МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра микроэлектроники и общей физики

УТВЕРЖДАЮ
Декан физического факультета
И.С.Огнев
(подпись)
« 23 » мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
11.03.04 Электроника и наноэлектроника

Профиль «Интегральная электроника и наноэлетроника»

Форма обучения
Очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от «17» апреля 2023 года, протокол № 5

Программа одобрена НМК
физического факультета
протокол № 5, от «15» мая 2023 года

Программа
физическо
протокол

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина " Дифференциальные уравнения. Операционные исчисления. Разностные уравнения " содействует фундаментализации образования, формированию культуры аналитических вычислений в рамках цикла аналитических дисциплин. Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с идеями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Данная дисциплина относится к базовой части Блока 1. Дисциплина "Дифференциальные и интегральные уравнения" входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях полученных слушателями при изучении дисциплин "Математический анализ", "Алгебра". Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины "Дифференциальные уравнения", используются при изучении общепрофессиональных дисциплин "Численные методы", "Уравнения с частными про-изводными", ряда специальных дисциплин, а также при выполнении курсовых и диплом-ных работ, связанных с математическим моделированием и динамическими системами.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	**ИД-УК-1.1** Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	**Знать:** – основные методы интегрирования дифференциальных уравнений. **Уметь:** – применять основные методы интегрирования дифференциальных уравнений для решения практических задач. **Владеть навыками:** – построения математических моделей прикладных задач, описываемых дифференциальными уравнениями.
Общепрофессиональные компетенции		

ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	**ИД-ОПК-1.1** Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	**Знать:** – теоремы существования решений начальной задачи; – теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров; – общие свойства линейных систем дифференциальных уравнений; – теоремы об устойчивости по первому приближению. **Уметь:** – решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; – исследовать устойчивость решений таких уравнений.
	ИД-ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	**Уметь:** – дифференцировать решения по начальным условиям и параметрам. **Владеть навыками:** – качественного исследования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 акад.часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости **Форма промежуточной аттестации** ***(по семестрам)*** *Формы ЭО и ДОТ*
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Предварительные сведения из алгебры и математического анализа. Нормы векторов и матриц. Принцип сжимающих отображений. Теорема Арцела.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
2	Понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения; интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
3	Элементарные методы интегрирования: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, линейное уравнение, уравнения Бернулли и Риккати.	3	2	2				2	Контрольная работа №1
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
4	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши для	3	2	2				1	Задания для домашней работы

	однородного уравнения. Неоднородное уравнение. Периодические решения однородного и неоднородного уравнений с периодическими коэффициентами.								
5	Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Выделение вещественных решений.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
6	Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Функция Коши. Решение неоднородных уравнений со специальной правой частью.	3	2	2				2	Задания для домашней работы
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
7	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
8	Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
9	Общее решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами.	3	2	3				1	Задания для домашней работы
10	Матричная экспонента. Структура решений системы с постоянными коэффициентами. Оценка матричной экспоненты. Поведение решений при больших временах.	3	2	2				2	Контрольная работа №2
11	Фундаментальная матрица системы с переменными коэффициентами. Формула Остроградского-Лиувилля.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
12	Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теоремы Ляпунова и Флоке. Общее решение линейной	3	1	3				1	Задания для домашней работы

	однородной системы с периодическими коэффициентами.								
13	Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
14	Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Дифференцируемость решений по начальным условиям. Уравнения в вариациях.	3	1	3				1	Задания для домашней работы
15	Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров, входящих в правые части, дифференцируемость по параметрам. Метод малого параметра.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
16	Продолжение решений. Непродолжаемые решения.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
17	Устойчивость решений. Устойчивость в линейных системах	3	1	3				2	Задания для домашней работы
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
18	Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.Построение функций Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
19	Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.	3	1	3				1	Задания для домашней работы
20	Устойчивость многочленов. Критерий Рауса - Гурвица. Частотный критерий Михайлова.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
21	Автономные системы дифференциальных уравнений. Свойства	3	2	3				2	Задания для домашней работы

	траекторий автономных систем. Качественный анализ поведения решений автономных дифференциальных уравнений первого порядка.								
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
22	Фазовая плоскость линейной двумерной автономной системы. Классификация особых точек.	3	2	2				1	Задания для домашней работы
23	Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Собственные значения и собственные функции.	3	1	2				2	Контрольная работа №3
	в том числе с ЭО и ДОТ							*2*	*Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle*
24	Первый интеграл. Теорема о полном наборе независимых первых интегралов в окрестности неособой точки.	3	1	2				1	Задания для домашней работы
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 3семестр		34	51		5	0,5	18	
	Всего		**34**	**51**		**7**	**0,5**	**51,5**	
	в том числе с ЭО и ДОТ							***10***	

Примечание: объем (в часах) самостоятельной работы в рамках установленного данной РПД количества часов, выполняемой студентом с применением ЭО и ДОТ (в ЭУК «Дифференциальные уравнения. Операционные исчисления.Разностные уравнения» в LMS Moodle), определяется каждым студентов в зависимости от уровня его подготовки и способов выполнения данного вида работ.

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1.

Предварительные сведения из алгебры и математического анализа. Нормы векторов и матриц. Принцип сжимающих отображений. Теорема Арцела.

Раздел 2.

Понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения; интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые.

Раздел 3.

Элементарные методы интегрирования: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, линейное уравнение, уравнения Бернулли и Риккати.

Раздел 4.
Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши для однородного уравнения. Неоднородное уравнение. Периодические решения однородного и неоднородного уравнений с периодическими коэффициентами.

Раздел 5.
Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Выделение вещественных решений.

Раздел 6.
Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Функция Коши. Решение неоднородных уравнений со специальной правой частью.

Раздел 7.
Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Раздел 8.
Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Раздел 9.
Общее решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами.

Раздел 10.
Матричная экспонента. Структура решений системы с постоянными коэффициентами. Оценка матричной экспоненты. Поведение решений при больших временах.

Раздел 11.
Фундаментальная матрица системы с переменными коэффициентами. Фор-мула Остроградского-Лиувилля.

Раздел 12.
Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теоремы Ляпунова и Флоке. Общее решение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами.

Раздел 13.
Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Раздел 14.
Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Дифференцируемость решений по начальным условиям. Уравнения в вариациях.

Раздел 15.
Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров, входящих в правые части, дифференцируемость по параметрам. Метод малого параметра.

Раздел 16.
Продолжение решений. Непродолжаемые решения.

Раздел 17.
Устойчивость решений. Устойчивость в линейных системах

Раздел 18.
Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.Построение функций Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Раздел 19.
Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Раздел 20.
Устойчивость многочленов. Критерий Рауса - Гурвица. Частотный критерий Михайлова.

Раздел 21.
Автономные системы дифференциальных уравнений. Свойства траекторий автономных систем. Качественный анализ поведения решений автономных дифференциальных уравнений первого порядка.

Раздел 22.
Фазовая плоскость линейной двумерной автономной системы. Классификация особых точек.

Раздел 23.

Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Собственные значения и собственные функции.

Раздел 24.

Первый интеграл. Теорема о полном наборе независимых первых интегралов в окрестности неособой точки.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии: **Электронный учебный курс «Дифференциальные уравнения. Операционные исчисления. Разностные уравнения» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимся и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTex;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. В.К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. 2-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
2. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

б) дополнительная литература

1. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
2. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - СПб: Лань, 2003.
3. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

При освоении дисциплины используются аудитории, оборудованные для проведения лекций.

Автор:
Профессор кафедры микроэлектроники и общей физики, доктор физ.-мат. наук, доцент Куликов А.Н.

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины “Дифференциальные уравнения. Операционные исчисления. Разностные уравнения”

Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1_1
(в части умения решений дифференциальных уравнений,умения исследовать устойчивость положений равновесия)

Задания для контрольнойработы №1

Вариант №1	Вариант №2
1. Найти общее решение $\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+x+1}$. 2. Найти общее решение $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0.$ 3. Найти общее решение $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=2x\sin x.$ 4. Найти общее решение $y'=y^2-\frac{2}{x^2},\, y_*=\frac{1}{x}.$ 5. Найти общее решение $(x+y-1)dx+(x-y^2+3)dy=0.$	1. Найти общее решение $xdy-(x^2e^{-y}+2)dx=0$. 2. Найти общее решение $(2y-x-4)dx-(2x-y+5)dy=0.$ 3. Найти общее решение $y'\cos x+y\sin x=1.$ 4. Найти общее решение $3xy^2y'+y^3-2x=0.$ 5. Найти общее решение $(1+(x^2+y^2)x)xdx+ydy=0.$

Вариант №4	Вариант №3
1. Найти общее решение $t(\ln x + 2\ln t - 1)dx = 2xdt$. 2. Найти общее решение $y' = \frac{x+y-3}{y-x+1}$. 3. Найти общее решение $(x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0$. 4. Найти общее решение $xy' - y^2 \ln x + y = 0$. 5. Найти общее решение $xdx + ydy + xdy - ydx = 0$.	1. Найти общее решение $(4t + x - 3)^2 dt - dx = 0$. 2. Найти общее решение $(2x+4y+3)y' - x - 2y - 1 = 0$. 3. Найти общее решение $\dot{x} - x\,\mathrm{ctg}\,t = 4\sin t$. 4. Найти общее решение $(x-y)ydx - x^2dy = 0$. 5. Найти общее решение $(x^2+y)dx - xdy = 0$.
Вариант №5	Вариант №6
1. Найти общее решение $\dot{x} = \frac{(1+x)^2}{t(x+1)-t^2}$. 2. Найти общее решение $(3x-4y-3)y' - 3x + 4y + 2 = 0$. 3. Найти общее решение $\dot{x} - 2x = te^{2t}\sin t$. 4. Найти общее решение $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}$. 5. Найти общее решение $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0$.	1. Найти общее решение $(1 - x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$. 2. Найти общее решение $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$. 3. Найти общее решение $y' + y = (x+1)e^{-x}\cos x$. 4. Найти общее решение $y' = \frac{y^2}{(y-x)x}$. 5. Найти общее решение $(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$
Вариант №7	Вариант №8
1. Найти общее решение $xy^2(xy' + y) = 1$. 2. Найти общее решение $x + y - 2 + (1-x)y' = 0$. 3. Найти общее решение $y' - y = \sin x$. 4. Найти общее решение $(y^2 + x^2 + 1)y' + xy = 0$. 5. Найти общее решение $(x+y-1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.	1. Найти общее решение $x^2dt + (e^t - x)dx = 0$. 2. Найти общее решение $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$. 3. Найти общее решение $xy' - 2y = x^3\cos x$. 4. Найти общее решение $2y'x\ln x + y = xy^{-1}\cos x$. 5. Найти общее решение $x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0$.

Вариант №10

1. Найти общее решение $2xy' + 1 = y + \dfrac{x^2}{y-1}$.
2. Найти общее решение $y' = \dfrac{x+y}{1-y-x}$.
3. Найти общее решение $y'x\ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.
4. Найти общее решение $2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x$.
5. Найти общее решение $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$.

Вариант №9

1. Найти общее решение $x\dfrac{dx}{dt} + tx = t^3$.
2. Найти общее решение $(4x + 2y + 1)y' + 8x + 4y + 1 = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} - x\,\mathrm{tg}\,t = \dfrac{1}{\cos^3 t}$.
4. Найти общее решение $y^2dx + (x - y)xdy = 0$.
5. Найти общее решение $ydx - (y^2 + x)dy = 0$.

Вариант №11

1. Найти общее решение $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$.
2. Найти общее решение $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} + te^t x = e^{(1-t)e^t}$.
4. Найти общее решение $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2},\ y_* = \dfrac{1}{x}$.
5. Найти общее решение $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$.

Вариант №12

1. Найти общее решение $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x}e^{2t} + x$.
2. Найти общее решение $y' = -\dfrac{2x + 3y - 5}{3x + 2y - 5}$.
3. Найти общее решение $y' + 2y = xe^{-2x}\cos x$.
4. Найти общее решение $(x - t)tdx - x^2dt = 0$.
5. Найти общее решение $\dfrac{y + \sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)dy = 0$.

Задания для контрольнойработы №2

Вариант №1.

1. Найти общее решение
$$y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2};$$
2. Найти общее решение
$$y''+y = 4\cos x;$$
3. Найти общее решение
$$y'''+2y''+y' = x + e^{-x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Вариант №2.

1. Найти общее решение
$$\dot{x} = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}$$
2. Найти общее решение
$$y''+2y'+17y = e^{-x}(1 + \sin 4x);$$
3. Найти общее решение
$$y'''+2y'' = x + xe^{-2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант №3.

1. Найти общее решение
$$y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2};$$
2. Найти общее решение
$$y''+2y'+10y = xe^{-x}\sin 3x;$$
3. Найти общее решение
$$y'''+8y = x + xe^{-2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$\frac{dx}{dt} = y + 1,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}.$$

Вариант №4.

1. Найти общее решение
$$y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}};$$
2. Найти общее решение
$$y''-4y'+5y = (x+1)e^{-2x}\sin x;$$
3. Найти общее решение
$$y^{IV} + 4y'' = x + e^{-2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$\frac{dx}{dt} + 5x + 2y = e^{t},$$
$$\frac{dy}{dt} - 2x = e^{2t}.$$

Вариант №5.

1. Найти общее решение
$$y'' - y = \frac{4x^2+1}{2x\sqrt{x}};$$
2. Найти общее решение
$$y''+4y'+13y = e^{-2x} + \sin 3x;$$
3. Найти общее решение
$$y^{IV} - 4y'' = x + e^{-2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Вариант №6.

1. Найти общее решение
$$y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2};$$
2. Найти общее решение
$$y''+2y'+17y = e^{-x} + \sin 4x;$$
3. Найти общее решение
$$y'''+2y'' = (x+1)e^{-2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Вариант №7.

1. Найти общее решение
$$y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2};$$
2. Найти общее решение
$$y''+4y'+13y = e^{-2x} + \sin 3x;$$
3. Найти общее решение
$$y'''-8y = x + (x+1)e^{2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Вариант №8.

1. Найти общее решение
$$y'' + y = \frac{2+x^2}{x^3};$$
2. Найти общее решение
$$y''-4y'+5y = (x+1)e^{-2x}\sin x;$$
3. Найти общее решение
$$y^{IV} - 4y'' = x + e^{2x};$$
4. Найти общее решение системы x’=Ax, если
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$
5. Найти общее решение системы
$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t.$$

Вариант №9.	Вариант №10.
1. Найти общее решение $x^2y'' - xy' - 3y = \frac{1}{x}$; 2. Найти общее решение $$y''-2y'+y = (x+2)e^x + 1;$$ 3. Найти общее решение $$y'''+y' = x\sin x;$$ 4. Найти общее решение системы x'=Ax, если $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$ 5. Найти общее решение системы $$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$	1. Найти общее решение $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$; 2. Найти общее решение $$y''+2y'-3y = (x+1)(e^x + 1);$$ 3. Найти общее решение $$y'''+4y'' = x\cos 2x;$$ 4. Найти общее решение системы x'=Ax, если $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$ 5. Найти общее решение системы $$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Вариант №11. 1. Найти общее решение $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$; 2. Найти общее решение $$y''+2y'+10y = e^x \sin 3x;$$ 3. Найти общее решение $$y'''+8y = x(1 + e^{-2x});$$ 4. Найти общее решение системы x'=Ax, если $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$ 5. Найти общее решение системы $$x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$	Вариант №12. 1. Найти общее решение $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$; 2. Найти общее решение $$y''-4y'+5y = (x+1)\sin x;$$ 3. Найти общее решение $$y^{IV} + 4y'' = (x+1)e^{-2x};$$ 4. Найти общее решение системы x'=Ax, если $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$ 5. Найти общее решение системы $$x' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

<u>Задания для контрольной работы №3</u>

Вариант 1

1. При каких значениях параметров a и b устойчив многочлен
$$\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - \exp(x+y) - \cos x, \\ \dot{y} = \ln\bigl(1 + \sin(2x - 3y)\bigr). \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения
$$\dot{x} + \varepsilon x - \exp(x - t) = 0, \quad x(0) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи
$$t\ddot{x} - \dot{x} = f(t), \qquad \dot{x}(1) = 0, \; x(2) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Система $\dot{x} = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^5$) имеет частное решение, у которого известны только две координаты: $x_1 = \sin(t + \pi/4)$, $x_2 = e^{-t} + \cos 2t$. Устойчиво ли нулевое решение?

2. Найти все положения равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$$
Для соответствующей линеаризованной на состоянии равновесия системы указать тип особой точки.

3. Для решения уравнения
$$y' + y^2 - \frac{6\varepsilon}{x} = 0, \qquad y(1) = 1 + 3\varepsilon$$
найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.

4. Построить функцию Грина для краевой задачи
$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \qquad \dot{x}(0) = x(1) + \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Для уравнения
$$\dot{x} = x\sin^3 t$$
найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость. Если положение равновесия является асимптотически устойчивым — отметить это.

2. Найти все положения равновесия системы
$$\dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x}, \qquad \dot{y} = -\sin x.$$
Для соответствующей линеаризованной на состоянии равновесия системы указать тип особой точки.

3. Найти методом малого параметра два члена разложения
$$y'' + 2y' + (1 + \mu y^2)y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи
$$\ddot{x} + 4x = f(t), \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Выяснить, устойчиво ли решение задачи Коши
$$\dot{x} = t(x - 1), \quad x(1) = 2.$$

2. Исследовать на устойчивость особые точки системы
$$\dot{x} = \sin x, \qquad \dot{y} = 1 - y^2$$
и определить их тип.

3. Для решения уравнения
$$\dot{x} + \varepsilon x - 1 + \sin(t - x) = 0, \quad x(0) = \varepsilon$$
найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.

4. Построить функцию Грина для краевой задачи
$$t^2\ddot{x} - 2x = f(t), \qquad x(1) = 0,\ x(2) + 2\dot{x}(2) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Вариант 5

1. При каких значениях параметров a и b устойчив многочлен

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 6.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x - 2y)^{-1} - 1, \\ \dot{y} = \cos x - \exp(2x - y). \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения

$$\ddot{x} + \big(4 + \mu(t + x^2)\big)x = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$t\ddot{x} + \dot{x} = f(t); \qquad x(1) = 0, \quad x(t) \text{ ограничено при } t \to +\infty.$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Найти положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость

$$\dot{x} = y - x + (y - x)^2, \quad \dot{y} = 0.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x + 3y}, \\ \dot{y} = 1 - \exp(2x + y). \end{cases}$$

3. Для решения уравнения

$$y' = \mu x + \sin y, \quad y(0) = 2\mu$$

найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

4. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$\ddot{x} - x = f(t), \quad x(t) \text{ ограничено при } t \to \pm\infty.$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\dot{x} = \frac{x^2}{t^2 + 1}.$$

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(-2x + y), \\ \dot{y} = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x - 3y}. \end{cases}$$

3. Для решения уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = \mu t x, \quad x(0) = 4, \; \dot{x}(0) = \mu^2 + 3\mu$$

найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

4. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = f(t), \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Система $\dot{x} = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) имеет частное решение, у которого известны только две координаты: $x_1 = \sin t + 2\cos t$, $x_2 = \cos 2t$. Устойчиво ли нулевое решение?

2. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип

$$\begin{cases} \dot{x} = 2.5xe^{x} - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x. \end{cases}$$

3. Найти методом малого параметра два члена разложения

$$\ddot{x} = 2x - 2x^3, \quad x(0) = 1, \; \dot{x}(0) = \mu, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

4. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$\ddot{x} = f(t), \qquad x(0) = \dot{x}(1) = 0.$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

Домашние задания предлагаются из задачника:
1.А.Ф. Филиппов. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:
- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Экзаменационные билеты

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1.

1. Нормы векторов и матриц (основные определения). Эквивалентность векторных норм в конечномерном пространстве.
2. Матричная экспонента и ее свойства. Способы построения матричной экспоненты.
3. Найти общее решение системы x'=Ax, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2.

1. Теорема существования и единственности решения начальной задачи Коши для скалярных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Общее решение линейной неоднородной системы. Принципсуперпозиции. Случай векторного квазиполинома.
3. Найти общее решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2\exp(t) \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3.

1. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений. Определите, при какихaиbявляется сжимающим оператор $A : R^2 \to R^2$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

2. Интегрирование линейных скалярных уравнений первого порядка. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений.

3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y = \sin(2x).$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4.

1. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение линейного однородного уравнения (запись общего решения в действительной форме). Пространство решений.

2. Теорема Арцела.

3. Найти общее решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} x.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5.

1. Интегрирование линейных неоднородных уравнений n-го порядка. Случай квазиполинома.

2. Решение линейных систем с помощью матричной экспоненты. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами.

3. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y' = x\sin(2x) + x + 1$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6.

1. Интегрирование линейных неоднородных уравнений n-го порядка. Представление частного решения с помощью функции Коши. Метод вариации произвольных постоянных.

2. Теорема об оценке матричной экспоненты. Оцените норму матрицы $\| e^{At} \|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Найти общее решение уравнения

$$y' = 2xy + xe^{x^2} \cos(2x)$$

и решение с начальным условием $y(0) = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7.

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные операторы (определения и алгебраические операции). Однозначная разрешимость задачи Коши.

2. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений.

3. При каких *a* уравнение

$$y'' + ay = \sin(2x)$$

имеет хотя бы одно периодическое решение.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8.

1. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Общее решение линейной однородной системы. Переход к действительному базису в пространстве решений.

2. Нормы векторов и матриц (основные определения). Индуцированная матричная нормы (примеры и доказательства формул).

3. Представьте общее решение следующей линейной системы с помощью матричной экспоненты:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9.

1. Интегрирование линейных скалярных уравнений первого порядка. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений.

2. Матричная экспонента и ее свойства. Вычислите e^{tA}, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Найти общее решение

$$\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1 + 2t}{\sqrt{t}}, \\ y' = -x + y + \dfrac{2 - 2t}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10.

1. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши.

2. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение линейного однородного уравнения.

3. Найти общее решение

$$y'' + y = \frac{4x^2 + 3}{4\sqrt{x}}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11.

1. Теорема Арцела.
2. Матричная экспонента и ее свойства. Способы построения матричной экспоненты.
3. Найти общее решение

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} x$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12.

1. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Случай квазиполинома.

2. Теорема об оценке матричной экспоненты. Оцените норму матрицы $\| e^{At} \|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. При каких значениях параметров следующая система имеет периодические решения:

$$\begin{cases} x' = x + y + a\cos t, \\ y' = -2x - y - a\cos t + b\sin t. \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 13.

1. Нормы векторов и матриц (основные определения). Эквивалентность векторных норм в конечномерном пространстве.

2. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные операторы (определения и алгебраические операции). Однозначная разрешимость задачи Коши.

3. Найти общее решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} x.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 14.

1. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши.
2. Решение линейных систем с помощью матричной экспоненты. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем.
3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = x - y + t + 1, \\ y' = -x + y + t^2. \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15.

1. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Общее решение линейной однородной системы. Переход к действительному базису в пространстве решений.
2. Матричная экспонента и ее свойства. Вычислите e^{tA}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Найти общее решение

$$y'' + y = \frac{4x^2 + 3}{4\sqrt{x}}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 16.

1. Общее решение линейной неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных.
2. Интегрирование линейных скалярных уравнений первого порядка. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений.
3. При каких a и b хотя бы одно ненулевое решение уравнения

$$y'' + ay' + by = 0$$

стремится к нулю при $x \to +\infty$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 17.

1. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши.

2. Дайте определение фундаментальной матрицы линейной системы и найдите ее для следующей системы:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$$

3. Найти общее решение уравнения

$$y' = 2xy + xe^{x^2} \cos(2x)$$

и решение с начальными условиями $y(0) = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 18.

1. Теоремы Ляпунова и Флоке. Общее решение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами.
2. Приведите формулу Остроградского-Лиувилля и, зная, что уравнение $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ имеет решение $y_1(x) = x$ найдите второе решение уравнения, линейно независимое с данным.
3. При каких *a* уравнение

$$y'' + ay = \sin(2x)$$

имеет хотя бы одно периодическое решение.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 19.

1. Фундаментальная матрица линейной системы. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений методом вариации произвольной постоянной. Пусть $K(t,\tau)$ – матрицант линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, Найти $\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}$ через $A(t)$ и $K(t,\tau)$

2. Сформулируйте теорему об оценке матричной экспоненты и оцените норму матрицы $\| e^{At} \|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. При каких *a* и *b* хотя бы одно ненулевое решение уравнения

$$y'' + ay' + by = 0$$

стремится к нулю при $x \to +\infty$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 20.

1. Определитель Вронского и его свойства. Линейная зависимость и независимость функций.

2. Линейные уравнения первого порядка.

3. При каких значениях параметров задача имеет периодические решения

$$\begin{cases} x' = -x - 2y - 2a\cos t, \\ y' = x + y + b(\sin t - \cos t). \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21.

1. Формула Остроградского-Лиувилля.

2. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x,$$

если известно его решение: $y_1 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 22.

1. Функции Ляпунова. Теорема об устойчивости.
   Используя, второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
   $\begin{cases} x' = -3x - 2y \\ y' = 2x - 3y \end{cases},$
2. Метод малого параметра. Общая схема применения метода и примеры. Найти два члена разложения

$$y' = \exp(y - x) + \mu y, \quad y(0) = -\mu.$$

3. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y' = f(x), \;\; y(0) = y(1) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 23.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
   Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:
   $\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)^{-1} - 1 \\ y' = \cos x - \mathrm{e}^{2x - y} \end{cases},$

2. Матрица монодромии, мультипликаторы. Найти матрицу монодромии и мультипликаторы для системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & 1 + \cos 2t \end{pmatrix} x.$$

3. Определить при каких aиb устойчивы решения уравнения
$$y^{IV}+3y'''+ay''+by'+4y=0\,.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 24.

1. Второй метод Ляпунова. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x'=-4x-y \\ y'=2x-y \end{cases}.$$
2. Фазовый портрет линейной системы на плоскости. Построить фазовый портрет системы $x'=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}x.$
3. Найти два члена разложения 2π-периодического решения уравнения
$$y''+3y+y^3=2\mu\cos t.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 25.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы: $\begin{cases} x'=2.5xe^{x}-3y+\sin x^2 \\ y'=2x+ye^{-y^2/2}-y^4\cos x \end{cases}.$
2. Какие фазовые портреты может иметь система $x'=\begin{pmatrix}a & -2\\ 4 & -a\end{pmatrix}x$ для различных значений a.
3. Построить функцию Четаева и доказать неустойчивость
$$\begin{aligned}\dot{x}&=\ 2x-y\\ \dot{y}&=\ 3x-2y\end{aligned}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 26.

1. Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используя, второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x'=-2x-3y \\ y'=x-y \end{cases},$
2. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Найти решение уравнения
$$y''+y=\delta(x-0.5),\ \ y(0)=y(1)=0.$$
3. Найти три члена разложения
$$y''+4xy^3=0,\ \ y(0)=\mu, y'(0)=0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 27.

1. Линейные двумерные автономные системы. Фазовая плоскость. Классификация особых точек. Какие фазовые портреты может иметь система $x' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -b & 1 \end{pmatrix} x$ для различных значений *b*.
2. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости. Используя, второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$
3. Найти собственные функции и собственные значения
$$(xy')' + \lambda \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 0, y(2) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 28.

1. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Найти функцию Грина краевой задачи
$\ddot{u} + 4u = f(x), \ u(0) = u(1) = 0$.
2. Траектории в окрестности точки покоя. Типы точек покоя. Определить при каких значениях параметра *a*нулевое решения системы негрубое
$$x' = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} x.$$
3. При каких значениях *a* устойчиво нулевое решение системы
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin(ax + y) + y \\ \dot{y} &= x + ay + 1 - \cos(x + ay) \end{aligned},$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 29.

1. Метод малого параметра. Общая схема применения метода и примеры. Найти три члена разложения
$$xy' = \mu x^2 + \ln y, \ y(1) = 1.$$
2. Построение функции Ляпунова для линейных систем. Построить функцию Ляпунова для системы $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}.$
3. Найти собственные функции и собственные значения
$$(xy')' + \lambda \frac{y}{x} = 0, \quad y'(1) = 0, y'(2) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 30.

1. Устойчивость. Определения, геометрический смысл понятия устойчивости. Исходя из определения, доказать неустойчивость нулевого решения системы $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x.$
2. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. При каких a устойчиво нулевое состояние равновесия
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a x_1^2 \sin 2t \\ (a^2 - 4) e^{at} x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$
3. Найти три члена разложения
$$xy' = \mu x^2 + \ln y,\ y(1) = 1.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 31.

1. Линейные двумерные автономные системы. Фазовая плоскость. Классификация особых точек. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = 3x - y \end{cases}.$
2. Устойчивость. Определения, геометрический смысл понятия устойчивости. Исходя из определения, доказать неустойчивость нулевого решения системы $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x.$
3. Найти два члена разложения 2π-периодического решения
$$y'' + 3y + y^2 = 2\mu \sin t.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 32.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы: $\begin{cases} x' = 2.5xe^x - 3y + \sin x^2 \\ y' = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x \end{cases}.$
2. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. При какихa устойчиво нулевое состояние равновесия
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a x_1^2 \sin 2t \\ (a^2 - 4)(at + 1) x_2^2 \end{pmatrix}.$$
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$$\dot{x} = \mu t x^3 - x^2,\quad x(1) = 1 + \mu.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 33.

1. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Найти функцию Грина краевой задачи
$\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = f(x),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$.
2. Критерий Рауса - Гурвица. Найти значения *a, b* при которых устойчиво решение уравнения
$$y^{V} + ay^{IV} + 2y''' + by'' + 2y' + y = 0.$$
3. Построить функцию Ляпунова и доказать устойчивость системы
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4x - y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 34.

1. Линейные двумерные автономные системы. Фазовая плоскость. Классификация особых точек. Какие фазовые портреты может иметь система $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & -2a \end{pmatrix} x$ для различных значений *a*.
2. Построение функции Ляпунова для линейных систем на примере системы $x' = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$.
3. При каких *a, b* устойчиво нулевое решение системы
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2+a)x - y + x^2 \sin 2t \\ \dot{y} &= 5x - 2y + y^3 e^{(b+2)t} \end{aligned}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 35.

1. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии, мультипликаторы. Найти матрицу монодромии и мультипликаторы для системы
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sin^2 t & 0 \\ 0 & -1 + \cos 2t \end{pmatrix} x.$$
2. Доказать, что устойчивость нулевого решения линейной системы влечет устойчивость любого ее решения.
3. Начертить фазовые траектории и интегральные кривые уравнения
$$y' = y(y-1)(y+1)^2.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 36.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. При каких a устойчиво нулевое состояние равновесия

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a x_1^2 \sin 2t \\ (a^2-4)e^{-at} x_2^3 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать, что асимптотическая устойчивость нулевого решения линейной системы влечет асимптотическую устойчивость любого ее решения.
3. Доказать, неустойчивость решения $x = \cos t, y = 2\sin t$ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln(x + 2\sin^2(t/2)) - y/2 \\ \dot{y} &= (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t \end{aligned}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 37.

1. Матрица монодромии, мультипликаторы. Найти матрицу монодромии и мультипликаторы для системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & 1 + \cos 2t \end{pmatrix} x.$$

2. Второй метод Ляпунова, теорема об асимптотической устойчивости. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y) \\ y' = 2 - \sqrt[3]{8 - 6x + 3y} \end{cases}$$

3. Исходя из определения устойчивости доказать устойчивость решений системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 38.

1. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Найти функцию Грина краевой задачи

$\ddot{u} + \dot{u} = f(x),\ u(0) + \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$

2. Частотный критерий Михайлова. При каких a и b нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$$

3. Найти два члена разложения 2π-периодического решения

$$y'' + y^2 = 1 + \mu \sin t.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 39.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} x' = tg(-2x + y) \\ y' = 1 - \sqrt[3]{1 - x + y} \end{cases}$$

2. Устойчивость. Определения, геометрический смысл понятия устойчивости. Исходя из определения устойчивости доказать устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x.$$

3. Начертить траектории и исследовать особые точки

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= \quad 6x - y^2 + 1 \end{aligned}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 40.

1. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Найти собственные функции и собственные значения для краевой задачи
   $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0.$

2. Траектории в окрестности точки покоя. Типы точек покоя. Фазовый портрет линейной системы на плоскости. При каких *a, b* фазовым портретом системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2a & 3 \\ b & b+1 \end{pmatrix} x,$ является фокус?

3. При каких *a* и *b* нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 41.

1. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Доказать, устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \qquad \sin(-x + 2y) + y^2 \cos t \\ \dot{y} &= \quad 1 + \cos y \cos t - \exp(2x + y) - \cos t \end{aligned}.$$

2. Найти два члена разложения π-периодического решения
   $y'' + \sin y = \mu \sin 2t.$

3. Начертить траектории и исследовать особые точки

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= \quad 6x - y^2 + 1 \end{aligned},$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 42.

1. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)^{-1} - 1 \\ y' = \cos x - e^{2x - y} \end{cases},$$

2. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии, мультипликаторы. Найти матрицу монодромии и мультипликаторы системы

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin^2 t & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Доказать устойчивость решения $x = -t^2, y = t$ системы

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = & y^2 - 2ty - 2y - x \\ \dot{y} = & 2x + 2t^2 + \exp(2t - 2y) \end{array}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 43.

1. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина. Построить функцию Грина краевой задачи

   $(xy')' - \dfrac{y}{x} = f(x), \;\; y(1) = 0, y'(2) = 0.$
2. Построение функции Ляпунова для линейных систем. Построить функцию Ляпунова для системы $x' = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x$
3. Найти два члена разложения в ряд по μ

$$y'' - y' = (y+1)^2 - \mu y^2, \; y(0) = 0.5, y'(0) = -1.$$

Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины “Дифференциальные уравнения. Операционные исчисления. Разностные уравнения”

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» являются лекции. Это связано с тем, что в основе численных методов лежит серьезный математический аппарат, требующий детального разбора. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых студенты отрабатывают навыки решения практических задач.

Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя три вопроса. На итоговую оценку также влияют результаты выполнения контрольных работ №1-3. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» самостоятельно студенту затруднительно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу:

1. В.К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. 2-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
2. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Международный научно-образовательный сайт EqWorld. Сайт EqWorld содержит обширную информацию о различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Особое внимание уделено уравнениям математической физики и механики. Приведены таблицы точных решений, описаны методы решения уравнений, есть интересные статьи, даны ссылки на математические программы, указаны адреса научных сайтов, издательств, журналов и др. Имеется динамический раздел EqArchive, который дает возможность авторам оперативно публиковать свои уравнения и их точные решения, первые интегралы и преобразования. Содержит учебную физико-математическую библиотеку, в которую авторы могут добавлять свои книги и диссертации, а также форум для вопросов и дискуссий. EqWorld работает на русском и английском языках (главная стр. сайта переведена также на немецкий, французский, итальянский и испанский языки) и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики, химии, биологии и инженерных наук. Все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей.
EqWorld содержит около 2000 веб-страниц (книги библиотеки не учитываются), его посещают люди из 200 стран мира, средняя посещаемость сайта превышает 3000 человек в сутки.Адреса сайта в Интернете: http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm (рус.), http://eqworld.ipmnet.ru (англ.).
2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.urait.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств

(*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://window.edu.ru/library).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. Головной разработчик проекта - Федеральное государственное автономное учреждение Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций (ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика") www.informika.ru.

ИС "Единое окно" объединяет в единое информационное пространство электронные ресурсы свободного доступа для всех уровней образования в России. Разделы этой системы:

- **Электронная библиотека** – является крупнейшим в российском сегменте Интернета хранилищем полнотекстовых версий учебных, учебно-методических и научных материалов с открытым доступом. Библиотека содержит более 30 000 материалов, источниками которых являются более трехсот российских вузов и других образовательных и научных учреждений. Основу наполнения библиотеки составляют электронные версии учебно-методических материалов, подготовленные в вузах, прошедшие рецензирование и рекомендованные к использованию советами факультетов, учебно-методическими комиссиями и другими вузовскими структурами, осуществляющими контроль учебно-методической деятельности.
- **Интегральный каталог образовательных интернет-ресурсов** содержит представленные в стандартизованной форме метаданные внешних ресурсов, а также содержит описания полнотекстовых публикаций электронной библиотеки. Общий объем каталога превышает 56 000 метаописаний (из них около 25 000 - внешние ресурсы). Расширенный поиск в "Каталоге" осуществляется по названию, автору, аннотации, ключевым словам с возможной фильтрацией по тематике, предмету, типу материала, уровню образования и аудитории.
- **Избранное**. В разделе представлены подборки наиболее содержательных и полезных, по мнению редакции, интернет-ресурсов для общего и профессионального образования.
- **Библиотеки вузов**. Раздел содержит подборки сайтов вузовских библиотек, электронных каталогов библиотек вузов и полнотекстовых электронных библиотек вузов.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

1. Личный кабинет (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб.и метод. пособия, тексты лекций и т.д. Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.