

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

 П.Н.Нестеров

«18» мая 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»

Направление подготовки
01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль)
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры алгебры и математической логики
от «16» апреля 2021 года, протокол № 8

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины Целями освоения дисциплины «Теория представлений групп и ассоциативных алгебр» являются: обеспечение подготовки в одной из важных областей математики и ее приложений, знакомство с современными понятиями теории обыкновенных линейных представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Математический аппарат теории представлений широко используется во многих разделах математики и физики, причем сфера его приложений все время расширяется. Более того, будучи относительно законченной, данная теория служит образцом для теории представлений других алгебраических систем –компактных групп, групп Ли и теории сложности вычислений.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Теория представлений групп и ассоциативных алгебр» является дисциплиной по выбору вариативной части. Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов, применяемых для анализа представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих математических дисциплин: теории чисел, линейной алгебры, аналитической геометрии.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы аспирантуры, и критерии их оценивания

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Профессиональные компетенции:

- готовность к исследованию в области алгебраической геометрии, алгебраической и аналитической теории чисел, геометрии чисел, групп и алгебр Ли (ПК-2);

Код компетенции	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения		
		Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
ПК-2	<p>ЗНАТЬ: Основные концепции современной теории представлений групп над полем комплексных чисел. Основные теоремы, касающиеся теории характеров групп. Соотношения ортогональности. Строение полупростых алгебр и групповых колец. Возможные применения теории представлений в физике, теории сложности вычислений</p>	<p>Основные понятия теории представлений групп и соотношения ортогональности для неприводимых комплексных характеров групп. Методы работы с таблицей неприводимых характеров конечных групп. Представления абелевых групп. Связь с дискретным преобразованием Фурье.</p>	<p>Основные понятия, связанные со строением конечномерных ассоциативных алгебр. Технику работы с неприводимыми характерами конечных групп, следствия из соотношений ортогональности для конечных групп. Связь соотношений ортогональности с теоремами комбинаторики</p>	<p>Место теории представлений в алгебре. Вычислительные аспекты теории представлений и характеров конечных групп, некоторые результаты из теории модулярных представлений, построение характеров Брауэра и их использование в прикладных исследованиях</p>
	<p>УМЕТЬ: использовать положения теории представлений групп для решения задач построения таблиц характеров конечных групп, определения простейших свойств</p>	<p>В целом успешное, но не систематическое использование теории для определения строения групп и колец. Определение параметров группы по косвенной,</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы в использовании анализа строения группы и ассоциативной алгебры по ее структурным константам. Распо-</p>	<p>Хорошее умение использовать положения и методы теории для получения параметров изучаемой алгебраической структуры. Умение распознавать строение</p>

	по таблице характеров, возможные приложения в математических науках.	фрагментарной информации о ее представлениях и характерах.	знать аналоги ортогональных преобразований в других структурах.	группы по таблице обыкновенных и модулярных характеров
	ВЛАДЕТЬ: навыками анализа ассоциативных колец и алгебр с помощью теории представлений характеров и основных теорем теории представлений. Применениями теории представлений для организации быстрых вычислений в алгебраических задачах, методами построения таблиц характеров	В целом успешное, но не систематическое применение навыков анализа ассоциативных алгебр и конечных групп для анализа алгебр и конечных групп. Освоены простейшие методы вычислений в ассоциативных алгебрах. Имеются сведения о приложениях в смежных областях	Успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков анализа основных ассоциативных структур и владение основными методами анализа этих структур и опыт успешного использования теории в смежных областях знания.	Успешное и систематическое применение навыков анализа ассоциативных структур, владение основными методами вычислений и опыт успешного использования теории в смежных областях знания, в физике, комбинаторике, обработке сигналов

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов
Дисциплина изучается в течение третьего и четвертого семестров. Формой итоговой аттестации по дисциплине в четвертом семестре является зачет.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1	Представления над \mathbb{C} и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура	3	5				13	Задания для самостоятельной работы. Контрольная работа
2	Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров	3	5				13	Задания для самостоятельной работы
3	Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления	4	8			2	62	Задания для самостоятельной работы
		4						Зачет
	Всего		18			2	88	

Содержание разделов дисциплины:

Тема № 1: Представления над \mathbb{C} и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура.

Приводимые и неприводимые представления. Характеры. Комплексные и целочисленные представления. Центр групповой алгебры. Теорема Машке и Лемма Шура. Свойства характеров конечных групп. Регулярное представление и групповая алгебра. Представления абелевых групп и дискретное преобразование Фурье.

Тема № 2: Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров. Скалярное произведение и соотношения ортогональности для обыкновенных характеров. Таблица характеров конечной группы. Поле алгебраических чисел. Индуцированные характеры. Теорема взаимности Фробениуса. Лемма Бернсайда и ее следствия. Разрешимые группы. Теорема Казарина и модулярные представления.

Тема № 3: Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления. Перечислительная теорема Бернсайда. Действие группы на множестве и подсчет орбит. Свертка и ДПФ. Применение преобразования Фурье к быстрым вычислениям. Обработка сигналов и теория групп. Теорема Вигнера о просто разложимых группах и теоремы Казарина, Чанкова и Янишевского.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- GAF (GNU GPL).

-- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ -- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ - NEXТ" (АБИС "БУКИ - NEXТ""БУКИ - NEXТ").

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры, М: Физматлит, 2000
2. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. , Екатеринбург: УрО РАН, 2009, 379 с.
3. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (под ред. Л.С.Казарина), М.:Мир, 1999.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000. – 239 с.

б) дополнительная литература

1. Циммерман К.-Х., Методы теории модулярных представлений в алгебраической теории кодирования. М.:МЦНМО, 2011.
2. Струнков С.П. Введение в теорию представлений конечных групп. М: МИФИ, 1999
3. Глухов М.М., Круглов И.А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров с приложениями в криптографии. Лань: Сп-б, 2015
4. Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам, Ленанд,2015
5. Казарин Л.С. О p^a -лемме Бернсайда Математические заметки. – 1990. – Т. 48, вып. 2. – С. 45-48.
6. Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы. Математический сборник. – 2010. – Т. 201, вып. 5. – С. 27-40.
7. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. W.Feit, Characters of finite groups, Yale University.W.A.Benjamin, Inc., N,Y.- Amsterdam, 1967
10. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/>
3. <http://mech.math.msu.su/department/>
(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).

4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (<http://www.edu.ru/library>).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" (www.biblioclub.ru).
6. [http:// www.tc26.ru](http://www.tc26.ru)
7. [http:// www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061](http://www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061)
6. <http://habrahabr.ru/post/210684/>
8. http://www.nist.gov/customcf/get_pdf.cfm?pub_id=919061
9. <http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po-issledovaniyu-khesh-funksii-stribog/>

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
профессор, д.ф-м.н. Казарин Л.С

**Приложение к №1 рабочей программе дисциплины
«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»**

**Оценочные средства
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету:

1. Представление группы. Приводимые и неприводимые представления.
2. Характер представления.
3. Комплексные и модулярные представления. Примеры.
4. Центр групповой алгебры.
5. Теорема Машке.
6. Лемма Шура.
7. Регулярное представление. Конечность числа попарно неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы.
8. Представления конечных абелевых групп.
9. Циклическая свертка и ДПФ.
10. Полупростые конечномерные алгебры и идеалы.
11. Строение групповой алгебры конечной группы над полем комплексных чисел.
12. Скалярное произведение характеров и соотношения ортогональности.
13. Таблица характеров конечной группы.
14. Поле алгебраических чисел.
15. Индуцированные представления.
16. Теорема взаимности Фробениуса.
17. Лемма Бернсайда и разрешимые группы.
18. Теорема Казарина – Бернсайда (без доказательства).
19. Модулярные представления. Определение и примеры.
20. Применения теории представлений к физическим задачам.
21. Действие группы на множестве. Перечислительная теорема Бернсайда.
22. Применение ДПФ к быстрым вычислениям.
23. Обработка сигналов и теория групп.
24. Просто приводимые группы. Теорема Вигнера.
25. Теоремы Казарина-Чанкова-Янишевского.

**1.2 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей
аттестации**

Задания для самостоятельной работы по теме 1

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, § 22, задачи из подпунктов 22.1 – 22.19, .

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4, гл.4, §4

Задания для самостоятельно работы по теме 2

По задачку Белоголов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, , § 22, задачи из подпунктов 22.21 – 22.42, 22.45 – 22.58, .

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §6 и , §7, гл

Задания для самостоятельно работы по теме 3

По книге Ноден П., Китте К. «Алгебраическая алгоритмика», гл.V, упражнения 29 – 36

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4

Контрольная работа

1. Вычислить таблицу характеров знакопеременной группы степени 5..
2. Найти формулы для свертки двух многочленов степени 5, используя дискретное преобразование Фурье в конечном поле (в зависимости от значений коэффициентов).
3. Верно ли, что любое точное двумерное представление конечной группы над \mathbb{C} неприводимо?
4. Пусть H – подгруппа группы G и β – ее регулярный характер. Доказать, что индуцированный характер β^G является ее регулярным характером.
5. Найти все неприводимые характеры группы, являющейся прямым произведением двух групп кватернионов порядка 8.

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины
«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»**

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

**Учебно-методическое обеспечение
самостоятельной работы аспирантов по дисциплине**

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,
рекомендованных к использованию при освоении дисциплины**

Электронные ресурсы ЯрГУ (<http://lib.uniyar.ac.ru>)

1. Библиографические записи всех видов документов, составляющих фонд библиотеки, на русском и иностранных языках и поступивших позже 1995 года:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php (в открытом доступе)

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php

4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека Online»:

www.biblioclub.ru

5. Проект MAPC: <http://mars.arbicon.ru>.

6. Электронно-библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>

7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru: <http://elibrary.ru>

8. Англоязычные библиотеки в сети университета:

а) MathSciNet: <http://www.ams.org/snhtml/annser.csv> - с платформы издателя

<http://search.ebscohost.com/> - с платформы Ebscohost

б) Web of Science: <http://webofscience.com>

в) Scopus: <http://www.scopus.com>

г) Science The American Association for the Advancement of Science:

<http://www.sciencemag.org>

д) Ресурсы Springer

SpringerJournals: <http://link.springer.com/>

SpringerProtocols: <http://www.springerprotocols.com/>

SpringerMaterials: <http://materials.springer.com/>

SpringerReference: <http://link.springer.com>

zbMATH: <http://zbmath.org/>