

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Теория представлений**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

**1. Цели освоения дисциплины** Целями освоения дисциплины «Теория представлений групп и ассоциативных алгебр» являются: обеспечение подготовки в одной из важных областей математики и ее приложений, знакомство с современными понятиями теории обыкновенных линейных представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Математический аппарат теории представлений широко используется во многих разделах математики и физики, причем сфера его приложений все время расширяется. Более того, будучи относительно законченной, данная теория служит образцом для теории представлений других алгебраических систем –компактных групп, групп Ли и теории сложности вычислений.

## **2. Место дисциплины в структуре программы**

Дисциплина «Теория представлений» относится к обязательной части образовательной программы и является дисциплиной по выбору вариативной части Б1.О.06.ДВ.04.02 Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов, применяемых для анализа представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих математических дисциплин: теории чисел, линейной алгебры, аналитической геометрии.

## **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы и критерии их оценивания**

- готовность к исследованию в области алгебраической геометрии, алгебраической и ана

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

<b>Формируемая компетенция (код и формулировка)</b>	<b>Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)</b>	<b>Перечень планируемых результатов обучения</b>
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК-2 Способен разрабатывать организационно-распорядительных документов по обеспечению информационной безопасности;	ИД-1 Знает основные компоненты системного программного обеспечения; типы операционных систем; командный и программный интерфейс пользователя с операционной системой; типы, организацию	<b>1. Знать:</b> Основные методы и формулировки результатов, использующихся в защите информации <b>2. Уметь</b> обосновывать алгоритмы защиты информации <b>3. Владеть</b> навыками быстрых вычислений в основных алгебраических системах

## **4. Объем, структура и содержание дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часов

Дисциплина изучается в течение первого семестра. Формой итоговой аттестации по дисциплине является зачет.

<b>№ п/п</b>	<b>Темы (разделы) дисциплины, их содержание</b>	<b>Семестр</b>	<b>Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)</b>	<b>Формы текущего контроля успеваемости</b>
--------------	---	----------------	---	---

			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1	Представления над $\mathbb{C}$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура	1	5				13	Задания для самостоятельной работы. Контрольная работа
2	Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров	1	5			2.3	13	Задания для самостоятельной работы
3	Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления	1	8			2	9.7	Задания для самостоятельной работы
		1						Зачет
<b>Всего 72 часа</b>			<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4.3</b>	<b>35.7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема № 1: Представления над $\mathbb{C}$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура.

Приводимые и неприводимые представления. Характеры. Комплексные и целочисленные представления. Центр групповой алгебры. Теорема Машке и Лемма Шура. Свойства характеров конечных групп. Регулярное представление и групповая алгебра. Представления абелевых групп и дискретное преобразование Фурье.

**Тема № 2: Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров.** Скалярное произведение и соотношения ортогональности для обыкновенных характеров. Таблица характеров конечной группы. Поле алгебраических чисел. Индуцированные характеры. Теорема взаимности Фробениуса. Лемма Бернсайда и ее следствия. Разрешимые группы. Теорема Казарина и модулярные представления.

**Тема № 3: Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления.** Перечислительная теорема Бернсайда. Действие группы на множестве и подсчет орбит. Свертка и ДПФ. Применение преобразования Фурье к быстрым вычислениям. Обработка сигналов и теория групп. Теорема Вигнера о просто разложимых группах и теоремы Казарина, Чанкова и Янишевского.

### 5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- **вступление** (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и

последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- GAP (GNU GPL).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры, М: Физматлит, 2000
2. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. , Екатеринбург: УрО РАН, 2009, 379 с.
3. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (под ред. Л.С.Казарина), М.:Мир, 1999.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000. – 239 с.

### **б) дополнительная литература**

1. Циммерман К.-Х., Методы теории модулярных представлений в алгебраической теории кодирования. М.:МЦНМО, 2011.
2. Струнков С.П. Введение в теорию представлений конечных групп. М: МИФИ, 1999
3. Глухов М.М., Круглов И.А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров с приложениями в криптографии. Лань: Сп-б, 2015
4. Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам, Ленанд, 2015
5. Казарин Л.С. О  $p^a$ -лемме Бернсайда Математические заметки. – 1990. – Т. 48, вып. 2. – С. 45-48.
6. Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы. Математический сборник. – 2010. – Т. 201, вып. 5. – С. 27-40.
7. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. W.Feit, Characters of finite groups, Yale University.W.A.Benjamin, Inc., N,Y.- Amsterdam, 1967
10. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009

### **в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: <http://www.lib.uniyl.ac.ru/>
3. <http://mech.math.msu.su/departments/>  
([http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (<http://www.edu.ru/library>).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).
6. [http:// www.tc26.ru](http://www.tc26.ru)
7. [http:// www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub_id=919061)
6. <http://habrahabr.ru/post/210684/>
8. [http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub_id=919061)
9. <http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po-issledovaniyu-khesh-funksii-stribog/>

## **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики  
профессор, д.ф-м.н. Казарин Л.С

**Приложение к №1 рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений»**

**Оценочные средства  
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к зачету:**

1. Представление группы. Приводимые и неприводимые представления.
2. Характер представления.
3. Комплексные и модулярные представления. Примеры.
4. Центр групповой алгебры.
5. Теорема Машке.
6. Лемма Шура.
7. Регулярное представление. Конечность числа попарно неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы.
8. Представления конечных абелевых групп.
9. Циклическая свертка и ДПФ.
10. Полупростые конечномерные алгебры и идеалы.
11. Строение групповой алгебры конечной группы над полем комплексных чисел.
12. Скалярное произведение характеров и соотношения ортогональности.
13. Таблица характеров конечной группы.
14. Поле алгебраических чисел.
15. Индуцированные представления.
16. Теорема взаимности Фробениуса.
17. Лемма Бернсайда и разрешимые группы.
18. Теорема Казарина – Бернсайда (без доказательства).
19. Модулярные представления. Определение и примеры.
20. Применения теории представлений к физическим задачам.
21. Действие группы на множестве. Перечислительная теорема Бернсайда.
22. Применение ДПФ к быстрым вычислениям.
23. Обработка сигналов и теория групп.
24. Просто приводимые группы. Теорема Вигнера.
25. Теоремы Казарина-Чанкова-Янишевского.

**1.2 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельно работы по теме 1**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, § 22, задачи из подпунктов 22.1 – 22.19, .

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4, гл.4, §4

### **Задания для самостоятельно работы по теме 2**

По задачку Белоголов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, , § 22, задачи из подпунктов 22.21 – 22.42, 22.45 – 22.58, .

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §6 и , §7, гл

### **Задания для самостоятельно работы по теме 3**

По книге Ноден П., Китте К. «Алгебраическая алгоритмика», гл.V, упражнения 29 – 36

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4

### **Контрольная работа**

1. Вычислить таблицу характеров знакопеременной группы степени 5..
2. Найти формулы для свертки двух многочленов степени 5, используя дискретное преобразование Фурье в конечном поле (в зависимости от значений коэффициентов).
3. Верно ли, что любое точное двумерное представление конечной группы над  $\mathbb{C}$  неприводимо?
4. Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$  и  $\beta$  – ее регулярный характер. Доказать, что индуцированный характер  $\beta^G$  является ее регулярным характером.
5. Найти все неприводимые характеры группы, являющейся прямым произведением двух групп кватернионов порядка 8.

### **Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины**

#### **Компетенция ОПК-2**

**1. Группа порядка 36 действует на некотором множестве. Орбиты каких длин возможны?**

- А) 1,2,4,
- Б) 1,3,9,
- В) 1,2,3,4,6,9,12,18,36
- Г) длин, не являющихся делителями 36.

**2. Перечислите число и степени неэквивалентных неприводимых представлений группы кватернионов  $Q_8$**

- А) 5 представлений степеней 1,1,1,1,2
- Б) 2 представления степеней 2 и 2
- В) 3 представления степени 2
- Г) 2 представления степени 3

**3. Регулярное представление конечной нетривиальной группы**

- А) имеет степень, равную порядку группы, и неприводимо
- Б) имеет степень, равную порядку группы, и всегда приводимо
- В) имеет степень, равную 1.



**4. Неприводимые неэквивалентные представления абелевой группы порядка 12**

А) имеют степени 1,2,3,4,12,

Б) имеют степень 1, их 12 штук,

В) имеют степень 1, их 5 штук.

Вопрос №	Правильный ответ
1	В
2	А
3	Б
4	Б

**Оценка сформированности компетенций**

Компетенции	Номера вопросов	Уровень формирования	Количество правильных ответов, критерии
ОПК-2	1-4	Пороговый	Не менее 2
		Продвинутый	Не менее 3
		Высокий	Не менее 4

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

**Учебно-методическое обеспечение  
самостоятельной работы студентов по дисциплине**

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,  
рекомендованных к использованию при освоении дисциплины**

Электронные ресурсы ЯрГУ (<http://lib.uniyar.ac.ru>)

1. Библиографические записи всех видов документов, составляющих фонд библиотеки, на русском и иностранных языках и поступивших позже 1995 года:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) (в открытом доступе)

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)

4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека Online»:

[www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

5. Проект MAPC: <http://mars.arbicon.ru>.

6. Электронно-библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>

7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru: <http://elibrary.ru>

8. Англоязычные библиотеки в сети университета:

а) MathSciNet: <http://www.ams.org/snhtml/annser.csv> - с платформы издателя  
<http://search.ebscohost.com/> - с платформы Ebscohost

б) Web of Science: <http://webofscience.com>

в) Scopus: <http://www.scopus.com>

г) Science The American Association for the Advancement of Science:

<http://www.sciencemag.org>

д) Ресурсы Springer

SpringerJournals: <http://link.springer.com/>

SpringerProtocols: <http://www.springerprotocols.com/>

SpringerMaterials: <http://materials.springer.com/>

SpringerReference: <http://link.springer.com>

zbMATH: <http://zbmath.org/>