

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра инфокоммуникаций и радиофизики

# **ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ**

Задачник

Ярославль  
ЯрГУ  
2017

УДК 621.391(079)

ББК3811я73-4

О-28

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2017 года*

Рецензент

кафедра инфокоммуникаций и радиофизики

Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Составители:

В. А. Волохов, А. Л. Приоров, М. А. Дубов, И. В. Апальков

**Общая теория связи** : задачник / сост. : В. А. Волохов, А. Л. Приоров, М. А. Дубов, И. В. Апальков ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2017. — 44 с.

Задачник содержит набор практических упражнений, охватывающих основные разделы курса «Общая теория связи. Часть 2», а именно случайные величины, случайные процессы, теорию оценок, теорию принятия решений, оптимальное обнаружение сигналов, теорию информации и кодирование источника, основы помехоустойчивого кодирования. Приведены задачи для самостоятельного решения и список рекомендуемой литературы.

Предназначен для студентов, изучающих дисциплину «Общая теория связи».

Ил. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 621.391(079)

ББК3811я73-4

© ЯрГУ, 2017

## Введение

Настоящий сборник задач содержит практические задания по основным разделам дисциплины «Общая теория связи. Часть 2» и базируется на учебном пособии Ю. А. Брюханова, А. Л. Приорова «Общая теория связи», изданном в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в 2014 г. [1]. Для эффективной работы со сборником задач рекомендуется предварительное изучение соответствующих теоретических разделов [1–10], рассматриваемых в рамках указанной дисциплины.

Пособие состоит из семи разделов, посвященных случайным величинам, случайным процессам, теории оценок, теории принятия решений, оптимальному обнаружению сигналов, теории информации и кодирования источника, а также помехоустойчивому кодированию. Практические задания в сборнике излагаются последовательно, начиная от базовых тем и заканчивая более продвинутыми разделами, рассматриваемыми в общей теории связи. В основу пособия положен материал практических занятий, в течение нескольких лет проводимых авторами для студентов физического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова, обучающихся по направлению 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

Выражаем глубокую благодарность нашему научному руководителю профессору Ю. А. Брюханову за помощь при создании курса «Общая теория связи. Часть 2» и данного пособия, за влияние на формирование взглядов авторов в данном научном направлении. Эти взгляды формировались также в совместной работе с нашими коллегами, среди которых особенно хочется отметить Ю. Лукашевича, Е. Кротову, Т. Артемову, В. Хрящева, А. Тараканова, А. Гвоздарева, А. Топникова и В. Кирноса. Всем им авторы очень признательны.

# 1. Случайные величины

## 1.1. Интегральная функция распределения, закон распределения дискретной случайной величины и плотность вероятностей

1.1. Дана дискретная случайная величина (ДСВ)  $X$ . Доказать следующие математические выражения:

- а)  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ;
- б)  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$ ;
- в)  $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$ ;
- б)  $P(a \leq X < b) = P(X = a) + F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$ .

1.2. Дана ДСВ  $X$ , описываемая следующим законом распределения ДСВ:

$$p_X(1) = 1/2, \quad p_X(2) = 1/4, \quad p_X(3) = 1/8, \quad p_X(4) = 1/8.$$

Найти:

- а) интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ ;
- б) вероятности  $P(X < 1)$ ,  $P(1 < X \leq 3)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ .

1.3. Проверить, что функция

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x, & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

является законом распределения ДСВ. Найти вероятности  $P(X = 2)$ ,  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X \geq 1)$ .

1.4. Пусть ДСВ  $X$  описывается распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ :

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- а) доказать свойства функции  $p_X(x)$ ;
- б) найти вероятность  $P(X > 2)$  для  $\lambda = 4$ .

1.5. Пусть ДСВ  $X$  описывается распределением Бернулли:

$$p_X(k) = P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Найти интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ .

1.6. Пусть ДСВ  $X$  описывается биномиальным распределением:

$$p_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказать свойства  $p_X(x)$ . Найти вероятность  $P(X > 1)$  для  $n = 6$ ,  $p = 0.6$ .

1.7. Дана ДСВ, описывающая число выпадения орла в эксперименте с подбрасыванием монетки три раза подряд. Найти и построить интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ .

1.8. Доказать, что для непрерывной случайной величины (НСВ)  $X$  вероятность  $P(X = x) = 0$ .

1.9. Дана НСВ  $X$  с плотностью вероятностей

$$W_X(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq x < 1, \\ 2/3, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ .

1.10. Дана НСВ  $X$  с плотностью вероятностей

$$W_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

А. Определить величину  $k$ .

Б. Найти интегральную функцию распределения  $F_X(x)$  и вероятность  $P\left(\frac{1}{4} < X \leq 2\right)$ .

1.11. Дана НСВ  $X$ , описываемая гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Доказать свойство нормировки плотности вероятностей  $W_X(x)$ .

1.12. Дана функция  $W(x) = e^{(-x^2+x-a)}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Найти величину  $a$  такую, что функция  $W(x)$  является плотностью вероятностей НСВ  $X$ .

1.13. Дана НСВ  $X$ , описываемая распределением Рэлея:

$$W_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ .

1.14. Дана НСВ  $X$  с плотностью вероятности

$$W_X(x) = \begin{cases} k(x - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $k$  — некоторая константа. Найти величину  $k$  и интегральную функцию распределения  $F_X(x)$ .

1.15. Дана НСВ  $X$  с плотностью вероятности  $W_X(x)$ :

$$W_X(x) = \begin{cases} k(2x - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $k$  — некоторая константа. Найти величину  $k$  и вероятность  $P(X > 1)$ .

1.16. Рассмотрим интегральную функцию распределения случайной величины  $X$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

А. Доказать свойства функции  $F_X(x)$ .

Б. Найти вероятности  $P\left(X \leq \frac{1}{4}\right)$ ,  $P\left(0 < X \leq \frac{1}{4}\right)$ ,  $P(X = 0)$ ,  $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right)$ .

В. Определить тип случайной величины.

1.17. Дана случайная величина  $X$  с интегральной функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

А. Найти  $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right)$ ,  $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$  и  $P(X > 2)$ .

Б. Определить тип случайной величины.

## 1.2. Математическое ожидание и дисперсия

1.18. Дана ДСВ  $X$ , описываемая следующим законом распределения ДСВ:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3, & x = -1, 0, 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.19. Дана ДСВ  $X$ , описываемая следующим законом распределения ДСВ:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3, & x = -2, 0, 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.20. Дана ДСВ  $X$ , описывающая исход подбрасывания игральной кости. Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.21. Дана ДСВ  $X$ , описываемая геометрическим законом распределения ДСВ:

$$p_X(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.22. Дана ДСВ  $X$ , описываемая биномиальным распределением с параметрами  $(n, p)$ :

$$p_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.23. Дана ДСВ  $X$ , описываемая распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ :

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  ДСВ  $X$ .

1.24. Дана НСВ  $X$ , описываемая равномерной плотностью вероятности:

$$W_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  НСВ  $X$ .



1.25. Дана НСВ  $X$ , описываемая экспоненциальной плотностью вероятности с параметром  $\lambda > 0$ :

$$W_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  НСВ  $X$ .

1.26. Дана НСВ  $X$ , описываемая гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  НСВ  $X$ .

1.27. Дана НСВ  $X$ , описываемая плотностью вероятности Рэ-ля с параметром  $\sigma^2$ :

$$W_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  НСВ  $X$ .

### **1.3. Условная вероятность. Правило Байеса.**

#### **Теорема Байеса**

1.28. Пусть есть автономный робот, который может находиться в одной из двух комнат. Каждая из комнат имеет свой цвет: красный или зеленый. Изначально робот не знает, в какой комнате он находится. Поэтому можно считать, что априорные вероятности нахождения робота в красной  $P(R)$  и зеленой  $P(G)$  комнатах равны 0.5. Робот имеет несовершенный датчик, позволяющий определить цвет комнаты, в которой он находится. Условная вероятность того, что датчик фиксирует красный цвет при условии, что робот находится в красной комнате,  $P(\text{видеть } R | R) = 0.8$ , а условная вероятность того, что датчик

фиксирует зеленый цвет при условии, что робот находится в зеленой комнате,  $P(\text{видеть } G | G) = 0.8$ . Пусть датчик фиксирует красный цвет. Найти:

а) условную вероятность того, что робот находится в красной комнате при условии, что датчик фиксирует красный цвет,  $P(R | \text{видеть } R)$ ;

б) условную вероятность того, что робот находится в зеленой комнате при условии, что датчик фиксирует красный цвет,  $P(G | \text{видеть } R)$ .

1.29. Решить задачу 1.28 для случая, когда априорные вероятности нахождения робота в красной  $P(R)$  и зеленой  $P(G)$  комнатах равны 0 и 1 соответственно. Сравнить полученные результаты с задачей 1.28.

1.30. Решить задачу 1.28 для случая, когда условная вероятность того, что датчик фиксирует красный цвет при условии, что робот находится в красной комнате,  $P(\text{видеть } R | R) = 0.8$ , а условная вероятность того, что датчик фиксирует зеленый цвет при условии, что робот находится в зеленой комнате,  $P(\text{видеть } G | G) = 0.5$ . Сравнить полученные результаты с задачей 1.28.

1.31. Пусть есть автономный робот, который может находиться в одной из трех комнат. Каждая из комнат имеет свой цвет: комната  $A$  — красный, комната  $B$  — зеленый и комната  $C$  — зеленый. Изначально робот не знает, в какой комнате он находится. Поэтому можно считать, что априорные вероятности нахождения робота в комнате  $A$   $P(A)$ , в комнате  $B$   $P(B)$  и комнате  $C$   $P(C)$  равны  $1/3$ . Робот имеет несовершенный датчик, позволяющий определить цвет комнаты, в которой он находится. Условная вероятность того, что датчик фиксирует красный цвет при условии, что робот находится в комнате  $A$ ,  $P(\text{видеть } R | A) = 0.9$ , условная вероятность того, что датчик фиксирует зеленый цвет при условии, что робот находится в комнате  $B$ ,  $P(\text{видеть } G | B) = 0.9$ , а условная вероятность того, что датчик фиксирует зеленый цвет при условии, что робот находится в комнате  $C$ ,  $P(\text{видеть } G | C) = 0.9$ . Пусть датчик фиксирует красный цвет. Найти:

а) условную вероятность того, что робот находится в комнате  $A$  при условии, что датчик фиксирует красный цвет,  $P(A | \text{видеть } R)$ ;

б) условную вероятность того, что робот находится в комнате  $B$  при условии, что датчик фиксирует красный цвет,  $P(B | \text{видеть } R)$ ;

в) условную вероятность того, что робот находится в комнате  $C$  при условии, что датчик фиксирует красный цвет,  $P(C | \text{видеть } R)$ .

1.32. Дан двоичный канал связи. Входной символ  $X$  канала может принимать два значения: 0 или 1. Аналогичные значения принимает выходной символ  $Y$ . Поскольку в канале присутствует шум, входное значение 0 может быть преобразовано в выходное 1 и наоборот. Канал описывается вероятностями  $p_0, q_0, p_1, q_1$ , определенными следующим образом:  $p_0 = P(y_1 | x_0)$ ,  $q_0 = P(y_0 | x_0)$ ,  $p_1 = P(y_0 | x_1)$ ,  $q_1 = P(y_1 | x_1)$ , где  $x_0$  и  $x_1$  представляют события  $X = 0$  и  $X = 1$  соответственно, а  $y_0$  и  $y_1$  — события  $Y = 0$  и  $Y = 1$  соответственно. Кроме того,  $p_0 + q_0 = 1 = p_1 + q_1$  и  $P(x_0) = 0,5$ ,  $p_0 = 0,1$ ,  $p_1 = 0,2$ . Найти:

а) вероятность приема нуля  $P(y_0)$ ;

б) вероятность приема единицы  $P(y_1)$ ;

в) условную вероятность передачи нуля при условии, что ноль был принят  $P(x_0 | y_0)$ ;

г) условную вероятность передачи единицы при условии, что единица была принята  $P(x_1 | y_1)$ ;

д) вероятность того, что в приемнике переданный сигнал будет прочитан с ошибкой;

е) вероятность того, что в приемнике переданный сигнал будет прочитан верно.

1.33. Дан двоичный канал связи. Входной символ  $X$  канала может принимать два значения: 0 или 1. Аналогичные значения принимает выходной символ  $Y$ . Поскольку в канале присутствует шум, входное значение 0 может быть преобразовано в выходное 1 и наоборот. Канал описывается вероятностями  $p_0, q_0, p_1, q_1$ ,

определенными следующим образом:  $p_0 = P(y_1 | x_0)$ ,  $q_0 = P(y_0 | x_0)$ ,  $p_1 = P(y_0 | x_1)$ ,  $q_1 = P(y_1 | x_1)$ , где  $x_0$  и  $x_1$  представляют события  $X = 0$  и  $X = 1$  соответственно, а  $y_0$  и  $y_1$  — события  $Y = 0$  и  $Y = 1$  соответственно. Кроме того,  $p_0 + q_0 = 1 = p_1 + q_1$  и  $q_0 = 0.9$ ,  $q_1 = 0.6$ . Для решения, какое из двух сообщений было передано, на основе полученных данных предлагается использовать следующий критерий.

1. На приемной стороне произошло событие  $y_0$ . Решаем, что событие на входе канала —  $x_0$ , если  $P(x_0 | y_0) > P(x_1 | y_0)$ , и решаем, что событие на входе канала —  $x_1$ , если  $P(x_1 | y_0) > P(x_0 | y_0)$ .

2. На приемной стороне произошло событие  $y_1$ . Решаем, что событие на входе канала —  $x_0$ , если  $P(x_0 | y_1) > P(x_1 | y_1)$ , и решаем, что событие на входе канала —  $x_1$ , если  $P(x_1 | y_1) > P(x_0 | y_1)$ .

Данный критерий принятия решения называется критерием максимума апостериорной вероятности (МАНВ-критерий). Найти:

а) область значений вероятности  $P(x_0)$ , для которой МАНВ-критерий определяет, что событие на входе канала —  $x_0$ , если на приемной стороне произошло событие  $y_0$ ;

б) область значений вероятности  $P(x_0)$ , для которой МАНВ-критерий определяет, что событие на входе канала —  $x_1$ , если на приемной стороне произошло событие  $y_1$ ;

в) область значений вероятности  $P(x_0)$ , для которой МАНВ-критерий определяет, что событие на входе канала —  $x_0$ , если не имеет значения, какое событие —  $y_0$  или  $y_1$  — произошло на приемной стороне;

г) область значений вероятности  $P(x_0)$ , для которой МАНВ-критерий определяет, что событие на входе канала —  $x_1$ , если не имеет значения, какое событие —  $y_0$  или  $y_1$  — произошло на приемной стороне.

## 2. Случайные процессы

### 2.1. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности.

#### Теорема Винера — Хинчина

2.1. Найти спектральную плотность мощности стационарного случайного процесса  $X(t)$ , зная его автокорреляционную функцию  $K_X(\tau) = D \cdot e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\alpha > 0$ .

2.2. Найти автокорреляционную функцию стационарного случайного процесса  $X(t)$  со спектральной плотностью мощности  $S_X(\Omega) = \begin{cases} S_0, & |\Omega| \leq \Omega_0, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_0. \end{cases}$

2.3. Найти автокорреляционную функцию стационарного случайного процесса  $X(t)$  со спектральной плотностью мощности  $S_X(\Omega) = \frac{4}{\pi(1 + \Omega^2)}$ ,  $-\infty < \Omega < \infty$ .

2.4. Известно, что спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса  $X(t)$  имеет следующий вид:

$$S_X(\Omega) = \frac{8}{\pi(1 + \Omega^2)}, \quad -\infty < \Omega < \infty.$$

Найти дисперсию случайного процесса  $X(t)$  в определенный момент времени.

2.5. Показать, что функция  $K_X(\tau) = 3 \cdot e^{-\tau^2}$  может быть автокорреляционной функцией случайного процесса  $X(t)$ .

## 2.2. Прохождение случайных процессов через ЛИС-цепи

2.6. Рассмотрим  $RC$ -цепь (напряжение снимается с конденсатора), на входе которой действует белый шум непрерывного времени со спектральной плотностью мощности, равной  $\sigma^2$  для частот  $-\infty < \Omega < \infty$ . Найти спектральную плотность мощности выходного сигнала  $Y(t)$ .

2.7. Рассмотрим  $CR$ -цепь (напряжение снимается с резистора), на входе которой действует белый шум непрерывного времени с автокорреляционной функцией  $K_X(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака, равная  $\infty$  при  $\tau = 0$  и 0 при  $\tau \neq 0$ . Найти спектральную плотность мощности выходного сигнала  $Y(t)$ .

2.8. Дана рекурсивная цепь первого порядка, описываемая разностным уравнением  $Y(n) = X(n) + aY(n-1)$  (коэффициент множителя  $a < 1$ ). Входной сигнал  $X(n)$  представляет дискретный белый шум с автокорреляционной функцией  $K_X(n) = \sigma^2 \delta(n)$ , где  $\delta(n)$  — единичный импульс, равный 1 при  $n = 0$  и 0 при  $n \neq 0$ . Найти спектральную плотность мощности выходного сигнала  $Y(n)$ .

2.9. Дана нерекурсивная цепь первого порядка, описываемая разностным уравнением  $Y(n) = X(n) + aX(n-1)$ . Входной сигнал  $X(n)$  представляет дискретный белый шум со спектральной плотностью мощности, равной  $\sigma^2$  для частот  $-\pi < \hat{\omega} < \pi$ . Найти спектральную плотность мощности выходного сигнала  $Y(n)$ .

2.10. Дан дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ , который подается на вход нерекурсивной цепи второго порядка. Предполагая, что связь между входом и выходом рассматриваемой цепи определяется разностным уравнением  $Y(n) = X(n) + a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2)$ , определить спектральную плотность мощности выходного сигнала  $Y(n)$ .

### 2.3. Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи

2.11. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой равномерной плотностью вероятности:

$$W_X(x_1; t_1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1) = aX(t_1) + b$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$ .

2.12. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x_1; t_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x_1 < \infty.$$

Доказать, что плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = aX(t_1) + b,$$

является гауссовской плотностью с математическим ожиданием  $am + b$  и дисперсией  $a^2\sigma^2$ .

2.13. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ . Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = \{X(t_1)\}^2.$$

2.14. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой равномерной плотностью вероятности:

$$W_X(x_1; t_1) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq x_1 \leq 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = \{X(t_1)\}^2.$$

2.15. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой равномерной плотностью вероятности:

$$W_X(x_1; t_1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = e^{X(t_1)}.$$

2.16. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x_1; t_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x_1 < \infty.$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = e^{X(t_1)}.$$



2.17. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой равномерной плотностью вероятности:

$$W_X(x_1; t_1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = \operatorname{tg}(X(t_1)).$$

2.18. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x_1; t_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x_1 < \infty.$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = \begin{cases} aX(t_1), & X(t_1) > 0, \\ 0, & X(t_1) \leq 0, \end{cases}$$

где  $a$  — положительная, вещественная константа.

2.19. Дан случайный процесс  $X(t)$ , который в момент времени  $t_1$  описывается НСВ  $X(t_1)$ , характеризуемой гауссовской плотностью вероятности с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$W_X(x_1; t_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x_1 < \infty.$$

Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ , определяющей случайный процесс  $Y(t)$  в момент времени  $t_1$  и связанной с  $X(t_1)$  следующим образом:

$$Y(t_1) = \begin{cases} a\{X(t_1)\}^2, & X(t_1) > 0, \\ 0, & X(t_1) \leq 0, \end{cases}$$

где  $a$  — положительная, вещественная константа.

2.20. Даны два независимых случайных процесса  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$ , которые в момент времени  $t_1$  описываются НСВ  $X_1(t_1)$  и  $X_2(t_1)$  соответственно. Пусть случайные величины  $X_1(t_1)$  и  $X_2(t_1)$  описывают вышеозначенные процессы в момент времени  $t_1$ , тогда двумерная плотность вероятности, связанная с этими случайными величинами, будет представима в виде произведения одномерных плотностей вероятностей для  $X_1(t_1)$  и  $X_2(t_1)$ :

$$W_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1) = W_{X_1}(x_1; t_1) W_{X_2}(x_2; t_1).$$

Пусть случайный процесс  $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$  описывается в момент времени случайной величиной  $Y(t_1)$ . Определить плотность вероятности  $W_Y(y_1; t_1)$  случайной величины  $Y(t_1)$ .

2.21. Решить задачу 2.20 для случая, когда  $W_{X_1}(x_1; t_1)$  и  $W_{X_2}(x_2; t_1)$  описываются гауссовской плотностью вероятности:

$$W_{X_1}(x_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}}, \quad W_{X_2}(x_2; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}}.$$

### 3. Теория оценок

#### 3.1. Свойства точечных оценок

3.1. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка случайной величины  $X$ , имеющей неизвестное математическое ожидание  $m$ . Показать, что *оценка*  $m$ , определяемая с использованием следующего выражения

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X},$$

является *несмещенной оценкой*  $m$ . Терминологически  $\bar{X}$  — это выборочное среднее.

3.2. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка случайной величины  $X$ , имеющей неизвестное математическое ожидание  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Показать, что *оценка*  $\sigma^2$ , определяемая с использованием следующего выражения

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

является *смещенной оценкой*  $\sigma^2$ . Здесь  $\bar{X}$  — это выборочное среднее.

#### 3.2. Оценка параметров

3.3. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка биномиально распределенной случайной величины  $X$  с параметрами  $n$  и  $p$ , где параметр  $n$  предполагается известным, а параметр  $p$  — неизвестным. Найти *оценку параметра*  $p$  по методу максимального правдоподобия.

3.4. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка случайной величины  $X$ , описываемой распределением Пуассона с неизвестным параметром  $\lambda$ . Найти *оценку параметра*  $\lambda$  по методу максимального правдоподобия.

3.5. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка экспоненциально распределенной случайной величины  $X$  с неизвестным параметром  $\lambda$ . Найти *оценку параметра*  $\lambda$  по методу максимального правдоподобия.

3.6. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка нормально распределенной случайной величины  $X$  с неизвестным математическим ожиданием  $m$  и неизвестной дисперсией  $\sigma^2$ . Найти *оценки параметров*  $m$  и  $\sigma^2$  по методу максимального правдоподобия.

3.7. Пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — случайная выборка случайной величины  $X$ , описываемой распределением Бернулли  $p_X(k; p) = p^k (1-p)^{1-k}$ ,  $k = 0, 1$ , где  $p$  является неизвестным параметром  $0 \leq p \leq 1$ . Найти *оценку параметра*  $p$  по методу максимального правдоподобия.

3.8. Значения случайной выборки 2.9, 0.5, 1.7, 4.3 и 3.2 получены из случайной величины  $X$ , которая распределена равномерно на неизвестном замкнутом интервале  $[a, b]$ . Используя *оценку* по методу максимального правдоподобия, найти *частные реализации оценок*  $a$  и  $b$ .

### **3.3. Оценка значения недоступной для наблюдения случайной величины**

3.9. Найти среднеквадратическую оценку случайной величины  $Y$  константой  $C$ .

3.10. Найти среднеквадратическую оценку случайной величины  $Y$ , как функцию  $g(X)$  случайной величины  $X$ .

3.11. Доказать, что параметры  $a$  и  $b$  в линейной среднеквадратической оценке  $\hat{Y} = aX + b$  можно определить с использованием следующих математических выражений:

$$a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY}, \quad b = m_Y - am_X,$$

где  $\rho_{XY}$  — коэффициент корреляции,  $m_X$ ,  $m_Y$  — математические ожидания случайных величин  $X$  и  $Y$ , а  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  — среднеквадратические отклонения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

3.12. Доказать, что для линейной среднеквадратической оценки  $\hat{Y} = aX + b$  минимальная среднеквадратическая ошибка может быть вычислена с использованием следующего математического выражения:

$$e_m = \sigma_Y^2 \left( 1 - \rho_{XY}^2 \right),$$

где  $\rho_{XY}$  — коэффициент корреляции, а  $\sigma_Y$  — среднеквадратическое отклонение случайной величины  $Y$ .

3.13. Пусть случайная величина  $Y = X^2$ , где  $X$  — равномерно распределенная случайная величина  $[-1, 1]$ . Найти линейную среднеквадратическую оценку  $Y$  в терминах  $X$  и ее среднеквадратическую ошибку.

## 4. Теория принятия решений

### 4.1. Проверка гипотез

4.1. Предположим, что производитель микросхем памяти отмечает, что вероятность отказа микросхемы  $P_{\text{отказ}} = 0.05$ . Пусть была введена новая технология с целью улучшения конструкции микросхем. Для тестирования новой технологии было произведено 200 микросхем. Пусть случайная величина  $X$  отражает число микросхем, не прошедших тестирование. Введем правило принятия решения, при котором данная технология была бы принята, если  $X \leq 5$ :

$H_0 : P_{\text{отказ}} = 0.05$  (не изменяем технологию производства),

$H_1 : P_{\text{отказ}} < 0.05$  (изменяем технологию производства).

Найти вероятность ошибки первого рода.

4.2. Рассмотреть задачу 4.1 в предположении того, что

$H_0 : P_{\text{отказ}} = 0.05$  (не изменяем технологию производства),

$H_1 : P_{\text{отказ}} = 0.02$  (изменяем технологию производства).

Новая технология производства будет отклонена, если  $X > 5$ .  
Найти вероятность ошибки второго рода.

### 4.2. Критерии принятия решений

4.3. В двоичной системе связи каждые  $T$  секунд передается один из двух возможных сигналов. Пусть существуют две гипотезы:

$H_0$  : передан сигнал  $s_0(t)$ ,

$H_1$  : передан сигнал  $s_1(t)$ .

Предположим, что  $s_0(t) = 0$  и  $s_1(t) = 1$ ,  $0 < t < T$ . В канале связи действует аддитивный стационарный шум  $n(t)$ , который представляет нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1. Пусть  $x(t) = s_i(t) + n(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Пусть полученный сигнал  $x(t)$  наблюдается в некоторый момент времени в течение каждого интервала передачи в  $T$  секунд. Допустим, полученное наблюдение равно 0.6.

А. Используя критерий максимального правдоподобия, определить, какой сигнал был передан.

Б. Найти ошибки первого и второго рода.

4.4. Пусть  $X$  — нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ . Пусть существуют две гипотезы:

$$H_0 : \sigma^2 = 2,$$

$$H_1 : \sigma^2 = 5.$$

Определить, используя критерий максимального правдоподобия, при каких значениях  $x$  случайной величины  $X$  будет верна первая или вторая гипотеза.

4.5. В двоичной системе связи каждые  $T$  секунд передается один из двух возможных сигналов. Пусть существуют две гипотезы:

$$H_0 : \text{передан сигнал } s_0(t),$$

$$H_1 : \text{передан сигнал } s_1(t).$$

Предположим, что  $s_0(t) = 0$  и  $s_1(t) = 1$ ,  $0 < t < T$ . В канале связи действует аддитивный стационарный шум  $n(t)$ , который представляет нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1. Пусть  $x(t) = s_i(t) + n(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Пусть полученный сигнал  $x(t)$  наблюдается в некоторый момент времени в течение каждого интервала передачи в  $T$  секунд. Допустим, полученное наблюдение равно 0.6, априорная вероятность  $P(H_0) = 2/3$ , а  $P(H_1) = 1/3$ .

А. Используя критерий максимума апостериорной вероятности, определить, какой сигнал был передан.

Б. Найти ошибки первого и второго рода.

4.6. Пусть  $X$  — нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ . Пусть существуют две гипотезы:

$$H_0 : \sigma^2 = 2,$$

$$H_1 : \sigma^2 = 5.$$

Определить, используя критерий максимума апостериорной вероятности, при каких значениях  $x$  случайной величины  $X$  будет верна первая или вторая гипотеза, предполагая, что априорная вероятность  $P(H_0) = 2/3$ , а  $P(H_1) = 1/3$ .

4.7. В двоичной системе связи каждые  $T$  секунд передается один из двух возможных сигналов. Пусть существуют две гипотезы:

$H_0$  : передан сигнал  $s_0(t)$ ,

$H_1$  : передан сигнал  $s_1(t)$ .

Предположим, что  $s_0(t) = 0$  и  $s_1(t) = 1$ ,  $0 < t < T$ . В канале связи действует аддитивный стационарный шум  $n(t)$ , который представляет нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1. Пусть  $x(t) = s_i(t) + n(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Пусть полученный сигнал  $x(t)$  наблюдается в некоторый момент времени в течение каждого интервала передачи в  $T$  секунд. Допустим, полученное наблюдение равно 0.6, ошибка первого рода равна 0.25.

А. Используя критерий Неймана — Пирсона, определить, какой сигнал был передан.

Б. Найти ошибку второго рода.

4.8. Пусть  $X$  — нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ . Пусть существуют две гипотезы:

$$H_0 : \sigma^2 = 1,$$

$$H_1 : \sigma^2 = 4.$$

Определить, используя критерий Неймана — Пирсона, при каких значениях  $x$  случайной величины  $X$  будет верна первая и вторая гипотеза. Ошибку первого рода положить равной значению 0.25. Найти ошибку второго рода.



4.9. Пусть  $X$  — нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ . Пусть существуют две гипотезы:

$$H_0: \sigma^2 = 2,$$

$$H_1: \sigma^2 = 5.$$

Определить, используя критерий Неймана — Пирсона, при каких значениях  $x$  случайной величины  $X$  будет верна первая и вторая гипотеза. Ошибку первого рода положить равной значению 0.1. Найти ошибку второго рода.

4.10. Рассмотрим бинарную задачу принятия решения со следующими условными плотностями вероятности:

$$W(x | H_0) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$W(x | H_1) = e^{-2|x|}.$$

Пусть стоимости Байеса имеют вид:  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{01} = 2$ ,  $C_{10} = 1$ .

А. Найти правило принятия решения на основе критерия Байеса, если  $P(H_0) = 2/3$ . Определить соответствующий байесовский риск.

Б. Повторить пункт А для случая  $P(H_0) = 1/2$ .

4.11. Рассмотрим бинарную задачу принятия решения со следующими условными плотностями вероятности:

$$W(x | H_0) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$W(x | H_1) = e^{-2|x|}.$$

Пусть стоимости Байеса имеют вид:  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{01} = 1$ ,  $C_{10} = 2$ . Найти правило принятия решения на основе критерия Байеса, если  $P(H_0) = 0.25$ . Определить соответствующий байесовский риск.

4.12. Рассмотрим бинарную задачу принятия решения со следующими условными плотностями вероятности:

$$W(x | H_0) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$W(x | H_1) = e^{-2|x|}.$$

Пусть стоимости Байеса имеют вид:  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{01} = 2$ ,  $C_{10} = 1$ . Найти правило принятия решения на основе минимаксного критерия.

4.13. Рассмотрим бинарную задачу принятия решения со следующими условными плотностями вероятности:

$$W(x | H_0) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$W(x | H_1) = e^{-2|x|}.$$

Пусть стоимости Байеса имеют вид:  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{01} = 1$ ,  $C_{10} = 2$ . Найти правило принятия решения на основе минимаксного критерия.

## 5. Оптимальное обнаружение сигналов

### 5.1. Вероятность ошибки

5.1. Получить выражение для принятия решения при использовании критерия максимального правдоподобия, т. е.

$$d(x(T)) = \begin{cases} H_0, & x(T) > \eta_0, \\ H_1, & x(T) < \eta_0, \end{cases}$$

где  $\eta_0$  — оптимальный порог, минимизирующий вероятность ошибки при  $P(H_0) = P(H_1)$  и равный  $\frac{a_0 + a_1}{2}$ ,  $x(T) = a_i(T) + n_o(T)$ ,  $i = 0, 1$  — выход линейного фильтра,  $a_i$  — сигнальный компонент, а  $n_o(T)$  — компонент шума.

5.2. Доказать, что порог  $\eta_0$  из задачи 5.1 минимизирует вероятность ошибки.

5.3. Двоичная система связи передает сигналы  $s_i(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Пусть  $x(T) = a_i(T) + n_o(T)$ ,  $i = 0, 1$  — выход линейного фильтра, который находится в приемнике, где  $a_i$  — сигнальный компонент ( $a_0 = -1$  и  $a_1 = 1$ ), а  $n_o(T)$  — компонент шума, который является равномерно распределенным

$$W(x | H_0) = \begin{cases} 0.5, & -1.9 \leq x \leq 0.1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$
$$W(x | H_1) = \begin{cases} 0.5, & -0.1 \leq x \leq 1.9, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти вероятность ошибки для случая равновероятных сигналов  $s_i(t)$ ,  $i = 0, 1$ , т. е. для  $P(H_0) = P(H_1)$ .

5.4. Двоичная система связи передает сигналы  $s_i(t)$ ,  $i = 0, 1$  с одинаковой вероятностью. Пусть  $x(T) = a_i(T) + n_o(T)$ ,  $i = 0, 1$  — выход линейного фильтра, который находится в приемнике, где  $a_i$  — сигнальный компонент ( $a_0 = -1$  и  $a_1 = 1$ ), а  $n_o(T)$  — компонент шума, который представляет гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0.1.

А. Определить оптимальное правило принятия решения, используя критерий максимального правдоподобия.

Б. Вычислить вероятность ошибки.

5.5. Двоичная система связи передает сигналы  $s_i(t)$ ,  $i = 0, 1$  с вероятностями  $P(H_0) = 0.25$  и  $P(H_1) = 0.75$ . Пусть  $x(T) = a_i(T) + n_o(T)$ ,  $i = 0, 1$  — выход линейного фильтра, который находится в приемнике, где  $a_i$  — сигнальный компонент ( $a_0 = -1$  и  $a_1 = 1$ ), а  $n_o(T)$  — компонент шума, который представляет гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0.1.

А. Определить оптимальное правило принятия решения, используя критерий максимума апостериорной вероятности.

Б. Вычислить вероятность ошибки.

5.6. Биполярный бинарный сигнал  $s_i(t)$ , принимающий значение  $A$  или  $-A$ , в течение интервала  $(0, T)$  подается на вход линейного фильтра, который представляет собой интегратор (рис. 5.1).

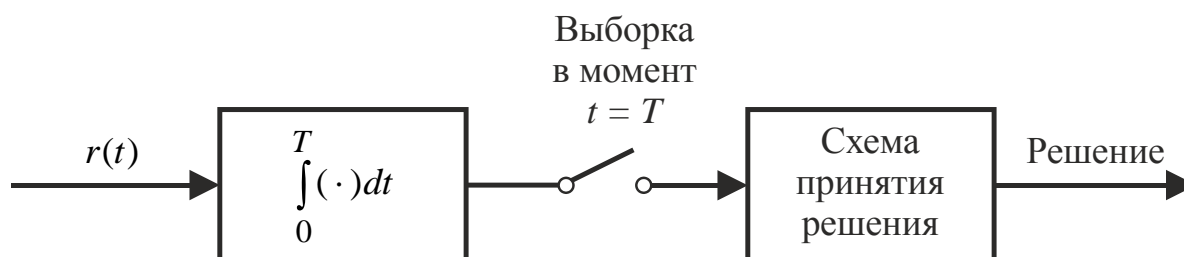


Рис. 5.1. Детектор, использующий интегрирование со сбросом

Предполагая, что  $\sigma_{n_o}^2 = 0.1$ , определить оптимальный порог обнаружения  $\eta_0$ , если априорные вероятности принимают следующие значения:

а)  $P(H_0) = 0.5$ ;

б)  $P(H_0) = 0.7$ ;

в)  $P(H_0) = 0.2$ .

## 5.2. Согласованный фильтр

5.7. Доказать, что отношение «сигнал / шум» на выходе линейного фильтра подчиняется следующему выражению:

$$\left( \frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_o \leq \frac{2E}{N},$$

где  $E$  — энергия входного сигнала  $s(t)$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .

5.8. Найти выход согласованного фильтра и определить максимальное значение  $\left( \frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_o$ , если входной сигнал  $s(t)$  представляет прямоугольный импульс амплитуды  $A$ , заданный на интервале  $(0, T)$ .

5.9. Повторить задачу 5.8, заменив согласованный фильтр на  $RC$ -цепь (напряжение снимается с конденсатора).

5.10. Вычислить выход согласованного фильтра на интервале  $(0, T)$  для сигнала вида:

$$s(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5.11. Найти частотную характеристику оптимального фильтра  $H(j\Omega)$ , которая максимизирует  $\left( \frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_o$  для случая, когда входной шум не является белым.

## 5.3. Помехоустойчивость двоичных систем передачи

5.12. Рассмотрим униполярную передачу сигнала без использования модуляции, то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = 0, & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A, & 0 < t < T. \end{cases}$$

Доказать, что вероятность ошибки на выходе оптимального детектора, т. е. детектора, состоящего из согласованного фильтра и схемы принятия решения на основе критерия максимального правдоподобия, будет определяться следующим выражением:

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N}}\right),$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .

5.13. Рассмотрим биполярную передачу сигнала без использования модуляции, то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = -A, & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A, & 0 < t < T. \end{cases}$$

Доказать, что вероятность ошибки на выходе оптимального детектора, т. е. детектора, состоящего из согласованного фильтра и схемы принятия решения на основе критерия максимального правдоподобия, будет определяться следующим выражением:

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{N}}\right),$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .

5.14. Биполярный бинарный сигнал (см. задачу 5.13), имеющий амплитуду  $A = 1$ , является искаженным аддитивным белым шумом со спектральной плотностью мощности  $N/2 = 10^{-5}$  Вт/Гц. Определить максимальную скорость передачи данных в бит/сек в предположении, что вероятность ошибки  $P_e \leq 10^{-4}$ .

5.15. Рассмотрим передачу сигнала с использованием амплитудной манипуляции, то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = 0, & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A \cos(\Omega_H t), & 0 < t < T, \end{cases}$$

где на интервале  $T$  укладывается целое число периодов несущего колебания. Доказать, что вероятность ошибки на выходе оптимального детектора, т. е. детектора, состоящего из согласованного фильтра и схемы принятия решения на основе критерия максимального правдоподобия, будет определяться следующим выражением:

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4N}}\right),$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .

5.16. Рассмотрим передачу сигнала с использованием фазовой манипуляции, то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = A \cos(\Omega_H t + \pi) = \\ = -A \cos(\Omega_H t), & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A \cos(\Omega_H t), & 0 < t < T, \end{cases}$$

где на интервале  $T$  укладывается целое число периодов несущего колебания. Доказать, что вероятность ошибки на выходе оптимального детектора, т. е. детектора, состоящего из согласованного фильтра и схемы принятия решения на основе критерия максимального правдоподобия, будет определяться следующим выражением:

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{N}}\right),$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .

5.17. Рассмотрим бинарную систему, использующую для передачи данных сигналы вида:

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = 0, & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & 0 < t < T, \end{cases}$$

Пусть  $A = 0.2$  мВ и  $T = 2$  мкс. Аддитивный белый шум со спектральной плотностью мощности  $N/2 = 10^{-15}$  Вт/Гц добавлен в полезный сигнал. Определить вероятность ошибки для случая, когда  $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$ .

5.18. Рассмотрим передачу сигнала с использованием частотной манипуляции, то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} s_0(t) = A \cos(\Omega_0 t), & 0 < t < T, \\ s_1(t) = A \cos(\Omega_1 t), & 0 < t < T. \end{cases}$$

Доказать, что вероятность ошибки на выходе оптимального детектора, т. е. детектора, состоящего из согласованного фильтра и схемы принятия решения на основе критерия максимального правдоподобия, будет определяться следующим выражением:

$$P_e \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N}}\right), \quad \Omega_0 T \gg 1, \quad \Omega_1 T \gg 1 \text{ и } (\Omega_1 - \Omega_0)T \gg 1,$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , а  $N/2$  — спектральная плотность мощности входного шума  $n(t)$ .



## 6. Теория информации и кодирование источника

### 6.1. Основные характеристики дискретных источников

6.1. Имеется одна страница текста, написанного на русском языке. Страница содержит 30 строк по 60 букв в каждой строке. Оценить количество информации в данном тексте. Для простоты рекомендуется полагать, что алфавит языка состоит из 32 букв, выпадающих равномерно.

6.2. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  с вероятностями  $P(x_1) = 0.4$ ,  $P(x_2) = 0.3$ ,  $P(x_3) = 0.2$ ,  $P(x_4) = 0.1$ . Найти энтропию  $H(X)$  источника и определить количество информации, содержащееся в сообщениях  $x_1x_2x_1x_3, x_4x_3x_3x_2$ .

6.3. Пусть  $X$  — двоичный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2$ . Доказать, что энтропия источника  $H(X)$  является максимальной в случае, когда символы  $x_1, x_2$  выпадают равномерно.

6.4. Доказать, что разложение процедуры выбора событий на несколько этапов не изменяет энтропию источника (процедуру выбора событий можно свести к последовательным двоичным решениям). При решении задачи для определенности предположить, что дискретный источник без памяти  $X$  генерирует три символа  $a, b, c$  с вероятностями  $P(a), P(b), P(c)$ .

6.5. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $a, b, c, d, e, f$  с вероятностями  $P(a) = 0.05$ ,  $P(b) = 0.15$ ,  $P(c) = 0.05$ ,  $P(d) = 0.4$ ,  $P(e) = 0.2$ ,  $P(f) = 0.15$ . Найти избыточность и относительную избыточность источника.

6.6. Полутоновое ТВ-изображение высокого разрешения состоит из  $2 \cdot 10^6$  пикселей и 16 различных уровней яркости. Изображения повторяются со скоростью 32 кадра в секунду. Все пиксели предполагаются независимыми, а все уровни яркости появ-

ляются с одинаковой вероятностью. Вычислить информационную производительность источника ТВ-изображения.

6.7. Рассмотрим телеграфный источник, генерирующий два символа: «точка» и «тире». Длительность «точки» составляет 0.2 секунды, а длительность «тире» в три раза больше длительности «точки». Вероятность возникновения «точки» вдвое больше вероятности возникновения «тире», а длительность между символами составляет 0.2 секунды. Вычислить среднюю информационную производительность телеграфного источника.

## **6.2. Дискретные каналы без памяти**

6.8. Дан двоичный канал, для которого переходные вероятности принимают следующие значения:  $P(y_1|x_0)=0.1$ ,  $P(y_0|x_0)=0.9$ ,  $P(y_0|x_1)=0.2$ ,  $P(y_1|x_1)=0.8$ . Найти:

- а) матрицу канала;
- б)  $P(y_0)$  и  $P(y_1)$ , если известно, что  $P(x_0)=P(x_1)=0.5$ ;
- в)  $P(x_0, y_1)$  и  $P(x_1, y_0)$ , если известно, что  $P(x_0)=P(x_1)=0.5$ .

6.9. Даны два двоичных канала, которые соединены последовательно. Для первого канала переходные вероятности принимают вид:  $P(y_1|x_0)=0.1$ ,  $P(y_0|x_0)=0.9$ ,  $P(y_0|x_1)=0.2$ ,  $P(y_1|x_1)=0.8$ ; для второго —  $P(z_1|y_0)=0.1$ ,  $P(z_0|y_0)=0.9$ ,  $P(z_0|y_1)=0.2$ ,  $P(z_1|y_1)=0.8$ .

Найти:

- а) матрицу канала для итогового канала;
- б)  $P(z_0)$  и  $P(z_1)$ , если известно, что  $P(x_0)=P(x_1)=0.5$ .

6.10. Даны два двоичных симметричных канала, которые соединены последовательно. Для первого канала переходные вероятности принимают вид:  $P(y_1|x_0)=0.2$ ,  $P(y_0|x_0)=0.8$ ,  $P(y_0|x_1)=0.2$ ,  $P(y_1|x_1)=0.8$ ; для второго —  $P(z_1|y_0)=0.3$ ,  $P(z_0|y_0)=0.7$ ,  $P(z_0|y_1)=0.3$ ,  $P(z_1|y_1)=0.7$ .

Найти:

- а) матрицу канала для итогового канала;
- б)  $P(z_0)$  и  $P(z_1)$ , если известно, что  $P(x_0)=0.6$  и  $P(x_1)=0.4$ .

6.11. Дан канал с матрицей канала  $\mathbf{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ .

Найти:

а)  $P(y_0)$ ,  $P(y_1)$  и  $P(y_2)$ , если известно, что  $P(x_0)=0.5$  и  $P(x_1)=P(x_2)=0.25$ ;

б) энтропию  $H(Y)$  на выходе канала.

6.12. Дан двоичный канал со стираниями, матрица канала которого имеет вид:  $\mathbf{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$ ;

а) нарисовать диаграмму переходов;

б) найти  $P(y_0)$ ,  $P(y_1)$  и  $P(y_2)$ , если известно, что  $P(x_0)=P(x_1)=0.5$ , а  $p=0.2$ .

6.13. Доказать, что для канала без потерь условная энтропия  $H(X|Y)=0$ .

6.14. Дан канал без помех с  $m$  входными и  $m$  выходными символами. Доказать, что энтропия на входе  $H(X)$  и выходе  $H(Y)$  канала равны, а  $H(Y|X)=0$ .

6.15. Доказать, что для детерминированного канала  $H(Y|X)=0$ .

6.16. Дан канал со входом  $X$  и выходом  $Y$ . Доказать, что если  $X$  и  $Y$  статистически независимы, то  $H(X|Y)=H(X)$  и  $I(X;Y)=0$ .

6.17. Доказать, что совместная энтропия  

$$H(X,Y)=H(X|Y)+H(Y).$$

6.18. Доказать, что совместная энтропия  

$$H(X,Y) \leq H(X)+H(Y),$$

при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  независимы.

6.19. Доказать, что среднее значение информации, передаваемой по каналу  $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$ .

6.20. Дан двоичный симметричный канал с  $P(x0)=\alpha$  и  $P(y1|x0)=P(y0|x1)=p$ . Найти:

- а)  $I(X;Y) = H(Y) + p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p)$ ;
- б)  $I(X;Y)$  для  $\alpha=0.5$  и  $p=0.1$ ;
- в)  $I(X;Y)$  для  $\alpha=0.5$  и  $p=0.5$ . Пояснить результат.

6.21. Доказать, что для канала без потерь пропускная способность канала на символ  $C_S = \log_2(m)$ , где  $m$  — число символов источника  $X$  на входе канала.

6.22. Доказать, что для двоичного симметричного канала пропускная способность канала на символ

$$C_S = 1 + p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p),$$

где  $P(y1|x0)=P(y0|x1)=p$ .

6.23. Найти пропускную способность для двоичного канала со стираниями из задачи 6.12.

6.24. Дан канал с матрицей канала  $\mathbf{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

А. Нарисовать диаграмму переходов.

Б. Найти пропускную способность канала.

### **6.3. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом**

6.25. Найти дифференциальную энтропию  $H(X)$  равномерно распределенной случайной величины  $X$  с плотностью вероятности

$$W_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При решении задачи положить  $a$  равным 1; 2; 0.5.

6.26. Показать, что пропускная способность идеального канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с бесконечной полосой определяется с использованием следующего выражения:

$$C_{\infty} = \frac{1}{\ln(2)} \frac{S}{\eta} \text{ бит/сек.}$$

Здесь  $S$  — это средняя мощность сигнала,  $\eta/2$  — это спектральная плотность мощности белого гауссовского шума.

6.27. Рассмотрим канал с АБГШ с полосой 4 кГц и спектральной плотностью мощности  $\eta/2 = 10^{-12}$  Вт/Гц. Мощность сигнала, требуемая в приемнике, составляет 0.1 мВт. Вычислить пропускную способность этого канала.

6.28. Аналоговый сигнал, имеющий полосу 4 кГц, является продискретизированным с частотой  $1.25 \cdot (2 \cdot B)$ , где  $B$  — это полоса аналогового сигнала. Каждый отсчет является проквантованным в один из 256 равновероятных уровней квантования. Предположим, что следующие друг за другом отсчеты являются независимыми:

- а) найти информационную производительность источника;
- б) может ли выход рассматриваемого источника быть переданным без ошибок по каналу с АБГШ с полосой 10 кГц и отношением «сигнал/шум» 20 дБ?
- в) найти отношение «сигнал/шум», необходимое для передачи без ошибок в пункте б);
- г) найти полосу, требуемую для канала с АБГШ для передачи без ошибок выхода источника, если отношение «сигнал/шум» составляет 20 дБ.

6.29. Пусть  $X$  является случайной величиной с плотностью вероятности  $W_X(x)$  и пусть  $Y = aX + b$ , где  $a$  и  $b$  являются константами. Найти  $H(Y)$  в терминах  $H(X)$ .

6.30. Найти дифференциальную энтропию  $H(X)$  гауссовской случайной величины  $X$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_X^2$ .

6.31. Рассмотрим канал с АБГШ, т. е.  $Y = X + n$ , где  $X$  и  $Y$  вход и выход канала, соответственно, а  $n$  — АБГШ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_n^2$ . Найти  $I(X;Y)$  в случае, когда вход  $X$  является гауссианом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_X^2$ .

6.32. Вычислить пропускную способность канала с АБГШ с полосой 1 МГц и отношением «сигнал/шум» 40 дБ.

#### **6.4. Кодирование источника**

6.33. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2$  с вероятностями  $P(x_1) = 0.9, P(x_2) = 0.1$ . Символ  $x_1$  кодируется как «0», а символ  $x_2$  — «1». Найти эффективность и избыточность рассмотренного кода.

6.34. Пусть  $X^2$  — дискретный источник без памяти, генерирующий четыре символа:  $a_1 = x_1x_1, a_2 = x_1x_2, a_3 = x_2x_1, a_4 = x_2x_2$ . Здесь  $x_1, x_2$  представляют собой символы из задачи 6.33, генерируемые источником  $X$ . Можно сказать, что источник  $X^2$  генерирует за раз составной символ  $x_ix_j, i = 1, 2, j = 1, 2$ . Символ  $a_1$  кодируется как «0»,  $a_2$  — «10»,  $a_3$  — «110»,  $a_4$  — «111». Найти эффективность и избыточность рассмотренного кода.

6.35. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Предположим, что существуют четыре различных кода, кодирующих означенные символы. Код  $A$ :  $x_1$  — «00»,  $x_2$  — «01»,  $x_3$  — «10»,  $x_4$  — «11»; код  $B$ :  $x_1$  — «0»,  $x_2$  — «10»,  $x_3$  — «11»,  $x_4$  — «110»; код  $C$ :  $x_1$  — «0»,  $x_2$  — «11»,  $x_3$  — «100»,  $x_4$  — «110»; код  $D$ :  $x_1$  — «0»,  $x_2$  — «100»,  $x_3$  — «110»,  $x_4$  — «111». Показать, что все коды, за исключением кода  $B$ , удовлетворяют неравенству Крафта. Показать, что коды  $A$  и  $D$  являются однозначно декодируемыми, а коды  $B$  и  $C$  — нет.

6.36. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  с вероятностями  $P(x_1) = 0.5, P(x_2) = 0.25, P(x_3) = 0.125, P(x_4) = 0.125$ . Построить код Шенно-

на — Фано для источника  $X$ . Найти эффективность и избыточность рассмотренного кода.

6.37. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий пять равновероятных символов. Построить код Шеннона — Фано для источника  $X$  и вычислить эффективность и избыточность рассмотренного кода. Построить второй вариант кода Шеннона — Фано для источника  $X$  и вычислить эффективность и избыточность рассмотренного кода. Построить код Хаффмана для источника  $X$  и вычислить эффективность и избыточность рассмотренного кода. Сравнить результаты, полученные в трех случаях кодирования.

6.38. Пусть  $X$  — дискретный источник без памяти, генерирующий символы  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  с вероятностями  $P(x_1) = 0.4$ ,  $P(x_2) = 0.19$ ,  $P(x_3) = 0.16$ ,  $P(x_4) = 0.15$ ,  $P(x_5) = 0.1$ . Построить код Шеннона — Фано для источника  $X$  и вычислить эффективность и избыточность рассмотренного кода. Построить код Хаффмана для источника  $X$  и вычислить эффективность и избыточность рассмотренного кода. Сравнить полученные результаты.

## 7. Основы помехоустойчивого кодирования

7.1. Показать, что код  $C = \{000, 111\}$  является линейным.

7.2. Показать, что код  $C = \{000, 001, 101\}$  не является линейным.

7.3. Рассмотрим следующие кодовые векторы:

$$\mathbf{c}_1 = [10010],$$

$$\mathbf{c}_2 = [01101],$$

$$\mathbf{c}_3 = [11001].$$

А. Найти расстояния Хэмминга  $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ ,  $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$  и  $d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ .

Б. Показать, что  $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \geq d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$ .

7.4. Рассмотрим код  $C = \{000, 111\}$ . Показать, что  $C$  позволяет исправить одну ошибку и не исправляет для случая вектора ошибки  $\mathbf{e} = (110)$ .

7.5. Для систематического линейного блочного кода  $(6, 3)$  проверочные биты  $c_4, c_5, c_6$  формируются с использованием следующих выражений:

$$c_4 = d_1 \oplus d_3,$$

$$c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3,$$

$$c_6 = d_1 \oplus d_2.$$

А. Построить порождающую матрицу  $G$ .

Б. Построить все возможные кодовые слова.

В. Допустим, что принятое слово  $\mathbf{r} = (010111)$ . Декодировать это принятое слово, находя позицию ошибки, и определить переданные биты данных.

7.6. Дан код с проверочной матрицей вида:



$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- А. Определить порождающую матрицу  $G$ .
- Б. Найти кодовое слово, которое начинается с 101....
- В. Допустим, что принятое слово  $\mathbf{r} = (110110)$ . Декодировать это принятое слово.

7.7. Код с повторениями, в котором каждый символ (0 или 1) повторяется  $n$  раз, является  $(n, 1)$  блоковым кодом. В этом коде существует только два кодовых слова. Первое кодовое слово состоит из одних нулей, второе — из одних единиц. Рассмотрим код с повторениями для  $n = 5$ .

- А. Построить порождающую матрицу  $G$  для  $(5, 1)$  блокового кода.
- Б. Используя матрицу  $G$ , найти все кодовые слова.
- В. Найти проверочную матрицу  $H$  для этого кода.
- Г. Показать, что  $GH^T = \mathbf{0}$ .

7.8. Рассмотрим  $(5, 1)$  блоковый код из задачи 7.7.

- А. Вычислить синдром  $\mathbf{s}$  для пяти возможных векторов ошибки, описывающих наличие ошибки только в одном бите.
- Б. Повторить предыдущий пункт для десяти возможных векторов ошибки, описывающих наличие ошибки в двух битах.
- В. Показать, что  $(5, 1)$  код с повторениями способен исправлять до двух ошибок.

## Литература

1. Брюханов, Ю. А. Общая теория связи : учеб. пособие / Ю. А. Брюханов, А. Л. Приоров. — Ярославль: ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2014.
2. Акулиничев, Ю. П. Теория электрической связи : учеб. пособие для вузов / Ю. П. Акулиничев. — СПб. : Лань, 2010.
3. Теория электрической связи : учебник для вузов / под ред. Д. Д. Кловского. — М. : Радио и связь, 1999.
4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Н. Ш. Кремер. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2013.
6. Hsu, H. P. Schaum's outline of theory and problems of probability, random variables, and random processes / H. P. Hsu. — McGraw-Hill, 2011.
7. Hsu H. P. Schaum's outline of analog and digital communications / H. P. Hsu. — McGraw-Hill, 2003.
8. Вернер, М. Основы кодирования : учебник для вузов / М. Вернер. — М. : Техносфера, 2004.
9. Белов, В. М. Теория информации : курс лекций : учеб. пособие для вузов / В. М. Белов, С. Н. Новиков, О. И. Солонская. — М. : Горячая линия — Телеком, 2016.
10. Основы цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / Ю. А. Брюханов, А. Л. Приоров, В. И. Джиган, В. В. Хрящев. — Ярославль : ЯрГУ, 2014.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Случайные величины .....	4
1.1. Интегральная функция распределения, закон распределения дискретной случайной величины и плотность вероятностей.....	4
1.2. Математическое ожидание и дисперсия.....	7
1.3. Условная вероятность. Правило Байеса. Теорема Байеса .....	9
2. Случайные процессы.....	13
2.1. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности. Теорема Винера — Хинчина .....	13
2.2. Прохождение случайных процессов через ЛИС-цепи	14
2.3. Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи.....	15
3. Теория оценок .....	19
3.1. Свойства точечных оценок.....	19
3.2. Оценка параметров.....	19
3.3. Оценка значения недоступной для наблюдения случайной величины .....	20
4. Теория принятия решений.....	22
4.1. Проверка гипотез.....	22
4.2. Критерии принятия решений .....	22
5. Оптимальное обнаружение сигналов .....	27
5.1. Вероятность ошибки .....	27
5.2. Согласованный фильтр .....	29
5.3. Помехоустойчивость двоичных систем передачи .....	29
6. Теория информации и кодирование источника .....	33
6.1. Основные характеристики дискретных источников ...	33
6.2. Дискретные каналы без памяти .....	34
6.3. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом .....	36
6.4. Кодирование источника.....	38
7. Основы помехоустойчивого кодирования.....	40
Литература.....	42

Учебное издание

## **ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ**

Задачник

Составители:

**Волохов** Владимир Андреевич

**Приоров** Андрей Леонидович

**Дубов** Михаил Андреевич

**Апальков** Илья Владимирович

Редактор, корректор М. Э. Левакова

Верстка М. Э. Леваковой

Подписано в печать 25.05.17. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 4 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова.  
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.