

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 24 » \_\_\_\_\_ мая \_\_\_\_\_ 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

«Алгебра и геометрия»

**Направление подготовки**

01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Профиль**

«Программирование и технологии искусственного интеллекта»

**Квалификация выпускника**

Бакалавр

**Форма обучения**

очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 17 марта 2022 г.,  
протокол № 7

Программа одобрена НМК  
факультета ИВТ  
протокол № 6 от  
18 апреля 2022 г.

Ярославль

### 1. Цели освоения дисциплины

Цель дисциплины «Алгебра и геометрия» состоит в изучении основ линейной алгебры и аналитической геометрии, объединяющих теорию линейных систем, матриц и определителей, линейных пространств и линейных операторов, многочленов, кривых и поверхностей второго порядка.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к базовой части ОП бакалавриата.

Для усвоения данной дисциплины необходимо, чтобы обучающийся владел знаниями и умениями, предусмотренными в базовых курсах средней школы «Геометрия» и «Алгебра и начала анализа».

Полученные в курсе «Алгебра и геометрия» знания необходимы для изучения последующих дисциплин базового цикла «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Методы оптимизации».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК – 1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по дисциплине ОПК – 1.2 Демонстрирует навыки решения типовых задач, выполнения стандартных действий ОПК – 1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, концепций, фактов, принципов математики и естественных наук для решения практических задач	<b>Знать:</b> – постановки задач линейной алгебры и аналитической геометрии; – основные понятия и формулировки теорем линейной алгебры и аналитической геометрии.  <b>Уметь:</b> – решать задачи по линейной алгебре и аналитической геометрии; – доказывать основные и вспомогательные утверждения и теоремы из курса алгебры и геометрии.  <b>Владеть:</b> – математическим аппаратом алгебры и геометрии; – навыками использования аппарата алгебры и геометрии при решении конкретных задач.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зач. ед., 360 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости
			Контактная работа						Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Системы линейных алгебраических уравнений	1	3	6				3	
2.	Комплексные числа	1	4	8				3	
3.	Операции с матрицами	1	4	8		3		4	Контрольная работа №1
4.	Группы, кольца и поля	1	3	6				4	
5.	Определитель	1	8	16				4	
6.	Ранг матрицы	1	3	6		3		4	Контрольная работа №2
7.	Кривые второго порядка	1	3	6				4	
8.	Многочлены	1	6	12		5		5	Контрольная работа №3
	<b>Всего за 1 семестр</b>		<b>34</b>	<b>68</b>		<b>11</b>		<b>31</b>	<b>Экзамен</b>
9.	Векторные пространства	2	8	16				5	
10.	Плоскость и прямая в пространстве	2	2	4				5	
11.	Аффинные пространства	2	2	4		3		5	Контрольная работа №4
12.	Евклидовы векторные пространства	2	6	12				5	
13.	Линейные операторы	2	8	16		3		5	Контрольная работа №5
14.	Поверхности второго порядка	2	4	8				5	
15.	Билинейные и квадратичные формы	2	4	8		4		2	Контрольная работа №6
	<b>Всего за 2 семестр</b>		<b>34</b>	<b>64</b>		<b>10</b>		<b>32</b>	<b>Экзамен</b>
	<b>Всего</b>		<b>68</b>	<b>132</b>		<b>21</b>		<b>63</b>	



## Содержание разделов дисциплины:

### 1. Системы линейных алгебраических уравнений

- 1.1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
- 1.2. Совместные/несовместные, определенные/неопределенные СЛАУ
- 1.3. Расширенная матрица системы
- 1.4. Элементарные преобразования над строками матрицы. Эквивалентность систем, полученных с помощью элементарных преобразований
- 1.5. Метод Гаусса
- 1.6. Условия совместности и определенности СЛАУ
- 1.7. Правило нахождения общего решения
- 1.8. Трудоемкость метода Гаусса
- 1.9. Плохо обусловленные системы
- 1.10. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

### 2. Комплексные числа

- 2.1. Множество комплексных чисел и операции на нем
- 2.2. Действительная и мнимая части комплексного числа. Комплексно-сопряженное число. Модуль и аргумент комплексного числа
- 2.3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Ее применение для умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней из комплексных чисел. Формула Муавра. Формула Эйлера
- 2.4. Представление множеств комплексных чисел на плоскости

### 3. Операции с матрицами

- 3.1. Понятие матрицы
- 3.2. Нулевая, единичная, верхнетреугольная, нижнетреугольная, симметрическая, кососимметрическая матрицы
- 3.3. Матричные единицы и матрица перестановки
- 3.4. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, транспонирование, умножение матриц
- 3.5. Свойства операций с матрицами
- 3.6. Трудоемкость матричного умножения. Блочные матрицы. Алгоритм Штрассена
- 3.7. Матричная запись СЛАУ
- 3.8. Матричные уравнения
- 3.9. Понятие обратной матрицы
- 3.10. LU-разложение, LUP-разложение

### 4. Группы, кольца и поля

- 4.1. Понятие бинарной операции
- 4.2. Ассоциативная и коммутативная операции
- 4.3. Нейтральный и симметричный элементы. Их единственность
- 4.4. Понятие группы. Коммутативная группа
- 4.5. Понятие кольца, поля; подкольца, подполя
- 4.6. Характеристика поля. Делители нуля, обратимые и нильпотентные элементы
- 4.7. Ноль как поглощающим элементе в кольце с единицей
- 4.8. Лемма об отсутствии делителей нуля в поле
- 4.9. Конечные поля. Кольца и поля вычетов. Модульная арифметика

#### 4.10. Основная теорема арифметики

### 5. Определитель

- 5.1. Понятия определителя, дополнительного минора, алгебраического дополнения
- 5.2. Определитель второго и третьего порядков. Правило треугольников. Правило Саррюса
- 5.3. Формула Лапласа. Рекурсивное разложение определителя по строке/столбцу
- 5.4. Определитель транспонированной матрицы
- 5.5. Определитель и элементарные преобразования над строками матрицы
- 5.6. Определитель верхнетреугольной матрицы.
- 5.7. Вычисление определителя методом Гаусса
- 5.8. Определитель блочно-диагональной матрицы. Определитель матрицы с углом из нулей
- 5.9. Комбинаторная формула Лейбница вычисления определителя
- 5.10. Определитель суммы и произведения матриц
- 5.11. Вычисление определителя с помощью рекуррентных соотношений
- 5.12. Правило Крамера
- 5.13. Невырожденная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью определителя
- 5.14. Определитель Вандермонда
- 5.15. Геометрический смысл определителей второго и третьего порядка
- 5.16. Векторное произведение. Свойства и применение векторного произведения. Ориентация пространства
- 5.17. Смешанное произведение. Свойства и приложения смешанного произведения. Ориентированные площадь и объем

### 6. Ранг матрицы

- 6.1. Понятие минора  $k$ -того порядка
- 6.2. Ранг матрицы, базисный минор
- 6.3. Ранг матрицы и элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы
- 6.4. Ранг матрицы и транспонирование
- 6.5. Ранг ступенчатой матрицы
- 6.6. Теорема о вычислении ранга матрицы методом Гаусса
- 6.7. Окаймляющие миноры. Теорема о вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров
- 6.8. Теорема Кронекера-Капелли
- 6.9. Теорема о решении совместной СЛАУ с помощью определителя

### 7. Кривые второго порядка

- 7.1. Эллипс. Каноническое уравнение и определение эллипса. Полуоси, фокусы, эксцентриситет, директрисы эллипса.
- 7.2. Гипербола. Каноническое уравнение и определение гиперболы. Полуоси, асимптоты, фокусы, эксцентриситет, директрисы гиперболы
- 7.3. Парабола. Каноническое уравнение и определение параболы. Фокус и директриса параболы
- 7.4. Уравнения кривых второго порядка в полярных координатах

### 8. Многочлены

- 8.1. Множество многочленов от одной переменной над полем
- 8.2. Степень многочлена
- 8.3. Сложение и умножение многочленов

- 8.4. Теорема о множестве многочленов как области (области целостности)
- 8.5. Теорема о делении многочленов с остатком
- 8.6. Наибольший общий делитель. Теорема о существовании наибольшего общего делителя для многочленов. Алгоритм Евклида. Коэффициенты Безу
- 8.7. Понятие корня многочлена
- 8.8. Теорема Безу
- 8.9. Схема Горнера
- 8.10. Производная многочлена. Ряд Тейлора. Теорема о производной многочлена и кратных корнях
- 8.11. Алгебраически замкнутые поля. Основная теорема алгебры
- 8.12. Приводимые и неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые сомножители над полями действительных и комплексных чисел
- 8.13. Задача интерполяции. Существование и единственность решения. Многочлен Лагранжа
- 8.14. Формулы Виета
- 8.15. Теорема о корнях многочлена с рациональными коэффициентами
- 8.16. Теорема Штурма. Ряд Штурма. Локализация и приближенное вычисление корней многочлена

## **9. Векторные пространства**

- 9.1. Понятие векторного пространства над полем. Замкнутость относительно операций. Аксиомы векторного пространства
- 9.2. Система векторов. Линейная комбинация системы векторов
- 9.3. Линейно зависимая система векторов
- 9.4. Линейно независимая система векторов
- 9.5. Линейная оболочка системы векторов
- 9.6. Теорема об основном свойстве линейно зависимой системы
- 9.7. Теорема об основном свойстве линейно независимой системы
- 9.8. Понятие размерности векторного пространства. Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства
- 9.9. Базис векторного пространства. Координаты вектора
- 9.10. Теорема о связи понятий размерности и базиса
- 9.11. Понятие матрицы перехода. Теорема об основном свойстве матрицы перехода
- 9.12. Теорема о геометрическом смысле ранга матрицы
- 9.13. Определение векторного подпространства
- 9.14. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений
- 9.15. Дополнение линейно независимой системы до базиса. Теорема Штейница о замене
- 9.16. Теорема о базисном миноре
- 9.17. Сумма Минковского
- 9.18. Сумма и пересечение подпространств
- 9.19. Определение прямой суммы
- 9.20. Параллельное проектирование на подпространство
- 9.21. Теоремы о прямой сумме и нулевом пересечении подпространств для двух и более подпространств
- 9.22. Теорема о базисе прямой суммы подпространств
- 9.23. Формула Грассмана

## **10. Плоскость и прямая в пространстве**

- 10.1. Параметрическое и каноническое уравнение прямой на плоскости
- 10.2. Параметрическое и каноническое уравнение прямой в трехмерном пространстве
- 10.3. Параметрическое и каноническое уравнение плоскости в трехмерном пространстве
- 10.4. Взаимное расположение прямых, плоскостей и точек в трехмерном пространстве
- 10.5. Общее уравнение прямой в трехмерном пространстве
- 10.6. Проектирование точки и прямой на плоскость, точки на прямую
- 10.7. Угол между двумя плоскостями, угол между прямой и плоскостью
- 10.8. Расстояния между прямыми, плоскостями и точками в трехмерном пространстве

## **11. Аффинные пространства**

- 11.1. Определение аффинного пространства
- 11.2. Определение радиус вектора
- 11.3. Определение аффинной системы координат и координат точки в аффинной системе координат
- 11.4. Определение линейного многообразия
- 11.5. Размерность линейного многообразия,  $k$ -мерная плоскость и гиперплоскость
- 11.6. Параметрическое задание линейного многообразия
- 11.7. Теорема об общем уравнении линейного многообразия
- 11.8. Аффинная комбинация и аффинная оболочка
- 11.9. Теорема об аффинной оболочке как линейном многообразии
- 11.10. Аффинно независимые точки
- 11.11. Определение выпуклой комбинации и выпуклой оболочки множества точек
- 11.12. Теорема Вейля-Минковского

## **12. Евклидовы векторные пространства**

- 12.1. Определение евклидова векторного пространства. Свойства скалярного произведения
- 12.2. Понятия длины вектора, ортогональных векторов, угла между векторами.
- 12.3. Векторный вариант теоремы Пифагора
- 12.4. Неравенство Коши-Буняковского
- 12.5. Неравенство треугольника
- 12.6. Понятия ортогональной, нормированной, ортонормированной систем векторов
- 12.7. Теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов
- 12.8. Теорема об ортонормированном базисе евклидова векторного пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта
- 12.9. Теорема о вычислении скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе
- 12.10. Понятие ортогональности вектора и подпространства, двух подпространств
- 12.11. Понятия ортогональной суммы и ортогонального дополнения
- 12.12. Теорема о нахождении ортогонального дополнения к подпространству
- 12.13. Понятие ортогональной проекции вектора на подпространство. Расстояние от вектора до подпространства. Угол между вектором и подпространством
- 12.14. Матрица Грама
- 12.15. Применение матрицы Грама к нахождению координат вектора и определению линейной независимости системы векторов,
- 12.16. Применение матрицы Грама к ортогональному проектированию вектора на подпространство
- 12.17. Нахождение объема  $k$ -мерного параллелепипеда через матрицу Грама



12.18. Эрмитово скалярное произведение и унитарное векторное пространство

### **13. Линейные операторы**

13.1. Понятия линейного отображения и линейного оператора

13.2. Определение линейного отображения на базисе векторного пространства

13.3. Понятие матрицы линейного отображения

13.4. Теорема об основном свойстве линейного отображения и его матрицы

13.5. Теорема о вычислении матрицы линейного оператора при изменении базиса векторного пространства

13.6. Определитель матрицы линейного оператора. Его независимость от выбора базиса векторного пространства

13.7. Понятие образа и ядра линейного отображения

13.8. Теорема о 3-х свойствах образа и ядра линейного отображения

13.9. Понятие ранга и дефекта линейного отображения. Теорема о связи понятий ранга и дефекта линейного отображения

13.10. Понятие инвариантного подпространства линейного оператора

13.11. Понятия собственного значения и собственного вектора линейного оператора

13.12. Понятие собственного подпространства линейного оператора, соответствующего собственному значению

13.13. Понятия характеристической матрицы и характеристического многочлена линейного оператора

13.14. Теорема о независимости характеристического многочлена от выбора базиса векторного пространства

13.15. Теорема о нахождении собственных значений линейного оператора как корней его характеристического многочлена

13.16. Теорема о нахождении собственного подпространства, соответствующего собственному значению как ядра оператора

13.17. Понятия следа и главных миноров квадратной матрицы. Теорема о вычислении характеристического многочлена через главные миноры матрицы линейного оператора

13.18. Понятие алгебраической и геометрической кратности собственного значения линейного оператора. Теорема о связи понятий алгебраической и геометрической кратности собственного значения линейного оператора

13.19. Теорема о прямой сумме собственных подпространств (о линейной независимости собственных векторов)

13.20. Понятие диагоналируемого линейного оператора. Теорема о матрице линейного оператора в базисе из собственных векторов

13.21. Понятие корневого вектора и корневого подпространства

13.22. Понятие серии, определяемой корневым вектором. Понятие циклического подпространства. Теорема о линейной независимости серии, определяемой корневым вектором

13.23. Определение жордановой клетки и жордановой нормальной формы матрицы (жордановой матрицы). Теоремы о существовании и единственности жордановой нормальной формы матрицы

13.24. Теоремы о смысле алгебраической и геометрической кратности собственного значения линейного оператора

13.25. Алгоритм нахождения жорданова базиса и жордановой нормальной формы матрицы

13.26. Аффинные преобразования и однородные координаты

#### **14. Поверхности второго порядка**

14.1. Уравнения эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов, конуса и цилиндров второго порядка

14.2. Исследование формы поверхности второго порядка по каноническому уравнению

14.3. Построение сечения поверхности второго порядка произвольной плоскостью

#### **15. Билинейные и квадратичные формы**

15.1. Определение билинейной функции

15.2. Определение матрицы билинейной функции. Теорема об основном свойстве билинейной функции и ее матрицы. Понятие билинейной формы

15.3. Теорема о вычислении матрицы билинейной функции при изменении базиса векторного пространства. Определение конгруэнтных матриц

15.4. Понятие ранга билинейной функции и невырожденной билинейной функции. Теорема о независимости ранга билинейной функции от выбора базиса векторного пространства

15.5. Определение симметрической билинейной функции. Теорема о матрице симметрической билинейной функции

15.6. Определение квадратичной формы. Понятие матрицы и ранга квадратичной формы.

15.7. Теорема о биективности отображения множества симметрических билинейных функций на множество квадратичных форм

15.8. Определение канонического и нормального вида квадратичной формы. Теорема о существовании базиса в котором квадратичная форма имеет канонический/нормальный вид. Метод Лагранжа

15.9. Определение положительного и отрицательного индексов инерции, сигнатуры. Закон инерции Сильвестра

15.10. Определение положительно/отрицательно определенной, полуопределенной квадратичных форм

15.11. Теорема о связи положительной/отрицательной определенности квадратичной формы с индексами инерции. Критерий Сильвестра

15.12. Билинейные и квадратичные формы на евклидовых векторных пространствах. 3 леммы о связи билинейных функций и линейных операторов

15.13. Свойства собственных векторов симметрической матрицы. Спектральная теорема

15.14. Теорема о приведении квадратичной формы к главным осям.

15.15. Определение гиперповерхности второго порядка

15.16. Теорема о приведении уравнения второго порядка к каноническому виду в прямоугольной системе координат

#### **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные

направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

#### **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office, издательская система LaTeX;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

#### **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/98235>.
2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л.А. Беклемишева [и др.]. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 496 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/97281>.

б) дополнительная:

1. Невский, М. В., Лекции по алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2002, 264с.
2. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для вузов : в 2 т. Т. 1, Ч. 1 : Основы алгебры : Ч. 2 : Линейная алгебра и геометрия / под ред. А. И. Кострикина. - М.: Физматлит, 2007. - 264 с.
3. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для вузов : в 2 т. Т. 2, Ч. 3 : Основные алгебраические структуры / под ред. А. И. Кострикина. - М.: Физматлит, 2007. — 168 с.
4. Моденов, П. С., Сборник задач по аналитической геометрии / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко, М.-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2002, 384с.
5. Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии : пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, сост. А. С. Пархоменко : учебник / П. С. Александров. - 2-е изд., стереотип., СПб., Лань, 2008, 911с.
6. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник для вузов. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; М-во образования РФ - 6-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2014. - 278 с.

7. Ильин В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник для вузов. / В. А. Ильин, Г. Д. Ким; М-во образования и науки РФ; МГУ - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект, 2015. - 393 с.
8. Кострикин, А. И., Введение в алгебру : учебник для вузов. Ч.1 : Основы алгебры. - 2-е изд., испр., М., Физматлит, 2004, 272с
9. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учебник для вузов. Ч.2, Линейная алгебра / А. И. Кострикин; М-во общ. и спец. образования РФ. - 3-е изд. - М.: Физматлит, 2004. - 367с.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uni-yar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uni-yar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке <http://window.edu.ru/library>).
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru) ).
4. Электронно-библиотечная система «Юрайт»(<https://urait.ru/> ).
5. Электронно-библиотечная система «Лань»(<https://e.lanbook.com/>).

#### **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

**Автор(ы) :**

Доцент кафедры дискретного анализа, к.ф.-м.н.

(подпись)

А.В. Николаев

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Алгебра и геометрия»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

**Вариант контрольной работы № 1  
(Проверка ОПК-1 в части умений работы с системами линейных уравнений, комплексными числами и матрицами)**

Задания	Ответы
<p>1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений:</p> $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -7, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$	<p>Общее решение:</p> $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 + 2, \\ x_2 = x_3 + 2x_4 - 1. \end{cases}$ <p>Частное решение:</p> $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 0$
<p>2. Решить уравнение:</p> $z - i z \vee i \frac{(\sqrt{3} + i)^8}{128}$	$z = 1 - i\sqrt{3}$
<p>3. Вычислить значение выражения:</p> $\sqrt[4]{\frac{18}{-1 + \sqrt{3}i}}$	$\pm \left( \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ $\pm \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)$
<p>4. Решить матричное уравнение:</p> $X \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
<p>5. Вычислить матрицу <math>A</math> и найти к ней обратную <math>A^{-1}</math>:</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix};$ $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 & 30 & -22 \\ -4 & -5 & 5 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

**Вариант контрольной работы № 2**  
*(Проверка ОПК-1 в части умений работы с группами, кольцами, полями, определителем и рангом матрицы)*

Задания	Ответы
1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x+2y+z=0, \\ 2x+y+3z=3, \\ x+4y+4z=1 \end{cases}$ в кольце вычетов по модулю 5.	$x=1, y=2, z=3$
2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	77
3. Вычислить определитель $n$ -го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{3}(5n-1+2^{n-1})$
4. Даны точки $A(6,2,1)$ , $B(3,1,3)$ , $C(2,3,6)$ . Найти площадь и внутренние углы треугольника $ABC$ .	$S = \frac{7\sqrt{3}}{2},$ $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$
5. Даны точки $A(3,5,4)$ , $B(8,7,4)$ , $C(5,10,4)$ и $D(4,7,8)$ , являющиеся вершинами тетраэдра. Найти объём тетраэдра и длину высоты, опущенной из точки $A$ .	$V=14,$ $AH = \frac{7}{3\sqrt{3}}$

**Вариант контрольной работы № 3**  
*(Проверка ОПК-1 в части умений работы с кривыми второго порядка и многочленами)*

Задания	Ответы
1. При каких значениях $\gamma$ сумма двух корней многочлена $3x^3 - 6x^2 - \gamma x + 6$ равна 0?	3
2. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$ : $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1,$	$d(x) = (x+1)$ $d(x) = -(x-1)f(x) + (2x^2 - 3x + 2)g(x)$

$g(x)=x^3-2x-1.$	
3. Разложить многочлен на неприводимые сомножители над полем рациональных чисел: $6x^5+16x^4+2x^3-13x^2+4$	$(x+2)(3x+2)(2x^3-2x+1)$
4. Составить уравнение эллипса, имеющего общие фокальные хорды с гиперболой $\frac{5x^2}{4}-\frac{5y^2}{6}=1$	$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$
5. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка с фокусами на оси $Ox$ , если ее уравнение в полярных координатах имеет вид: $\rho=\frac{26}{6-7\cos\varphi}$	$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{52}=1$

**Вариант контрольной работы № 4**  
*(Проверка ОПК-1 в части умений работы с векторными и аффинными пространствами)*

Задания	Ответы
1. Образуется ли множество $2 \times 2$ матриц с равной нулю суммой всех элементов векторное пространство? Если да, то найти его базис и размерность.	Да, образует (проверка свойств). Базис: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Размерность равна 3
2. Даны две прямые. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются или параллельны, составить уравнение плоскости их содержащей $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+16}{4}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-1}$	Прямые пересекаются Уравнение плоскости $2x-y+6z-18=0$
3. Найти точку, симметричную к точке $(6,2,-1)$ относительно прямой: $\begin{cases} 2x+y+2z-3=0, \\ 4x+y+3z-5=0 \end{cases}$	$(-2,4,-3)$
4. Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить через него остальные векторы системы: $a_1=(3,-2,2,5,3)$ $a_2=(1,-3,2,3,2)$ $a_3=(3,5,-2,1,0)$ $a_4=(-4,2,-3,1,4)$	Базис: $(a_1, a_2, a_4)$ , $a_3=2a_1-3a_2$

5. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ :	Базис суммы: $a_1, a_2, a_3, b_2$ Базис пересечения: $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3,$ $b_3 = 5a_1 - a_2 - a_3$
$a_1 = (1, 2, 1, -2)$ $b_1 = (1, 1, 1, 1)$ $a_2 = (2, 3, 1, 0)$ $b_2 = (1, 0, 1, -1)$ $a_3 = (1, 2, 2, -3)$ $b_3 = (1, 3, 0, -4)$	

**Вариант контрольной работы № 5**  
*(Проверка ОПК-1 в части умений работы с евклидовыми векторными пространствами и линейными операторами)*

Задания	Ответы
1. Найти собственные подпространства линейного оператора ортогонального проектирования 3-х мерного пространства на плоскость $3x + y - 4z = 0$	$L_0 = \langle (3, 1, -4) \rangle,$ $L_1 = \langle (1, -3, 0), (0, 4, 1) \rangle$
2. Найти объем треугольной призмы с вершинами $A(0, 1, 0, 1), B(1, 1, 3, 2), C(0, 3, 1, 5), A'(3, 0, -1, 2), B'(4, 0, 2, 3)$ и $C'(3, 2, 0, 6)$	$\frac{19\sqrt{6}}{2}$
3. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$L_{-1} = \langle (2, 0, 1) \rangle,$ $L_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle$
4. Найти ортогональный базис векторного пространства $\langle (1, 1, 2, 1), (0, 3, 4, 3), (3, 0, 2, 0), (3, 6, -1, 0) \rangle$	$(1, 1, 2, 1), (-2, 1, 0, 1), (2, 5, -3, -1)$
5. Найти угол между вектором и подпространством: $L = \langle (0, -1, -1, 1), (1, 0, 1, -1), (-3, 1, 1, 0) \rangle,$ $x = (2, 6, 2, 6)$	$\frac{\pi}{3}$

**Вариант контрольной работы № 6**  
*(Проверка ОПК-1 в части умений работы с жордановой нормальной формой, поверхностями второго порядка, билинейными и квадратичными формами)*

Задания	Ответы
1. Найти нормальный вид квадратичной формы:	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$



$3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$	
<p>2. Определить тип линии, найти каноническое уравнение и каноническую систему координат, изобразить на плоскости:</p> $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$	<p>Эллипс</p> $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$ <p>Каноническая система координат:</p> $O = (0, 1),$ $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
<p>3. Найти центр симметрии кривой, полученной сечением двуполостного гиперboloида</p> $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -4$ <p>плоскостью <math>x + y + 2z = 2</math></p>	$(4, 2, -2)$
<p>4. Найти жорданову форму и жорданов базис матрицы линейного оператора:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ <p>1. <math>F_A(\lambda) = (\lambda - 3)^4</math></p>	<p>Жорданова форма:</p> $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ <p>Жорданов базис:</p> $e_1 = (2, 1, 2, -1),$ $e_2 = (2, 1, 0, 1),$ $e_3 = (1, 1, 1, 0),$ $e_4 = (0, 0, 0, 1)$
<p>5. Решить уравнение</p> $X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$X = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

### Критерии оценивания

Каждое задание оценивается отдельно в 4 балла.

Шкала оценивания решения задачи:

Баллы	Критерии
0 баллов	Полное отсутствие решения
1 балл	Задача решена менее чем на половину, или допущены содержательные ошибки в алгоритме решения
2 балла	Задача решена не полностью, но более чем на половину, или допущены вычислительные ошибки, повлиявшие на ход решения задачи
3 балла	Задача решена, но допущены незначительные вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения задачи
4 балла	Задача решена верно

Баллы суммируются по всей контрольной работе и переводятся в оценку по следующей шкале:

Баллы	Оценка
Менее 8 баллов	«Неудовлетворительно»
8 – 11 баллов	«Удовлетворительно»
12 – 15 баллов	«Хорошо»
Более 15 баллов	«Отлично»

## 1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Вариант экзаменационного билета за 1 семестр

Задания	Ответы
1. Сформулировать определение базисного минора. Привести пример	Раздел 6.2
2. Сформулировать определение векторного произведения векторов. Привести пример	Раздел 5.16
3. Сформулировать определение и написать каноническое уравнение гиперболы	Раздел 7.2
4. Определить кратность корня $x = -1$ многочлена $4x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 17x^2 - 13x - 3$	3
5. Определить вырождена матрица или нет $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	Матрица вырождена
6. Сформулировать и доказать теоремы о единственности нейтрального и симметричного элементов для бинарной операции	Раздел 4.3
7. Сформулировать и доказать правило Крамера	Раздел 5.12
8. Сформулировать и доказать теорему о рациональных корнях многочлена	Раздел 8.15
9. Пусть $A$ – $n \times n$ матрица. Входит ли	Входит со знаком

произведение элементов побочной диагонали в развёрнутое выражение определителя? И, если входит, то с каким знаком?	$(-1)^{\frac{n}{2}J}$ или $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
10. Найти значения $a, b, c$ , если известно, что они являются корнями уравнения $x^3 - ax^2 + bx - c$	2 решения: 1. $a = -1, b = -1, c = 1$ , 2. $b = c = 0, a - \text{любое число}$

### Критерии оценивания

Показатели	Критерии	4-балльная шкала (уровень освоения)
<b>ОПК-1</b> <b>Знать:</b> – постановки задач линейной алгебры; – основные понятия и формулировки теорем. – основы теории матриц и определителей; – свойства многочленов; – классификацию и свойства кривых второго порядка. – основы теории векторных пространств.  <b>Уметь:</b> – решать системы линейных уравнений; – выполнять операции с матрицами; – находить корни многочленов; – выполнять операции с векторами; – исследовать кривые второго порядка; – доказывать основные утверждения и теоремы.  <b>Владеть:</b> – математическим аппаратом алгебры и геометрии; – навыками использования аппарата алгебры и геометрии при решении конкретных задач.	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.  2. Умение самостоятельно доказывать утверждения и решать теоретические задачи в рамках курса алгебры и геометрии.  3. Умение решать основные задачи курса: системы линейных уравнений, комплексные числа, операции с матрицами, вычисление определителя и ранга матрицы, свойства многочленов и кривых второго порядка, операции с векторами.  4. Умение решать задачи линейной алгебры повышенной сложности над произвольными кольцами и полями  5. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.	Отлично (повышенный уровень)
	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.  2. Умение воспроизводить доказательства основных и вспомогательных утверждений и теорем из курса алгебры и геометрии.  3. Умение решать основные задачи курса: системы линейных уравнений, комплексные числа, операции с матрицами, вычисление определителя и ранга матрицы, свойства многочленов и кривых второго порядка, операции с векторами.	Хорошо (базовый уровень)

	4. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.	Удовлетворительно (пороговый уровень)
	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.	
	2. Умение решать типовые задачи курса: системы линейных уравнений, операции с матрицами, вычисление определителя, поиск корней многочлена, операции с векторами.	
	3. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
	Знания, умения и навыки сформированы в недостаточной степени	

### Вариант экзаменационного билета за 2 семестр

Задания	Ответы
1. Сформулировать определение собственного вектора линейного оператора. Привести пример	Раздел 13.11
2. Сформулировать определения выпуклой комбинации и выпуклой оболочки множества точек. Привести пример	Раздел 11.11
3. Сформулировать определения евклидова векторного пространства	Раздел 12.1
4. Найти площадь треугольника $A(1,1,1,1), B(3,1,3,2), C(4,0,2,2)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
5. Определить является ли квадратичная форма отрицательно определенной $-x^2 - 5y^2 - z^2 - 4xy - 2yz$	Не является
6. Сформулировать и доказать неравенство треугольника	Раздел 12.5
7. Сформулировать и доказать теорему о геометрическом смысле ранга матрицы	Раздел 9.12
8. Сформулировать и доказать спектральную теорему	Раздел 15.13
9. Найти сумму чисел, обратных к собственным значениям матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 4$
10. Составить матрицу оператора ортогонального/зеркального отражения на плоскости относительно прямой	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

---

## Критерии оценивания

Показатели	Критерии	4-балльная шкала (уровень освоения)
<b>ОПК-1</b> <b>Знать:</b> – постановки задач линейной алгебры и аналитической геометрии; – основные понятия и формулировки теорем линейной алгебры и аналитической геометрии; – векторные, аффинные и евклидовы пространства; – классификацию поверхностей второго порядка; – основы теории линейных операторов и квадратичных форм.  <b>Уметь:</b> – выполнять операции с векторами; – исследовать свойства линейных операторов; – решать геометрические задачи в евклидовом пространстве; – исследовать кривые и поверхности второго порядка в общем виде; – доказывать основные и вспомогательные утверждения и теоремы из курса алгебры и геометрии.  <b>Владеть:</b> – математическим аппаратом алгебры и геометрии; – навыками использования аппарата алгебры и геометрии при	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, самостоятельно, и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса, решил предложенные практические задания без ошибок.	Отлично (повышенный уровень)
	Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, где студент демонстрирует знания, приобретенные на лекционных и практических занятиях, а также полученные посредством изучения обязательных учебных материалов по курсу, дает аргументированные ответы, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе. Решил предложенные практические задания с небольшими неточностями.	Хорошо (базовый уровень)
	Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа и решении практических заданий.	Удовлетворительно (пороговый уровень)
	Студентом дан ответ, который содержит	Неудовлетворительно

решении конкретных задач.	ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Выводы поверхностны. Решение практических заданий не выполнено. Т.е студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.	(уровень не сформирован)
---------------------------	---	--------------------------

### Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины

#### 1. Система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y - z = 2, \\ 4x + 5y - 5z = 3 \end{cases}$$

- а) имеет одно решение;
- б) имеет два решения
- в) имеет бесконечно много решений;
- г) не имеет решений.

#### 2. Найти значения $x, y, z$ при которых матрица $A$ является обратной к матрице $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ x & y & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

- а)  $x=1, y=2, z=0$ ;
- б)  $x=-3, y=2, z=1$ ;
- в)  $x=0, y=0, z=1$ ;
- г) ни при каких.

#### 3. Найдите число, обратное к 7 в кольце вычетов $Z_{17}$ по модулю 17

- а) 3;
- б) 5;
- в) 7;
- г) число 7 не имеет обратного в кольце  $Z_{17}$ .

#### 4. При каком значении параметра $a$ определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} a & a & 5 & a \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

равен 42?

- а) 2;
- б) 3;
- в) 4;
- г) 5.

5. Найти объём тетраэдра с вершинами в точках  $A(2,1,-1)$ ,  $B(3,0,2)$ ,  $C(5,1,1)$  и  $D(0,-1,3)$ .

а) 1;

б)  $\frac{1}{2}$ ;

в)  $\frac{1}{3}$ ;

г) точки  $A, B, C, D$  лежат на одной плоскости.

6. Найдите число различных рациональных корней многочлена

$$3x^3 - x^2 - 9x - 4.$$

а) 3;

б) 2;

в) 1;

г) многочлен не имеет рациональных корней.

7. Определить взаимное расположение прямой

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

и плоскости

$$3x + 2y - 5z + 2 = 0.$$

а) прямая пересекает плоскость;

б) прямая параллельна плоскости;

в) прямая лежит в плоскости;

г) прямая и плоскость скрещиваются.

8. Найти размерность линейной оболочки векторов

$$a_1 = (2, -1, 3, 4, -1), a_2 = (1, 2, -3, 1, 2), \\ a_3 = (5, -5, 12, 11, -5), a_4 = (1, -3, 6, 3, -3).$$

а) 5;

б) 4;

в) 3;

г) 2.

9. Для векторов  $u_1, u_2, u_3, u_4$  известно, что все попарные углы равны  $\frac{\pi}{2}$ . Выберите верный вариант:

а) вектора линейно зависимы;

б) вектора линейно независимы;

в) вектора могут быть как зависимы, так и независимы.

10. Какой из перечисленных векторов является собственным для линейного оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

а)  $(1, 1, 1)$ ;

б)  $(1, 3, 5)$

в)  $(1, 2, 4)$ ;

г)  $(0, 0, 0)$ .

11. Квадратичная форма

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$$

а) положительно определена;

б) отрицательно определена;



- в) положительно полуопределена;
- г) не определена?

12. Определить тип кривой второго порядка

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0.$$

- а) эллипс;
- б) гипербола;
- в) парабола;
- г) вырожденный случай – пара пересекающихся прямых.

### Правильные ответы

Вопрос №	Правильный ответ	Вопрос №	Правильный ответ
1	в	7	б
2	б	8	г
3	б	9	б
4	а	10	в
5	в	11	г
6	г	12	а

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

*Продвинутый уровень* - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

*Высокий уровень* - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

## 2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Общепрофессиональные компетенции						
ОПК-1	Контрольные работы № 1 - 3, экзамен	1-8	<b>Знать:</b> – постановки задач линейной алгебры; – основные понятия и формулировки теорем. – основы теории матриц и определителей; – свойства многочленов; – классификацию и свойства кривых второго порядка. – основы теории векторных пространств.  <b>Уметь:</b> – решать системы линейных уравнений; – выполнять операции с матрицами; – находить корни многочленов; – выполнять операции с векторами; – исследовать кривые	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.  2. Умение решать типовые задачи курса: системы линейных уравнений, операции с матрицами, вычисление определителя, поиск корней многочлена, операции с векторами.  3. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.  2. Умение воспроизводить доказательства основных и вспомогательных утверждений и теорем из курса алгебры и геометрии.  3. Умение решать основные задачи курса: системы линейных уравнений, комплексные числа, операции с матрицами, вычисление определителя и ранга матрицы, свойства многочленов и кривых второго порядка, операции с векторами.  4. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.	1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры.  2. Умение самостоятельно доказывать утверждения и решать теоретические задачи в рамках курса алгебры и геометрии.  3. Умение решать основные задачи курса: системы линейных уравнений, комплексные числа, операции с матрицами, вычисление определителя и ранга матрицы, свойства многочленов и кривых второго порядка, операции с векторами.  4. Умение решать задачи линейной алгебры повышенной сложности над произвольными кольцами и полями  5. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.

			<p>второго порядка; – доказывать основные утверждения и теоремы.</p> <p><b>Владеть:</b> – математическим аппаратом алгебры и геометрии; – навыками использования аппарата алгебры и геометрии при решении конкретных задач.</p>			
Контрольные работы № 4 – 6, экзамен	9-15	<p><b>Знать:</b> – постановки задач линейной алгебры и аналитической геометрии; – основные понятия и формулировки теорем линейной алгебры и аналитической геометрии; – векторные, аффинные и евклидовы пространства; – классификацию поверхностей второго порядка; – основы теории линейных операторов и квадратичных форм.</p>	<p>1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры и аналитической геометрии.</p> <p>2. Умение решать типовые задачи курса: операции с векторами и точками в аффинных и евклидовых пространствах, поиск собственных значений и собственных векторов линейных операторов, приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.</p>	<p>1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры и аналитической геометрии.</p> <p>2. Умение воспроизводить доказательства основных и вспомогательных утверждений и теорем из курса алгебры и геометрии.</p> <p>3. Умение решать основные задачи курса: операции с векторами и точками в аффинных и евклидовых пространствах, построение матрицы линейного оператора и</p>	<p>1. Знание основных определений и теорем линейной алгебры и аналитической геометрии.</p> <p>2. Умение самостоятельно доказывать утверждения и решать теоретические задачи в рамках курса алгебры и геометрии.</p> <p>3. Умение решать основные задачи курса: операции с векторами и точками в аффинных и евклидовых пространствах, построение матрицы линейного оператора и исследование его свойств, поиск собственных значений и собственных</p>	

			<p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– выполнять операции с векторами;</li> <li>– исследовать свойства линейных операторов;</li> <li>– решать геометрические задачи в евклидовом пространстве;</li> <li>– исследовать кривые и поверхности второго порядка в общем виде;</li> <li>– доказывать основные и вспомогательные утверждения и теоремы из курса алгебры и геометрии.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– математическим аппаратом алгебры и геометрии;</li> <li>– навыками использования аппарата алгебры и геометрии при решении конкретных задач.</li> </ul>	<p>3. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.</p>	<p>исследование его свойств, поиск собственных значений и собственных векторов линейных операторов, построение и применение жордановой нормальной формы, исследование квадратичных форм, приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.</p> <p>3. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.</p>	<p>векторов линейных операторов, построение и применение жордановой нормальной формы, исследование квадратичных форм, приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.</p> <p>4. Умение решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии повышенной сложности над произвольными векторными пространствами</p> <p>5. Владение математическим аппаратом алгебры и геометрии.</p>
--	--	--	---	--	--	--

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;

- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Алгебра и геометрия»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Самостоятельная работа студентов направлена на приобретение новых теоретических и фактических знаний, закрепление полученных навыков, - выполняется в читальном зале библиотеки и в домашних условиях, подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением (учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций).

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ.

Экзамен проводится в письменной форме, каждый билет содержит формулировки и доказательства утверждений, а также теоретические и практические задачи из курса «Алгебры и геометрии». На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Для проверки уровня сформированности компетенций при подготовке к экзамену рекомендуется выполнить тест для самопроверки.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу, с подробно разобранными решениями задач:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев; М-во образования РФ. - 12-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2008. - 308 с.
2. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник для вузов / В. А. Ильин, Г. Д. Ким; М-во образования и науки РФ; МГУ. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект; Изд-во Моск. ун-та, 2008. - 393 с.
3. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии: пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А.С. Пархоменко: [учебник] / П. С. Александров. - 2-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2008. - 911 с.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

**1. Научно-образовательный сайт Exponenta.ru** (<http://www.exponenta.ru>). Основные цели проекта Exponenta.ru: создать в российском Интернете единое пространство для всех, кто использует и хочет использовать математические пакеты в образовательной и научной деятельности; содействовать созданию русскоязычного сообщества пользователей математического ПО.

**2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»** ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

**3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"** (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной



библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. Главной разработчик проекта - Федеральное государственное автономное учреждение Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций (ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика") [www.informika.ru](http://www.informika.ru).

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

**1. Личный кабинет** ([http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

**2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ**  
([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/пароллю.

**3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»**  
([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.