

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Фундаментальные алгебраические структуры

Направление подготовки (специальности)
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Систематизация и углубление и пополнение общеалгебраических знаний.

Демонстрация единства алгебры и схожести общеалгебраических результатов.

Изучение фундаментальных результатов в теории групп, колец, полей.

Формирование банка иллюстративных примеров к основным результатам теории групп, колец, полей.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Фундаментальные алгебраические структуры» относится к обязательной части Блока 1.

Она носит теоретический характер, формирует общематематическую культуру обучающихся, прививает и демонстрирует стандарт математической строгости. Изучаемые результаты составляют фундамент деятельности как математика-исследователя, так и прикладника, применяющего математические средства, методы и результаты в компьютерных науках. Результаты изучения данной дисциплины находятся в непосредственной связи с такими дисциплинами магистерской программы, как «Современные проблемы математики», «Современная алгебра», «Алгебраическая алгоритмика», «Методы защиты информации», «Вычислительные методы в алгебре и теории чисел», «Теория представлений».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ИД-ОПК-1.1 Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики ИД-ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности ИД-ОПК-1.3 Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	Знать основные понятия и результаты теории полугрупп, групп, колец Уметь распознавать и анализировать алгебраические структуры, возникающие в конкретных математических задачах, корректно формулировать утверждения Владеть навыками вычислений в алгебраических структурах

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа	С а М	

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
1	<i>Множества и операции</i>		2	2				16	Домашняя контрольная работа № 1
2	<i>Группы</i>		7	7		2		33	Домашняя контрольная работа № 2
3	<i>Кольца</i>		7	7		2		33	Домашняя контрольная работа № 3
						2	0,5	33,5	экзамен
	ИТОГО		16	16		6	0,5	105,5	144

Содержание разделов

1. Множества и операции.

1.1. Множества. Алгебраические операции. группоиды. Ассоциативность, коммутативность, нейтральный, обратимый и обратный элементы. Полугруппы и моноиды. Полугруппы и группы. Группа обратимых элементов полугруппы с единицей. Подгруппоиды, подполугруппы, подмоноиды. Описание подгрупп в группе целых чисел. Вложение коммутативной полугруппы с сокращениями в группу.

1.2. Гомоморфизмы группоидов, полугрупп и групп, их свойства. Образ и ядро гомоморфизма. Отношение эквивалентности, согласованное с бинарной алгебраической операцией. Факторгруппоид, естественный гомоморфизм. Случаи полугруппы и группы. Пример: аддитивная группа и мультипликативная полугруппа классов вычетов по модулю n . Теорема о гомоморфизмах для группоидов.

2. Группы.

2.1. Симметрическая группа. Знак перестановки, знакопеременная группа. Операция возведения элемента группы в целую степень и связанный с ней гомоморфизм. Циклические подгруппы и циклические группы. Примеры. Порядок элемента группы. Классификация циклических групп.

2.2. Эндоморфизмы и автоморфизмы алгебраической системы. Левые и правые сдвиги на группе. Внутренние автоморфизмы группы. Центр группы. Группа внутренних автоморфизмов группы и ее описание.

2.3. Отношения эквивалентности в группе, определяемые подгруппой. Классы смежности. Нормальные подгруппы. Описание отношений эквивалентности в группе, согласованных с операцией. Теорема о гомоморфизмах для групп. Две теоремы об изоморфизмах для групп.

2.4. Конечные группы. Теорема Лагранжа и следствия из нее.

2.5. Произведение подмножеств и подгрупп в группе. Прямое произведение группоидов и групп. Разложение группы в прямое произведение подгрупп. Связь с понятием прямого произведения групп. Теорема о разложении группы в произведение двух нормальных подгрупп. Китайская теорема об остатках, разложение конечной циклической группы.

2.6. Действие группы на множестве. Примеры, теорема Кэли. Эквивалентность, определяемая действием. Орбиты и стабилизаторы. Эквивариантное отображение. Изоморфизмы действий. Транзитивные действия. Теорема о транзитивных действиях. Теорема о длине орбиты (лемма Бернсайда).

2.7. Классификация конечных абелевых групп.

3. Кольца.

3.1. Коммутативные и ассоциативные кольца, кольца с единицей. Примеры. Аддитивная и мультипликативная группы кольца. Простейшие свойства колец. Подкольца, идеалы, левые и правые идеалы кольца. Главные идеалы и конечно порожденные идеалы.

3.2. Гомоморфизмы колец, их свойства. Образ и ядро гомоморфизма. Факторкольцо, естественный гомоморфизм на факторкольцо. Факторкольцо по идеалу. Описание отношений эквивалентности в кольце, согласованных с операциями. Теорема о гомоморфизмах для колец.

3.3. Делители нуля в кольце. Характеристика кольца с единицей. Теорема о характеристике кольца без делителей нуля.

3.4. Область целостности. Поле частных области целостности и его универсальное свойство. Некоторые специальные классы областей целостности.

3.4. Тела и поля, их простейшие свойства. Понятие о расширениях полей. Степень расширения. Тело кватернионов.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Тимофеева Н.В. Алгебраические структуры / Н. В. Тимофеева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2021. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие. - Б.м.: Б.и., 2021. - 79 с. lib.uniyar.ac.ru/orac/bk_cat_card.php?rec_id=2546098&cat_cd=YARSUEPS

б) дополнительная литература

1. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебник / Э. Б. Винберг. — 2-е изд. — Москва : МЦНМО, 2013. — 590 с. — ISBN 978-5-4439-2013-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/56396>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/56396?category=907>

2. Городенцев, А. Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков : учебное пособие / А. Л. Городенцев. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Часть 1 — 2014. — 485 с. — ISBN 978-5-4439-2087-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/56398>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/56398?category=907>

3. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : учебник / Р. Зуланке, А. Л. Онищик. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Том 2 : Модули и алгебры — 2008. — 336 с. — ISBN 978-5-94057-351-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9346>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/9346?category=908>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м.н. Н.В. Тимофеева

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Фундаментальные алгебраические структуры»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Домашняя контрольная работа № 1 (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)

1. Дано определение полугруппы с сокращениями. Построить содержащую ее группу.
2. Докажите, что в моноиде левый обратный любого элемента (если он существует) является правым обратным, и наоборот.
3. Выведите формулу элемента, обратного к произведению обратимых элементов моноида.
4. Какие из алгебраических структур известных вам типов имеются на множестве всех четных целых чисел? Всех нечетных целых чисел? (описать как можно больше структур)

Домашняя контрольная работа № 2 (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)

1. Построить несколько (не менее двух) представлений данной группы перестановками.
2. Пусть G – группа, H, N – ее подгруппы, причем N нормальна. Докажите, что подгруппа, заданная пересечением N и H , нормальна в H .
3. Группа G действует на себе а) левыми сдвигами б) сопряжениями. Выясните для каждого из этих действий, будет ли оно 1) эффективным 2) транзитивным?
4. Перечислите все факторгруппы группы $Z_{12} \times Z_2$
5. Опишите все подгруппы в группе Z_{12}
6. Найдите все эндоморфизмы и автоморфизмы аддитивной группы Z_6
7. Докажите, что факторгруппа C^*/R^* группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе ненулевых вещественных чисел изоморфна группе $SO_2(R)$ вращений евклидовой плоскости.
8. Изоморфны ли группы $Z_{10} \times Z_{12}$ и $Z_6 \times Z_{20}$? Обоснуйте ответ.

Домашняя контрольная работа № 3 (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)

1. Дано кольцо, не содержащее единицу. Вложить его в кольцо с единицей.
2. Найдите центр матричной алгебры над полем (любым доступным вам способом).
3. Перечислите все гомоморфизмы кольца Z_{12} в $Z_2 \oplus Z_3$
4. Докажите, что ядро гомоморфизма коммутативного кольца с единицей на поле является максимальным идеалом, а факторкольцо коммутативного кольца с единицей по максимальному идеалу является полем.
5. Найдите следующие степени расширений: $[Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) : Q]$ и $[Q(\sqrt{6}) : Q(\sqrt{2})]$.
6. Постройте бесконечное расширение поля рациональных чисел.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Экзаменационное испытание состоит из двух вопросов (входящих в экзаменационный билет) и задачи из приведённых списков. Экзаменационный билет и задача достаются студенту независимо и случайным образом.

Экзаменационные вопросы (ИД-ОПК-1.1)

1. Алгебраические операции. Gruppoиды. Ассоциативность, коммутативность, нейтральный, обратимый и обратный элементы. Полугруппы и моноиды.
2. Полугруппы и группы. Группа обратимых элементов полугруппы с единицей. Полугруппа преобразований множества. Симметрическая группа.
3. Подгруппоиды, подполугруппы, подмоноиды. Описание подгрупп в группе целых чисел.
4. Гомоморфизмы группоидов и групп, их свойства. Образ и ядро гомоморфизма. Знак перестановки, знакопеременная группа.
5. Отношение эквивалентности, согласованное с бинарной алгебраической операцией. Факторгруппоид, естественный гомоморфизм на факторгруппоид. Случаи полугруппы и группы. Пример: аддитивная группа и мультипликативная полугруппа классов вычетов по модулю n .
6. Теорема о гомоморфизмах для группоидов.
7. Операция возведения элемента группы в целую степень и связанный с ней гомоморфизм. Циклические подгруппы и циклические группы. Примеры.
8. Порядок элемента группы. Классификация циклических групп.
9. Вложение коммутативной полугруппы с сокращениями в группу.
10. Эндоморфизмы и автоморфизмы. Левые и правые сдвиги. Внутренние автоморфизмы группы. Центр группы. Группа внутренних автоморфизмов группы и ее описание.
11. Отношения эквивалентности в группе, определяемые подгруппой. Классы смежности. Нормальные подгруппы. Описание отношений эквивалентности в группе, согласованных с операцией.
12. Теорема о гомоморфизмах для групп. 2-я теорема об изоморфизмах для групп.
13. 1-я теорема об изоморфизмах для групп.
14. Конечные группы. Теорема Лагранжа.
15. Произведение подмножеств и подгрупп в группе.
16. Прямое произведение группоидов и групп.
17. Разложение группы в прямое произведение подгрупп. Связь с понятием прямого произведения групп.
18. Китайская теорема об остатках, разложение конечной циклической группы.
19. Действие группы на множестве. Примеры, теорема Кэли. Эквивалентность, определяемая действием. Орбиты и стабилизаторы. Теорема о длине орбиты. Эквивариантное отображение. Изоморфизмы действий.
20. Классификация конечных абелевых групп.
21. Кольца. Коммутативные и ассоциативные кольца, кольца с единицей. Аддитивная и мультипликативная группы кольца. Простейшие свойства колец.
22. Подкольца, идеалы, левые и правые идеалы кольца. Главные идеалы и конечно порожденные идеалы.
23. Гомоморфизмы колец, их свойства. Образ и ядро гомоморфизма.
24. Факторкольцо, естественный гомоморфизм на факторкольцо. Описание отношений эквивалентности в кольце, согласованных с операциями. Теорема о гомоморфизмах для колец.
25. Делители нуля в кольце. Характеристика кольца с единицей. Теорема о характеристике кольца без делителей нуля.
26. Область целостности и её поле частных. Универсальность поля частных области целостности.
27. Тела и поля, их простейшие свойства. Тело кватернионов.

Задачи к экзамену (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)

1. Найти ранг полугруппы натуральных чисел по сложению. То же самое для полугруппы векторов n -мерного вещественного пространства, координаты которых являются натуральными числами.
2. Докажите, что в моноиде левый обратный любого элемента (если он существует) является правым обратным, и наоборот.
3. Выведите формулу элемента, обратного к произведению обратимых элементов моноида.
4. Составьте таблицу Кэли для группы D_4 .
5. Докажите, что группы S_3 и D_3 изоморфны. Перечислите все их гомоморфизмы в группы меньших порядков.
6. Перечислите все классы изоморфизма абелевых групп порядка 256.
7. Опишите решетку подгрупп в группе A_4 .
8. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является двусторонним идеалом.
9. Докажите, что ядро гомоморфизма коммутативного кольца с единицей на поле является максимальным идеалом, а факторкольцо коммутативного кольца с единицей по максимальному идеалу является полем.
10. Найдите центр матричной алгебры над полем (любым доступным вам способом).
11. Постройте пример бесконечного алгебраического расширения.
12. Найдите следующие степени расширений: $[Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) : Q]$ и $[Q(\sqrt{6}) : Q(\sqrt{2})]$.
13. Опишите все подгруппы в группе Z_{12} .
14. Найдите все эндоморфизмы и автоморфизмы аддитивной группы Z_6 .
15. Построить отношение эквивалентности на группе целых чисел, не согласованное с операцией сложения.
16. Найти все образующие аддитивной группы Z_8 .
17. Докажите, что факторгруппа C^* / R^* группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе ненулевых вещественных чисел изоморфна группе $SO_2(R)$ вращений евклидовой плоскости.
18. Найдите группу всех обратимых элементов кольца классов вычетов Z_{12} . Является ли она циклической?
19. Докажите, что группа $GL_2(Z_2)$ невырожденных матриц порядка 2 над полем Z_2 изоморфна группе перестановок S_3 .
20. Докажите, что кольцо эндоморфизмов аддитивной группы Z или Z_n изоморфно кольцу Z или Z_n соответственно.
21. Перечислите все гомоморфизмы кольца Z_{12} в $Z_2 \oplus Z_3$.
22. Перечислите все классы неизоморфных групп, имеющих порядки, не превосходящие 7.
23. Изоморфны ли группы $Z_{10} \times Z_{12}$ и $Z_6 \times Z_{20}$? Обоснуйте ответ.
24. Перечислите все гомоморфизмы кольца Z_8 в $Z_4 \oplus Z_3$.
25. Перечислите все факторгруппы группы $Z_{12} \times Z_2$.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Фундаментальные алгебраические структуры»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Фундаментальные алгебраические структуры» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и результаты алгебраических теорий и наработать навыки построения математических доказательств. Для решения всех задач необходимо понимать лекционный материал не только на уровне результатов и примеров, но и в деталях доказательств. Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. Особенностью курса является то, что в нем практически нет задач «вычислительного плана» и далеко не все задачи сводятся к применению готовых алгоритмов: даже весьма простые из задач требуют догадки и/или наблюдательности для своего решения. Единственным выходом в этой ситуации является систематическое занятие предметом, разбор «готовых» доказательств/рассуждений, подготовка вопросов для обсуждения с преподавателем (на занятии или в порядке индивидуальной консультации) и выполнение домашнего задания в несколько попыток.

Экзамен принимается по экзаменационным билетам. Экзаменационное задание билета включает в себя два теоретических вопроса и задачу, получаемую студентом случайным образом из фиксированного набора. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить самостоятельно вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Фундаментальные алгебраические структуры», студенту крайне сложно. Это связано со сложностью и высокой степенью абстрактности изучаемого материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым.