Критерии проверки гипотез.

Критическая область. Ошибки 1-го и 2-го родов при проверке гипотез. Уровень значимости и мощность критерия. Наиболее мощный и равномерно наиболее мощный критерий. Лемма Неймана-Пирсона. Применение леммы Неймана-Пирсона для построения наиболее мощного критерия проверки простых гипотез относительно значений параметров нормального распределения.

Проверка сложных гипотез о параметрах нормального распределения. Проверка равенства средних и дисперсий двух нормальных совокупностей.

Проверка независимости случайных величин. Однородность случайных выборок. Критерий  $\chi^2$  . Ошибки 1-го и 2-го рода.

Критерий Вилкоксона. Другие критерии.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Основной образовательной (дидактической) технологией освоения дисциплины предполагается современное традиционное обучение, состоящее из непосредственного (очного) взаимодействия преподавателя и обучающихся на аудиторных занятиях в форме классических традиционных лекций и практических занятий в составе учебных групп, а также из самостоятельной работы обучающихся. При этом не исключается использование в учебном процессе современных компьютерных технологий (слайд-лекции, элементы дистанционного обучения и т.д.).

На первом занятии в вводной части дается представление о дисциплине. Студенты знакомятся с назначением и задачами дисциплины, её ролью и местом в образовательной программе. При этом рассматриваются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы. Продолжительность вводной части составляет 10-15 минут.

На **практических занятиях** студенты решают поставленные перед ними задачи под руководством (контролем) преподавателя. Обсуждение процесса решения задачи и оценка правильности полученного результата (постановки задачи, выбора метода ее решения, проверка полученного результата и т.д.) в ходе практического занятия производится коллективно студентами под руководством преподавателя.

Представляется также полезным ориентировать обучающихся на использование в самостоятельной работе вузовских электронно-библиотечных систем учебной литературы и базы научно-технической информации ВИНТИ РАН через сеть Интернет.

Модули соответствуют трем разделам дисциплины.

Изучение 1-го раздела дисциплины (теории вероятностей) целесообразно начать со знакомства со структурой вероятностных экспериментов (экспериментов со случайными исходами), а также следует обратить особое внимание на алгоритм построения их математических моделей (вероятностных пространств). Усвоение обучающимися данного материала снимает многие типичные проблемы, с которыми сталкиваются начинающие изучать теорию вероятностей, и ускоряет их осмысленное «вхождение» в ее предмет.

При изучении темы 6 «Числовые характеристики распределений случайных величин» 1-го раздела дисциплины целесообразно не ограничиваться введением и изучением лишь одного общепризнанного показателя центра распределения (математического ожидания), а указать и на другие возможные показатели (мода, медиана).

При изучении 2-го раздела дисциплины (теории случайных процессов) следует обратить внимание обучающихся на приложения пуассоновского процесса в теории массового обслуживания и теории надежности, и приложения винеровского процесса в физике.

В результате изучения 3-го раздела дисциплины (математической статистики) обучающиеся должны усвоить следующие основные методологические принципы статистики - 1) единственной основой всякого статистического вывода (действия, решения) является имеющаяся случайная выборка, и 2) никакой статистический вывод не может быть абсолютно (сто процентно) надежен, он всегда имеет соответствующие вероятности ошибок.

При изучении всех разделов программы на практических занятиях следует добиваться точного знания обучающимися всех основных понятий и фактов теории. Относительно каждого вновь вводимого понятия (объекта) теории обучающиеся должны уметь четко отвечать на следующие вопросы: как называется объект, что он из себя представляет, как он определяется и каковы его основные свойства?

При чтении лекций по всем разделам программы целесообразно иллюстрировать теоретический материал достаточным количеством примеров, что должно продемонстрировать обучающимся методы и приёмы решения задач, и сделать изложение более доступным.

**Консультации** – групповые занятия, являющиеся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты в решении задач, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы, обсуждаются результаты решения заданий, выполненных студентами самостоятельно.

**Контрольные работы** студенты выполняют в аудитории во время, отведенное для учебных занятий.

**Самостоятельные работы** студенты могут выполнять в аудитории во время, отведенное для учебных занятий, либо дома за счет часов самостоятельной работы. Во время выполнения самостоятельных работ студенты могут использовать учебную литературу, консультироваться.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

— для подготовки рабочей программы, формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации - приложение Microsoft Office;

— для поиска учебной литературы:

- электронные каталоги Научной библиотеки ЯрГУ им. П.Г. Демидова

([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_one\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_one_find.php))

- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_one\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_one_find.php))

- Электронная картотека «Книгообеспеченность»

([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php))

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next")

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479с
2. Боровков А. А. Математическая статистика: учебник для вузов. / А. А. Боровков - 4-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2010. - 703 с.
3. Зубков, А. М., Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. - 3-е изд., стереотип., СПб., Лань, 2009, 319с

### **б) дополнительная литература**

1. Боровков, А. А., Теория вероятностей : учеб. пособие для вузов / А. А. Боровков, М., Наука, 1976, 351с
2. Гмурман, В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2013, 404с

### **в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ  
([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. электронные каталоги Научной библиотеки ЯрГУ им. П.Г. Демидова  
([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_one\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_one_find.php))
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории достаточно для числа студентов потока, а в аудитории для практических занятий – для числа студентов учебной группы.

Автор(ы):

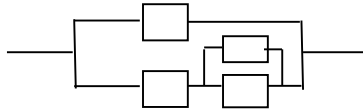
Доцент, к.ф-м.н. Д.В.Гринёв

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

**Типовые задания для контрольной работы № 1**

1. Каждый узел цепи выходит из строя в течение некоторого времени  $\tau$  с вероятностью  $q$  независимо от других узлов. Найти вероятность выхода из строя следующей цепи:



2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков равна 9?
3. В магазин поступили 25 одинаковых изделий, из них только 15 изделий 1-го завода. Продавец случайно отбирает 5 изделий. Какова вероятность, что среди них окажется ровно 1 изделие 1-го завода?
3. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания при одном выстреле для каждого из стрелков – 0,8, 0,6, 0,7 соответственно. Какова вероятность промаха второго стрелка, если в мишени оказалась 1 пробоина?
4. В одной партии первый игрок выигрывает у второго с вероятностью 0,6. Что вероятнее для первого игрока: выиграть у второго игрока не более трех партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

**Типовые задания для самостоятельной работы № 1**

- 1) В партии из 30 деталей – 5 дефектных. Из этой партии случайно выбираются 3 детали. Какова вероятность, что среди них окажутся только 2 детали без дефектов?
- 2) Производится одновременное бросание 2-х игральных костей. Какова вероятность, что кости упадут так, что число очков на какой-либо кости будет кратно числу очков на другой?
- 3) Случайно выбирается 5-значное натуральное число. Какова вероятность, что его запись симметрична относительно середины?
- 4) На отрезок длины 1 случайно бросается точка, деля отрезок на две части. Для любого вещественного числа  $x$  найти вероятность того, длина меньшей части не больше  $x$ ?
- 5) Точка случайно бросается на квадрат. Какова вероятность, что она окажется ближе к точке пересечения диагоналей, чем к ближайшей от нее вершине квадрата?

**Типовые задания для самостоятельной работы № 2**

1. Страховая фирма заключила 250 договоров. Вероятность страхового случая по каждому в течение года составляет 2%. Найти приближенное значение вероятности того, что число таких случаев в текущем году составит не более 3.
2. Совместное распределение двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$  задано таблицей:

$\eta$	-1	0	1
$\xi$			
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Найти закон распределения случайной величины  $\xi + \eta$  и вычислить  $\text{cov}(2\xi - 3\eta, \xi + 2\eta)$ . Найти условное распределение  $\xi$  по  $\eta$ .

- 3)  $\xi, \eta$  – случайные величины с матрицей совместного распределения. Найти константу  $c$ . Построить т-цу распределения для с.в.  $\zeta = M \eta | \xi$  и найти  $M\zeta$ . Найти коэффициент корреляции и построить уравнение линейной регрессии  $\eta$  на  $\xi$ .

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
0	0	0	$c$
1	0.1	0.1	0
2	0.2	0.2	0

4. Плотность распределения случайной величины  $\xi$  имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} C(x+1)^2, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

Найти  $C$ , функцию распределения  $F_{\xi}(x)$ ,  $P(\xi^2 < 1)$ ,  $M\xi$ .

5. Пара случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  образует точку  $(\xi, \eta)$ , равномерно распределенную в треугольнике с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(1; -2)$ . Найти плотности распределения  $\xi$  и  $\eta$ ; коэффициент корреляции, и построить уравнение линейной регрессии  $\xi$  по  $\eta$  и  $\eta$  по  $\xi$ .

- 2) Найти характеристическую функцию биномиального распределения  $P\{\xi=m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$ ,  $m=0, 1, \dots, n$ .

- 3) Характеристические функции независимых с. в.  $\xi$  и  $\eta$  равны  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  соответственно. Найти хар. функцию с. в.  $\zeta = 12\xi - 3\eta$ .

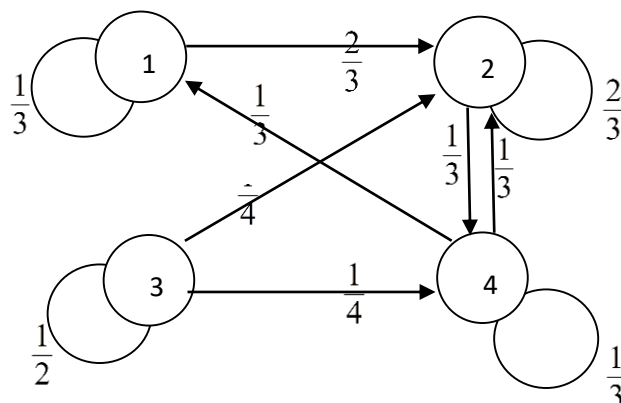
- 4) Пусть для с.в.  $\xi$  определены  $M\xi=5$  и  $D\xi=6$ . Построить три первых члена разложения хар. функции с.в.  $\xi$  в степенной ряд.

## Типовые задания для контрольной работы № 2

(Случайные процессы.)



1) Задан граф состояний цепи Маркова. Начальное распределение вероятностей  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .  
Найти распределение вероятностей для состояний системы после первого шага.



2) Дана матрица  $P$  переходных вероятностей для цепи Маркова и начальное  $p^{(0)}$  распределение вероятностей для состояний цепи.

Найти константы  $c_i$ .

Построить граф состояний случайного процесса.

Провести классификацию состояний.

Найти математическое ожидание времени выхода из множества несущественных состояний.

Найти предельные вероятности для множества существенных состояний цепи.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{7}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & c_1 \\ 0 & \frac{1}{7} & c_2 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & c_3 & \frac{1}{5} \\ 0 & c_4 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$p^{(0)} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0).$$

3) Частица совершает случайные блуждания из точки 0 по точкам отрезка  $-1 \leq x \leq 3$  с целыми координатами. Из каждой внутренней точки отрезка частица делает переход с вероятностью  $\frac{2}{3}$  на 1 единицу вправо и с вероятностью  $\frac{1}{3}$  на 1 единицу влево. В точке (-1) находится отражающий экран, в точке 3 – поглощающий экран. Построить матрицу переходных вероятностей и найти математическое ожидание времени до поглощения частицы.

4) На телефонную станцию поступает поток заявок с интенсивностью 3 заявки в мин. Считая число поступающих заявок пуассоновским случайным процессом, найти вероятность, что в течение 2-х мин. не поступит ни одной заявки.

5)  $\xi(t)$ - смещение частицы в броуновском процессе с коэффициентом диффузии 1. Если  $\xi(0)=0$ , то найти вероятность того, что частица впервые достигнет точки 4 за время, большее 16-ти.

### Типовые задания для самостоятельной работы № 3

**на тему "Нахождение оценок неизвестных параметров распределения, точечных и интервальных, выборочный коэффициент корреляции, проверка статистических гипотез" (Математическая статистика)**

1. Для с.в.  $\xi$  получена случайная выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Определить несмещенность и состоятельность оценки параметра  $\alpha = M \xi$ , определенной формулой,  $\alpha^* = (x_1 + x_2)/2$ .

2. По случайной выборке ( 3, 5, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 3, 4 ) построить выборочные оценки для м.о. и дисперсии случайной величины (выборочное среднее и выборочную дисперсию). Являются ли они несмещенными?

3. Найти методом моментов оценки неизвестных параметров,  $a$  и  $b$  равномерно распределенной на  $(a, b)$  случайной величины по случайной выборке:

3, 5, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 3, 4.

4. Случайная величина  $X$  распределена нормально, причем  $\sigma=3$ . Построить доверительный интервал с коэффициентом доверия 0,95 для неизвестного математического ожидания по случайной выборке, если объем выборки равен 36, а среднее значение равно 4,1.

5. Найти выборочный коэффициент корреляции, сделать вывод о степени линейной связи наблюдаемых случайных величин, построить выборочное уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$  по данным  $n=5$  наблюдений

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1,2	1,4	1,3	1,5	2

6. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины, если известны эмпирические и теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из  $S_i$  непересекающихся интервалов, составляющих разбиение области значений случайной величины:

$v_i$	4	15	10	44	7	13	6
$np_i$	3	19	12	34	16	11	5

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

1. Формула бинома Ньютона

$$1) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} x^k y^{n-k}$$

$$2) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$3) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} C_n^k x^k y^k$$

2. Пусть  $\Omega$ - дискретное множество элементарных событий. Что называется, событием?

Варианты ответов:

1)Любой элемент множества  $\Omega$

2)Любое подмножество множества  $\Omega$

3) Событием называется то, что происходит случайно.

3. Установить соответствие для понятий 1) несовместные события, 2) невозможное событие, 3) достоверное событие их свойствам:

а)  $P(A)=0$

б)  $P(A)=1$

в)  $P(AB)=0$

4. Классическое определение вероятности (для конечного множества элементарных событий).

Варианты ответов:

$$1) \quad P(A) = \frac{n_{\text{благопр}}}{N_{\text{всех}}}; \quad 2) \quad P(A) = \frac{N_{\text{всех}}}{n_{\text{благопр}}}; \quad 3) \quad P(A) = \frac{n_{\text{благопр}}}{N_{\text{всех}} - n_{\text{благопр}}}.$$

5. Формулы сложения и умножения вероятностей с условиями выполнения:

Варианты ответов:

1)  $P(A+B) = P(A)+P(B)$  для несовместных событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для независимых событий;

2)  $P(A+B) = P(A)+P(B)$  для независимых событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для несовместных событий;

1)  $P(A+B) = P(A)+P(B)$  для любых событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для любых событий.

6. Сравните вероятности событий A и B, если  $A \subset B$ . Варианты ответов:

1)  $P(A) > P(B)$     2)  $P(A) < P(B)$     3)  $P(A) \leq P(B)$ .

7. Аксиоматическое определение вероятности P для дискретного множества  $\Omega$  элементарных событий

Варианты ответов:

1)  $P(\Omega)=1$ ; для любого события  $P(A) \geq 0$ ;    для любых непересекающихся событий

$A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

2)  $P(\emptyset)=0$ ; для любого события  $P(A) > 0$ ;    для любых непересекающихся событий

$A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

3)  $P(\Omega)=1$ ; для любого события  $P(A) \geq 0$ ; для любых событий  $A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

8. Полная группа несовместных событий

Варианты ответов:

1) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$ ;

2) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$  и все события попарно не пересекаются;

1) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если все события попарно не пересекаются.

9. Условная вероятность

Варианты ответов: 1) условная вероятность события A при условии события B определяется формулой  $P(A)/P(B)$  при условии  $P(B) > 0$ ;

2) условная вероятность события A при условии события B определяется формулой  $P(AB)/P(B)$  при условии  $P(B) > 0$ ;

2) условная вероятность события A при условии события B определяется формулой  $P(A)/P(A+B)$  при условии  $P(A+B) > 0$ .

10. Установить соответствие понятий 1) Независимость событий 2) Формула полной вероятности,

3) Формулы Байеса – формулам, их представляющим:

а)  $P(H_i|A) = P(A|H_i)P(H_i) / \sum_{k=1, \dots, n} P(A|H_k)P(H_k)$ , где  $\{H_k, k=1, \dots, n\}$  – пгнс.

б)  $P(AB) = P(A)P(B)$ ;

в)  $P(A) = \sum_{k=1, \dots, n} P(A|H_k)P(H_k)$ , где  $\{H_k, k=1, \dots, n\}$  – пгнс.

11. Формула Бернулли для вероятности  $k$ - числа успехов в  $n$  независимых испытаниях схемы Бернулли

Варианты ответов:

1)  $P_n(k) = C_n p^k (1-p)^{n-k}$ ;      2)  $P_n(k) = p^k (1-p)^{n-k}$ ;      3)  $P_n(k) = \sum_{k=1, \dots, n} p^k (1-p)^{n-k}$ .

12. Из урны, в которой 3 бел. и 7 чер. шаров, случайно выбирают 2 шара. Найти вероятность, что шары разного цвета.

Варианты ответов:

1)  $7/15$ ;      2)  $7/30$ ;      3)  $21/100$ .

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы по применению различных теорем теории вероятностей.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения материала в течение обучения при сдаче самостоятельных работ преподаватель задает вопросы, позволяющие выяснить понимание материала. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце 5 семестра студенты сдают зачет, а в конце 6-го - экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает теоретические вопросы и задачи. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

#### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы рекомендуется использовать кроме учебной литературы, указанной в разделе 7, следующие учебные издания:

1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. – М., “Наука”, 1979.
2. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2004.
3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.
5. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука. 1963.
6. Прохоров А. В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.
7. 8. Миллер Б.М., Панков А.Р. Случайные процессы в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 2001.

8. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
9. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2006.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. – М., "Мир", 1975.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

**1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»** ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

**2. Личный кабинет** ([http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.).

**3. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ** ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете.

4. Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>

5. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru))

6. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>