

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Утверждаю
Декан факультета ИВТ
_____ Д.Ю. Чалый
7 декабря 2016 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
в магистратуру по направлениям
01.04.02 – Прикладная математика и информатика
02.04.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии
09.04.03 – Прикладная информатика

Ярославль 2016

1. Общие положения

К вступительным экзаменам в магистратуру допускаются лица, имеющие документ государственного образца о высшем образовании любого уровня (диплом бакалавра или специалиста).

Прием осуществляется на конкурсной основе по результатам вступительных испытаний.

Программа содержит описание формы вступительных испытаний, перечень вопросов для вступительных испытаний и список литературы, рекомендуемой для подготовки.

2. Цель вступительных испытаний

Вступительные испытания призваны определить степень готовности поступающего к освоению основной образовательной программы магистратуры.

3. Форма проведения вступительных испытаний

Вступительные испытания проводятся в письменной форме в соответствии с установленным приемной комиссией ЯрГУ расписанием.

На ответы по вопросам и задачам отводится **120 минут**. Результаты испытаний оцениваются по **стобальной шкале**.

4. Перечень разделов и тем, включенных в письменное испытание

Раздел 1. Математический анализ

1. Числовая последовательность. Предел последовательности.
2. Предельный переход в неравенствах.
3. Предел последовательности и арифметические операции.
4. Теорема о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности. Число e . Критерий Коши сходимости.
5. Общее определение функции. Сложная функция. Предел функции. Непрерывность функции.
6. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
7. Дифференцируемость функции в точке. Производная. Геометрический смысл. Уравнение касательной.
8. Таблица простейших производных. Правила дифференцирования.
9. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталья.
10. Производные старших порядков. Формула Тейлора. Основные разложения.
11. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов.
12. Методы вычисления неопределенных интегралов. Примеры функций, первообразные от которых не выражаются через элементарные функции.

13. Понятие определённого интеграла. Свойства определённого интеграла.
14. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
15. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Понятие дифференциального уравнения. Задача Коши.
17. Дифференциальные уравнения 1 порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и метод их решения.
18. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения.
19. Системы дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову.
20. Понятие несобственного интеграла. Сходимость. Теорема сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций.
21. Понятие числового ряда, сходимость. Необходимое условие сходимости.
22. Положительные ряды. Признаки сходимости: интегральный, сравнения, Даламбера, Коши.
23. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
24. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости, радиус сходимости степенного ряда.
25. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда.
26. Тригонометрические ряды. Разложение функций в ряды Фурье.
27. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Предел в точке.
28. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке. Геометрический смысл. Частные производные. Вектор-градиент.
29. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных.
30. Кратные интегралы. Вычисление.
31. Криволинейные интегралы и поверхностные интегралы.
32. Элементы теории поля.

Литература

1. Бондаренко В.А., Шабаршина Г.В. Математический анализ. Предел и непрерывность текст лекций. – Ярославль. ЯрГУ, 2003. 74с.
2. Кудрявцев Л.Д. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. – Москва.: Дрофа, 2003. - 704 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. – Москва.: Дрофа, 2004. - 720 с.

Раздел 2. Алгебра и геометрия

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
2. Комплексные числа и операции с ними. Формула Муавра.
3. Операции с матрицами. Обратная матрица.
4. Определитель матрицы. Вычисление и свойства.
5. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в трехмерном пространстве. Вычисление углов, площади и объема.
6. Многочлены от одной переменной. Деление столбиком. Алгоритм Евклида. Корни многочлена. Формулы Виета.
7. Векторные пространства. Линейная зависимость / независимость. Базис и размерность. Геометрический смысл ранга матрицы.
8. Параметрические и канонические уравнения прямой на плоскости, прямой и плоскости в трехмерном пространстве.
9. Евклидово векторное пространство. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами.
10. Ортогонализация Грама-Шмидта. Матрица Грама и ее применение к вычислению объема и построению ортогональной проекции.
11. Линейное отображение и линейный оператор. Матрица линейного отображения.
12. Собственные значения и собственные вектора линейного оператора.
13. Жорданова нормальная форма матрицы.
14. Приведение уравнения кривой/поверхности второго порядка к каноническому виду.

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008.
2. Невский М.В. Лекции по алгебре: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
3. Киркинский А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие. – М.: Академический проект, 2006.

Раздел 3. Дискретная математика и математическая логика

1. Операции объединения и пересечения для множеств. Законы дистрибутивности для множеств. Отношение включения множеств.
2. Отношение порядка (строгого) на множестве (частичного и линейного). Отношение эквивалентности и его свойства. Свойства бинарных отношений эквивалентности и порядка на множестве.

3. Мощность множеств.
4. Элементы комбинаторики: сочетания, перестановки и размещения с повторениями и без. Комбинаторное правило умножения и условия его выполнения.
5. Обыкновенные графы. Степень вершины. Изоморфизм графов. Деревья и двудольные графы. Дополнительный граф и его определение. Маршруты в графе.
6. Булевы функции. Двойственность булевых функций. Полнота системы булевых функций.

Литература

1. Дехтярь М.И. Лекции по дискретной математике: учебное пособие. — М.: Бинном, 2007.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. — 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1988.
3. Рублев В.С. Множества (индивидуальная работа № 1 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2009.
4. Рублев В.С. Элементы комбинаторики (индивидуальные работы № 2, 3 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2009.
5. Рублев В.С. Булевы функции (индивидуальные работы № 4, 5 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2009.
6. Рублев В.С. Элементы теории графов. Изоморфизм, планарность, маршруты в графах (индивидуальные работы № 6, 7 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2010.
7. Рублев В.С. Элементы теории графов. Деревья, сети (индивидуальные работы № 8, 9 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2010.
8. Рублев В.С. Алгоритмы. Машины Тьюринга, проверка истинности булевых функций, эффективная реализация множеств на компьютере (индивидуальные работы № 8, 9 по дисциплине «Дискретная математика»), метод.указания. Ярославль: ЯрГУ, 2010.
9. Рублев В.С. Множества. Отношения на множествах и мощность множества, учебно-методическое пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2015.

Раздел 4. Базы данных

1. Организация баз данных. Модели данных. ER-модели.
2. Операции реляционной алгебры.
3. Нормализация реляционных отношений.
4. Создание реляционной таблицы: первичные и внешние ключи, ограничения UNIQUE, NOT NULL и CHECK.

5. Язык SQL. Использование функций агрегирования (AVG, SUM, COUNT, MAX, MIN и др.) и операции группировки (GROUP BY) в операторе SELECT.
6. Операторы манипулирования данными INSERT, DELETE и UPDATE.
7. Использование вложенных запросов.

Литература

1. Кригель А., Трухнов Б. М. SQL. Библия пользователя, 2-е изд., М.: Диалектика, 2010.
2. Зафиевский А. В., Короткин А. А., Лататуев А. Н. Базы данных: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2012.
3. Чалый Д. Ю., Смирнов А. В. Практическое использование баз данных в управлении: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2013.
4. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных, 8-е изд. М.: Вильямс, 2008.

Раздел 5. Информатика и программирование

1. Понятие алгоритма и алгоритмической системы. Языки программирования.
2. Основные структуры данных: стек, очередь, дерево.
3. Основные типы алгоритмов, их сложность и анализ быстродействия. Рекурсивные алгоритмы.
4. Основные алгоритмы поиска и сортировки.
5. Алгоритмы на графах.
6. Переборные алгоритмы. Алгоритмы «разделяй и властвуй». Динамическое программирование.
7. Организация вычислительных систем. Понятие архитектуры и основные виды архитектуры ЭВМ.
8. Основные этапы, методы, средства и стандарты разработки программного обеспечения. Системы программирования.
9. Операционные системы и управление ресурсами в операционной системе.

Литература

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы. Вильямс, 2015 г. — 720 с.
2. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 2. Получисленные алгоритмы. Вильямс, 2011. — 832 с.
3. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 3. Сортировка и поиск. Вильямс, 2012. — 824 с.
4. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 4А. Комбинаторные алгоритмы. Вильямс, 2015 г. — 960 с.

Раздел 6. Компьютерные сети

1. Модель OSI (Уровни, задачи каждого уровня, пример программ и протоколов работающих на каждом уровне).
2. Модель TCP/IP (Уровни, задачи каждого уровня, пример программ и протоколов работающих на каждом уровне).
3. Физическая сеть. Среды передачи данных. Достоинства и недостатки сред передачи данных.
4. Логическая и физическая топологии сетей. Трехуровневая иерархическая модель.
5. Активное сетевое оборудование (Hub, switch, router).
6. Коммутация и маршрутизация, механизмы определения лучшего пути.

Литература

1. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети: Принципы, технологии, протоколы: Учебник для ВУЗов. 2 изд. — СПб.: Питер. 2005. 863 с.
2. Смелянский Р.Л. Компьютерные сети: Учебник для ВУЗов: в 2-х томах. — М.: Академия. 2011. 250 с.

Раздел 7. Теория вероятностей и статистика

1. Определения вероятности. События, операции над ними.
2. Аксиоматический подход к определению вероятности, свойства вероятностей
3. Формула включений-исключений. Задача о почтальоне.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Независимость событий. Независимость отрицания событий
6. Случайные величины. Примеры дискретных случайных величин: индикатор события, геометрическое, биномиальное, гипергеометрическое и пуассоновское распределение.
7. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства. Аддитивность математического ожидания.
8. Математическое ожидание индикатора. Математическое ожидание величины с геометрическим, биномиальным, гипергеометрическим, пуассоновским законом распределения.
9. Независимость случайных величин. Теорема об эквивалентности определений независимости. Независимость функций от независимых случайных величин.
10. Дисперсия случайной величины. Среднеквадратичное отклонение. Свойства. Дисперсия индикатора. Дисперсия величины с геометрическим, пуассоновским законом распределения. Дисперсия суммы случайных величин. Дисперсия величины с биномиальным законом распределения.

11. Математическое ожидание произведения случайных величин. Ковариация случайных величин. Свойства ковариации.
12. Коэффициент корреляции случайных величин. Свойства коэффициента корреляции.
13. Моменты случайной величины, их свойства.
14. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Сходимость по вероятности.
15. Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
16. Условные распределения. Условное математическое ожидание. Формула полного математического ожидания.
17. Функция распределения случайной величины, ее свойства. Непрерывные случайные величины.
18. Плотность распределения случайной величины, ее свойства. Примеры непрерывных случайных величин (равномерное, показательное, нормальное распределения). Нормальное распределение. Его свойства, характеристики.
19. Нахождение частных плотностей по общей плотности.
20. Независимость непрерывных случайных величин. Распределения максимума и минимума из N независимых случайных величин.
21. Локальный смысл плотности.
22. Математическое ожидание непрерывных случайных величин. Примеры. Вычислительная функция математического ожидания для непрерывных распределений. Свойства математического ожидания.
23. Дисперсия случайной величины. Ее свойства. Примеры.
24. Дисперсия суммы. Ковариация и коэффициент корреляции. Свойства ковариационной матрицы.
25. Распределение суммы двух независимых случайных величин. Формула свертки.
26. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Эссеена.
27. Генерирование случайных величин.
28. Классическая модель математической статистики. Выборки, оценки, их характеристики. Оценки математического ожидания и дисперсии.
29. Выборочное (эмпирическое) распределение. Гистограмма.
30. Методы построения оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия. Сравнение оценок.
31. Интервальные оценки и доверительные интервалы. Построение интервальной оценки для неизвестной вероятности в схеме Бернулли.

32. Гипотезы, их проверка. Критерий Пирсона. χ^2 -распределение, распределение Стьюдента.
33. Выборочный коэффициент корреляции. Ранговая корреляция. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Литература

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. в 2-х т. Т.1. — М.: Мир, 1984.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. в 2-х т. Т.2. — М.: Мир, 1984.
3. Боровков А.А. Математическая статистика: Учебник. — М.: Наука, 1984. 472с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие - 5-е изд., стереот. — М.: Высшая школа, 2001.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие - 7-е изд., стереот. — М.: Высшая школа, 1999.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001.
7. Богомоллов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: сборник задач — Ярославль: ЯрГУ, 2009.

5. Примеры билетов письменных вступительных испытаний

Примерный билет 1.

Задача 1 (15 баллов). Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

Задача 2 (15 баллов). Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Задача 3 (15 баллов). Может ли бинарное отношение на множестве обладать свойствами рефлексивности и транзитивности, но не быть отношением эквивалентности? Обоснуйте свой ответ.

Задача 4 (10 баллов). База данных содержит информацию о сотрудниках и отделах, которая представлена двумя таблицами:

Таблица **Employees**

emp_no*	name	salary	dept_name
1	Романов	40 000 р.	Бухгалтерия
2	Васильев	35 000 р.	ИТ
3	Кириллов	47 500 р.	ИТ
4	Петров	39 000 р.	ИТ
5	Петров	29 000 р.	Бухгалтерия
6	Петров	19 000 р.	Бухгалтерия

Таблица **Departments**

dept_name*	manager_id
ИТ	3
Бухгалтерия	1

Здесь знаком «*» обозначены первичные ключи; начальник отдела является его работником, при этом допускается пустое значения данного поля.

Требуется определить, какое значение будет возвращено SQL-запросом:

```
SELECT COUNT(DISTINCT name)
FROM Employees
WHERE salary < 45000
AND emp_no NOT IN (
SELECT manager_id
FROM Departments)
```

Задача 5 (15 баллов). Выберите корректные среди следующих IP-адресов:

- a) www.google.com
- b) 8.150.6.250
- c) www.50.114.182.136.com
- d) 398.191.214.190
- e) 11.31.128.193

Задача 6 (20 баллов). Предположим, что вы разработали модуль, который реализует структуру данных стек. Интерфейс этого модуля состоит из двух методов:

- метод `push(v)` записывает значение `v` в стек;
- метод `pop()` выталкивает значение из стека и печатает его на экран.

Пусть на вход модулю подана произвольная последовательность из 10 вызовов `pop` и 10 вызовов `push`. Известно, что методы `push` из этой последовательности записывают по порядку числа от 0 до 9. Какие из следующих последовательностей чисел могут быть выведены на экран?

- a) 3 4 2 5 1 7 0 9 8 6
- b) 1 2 3 0 5 4 7 8 6 9
- c) 2 1 0 3 4 5 6 7 8 9
- d) 4 5 3 2 6 7 1 0 9 8
- e) 0 3 6 5 4 2 7 9 1 8

Задача 7 (10 баллов). Имеются данные опроса ста студентов университета о затратах времени на подготовку к занятиям в среднем за день:

Время на подготовку, час.	Число студентов
Менее 1	6
1 – 2	36
2 – 3	44
3 – 4	12
4 – 5	2
Итого	100

- По этим данным рассчитайте (с тремя знаками после запятой):
 - среднее значение времени подготовки студентов к занятиям,
 - дисперсию показателя,
 - среднее квадратическое отклонение.
- Является ли совокупность однородной? (выберите нужный ответ)
 - да,
 - нет,
 - невозможно определить по этим данным.

Примерный билет 2

Задача 1 (15 баллов). Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - n \right).$$

Задача 2 (15 баллов). Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

Задача 3 (15 баллов). Сколько неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 9$?

Задача 4 (10 баллов). База данных содержит информацию о сотрудниках и отделах, которая представлена двумя таблицами:

Employees {emp_no*, name, salary, dept_id};

Departments {dept_id*, dept_name, manager_id}.

Здесь знаком «*» обозначены первичные ключи; начальник отдела является его работником, при этом допускается пустое значения данного поля.

Требуется составить запрос к базе данных на языке SQL, который бы выводил номер и название отдела, а также среднюю зарплату и количество сотрудников для отделов, в которых не назначен начальник.

Задача 5 (15 баллов). Какое из приведенных утверждений о стеке протоколов TCP/IP является верным:

- a) Системой, автоматически устанавливающей связь между IP-адресами в сети Интернет и текстовыми именами, является доменная система имен (DNS).
- b) Сетевой уровень гарантирует надежную, упорядоченную передачу пакетов.

Задача 6 (20 баллов). Рассмотрим вот такой алгоритм:

Алгоритм 1 *Mystery*(A, l, r)

Вход: Отсортированный массив попарно различных чисел $A[0 \dots n - 1]$ и два параметра $l \leq r$

Выход: ?

```
1: if  $l > r$  then
2:   return -1
3: end if
4:  $m \leftarrow \lfloor (l + r) / 2 \rfloor$ 
5: if  $A[m] == m$  then
6:   return  $m$ 
7: else
8:   if  $A[m] < m$  then
9:     return Mystery( $A, m + 1, r$ )
10:  else
11:    return Mystery( $A, l, m - 1$ )
12:  end if
13: end if
```

1. Что вернет в качестве результата $Mystery([-3, 0, 4, 6, 10, 13, 17], 0, 5)$?
2. Какова вычислительная сложность алгоритма $Mystery$ в самом лучшем и худшем случаях?
 - a) Лучший случай: $O(1)$. Худший случай: $O(\log n)$.
 - b) Лучший случай: $O(n)$. Худший случай: $O(n^2)$.
 - c) Лучший случай: $O(n)$. Худший случай: $O(n \log n)$.
 - d) Лучший случай: $O(1)$. Худший случай: $O(n \log n)$.
 - e) Лучший случай: $O(1)$. Худший случай: $O(n)$.

Задача 7 (10 баллов). Известны данные по 10 хозяйствам района о внесении ими удобрений (тонн на гектар) и урожайности (центнеров с гектара) зерновых культур за прошлый год:

№хозяйства п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Удобрения, т/га	0,32	0,59	0,30	0,49	0,39	0,32	0,62	0,21	0,20	1,37
Урожайность, ц/га	9,7	8,4	9,0	9,9	9,6	8,6	12,5	7,6	6,9	13,5

1. Рассчитайте линейный коэффициент корреляции (с тремя знаками после запятой).
2. Связь между показателями (выберите нужный ответ):
 - прямая
 - обратная
 - отсутствует
3. Предполагая, что связь между показателями определяется уравнением вида $Y = a + bX$, вычислите коэффициент b (с тремя знаками после запятой).
4. Как интерпретируется полученное значение коэффициента b ? (выберите)
 - При увеличении внесения удобрений на 1 т/га урожайность зерновых культур изменяется в среднем на b ц/га.
 - При увеличении урожайности на 1 ц/га внесение удобрений изменяется в среднем на b т/га.
 - При увеличении внесения удобрений на 1% урожайность зерновых культур изменяется в среднем на $b\%$.
 - При увеличении урожайности на 1% внесение удобрений изменяется в среднем на $b\%$.