

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Современная алгебра**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Систематизация, углубление и пополнение общеалгебраических знаний.

Изучение основных важных результатов из теории групп, колец, модулей, ознакомление с начальными понятиями теории категорий и универсальной алгебры.

Формирование банка иллюстративных примеров к основным результатам теории групп, колец, полей, модулей.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Современная алгебра» относится к обязательной части Блока 1 и является дисциплиной по выбору.

Она носит теоретический характер, формирует общематематическую культуру обучающихся, прививает и демонстрирует стандарт математической строгости. Изучаемые результаты составляют фундамент деятельности как математика-исследователя, так и прикладника, применяющего математические средства, методы и результаты в компьютерных науках. Результаты изучения данной дисциплины находятся в непосредственной связи с такими дисциплинами магистерской программы, как «Современные проблемы математики», «Современная алгебра», «Алгебраическая алгоритмика», «Методы защиты информации», «Вычислительные методы в алгебре и теории чисел», «Теория представлений», «Фундаментальные алгебраические структуры».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	<b>ИД-ОПК-1.1</b> Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики <b>ИД-ОПК-1.2</b> Умеет использовать их в профессиональной деятельности <b>ИД-ОПК-1.3</b> Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<b>Знать</b> основные понятия и результаты для групп, колец, полей, алгебр <b>Уметь</b> распознавать и анализировать алгебраические структуры, возникающие в конкретных математических задачах, корректно формулировать утверждения <b>Владеть навыками</b> вычислений в алгебраических структурах

### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа	СР	

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
1	<i>Группы</i>		2	2				5	Задание для сам. работы 1
2	<i>Коммутативные кольца</i>		4	6				8	Задание для сам. работы 2
3	<i>Поля и алгебры</i>		4	4		2		8	Задание для сам. работы 3
4	<i>Модули</i>		4	4				8	Задание для сам. работы 4
5	<i>Категории и универсальная алгебра</i>		2	0		2		4	Задание для сам. работы 5
							0,3	2,7	зачёт
	<b>ИТОГО</b>		16	16		4	0,3	35,7	72

### Содержание разделов

#### 1. Группы.

Теоремы Силова. Коммутант. Разрешимые группы.

**2. Коммутативные кольца.** Простые и максимальные идеалы коммутативного кольца и факторкольца по ним. Радикал Джекобсона кольца. Классически полупростое кольцо. Нётеровы и артиновы кольца. Главные идеалы. Кольцо главных идеалов как пример нётерова кольца. Теорема Гильберта о базисе.

**3. Поля и алгебры.** Алгебры с делением над полем вещественных чисел. Теорема Фробениуса. Подполя, расширения полей. Простые поля, их описание. Теорема о существовании и единственности простого подполя. Конечные и алгебраические расширения. Степень конечного расширения. Алгебраические и трансцендентные числа. Поле алгебраических чисел. Конечные поля и их строение.

**4. Модули.** Примеры модулей. Гомоморфизмы модулей. Ядро и образ гомоморфизма модулей. Подмодули и фактормодули. Аннулятор (кручение). Точный модуль. Циклический модуль. Аннулятор элемента модуля. Периодические модули и модули без кручения. Простой модуль. Лемма Шура. Свободные модули. Конечно порожденные модули и конечно представимые модули. Ранг модуля. Модули над кольцом главных идеалов.

**5. Категории и универсальная алгебра.** Алгебраические системы. Определения. Примеры алгебраических систем. Модели. Конечные геометрии. Категории и функторы. Морфизмы их классы: эпи-, моно-, би-, изо-. Связь с сюръективностью, инъективностью, биективностью морфизмов в категориях структуризованных множеств. Пример несюръективного эпиморфизма. Примеры категорий. Понятие об абелевой категории.

### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На

этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Тимофеева Н.В. Алгебраические структуры / Н. В. Тимофеева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2021. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие. - Б.м.: Б.и., 2021. - 79 с.  
[lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_card.php?rec\\_id=2546098&cat\\_cd=YARSUEPS](http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=2546098&cat_cd=YARSUEPS)

### **б) дополнительная литература**

1. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебник / Э. Б. Винберг. — 2-е изд. — Москва : МЦНМО, 2013. — 590 с. — ISBN 978-5-4439-2013-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/56396>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/56396?category=907>

2. Городенцев, А. Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков : учебное пособие / А. Л. Городенцев. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Часть 1 — 2014. — 485 с. — ISBN 978-5-4439-2087-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/56398>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/56398?category=907>

3. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : учебник / Р. Зуланке, А. Л. Онищик. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Том 2 : Модули и алгебры — 2008. — 336 с. — ISBN 978-5-94057-351-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9346>. — Режим доступа: для авториз. пользователей. <https://e.lanbook.com/book/9346?category=908>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м.н. Н.В. Тимофеева

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Современная алгебра»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

**Задание для самостоятельной работы 1. (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)**

1. Постройте силовские подгруппы и ряд коммутантов группы  $A_4$ . Разрешима ли она? Постройте её композиционный ряд (нормальный ряд с абелевыми факторгруппами), если он существует.

**Задание для самостоятельной работы 2. (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)**

2. Опишите простые и максимальные идеалы в кольцах многочленов от одной переменной над полями вещественных и комплексных чисел.

3. Сформулируйте и докажите китайскую теорему об остатках в кольце многочленов.

4. Дано кольцо  $k[x]/(x^2)$ , где  $k$  -- поле. Опишите делители нуля и нильпотенты в этом кольце.

5. То же самое для кольца  $k[x,y]/(xy)$ .

6. Артиновы ли кольца задач 4 и 5? Нётеровы? Обоснуйте ответы.

7. Охарактеризуйте простые идеалы в кольце задачи 5, если поле  $k$  алгебраически замкнуто.

8. Является ли кольцо  $Z[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$  кольцом главных идеалов?

**Задание для самостоятельной работы 3. (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)**

9. Опишите структуру факторколец по максимальным идеалам в условиях задачи 2.

10. Является ли  $Q(\sqrt{2})$  подполем в  $Q(\sqrt{6})$ ?

11. Найдите следующие степени расширений:  $[Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) : Q]$  и  $[Q(\sqrt{6}) : Q(\sqrt{2})]$ .

12. Найдите минимальный полином элемента  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  над полем рациональных чисел.

13. То же самое для  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  над полем  $Q(\sqrt{6})$ .

14. Докажите, что в конечномерной алгебре с единицей всякий элемент, не являющийся делителем 0, обратим. Выведите отсюда, что любая конечномерная алгебра без делителей 0 является телом.

15. Докажите, что любая коммутативная ассоциативная алгебра над полем  $k$ , порожденная конечным числом элементов, изоморфна факторалгебре алгебры полиномов от подходящего числа неизвестных для подходящего по некоторому идеалу.

**Задание для самостоятельной работы 4. (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)**

16 – 20 : № 1813, 1816, 1817, 1818, 1819 [Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре // И.В. Проскуряков. Изд. 13-е. СПб., 2010]

**Задание для самостоятельной работы 5. (ИД-ОПК-1.2, ИД-ОПК-1.3)**

21. Докажите, что вложение кольца целых чисел в поле рациональных является эпиморфизмом. Является ли оно мономорфизмом?
22. Опишите объекты и морфизмы категории, заданной графом.
23. Охарактеризуйте сигнатуры группы, векторного пространства и множества, на котором действует группа.

**10. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Зачёт** выставляется по итогам собеседования (ИД-ОПК-1.1) по заданиям для самостоятельной работы (показать и пояснить 1-2 задачи из каждого задания по выбору преподавателя). Могут быть заданы теоретические вопросы на определения основных понятий, пояснение результатов и примеры, иллюстрирующие обсуждаемые понятия и результаты.

## Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Современная алгебра»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Фундаментальные алгебраические структуры» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и результаты алгебраических теорий и увидеть их работу на конкретных примерах, а сами алгебраические структуры – в конкретных ситуациях. Для решения всех задач необходимо понимать лекционный материал не только на уровне результатов и примеров, но и в деталях изложенных доказательств. Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. Особенностью курса является то, что в нем практически нет задач «вычислительного плана» и далеко не все задачи сводятся к применению готовых алгоритмов (хотя продумывание решений некоторых задач приводит к уяснению некоторых стандартных процедур; это является хорошей иллюстрацией того факта, что алгоритм – результат, а не исходный объект работы математика): задачи, в общей массе несложные, требуют вдумчивости и/или наблюдательности для своего решения. Выходом в этой ситуации является систематическое занятие предметом, разбор «готовых» доказательств/рассуждений, подготовка вопросов для обсуждения с преподавателем (на занятии или в порядке индивидуальной консультации) и выполнение домашнего задания в несколько подходов.

**Зачёт** выставляется по итогам собеседования по заданиям для самостоятельной работы (показать и пояснить 1-2 задачи из каждого задания по выбору преподавателя). Могут быть заданы теоретические вопросы на определения основных понятий, пояснение результатов и примеры, иллюстрирующие обсуждаемые понятия и результаты.

Освоить самостоятельно вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Современная алгебра», студенту весьма трудно. Это связано с разнообразием и высокой степенью абстрактности изучаемого материала. Поэтому систематическое занятие предметом в аудитории и во время самостоятельной работы является совершенно необходимым.