

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Комбинаторная оптимизация**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Комбинаторная оптимизация» являются: изучение основных алгоритмов комбинаторной оптимизации, оценки трудоемкости и сложности алгоритмов, знакомство с эвристическими и стохастическими методами оптимизации.

формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по одному из основных разделов дискретной математики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Комбинаторная оптимизация» относится к базовой части Блока 1. Для успешного изучения этой дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения школьного курса математики, а также разделов из математического анализа и алгебры.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ИД-ОПК-1_2 Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения	<b>Знать:</b> - основные задачи комбинаторной оптимизации, методы их решения, стохастические алгоритмы оптимизации, моделирование случайных процессов. <b>Уметь:</b> - применять основные алгоритмы оптимизации на практике, определять сложность наиболее распространенных алгоритмов оптимизации.
<b>ОПК-4</b> Способен применять необходимые физические законы и модели для решения задач профессиональной деятельности;	ИД-ОПК-4_1 способностью находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	<b>Владеть навыками:</b> -методами оценивания трудоемкости алгоритмов комбинаторной оптимизации, алгоритмами сортировки и алгоритмами генерирования типовых распределений случайных величин.

### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение.	7	2					3	Задания для самостоятельной работы
2	Основные понятия комбинаторики.	7	2	1	1	1		3	
3	Пересчет и производящие функции.	7	3	1	1			3	Задания для самостоятельной работы
4	Развитие методов пересчета.	7	3	1	1	1		3	Контрольная работа 1
5	Алгоритмы и их сложность.	7	3	1	1			3	Задания для самостоятельной работы
6	Сортировка и поиск.	7	3	1	1			3	
7	Оптимизационные задачи на графах.	7	3	1	1			3	Задания для самостоятельной работы
8	Алгоритмы на графах.	7	4	1	1	1		5	
9	Потоковые алгоритмы.	7	4	1	1			5	
10	Паросочетания.	7	3	1		2		5	Контрольная работа 2
11	Приближенные и стохастические алгоритмы.	7	4	1				5	Задания для самостоятельной работы
	в том числе с ЭО и ДОТ						0,3	9,7	Зачет
	ИТОГО		34	10	8	5	0,3	50,7	
	в том числе с ЭО и ДОТ								

Содержание разделов дисциплины:

### 1. Введение.

Комбинаторные алгоритмы и задачи оптимизации. Сложность алгоритмов. Эвристические алгоритмы оптимизации. Перспективы.

### 2. Основные понятия комбинаторики.

Основные понятия комбинаторики. Генерирование перестановок, генерирование подмножеств, генерирование разбиений множеств. Пересчет, перечисление, классификация, оптимизация.

### 3. Пересчет и производящие функции.

Производящие функции и конечноразностные операторы. Основные последовательности и формулы для пересчета. Формулы включения – исключения. Задача о встречах, беспорядки и совпадения.

#### **4. Развитие методов пересчета.**

Парадокс «дней рождения». Противоречивые перестановки. Задача о супружеских парах (задача Люка). Латинские квадраты и их приложения

#### **5. Алгоритмы и их сложность.**

Алгоритмы и их классификация по сложности. Оценки времени и пространства для простейших алгоритмов. Машина Тьюринга. Недетерминированная машина Тьюринга. Классы P и NP.

#### **6. Сортировка и поиск**

Поиск и сортировка. Сложность задачи сортировки

Поиск с возвратом. Внутренняя сортировка. Оптимальная сортировка. Внешняя сортировка.

#### **7. Оптимизационные задачи на графах.**

Машинное представление графов и сетей. Числовые функции на графах. Поиск в ширину и поиск в глубину в графе. Поиск по упорядоченной таблице и поиск по бинарному дереву. Цифровой поиск. Хеширование.

#### **8. Алгоритмы на графах**

Минимальный остов. Алгоритмы Краскала и Прима. Задачи о кратчайших путях в сетях. Число внутренней и внешней устойчивости. Хроматическое число графа. Алгоритмы Форда-Фалкерсона, Дейкстры, Флойда. Сетевые графики, потоки и разрезы в сетях.

#### **9. Потокосовые алгоритмы**

Теорема Форда-Фалкерсона и алгоритм Форда - Фалкерсона построения максимального потока. Задача о потоке минимальной стоимости. Прямой и двойственный алгоритм ее решения. Транспортная задача. Простой граф. Покрытие и паросочетание.

#### **10. Паросочетания**

Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Хопкрофта – Карпа построения наибольшего паросочетания. Венгерский алгоритм построения оптимального паросочетания. Задача разбиения на минимальное число паросочетаний

#### **11. Приближенные и стохастические алгоритмы.**

Равномерно распределенные случайные числа. Оценка качества генератора псевдослучайной последовательности. Некоторые типовые датчики псевдослучайных чисел. Моделирование распределений. Задача коммивояжера. Алгоритмы с гарантированной оценкой точности для задачи коммивояжера. Метод ветвей и границ. Локальные методы оптимизации

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** -- дает первое целостное представление о предмете и ориентирует студента в системе обучения дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных

доказательств, обоснований, фактов. В процессе лекции систематически создаются проблемные ситуации, когда студентам предлагается самостоятельно доказать то или иное математическое утверждение, являющееся фрагментом основной темы лекции.

**Инструктивная лекция** – проводится с целью организации последующей самостоятельной работы студентов по углублению, систематизации и обобщению материала данной дисциплины.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний по предложенному алгоритму.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).
- Adobe Acrobat Reader

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

Автоматизированная библиотечная информационная система «БУКИ-NEXT» (АБИС «Буки-Next»).

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, Т.3.: Сортировка и поиск. М.;Вильямс. 2004.903 с.
- 2.Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М. Мир , 1975.
- 3.Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. М: МЦНМО, 2001.

### **б) дополнительная литература**

1. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика /под ред. Л.С. Казарина. М: Мир, 1999, 712с..
- 2.Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978
- 3.Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. М: Мир, 1985.

### **в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)**

- 1.Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

([http://www.lib.uniyl.ac.ru/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/bk_cat_find.php)).

2. Информационная система “Единое окно доступа к образовательным ресурсам»

(<http://www.edu.ru> раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке

(<http://windows.edu.ru/library>).

3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»

([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения лабораторных работ (лаборатория информационных технологий);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы):

Доцент, к.ф.-м.н. Д.В.Гринёв

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Комбинаторная оптимизация»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

**1. Введение.**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (Введение)

**2. Основные понятия комбинаторики.**

Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.

**3. Пересчет и производящие функции.**

Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.

**4. Развитие методов пересчета.**

Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.

**5. Алгоритмы и их сложность.**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (I. Математические основы анализа алгоритмов), Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.

**6. Сортировка и поиск**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (II. Сортировка и порядковые статистики),

**7. Оптимизационные задачи на графах.**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (III. Структуры данных)

**8. Алгоритмы на графах**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (VI. Алгоритмы на графах)

**9. Поточные алгоритмы**

Учебник Кристофидеса, глава 11.

**10. Паросочетания**

Учебник Кристофидеса, глава 11

**11. Приближенные и стохастические алгоритмы.**

Учебник Кормен Т, Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы (VII. Дополнительные главы)

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

**Контрольная работа № 1 (один из вариантов)**

1. Дана последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Показать, что за время  $O(n \log n)$  можно определить, есть ли в последовательности два одинаковых числа.
2. Как выполнить вычисление многочлена степени  $n$  в точке за  $O(n)$  операций? Написать программу.
3. Массив содержит все последовательные натуральные числа от 1 до  $N$ , кроме одного. Написать алгоритм нахождения пропущенного числа, требующий  $O(N)$  операций.
4. Найти формулу для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.
5. Скольких гостей надо пригласить на встречу, чтобы оказалось, что по меньшей мере трое из них родились в один день?
6. Пусть исходный массив отсортирован в порядке возрастания. Каким будет время сортировки с помощью кучи? А если в порядке убывания?

### Контрольная работа № 2 (один из вариантов)

1. Как рассортировать 1000 целых натуральных чисел, не превосходящих 100000 за время порядка 1000?
2. Пусть дан массив  $n$  записей, которые надо отсортировать по ключу, принимающему значения 0 и 1. Придумайте алгоритм сортировки с линейным временем работы, требующий  $O(1)$  памяти т.е. не зависящей от размера массива. Можно ли воспользоваться этим алгоритмом для сортировки по  $b$ -битовому ключу за время  $O(bn)$ ?
3. Можно ли удалить элемент из множества, представленного связанным списком, за время  $O(1)$ ? А добавить элемент?
4. Придумайте нерекурсивную процедуру, работающую линейное время, которая печатает ключи всех вершин двоичного дерева.
5. Пусть в связанном списке каждый элемент хранится вместе с его ключом  $k$  и хеш-значением  $h(k)$ . Ключ представляет собой длинную последовательность символов. Как можно упростить поиск элемента с данным ключом?
6. Покажите, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда входящая степень каждой вершины равна ее исходящей степени.
7. Найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $(0,1,2,3)$ .



### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Комбинаторная оптимизация» являются лекции, практические и лабораторные занятия, причем в достаточном объеме. Это связано с тем, что комбинаторная оптимизация представляет собой особый математический материал, лежащий на стыке различных математических дисциплин, с помощью которых математики решают довольно сложные и нетривиальные практические задачи. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом и алгоритмами оптимизации.

Особенность дисциплины состоит в ее существенно более междисциплинарный характер по сравнению с другими дисциплинами и явно выраженный прикладной аспект. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В течение всего обучения на лекциях предлагаются нестандартные задачи, решая которые студент может повысить свой уровень освоения теоретического материала. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы комбинаторной оптимизации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом алгебры в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде 2 контрольных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце изучения дисциплины студенты сдают зачет. Оценка выставляется по итогам тестирования и краткого собеседования по его результатам.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Комбинаторная оптимизация» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью и абстрактностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины в каждом семестре студенту практически невозможно.