

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Прикладные задачи оптимизации**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Прикладные задачи оптимизации» – дать представление студентам предмете и методах линейного программирования, познакомить с основными типами задач линейного программирования и методами их решения, а также научить слушателей:

- формировать линейную модель экономической или производственной ситуации;
- решать задачи линейного программирования геометрически и симплекс-методом;
- для данной задачи линейного программирования строить двойственную задачу и использовать связь между задачами для отыскания оптимального решения.

Кроме того, даются начальные сведения о геометрии выпуклых многогранников в многомерных пространствах.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП магистратуры

Дисциплина «Прикладные задачи оптимизации» является дисциплиной по выбору и относится к вариативной части Блока 1. Дисциплина «Прикладные задачи оптимизации» относится к числу общепрофессиональных прикладных математических дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении таких математических дисциплин, как «Методы оптимизации», «Аналитическая геометрия», «Алгебра», «Линейная алгебра».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП магистратуры

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Код компетенции	Формулировка компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общекультурные компетенции</b>		
ПК-1	Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий, программирования и компьютерной техники	<b>Знать:</b> основные методы решения задач линейного программирования, условия их применения и ограничения;  <b>Уметь:</b> использовать изученные методы при решении экономических, сельскохозяйственных, производственных, военных и других задач.  <b>Владеть навыками:</b> решения задач линейного программирования симплекс-методом, геометрическим методом решения задач линейного программирования в двумерном случае, использования жордановых исключений в линейной алгебре.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационны е самостоятель ная работа		
1	Основные понятия линейного программирования	1	2	2				12	Задания для самостоятельной работы
2	Симплекс-метод	1	4	4		1		12	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа 1, Контрольная работа 2
3	Теория двойственности	1	3	3		1		12	Контрольная работа 3
4	Задачи оптимального планирования	1	3	3		1		12	Контрольная работа 4
5	Общая постановка транспортной задачи. Метод потенциалов.	1	4	4		1		13	
							0,3	10,7	Зачет
	Всего 108 часов		16	16		4	0,3	71,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### РАЗДЕЛ 1. Основные понятия линейного программирования

- 1.1. Предмет линейного программирования (ЛП). Примеры некоторых задач ЛП (транспортная, производственная, задача о раскрое).
- 1.2. Постановка общей задачи ЛП (ОЗЛП). Понятие допустимого решения, области допустимых решений, оптимального решения задачи ЛП (ЗЛП).
- 1.3. Различные формы ЗЛП (стандартная, каноническая). Переход от одной формы ЗЛП к другой.
- 1.4. Графический метод решения ЗЛП.

##### РАЗДЕЛ 2. Симплекс-метод

- 2.1. Жордановы исключения (метод исключений Жордана-Гаусса).
- 2.2. Построение опорного плана. Последовательное улучшение опорного плана.

Применение жордановых исключений для приведения ОЗЛП к специальной форме.

2.3. Метод решения ОЗЛП (симплекс-метод).

2.4. Вырожденные ЗЛП. Пример заикливания в симплекс-методе. Эпсилон-метод преодоления заикливания симплекс-алгоритма (метод возмущений решения вырожденной ЗЛП).

### **РАЗДЕЛ 3. Теория двойственности**

3.1. Теория двойственности в ЛП. Правила построения двойственных задач.

3.2. Основные теоремы двойственности. Условия дополняющей нежесткости.

3.3. Двойственный симплекс-метод.

### **РАЗДЕЛ 4. Задачи оптимального планирования**

4.1. Задачи оптимального производственного планирования.

4.2. Сельскохозяйственные задачи.

4.3. Задача о назначениях.

4.4. Военные задачи.

### **РАЗДЕЛ 5. Общая постановка транспортной задачи. Метод потенциалов.**

5.1. Общая постановка транспортной задачи.

5.2. Метод потенциалов.

## **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного**

## **программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации программы Microsoft Office;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система «БУКИ-NEXT» (АБИС «Буки-Next»).

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Майорова Н.Л., Методы оптимизации: учеб.пособие для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Глазков Д.В; Ярсл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2015. – 111 с.
2. Бестужева, Л.П. Линейная алгебра: практикум/ Л.П.Бестужева, Н.Л.Майорова; Ярсл. гос. ун-т им. П.Г.Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2011.- 56 с.

### **Б) дополнительная литература**

1. Майорова Н.Л., Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»: метод.указания для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Ярсл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2009. – 48 с.
2. Карманов, В.Г. Математическое программирование: учебное пособие. – 5-е изд. / В.Г. Карманов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
3. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / П.В. Конюховский. – СПб: Питер, 2000. – 208 с.
4. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т. 1 / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991. – 360 с.
5. Ашманов, С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
6. Банди, Б. Основы линейного программирования / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
7. Зуховицкий, С.М. Линейное и выпуклое программирование / С.М. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Изд-во физ.-мат. Лит-ры,, 1967. – 460 с.
8. Юдин, Д.Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Изд-во физ.-мат. Лит-ры, 1963. – 776 с.

### **В) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (<http://www.edu.ru> (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке <http://window.edu.ru/library>).
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru) ).

## **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Аудитории, оборудованные для проведения лекций, практических занятий и консультаций, фонд библиотеки.

Автор(ы) :

Доцент кафедры мат.моделирования, к.п.н.

Н.Л. Майорова

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
« Прикладные задачи оптимизации»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**6. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельной работы.**

1. Решить задачу линейного программирования геометрически:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_i &\geq 0, i = 1 - 4\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\x_1 - x_4 - 2x_6 &= 5 \\x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 &= 3 \\x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 &= 5 \\x_i &\geq 0, i = 1 - 6\end{aligned}$$

6. Решить ЗЛП симплекс-методом, находя начальную точку методом искусственного базиса.

3.1.

$$\begin{aligned}f &= -x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ \{x_1 - x_2 + x_3 &= 3|\end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned}f &= -x_1 + 10x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ \{-x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 13|\end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned}f &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min \\ \{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2|\end{aligned}$$

3.4

$$f = -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \rightarrow \min$$

$$\{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

3.5

$$f = -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3\}$$

6. Решить задачу линейного программирования

$$\max(3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

5. Решить задачу линейного программирования

$$\max(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3,$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

6. Решить задачу линейного программирования при ограничениях

$$\max(3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

### **Контрольная работа №1 по теме «Решение задач линейного программирования симплекс-методом»**

#### **Вариант 1.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5.$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$



### Вариант 2.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &\rightarrow \max \\2x_1 + 7x_2 + 22x_3 &\leq 2 \\2x_1 - x_2 + 6x_3 &\leq 6 \\2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\-4x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \max \\4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 5 \\5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 5 \\3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4 \\x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

### Вариант 3.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 - 10x_2 + 100x_3 &\rightarrow \max \\x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\x_1 - x_2 - x_3 &\leq 2 \\x_1 + 2x_3 &\leq 0 \\x_1 + 2x_3 &\geq 5, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\rightarrow \max \\x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8 \\x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= -6 \\x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 &= -2 \\x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\end{aligned}$$

### Вариант 4.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_6 &\rightarrow \max \\x_1 + x_2 + x_6 &= 1 \\x_2 + x_5 + x_6 &= 1 \\x_3 + x_4 + x_6 &= 1 \\x_4 - x_5 - x_6 &= 2 \\x_i &\geq 0, i = 1 - 6\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &\rightarrow \max \\3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 10 \\6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 20 \\10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 &= 30 \\x_i &\geq 0, i = 1 - 5\end{aligned}$$

### Вариант 5.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_3 + x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &\rightarrow \max \\
x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 2 \\
x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 2 \\
x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 &= 2 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 5
\end{aligned}$$

#### **Вариант 6.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\rightarrow \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\
x_1 - x_4 - 2x_6 &= 5 \\
x_2 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 &= 3 \\
x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 &= 5 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 6
\end{aligned}$$

#### **Вариант 7.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &\rightarrow \max \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &= 0 \\
2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 - x_7 &= 0 \\
-x_3 + 2x_5 + 4x_7 &= 2 \\
2x_1 + x_2 - x_4 + 4x_7 &= 4 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 7
\end{aligned}$$

#### **Вариант 8.**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 - x_4 &= 2 \\
x_i &\geq 0, i = 1 - 4
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
& -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12 \\
& x_1 + x_4 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \leq 20 \\
& x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 10 \\
& -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 24
\end{aligned}$$

### Вариант 9.

1. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 - x_6 = 2 \\
& x_i \geq 0, i = 1 - 6
\end{aligned}$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
& x_4 - x_5 \rightarrow \max \\
& 2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& x_i \geq 0, i = 1 - 5
\end{aligned}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за обе решенные задачи – 4, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

### Контрольная работа №2 по теме «Симплекс-метод»

## Вариант 1

1. Решить следующую ЗЛП, используя симплекс-алгоритм:

$$L(X) = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -6, \\ 3x_1 + x_3 \leq 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

2. Что можно сказать о ЗЛП, представленной в виде симплекс-таблицы

	1	$-\dot{x}_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$z$	11	0	0	1	2
$\dot{x}_5$	-1	0	2	3	4
$\dot{x}_6$	4	0	12	8	-9
$x_7$	0	0	2	-3	5
$x_8$	1	0	1	1	1

3. Решить ЗЛП графическим методом

$$L(X) = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за три решенные задачи – 6, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

#### **Контрольная работа № 4 по теме «Приложения линейного программирования»**

1. Из труб длиной 25 м требуется нарезать трубы длиной 8, 12 и 16 м в количестве 100, 50 и 30 соответственно. Определить план раскроя с минимальными отходами, изрезав не более 80 труб.
2. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. у.е. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 м<sup>2</sup>. Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 5 тыс. у.е., занимающие производственную площадь 6 м<sup>2</sup> (с учетом проходов) и дающие 8 тыс. единиц продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. у.е., занимающие площадь 12 м<sup>2</sup> и дающие за смену 3 тыс. единиц продукции. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности нового участка.
3. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам, причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 единицу времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы. Затраты соответствующих факторов в у.е. при работе по разным технологическим процессам в течение 1 единицы времени показаны в таблице:

Произв. факторы \ Тех. процесс	1	2	3	4	5	Объем ресурсов
Сырье	12	15	10	12	11	1300
Электроэнергия	0,2	0,1	0,2	0,25	0,8	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладные расходы	6	5	4	6	4	800

Найти программу максимального выпуска продукции.

4. Произвести распил 5-метровых бревен на брусья размерами 1,5; 2,4; и 3,2 м в отношении 5:4:2 так, чтобы минимизировать общую величину отходов.
5. Имеется три вида ресурсов: I, II и III, которые используются для производства трех видов продукции: А, Б и В. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в таблице:

Ресурс	Норма расхода на единицу продукции		
	А	В	С
I	1	2	0
II	2	1	0
III	0	1	1

В распоряжении предприятия находятся 500 единиц ресурса I, 550 единиц ресурса II и 200 единиц ресурса III. Прибыль от реализации единицы продукции А составляет 3 у.е., продукции Б - 4 у.е., продукции В - 1 у.е. Определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли.

6. Полосы материала длиной 3 м кроются на детали длиной 1,6; 1; 0,8 м, которые входят в комплект в количестве 2, 1 и 4 штуки соответственно. Определить план раскроя с минимальными расходами, если в наличии имеются 60 полос материала и требуется соблюсти комплектность.

7. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В таблице указаны мощности станков (тыс. станко-ч), ресурсы пряжи и красителей (тыс. кг), производительность станков по каждому виду ткани (м/ч), нормы расхода пряжи и краски (кг на 1000 м) и цена (у. е.) 1 м ткани:

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и норма расхода		
		1	2	3
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 м ткани составляет соответственно 3, 5 и 15 у.е.

8. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м<sup>3</sup> досок I типа и 1000 м<sup>3</sup> II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 300 чел.-ч. В таблице приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 единицы изделия и прибыль на 1 единицу изделия:

Ресурсы	Затраты на 1 единицу изделия			
	Стол	Стулья	Бюро	Кн. шкафы
Доски I типа, м <sup>3</sup>	5	1	9	12
Доски II типа, м <sup>3</sup>	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2	5	10
Прибыль, у.е./шт.	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если отношение количества столов к количеству стульев равно 1 : 6.

9. Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок типов А и В для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется 2 заготовки типа А и 10 заготовок типа В. Возможны 4 варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок А и В, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, и отходы от раскроя указаны в таблице.

Вариант раскроя	Заготовка А, шт.	Заготовка В, шт.	Отходы от раскроя, ед.
I	4	0	12
II	3	3	5
III	1	9	3
IV	0	12	0

Какое количество листов проката нужно раскроить каждым вариантом, чтобы отходы от раскроя были наименьшими?

10. Фабрика по производству мороженого может выпускать два сорта мороженого: молочное и сливочное. При производстве мороженого используют три вида сырья: молоко, дешевые наполнители и дорогие наполнители, запасы которых составляют 5 т, 3 т и 5.7 т соответственно. Известны удельные затраты сырья для каждого из сортов и цены продукции. Для молочного мороженого они составляют 0.5 кг, 0.1 кг и 0.4 на 1 кг мороженого, а для сливочного - 0.2 кг, 0.3 и 0.5 кг на 1 кг мороженого. Цена

молочного мороженого составляет 200 рублей за 1 кг, а сливочного - 300 рублей за 1 кг. Требуется построить план производства, который обеспечивает максимум дохода, и найти оптимальный доход.

11. Фирма по производству творожной пасты может выпускать два сорта пасты, используя три вида сырья - молоко, наполнители и специальные добавки. Затраты молока на килограмм пасты первого вида составляют 0.1 кг, а второго вида - 0.5 кг. Затраты наполнителей на килограмм пасты первого вида составляют 0.2 кг, а второго вида - 0.1 кг. Наконец, затраты добавок на килограмм пасты первого вида составляют 0.1 кг, а при производстве второго вида пасты не используются. Запасы молока составляют 350 кг, наполнителей - 160 кг, добавок - 60 кг. Цена 1 кг первого вида пасты составляет 200 рублей, а второго вида - 300 рублей. Найти план производства, максимизирующий доход от продажи творожной пасты, и соответствующее значение дохода.

**Система оценки:** каждому обучающемуся предлагается одна задача на время в тридцать минут. Требуется составить математическую модель и решить задачу симплекс-методом. За полностью правильное решение задачи выставляется оценка отлично. При наличии мелких недочетов ставится оценка хорошо. При наличии более грубых ошибок и неправильный ответ из-за арифметических ошибок выставляется оценка удовлетворительно. Не отвечающее всем требованиям решение оценивается как неудовлетворительное.

Контрольная работа N3 по теме “Двойственность в линейном программировании”

Вариант 1

*Построить двойственные задачи.*

$$\begin{aligned} L(X) &= x_1 + 2x_2 - 5x_4 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 \leq 11, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(X) &= 2 + x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 9, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \geq -3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Вариант 2



Для каждой из следующих задач линейного программирования составить двойственную задачу и решить обе эти задачи.

$$L(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \leq 3, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

### Вариант 3

Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач.

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

$$L(X) = 100 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 100, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 \leq 60, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

**Система оценки:** каждая задача оценивается в два балла. Максимальный балл за обе решенные задачи – 4, за решение одной задачи – 2 балла. Соответственно, ошибочное решение (или не предоставление решения) любой из задач оценивается в 0 баллов.

## **1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения зачета по курсу «Прикладные задачи оптимизации»**

1. Предмет математического программирования. Предмет ЛП.
2. Постановка задачи оптимального производственного планирования. Математическая модель.
3. Задача о раскрое. Постановка и математическая модель.
4. Транспортная задача. Постановка и математическая модель.
5. Сформулируйте общую задачу ЛП. Может ли система ограничений ОЗЛП содержать строгие неравенства?
6. Запишите предложенную задачу ЛП в стандартной и канонической формах.
7. Что называется допустимым (оптимальным) решением ЗЛП? Что понимается под областью допустимых решений (ОДР) задачи ЛП?
8. Какие случаи возможны при решении ЗЛП?
9. В чем заключается геометрическая интерпретация решения задачи ЛП с двумя (тремя) переменными?
10. Сколько переменных может содержать ЗЛП, которую можно решить графически?
11. Как изменяются элементы разрешающей строки (разрешающего столбца) при жордановых исключениях? Как изменяется разрешающий элемент?
12. Какой план называется базисным? Чем отличается базисный план от опорного плана?
13. Какой план ЗЛП называется вырожденным? Какая задача ЛП называется вырожденной?
14. Может ли оптимальный план ЗЛП быть вырожденным?
15. Сформулируйте условие опорности текущего базисного плана в табличной реализации симплекс-метода.
16. На каком этапе симплекс-алгоритма можно сделать вывод о несовместности ЗЛП? Сформулируйте условие несовместности ЗЛП по текущей симплекс-таблице.
17. Сформулируйте условие оптимальности текущего базисного плана в табличной реализации симплекс-метода.
18. На каком этапе симплекс-алгоритма можно сделать вывод о неограниченности ЗЛП? Сформулируйте условие неограниченности ЗЛП по текущей симплекс-таблице.
19. Если ЗЛП не ограничена, то можно ли то же самое утверждать и об ОДР?
20. Как выбирается разрешающий элемент на этапе построения (последовательного улучшения) опорного плана?
21. Сформулируйте основные этапы симплекс-метода.
22. Какие проблемы возникают при решении вырожденных задач с помощью симплекс-метода?
23. В чем основная идея метода возмущений?
24. Дайте определение двойственной задачи.
25. Что можно сказать о решении двойственной задачи, если основная задача несовместна?
26. Сформулируйте первую (вторую) теорему двойственности?
27. В каких ситуациях могут быть реализованы преимущества двойственного симплекс-метода?
28. Дайте классификацию точек выпуклых множеств.
29. Сформулируйте теорему о представлении точки выпуклого многогранного множества.



### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины « Прикладные задачи оптимизации »**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Прикладные задачи оптимизации» являются лекции. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с теорией задач линейного программирования.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных и самостоятельных работ.

Итоговая аттестация по курсу предусматривает проведение зачета. Зачетные курсы, как правило, вызывают у студентов меньше тревог и волнений, нежели экзаменационные. Как следствие, посещаемость зачетных курсов «среднестатистическими» студентами довольно быстро снижается. Естественно, это приводит к нежелательным результатам как для студентов, так и для преподавателя, поскольку процесс сдачи зачета существенно затягивается. Основной способ борьбы с таким положением дел - учитывать текущую работу студентов в ходе практических занятий. На основании успешного написания итоговой контрольной работы, которая включает в себя основные задачи курса, а также по результатам активной работы в ходе семестра студентам может быть поставлен «зачет» досрочно. При этом студенты заранее ставят в известность, что атмосфера «официального» зачета будет существенно приближена к экзаменационной. В «зачетный» билет наряду с практическими задачами, входят также и теоретические вопросы. Такой подход, как нам кажется, до некоторой степени позволяет исправить ситуацию с низкой посещаемостью курса студентами, а также их слабой заинтересованностью в практической работе в ходе семестра. Необходимым условием получения «зачета» является умение пользоваться симплекс-методом для решения общей задачи линейного программирования. Кроме того, в качестве теоретического вопроса на зачете может быть предложен вопрос, связанный с обоснованием сходимости данного алгоритма и границами его применимости. Количество вопросов и задач, предлагаемых студенту на зачете, зависит от степени его участия в работе группы в ходе практических занятий. Но в любом случае для получения «зачета» студенту в ходе курса необходимо решить, как минимум, четыре типовые задачи, среди которых, разумеется, имеется задача, предполагающая использование при ее решении симплекс-метода.

## **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу с подробно разобранными решениями оптимизационных задач:

1. Майорова Н.Л., Методы оптимизации: учеб.пособие для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Глазков Д.В; Яросл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2015. - 111 с.
2. Майорова Н.Л., Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»: метод.указания для студентов, обучающихся по направлению Прикладная Математика и информатика/ Майорова Н.Л., Яросл.гос.ун-т им.П.Г. Демидова, Науч.-метод совет ун-та – Ярославль: ЯрГУ, 2009. - 48 с.
3. Бестужева, Л.П. Линейная алгебра: практикум/ Л.П.Бестужева, Н.Л.Майорова; Яросл. гос. ун-т им. П.Г.Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2011.- 56 с.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

**1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»** ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

**3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"** (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. Главной разработчик проекта - Федеральное государственное автономное учреждение Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций (ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика") [www.informika.ru](http://www.informika.ru).

ИС "Единое окно" объединяет в единое информационное пространство электронные ресурсы свободного доступа для всех уровней образования в России. Разделы этой системы:

- **Электронная библиотека** – является крупнейшим в российском сегменте Интернета хранилищем полнотекстовых версий учебных, учебно-методических и научных материалов с открытым доступом. Библиотека содержит более 30 000 материалов, источниками которых являются более трехсот российских вузов и других образовательных и научных учреждений. Основу наполнения библиотеки составляют электронные версии учебно-методических материалов, подготовленные в вузах, прошедшие рецензирование и рекомендованные к использованию советами факультетов,

учебно-методическими комиссиями и другими вузовскими структурами, осуществляющими контроль учебно-методической деятельности.

- **Интегральный каталог образовательных интернет-ресурсов** содержит представленные в стандартизированной форме метаданные внешних ресурсов, а также содержит описания полнотекстовых публикаций электронной библиотеки. Общий объем каталога превышает 56 000 метаописаний (из них около 25 000 - внешние ресурсы). Расширенный поиск в "Каталоге" осуществляется по названию, автору, аннотации, ключевым словам с возможной фильтрацией по тематике, предмету, типу материала, уровню образования и аудитории.

- **Избранное.** В разделе представлены подборки наиболее содержательных и полезных, по мнению редакции, интернет-ресурсов для общего и профессионального образования.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

**1. Личный кабинет** ([http://lib.uniylar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniylar.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

**2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ** ([http://www.lib.uniylar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniylar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

**3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»** ([http://www.lib.uniylar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniylar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.