

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Плотникова Н.В., доцент кафедры МиИ,
канд.ф.-м.наук, доцент

г. Череповец - 2022

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература

1. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику: учебное пособие / В. М. Зюзьков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-3053-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/213008>
2. Репницкий, В. Б. Основы математической логики: учебное пособие / В. Б. Репницкий, А. Я. Овсянников. — Екатеринбург: ЕАСИ, 2015. — 123 с. — ISBN 978-5-904440-42-8. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/136389>

Дополнительная литература

1. Гамова, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / А. Н. Гамова. — 4-е изд., доп. — Саратов: СГУ, 2020. — 92 с. — ISBN 978-5-292-04649-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/170590>
2. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие для вузов. - 4-е изд. - Москва: ИЦ "Академия", 2010. - 447 с
3. Ершов, Ю.Л. Математическая логика: учебное пособие для вузов / Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. - 5-е изд. - СПб.; Москва; Краснодар: Лань, 2005. - 336 с.
4. Клини, С.К. Математическая логика = Mathematical Logic / С.К. Клини; пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. Г.Е. Минца. - 3-е изд. - Москва: КомКнига, 2007. - 480 с.
5. Лавров, И.А. Математическая логика: учебное пособие для вузов / Лавров И.А.; под ред. Л.Л. Максимовой. - Москва: ИЦ "Академия", 2006. - 240 с.: ил.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

- 1 Дьячкина И.П., Плотникова Н.В., Сарычева И.А. Дискретная математика. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособие.– Череповец: ЧГУ, 2015. – 198 с.
- 2 Учебно-методические материалы для самостоятельной работы.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытое образование, онлайн курсы: Математическая логика. <https://openedu.ru/course/spbstu/MATLOG/>

Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

Лекции

№ п/п	Тема лекции	Количество часов
1	<p>Высказывания и логические операции. Формулы алгебры высказываний и их равносильность. Тавтологически-истинные (тавтологии), тавтологически-ложные (противоречия) и выполнимые формулы. Теоремы о подстановке, о замене, о заключении. Законы логики. Применение логики. Виды теорем.</p> <p>Функции алгебры логики. Формулы. Реализация функций алгебры логики формулами. Алгебра БФ. Равносильность формул. Свойства элементарных функций. Двойственные функции. Принцип двойственности</p> <p>Нормальные формы. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции. Совершенные нормальные формы. Способы построения совершенных нормальных форм. Нормальные формы. Минимизация булевых функций. Замкнутые классы функций. Теорема о полноте. Примеры функционально полных базисов. Проблема разрешимости формул в алгебре высказываний.</p> <p>Некоторые приложения алгебры логики. Релейно-контактные схемы, функциональные схемы. Использование тавтологий в математических доказательствах. Решение логических задач методами алгебры логики.</p>	8
2	<p>Исчисление высказываний. Понятие аксиоматической теории. Формальная аксиоматическая теория L исчисления высказываний. Силлогизмы. Теорема дедукции. Следствия их теоремы дедукции. Производные правила вывода. Доказательство некоторых законов логики. Методы доказательств в исчислении высказываний. Связь между формулами алгебры высказываний и исчисления высказываний. Алгоритм Квайна проверки выводимости формулы в исчислении высказываний. Метод резолюций проверки выводимости формулы в исчислении высказываний. Проблема разрешимости формул в исчислении высказываний, непротиворечивость, полнота и независимость аксиом исчисления высказываний.</p>	6
3	<p>Алгебра предикатов. Предикаты. Область определения и область истинности предиката. Логические операции над предикатами. Кванторные операции над предикатами. Связные и свободные переменные. Формулы логики предикатов. Интерпретация формулы. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов. Равносильность формул логики предикатов. Предваренная нормальная форма. Проблема разрешимости. Проблема распознавания общезначимости формул в случае конечных областей. Применение языка логики предикатов. Логический вывод в логике предикатов. Предваренная, сколемовская и клаузульная формы. Алгоритм получения клаузульной формы. Метод резолюций в логике предикатов. Подстановка, композиция подстановок, унификатор. Алгоритм построения наиболее общего унификатора. Хорновские дизъюнкты и метод резолюций на хорновских дизъюнктах.</p>	6
4	<p>Исчисление предикатов. Формулы. Аксиомы. Правила вывода. Доказательство в теории. Доказуемость. Теорема дедукции. Проблемы непротиворечивости, полноты и разрешимости теории. Непротиворечивость</p>	6

	исчисления предикатов. Теории первого порядка. Язык первого порядка. Термы и формулы. Логические и специальные аксиомы. Правила вывода. Примеры теорий первого порядка. Интерпретация языка теории. Модель теории. Категоричность теории. Теоремы Геделя о неполноте и непротиворечивости. Смысл и значение теорем Геделя для практической информатики.	
	Итого:	26

Практические занятия

№ п/п	Тема практического занятия	Количество часов
1	<p>Высказывания и логические операции. Формулы алгебры высказываний и их равносильность. Законы логики.</p> <p>Функции алгебры логики. Формулы. Реализация функций алгебры логики формулами. Алгебра БФ. Двойственные функции. Принцип двойственности</p> <p>Нормальные формы. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции. Совершенные нормальные формы. Способы построения совершенных нормальных форм. Нормальные формы. Минимизация булевых функций.</p> <p>Некоторые приложения алгебры логики. Релейно-контактные схемы, функциональные схемы. Использование тавтологий в математических доказательствах. Решение логических задач методами алгебры логики.</p>	8
2	<p>Исчисление высказываний. Понятие аксиоматической теории. Формальная аксиоматическая теория L исчисления высказываний. Силлогизмы. Теорема дедукции. Следствия их теоремы дедукции. Производные правила вывода. Доказательство некоторых законов логики. Методы доказательств в исчислении высказываний. Связь между формулами алгебры высказываний и исчисления высказываний. Алгоритм Квайна проверки выводимости формулы в исчислении высказываний. Метод резолюций проверки выводимости формулы в исчислении высказываний. Проблема разрешимости формул в исчислении высказываний, непротиворечивость, полнота и независимость аксиом исчисления высказываний.</p>	6
	Контрольная работа	2
3	<p>Алгебра предикатов. Предикаты. Логические операции над предикатами. Кванторные операции над предикатами. Связные и свободные переменные. Формулы логики предикатов. Интерпретация формулы. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов. Равносильность формул логики предикатов. Предваренная нормальная форма. Применение языка логики предикатов. Логический вывод в логике предикатов. Предваренная, сколемовская и клаузная формы. Алгоритм получения клаузной формы. Метод резолюций в логике предикатов. Подстановка, композиция подстановок, унификатор. Алгоритм построения наиболее общего унификатора. Хорновские дизъюнкты и метод резолюций на хорновских дизъюнктах.</p>	6
4	<p>Исчисление предикатов. Формулы. Аксиомы. Правила вывода. Теорема дедукции. Проблемы непротиворечивости, полноты и</p>	6

	разрешимости теории. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теории первого порядка. Язык первого порядка. Термы и формулы. Примеры теорий первого порядка. Интерпретация языка теории. Модель теории. Категоричность теории. Смысл и значение теорем Геделя для практической информатики.	
	Контрольная работа.	2
	Итого	30

Средства контроля качества обучения

Тематика проверочных работ студентов

Работа 1.

1. Являются ли данные формулы тавтологиями, выполнимой формулой или противоречием:
 $(B \vee \neg C) \leftrightarrow (D \wedge \neg C)$.
2. Проверьте, будут ли равносильны следующие формулы: $(X \wedge Y) \rightarrow Z$, $(X \wedge \neg Z) \rightarrow \neg Y$.

Работа 2.

Двумя способами: с помощью таблицы истинности и путем элементарных преобразований приведите данную формулу к КНФ и СКНФ.

$$(X \rightarrow \bar{Y}) \leftrightarrow (\bar{Z} \wedge \bar{X}).$$

Работа 3.

Для данной булевой функции найти тупиковые минимальную ДНФ геометрическим методом и методом карт Карно $(X \rightarrow \bar{Y}) \leftrightarrow (\bar{Z} \wedge \bar{X})$.

Работа 4.

Построить область истинности предиката $P(x, y) = [x^2 < 16] \& [x-y < 10]$, определенного на \mathbf{R}^2 . Запишите указанные высказывания. Какие из них истинны, а какие ложны:

$$\forall x \forall y P(x, y); \forall x \exists y P(x, y); \exists x \forall y P(x, y);$$

$$\forall y \exists x P(x, y); \exists x \exists y P(x, y); \exists y \forall x P(x, y)?$$

Контрольная работа 1

Примерный вариант

1. Являются ли данные формулы тавтологиями, выполнимой формулой или противоречием:
 $((X \Rightarrow \bar{Y}) \mid Z) \oplus (\bar{X} \wedge Y)$
2. Проверьте, будут ли равносильны следующие формулы:
 $X \Rightarrow (Y \oplus Z)$, $(X \Rightarrow Y) \oplus (X \Rightarrow Z)$.
3. С помощью таблицы истинности и элементарных преобразований приведите формулу к ДНФ и СДНФ, найти ее минимальную ДНФ. $(X \vee \bar{Y}) \Rightarrow (\bar{Z} \vee \bar{X})$
4. Является ли полной система функций $\{X \vee Y, \bar{X} \oplus Y\}$?
5. Составить и упростить РКС, если ее условия работы заданы вектором значений (1101 1101). Упростить данную РКС.

6. С помощью методов Квайна, редукции доказать, что данные формулы являются тождественно истинными. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.
7. С помощью метода резолюции установить истинность следующей секвенции:
 $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$.
8. Проверить правильность логического рассуждения. При записи пользуйтесь, предложенными буквами для символической записи рассуждений. Если завтра будет холодно (A), я надену теплое пальто (B), если рукав будет починен (C). Завтра будет холодно и рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто.

Контрольная работа 2.

Примерный вариант

1. Представить формулу в предваренной нормальной форме и в скелемовской нормальной форме. Выписать множество дизъюнктов: $\overline{\forall P(x) \vee \exists x P(x) \vee \forall x (P(x) \wedge \exists y Q(y))}$
2. Записать на языке предикатов: все студенты учатся; всякое N, делящееся на 12 делится на 2, 4 и 6. Построить и записать словами их отрицания.
3. Построить область истинности предиката: $P(x, y)$ определенного на R^2 . Запишите указанные высказывания. Какие из них истинны, а какие ложны:
 $\forall x \forall y P(x, y); \forall x \exists y P(x, y); \exists x \forall y P(x, y);$
 $\forall y \exists x P(x, y); \exists x \exists y P(x, y); \exists y \forall x P(x, y)?$ $P(x, y) = [x^2 - y \geq 9] \Leftrightarrow [x^2 < 16] \& [x+y > 10]$.
4. Доказать теорему $\forall x (P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x \neg P(x)$.
5. Преобразовать предложения в формулы, ответ на вопрос записать формулой, составить секвенцию и доказать ее с помощью метода резолюции:
A1: Если пассажир сел в самолет, на который ему удалось купить билет, то пассажир думает, что самолет разобьется.
A2: Если пассажир не сел ни в какой самолет или самолет не взлетел, то безопасность пассажира гарантируется.
A3: Безопасность пассажира Васи не гарантируется.
Вопрос: Кто думает, что безопасность пассажира Васи не гарантируется.

Тематика индивидуальных работ студентов

- 1) Формальная арифметика.
- 2) Теоремы Геделя о неполноте и непротиворечивости формальной арифметики.
- 3) Интуиционистская логика.
- 4) Многозначная логика.
- 5) Нечеткая логика.
- 6) Модальная логика.
- 7) Временные логики.
- 8) Предикатная логика.
- 9) Логики с новыми кванторами.
- 10) Алгоритмические логики.
- 11) Диофантовы множества.

Вопросы к зачету	
1.	Высказывания и логические операции.
2.	Формулы алгебры высказываний и их равносильность.
3.	Тождественно-истинные (тавтологии), тождественно-ложные (противоречия) и выполнимые формулы.
4.	Теоремы о подстановке, о замене, о заключении.
5.	Законы логики. Применение логики. Виды теорем.
6.	Функции алгебры логики. Число булевых функций.
7.	Формулы. Реализация функций алгебры логики формулами. Алгебра БФ. Равносильность формул.
8.	Двойственные функции. Принцип двойственности.
9.	Нормальные формы. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции.
10.	Совершенные нормальные формы. Способы построения совершенных нормальных форм.
11.	Нормальные формы. Минимизация булевых функций.
12.	Замкнутые классы функций.
13.	Теорема Поста о полноте. Примеры функционально полных базисов.
14.	Релейно-контактные схемы. Синтез, анализ и упрощение релейно-контактных схем. Схемы из функциональных элементов.
15.	Использование тавтологий в математических доказательствах. Решение логических задач методами алгебры логики.
16.	Понятие аксиоматической теории. Формальная аксиоматическая теория L исчисления высказываний.
17.	Силлогизмы. Теорема дедукции.
18.	Следствия их теоремы дедукции. Производные правила вывода. Доказательство некоторых законов логики.
19.	Связь между выводимостью формул в исчислении высказываний и их тождественной истинностью в алгебре высказываний.
20.	Алгоритмы Квайна и редукции проверки выводимости формулы в исчислении высказываний.
21.	Резольвенты. Метод резолюций проверки выводимости формулы в исчислении высказываний. Хорновские дизъюнкты.
22.	Проблема разрешимости формул в исчислении высказываний, непротиворечивость, полнота и независимость аксиом исчисления высказываний.
23.	Предикаты. Область определения и область истинности предиката. Логические операции над предикатами.
24.	Кванторные операции над предикатами. Связные и свободные переменные. Кванторные операции над предикатами. Связные и свободные переменные.
25.	Формулы логики предикатов. Интерпретация формулы.
26.	Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов. Равносильность формул логики предикатов.
27.	Предваренная нормальная форма.
28.	Проблема разрешимости в логике предикатов..
29.	Распознавания общезначимости формул в случае конечных областей.
30.	Алгоритмы распознавания общезначимости для формул, содержащих в ПНФ кванторы одного типа. Применение языка логики предикатов.
31.	Логический вывод в логике предикатов. Предваренная, сколемовская и клаузная формы. Алгоритм получения клаузной формы.
32.	Метод резолюций в логике предикатов. Теорема Робинсона. Подстановка, композиция подстановок, унификатор. Алгоритм построения наиболее общего унификатора.
33.	Хорновские дизъюнкты и метод резолюций на хорновских дизъюнктах.
34.	Исчисление предикатов. Формулы. Аксиомы. Правила вывода. Доказательство в теории. Доказуемость.
35.	Теорема дедукции в исчислении предикатов.

36. Проблемы непротиворечивости, полноты и разрешимости теории исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов.
37. Теории первого порядка. Язык первого порядка. Термы и формулы. Логические и специальные аксиомы. Правила вывода.
38. Примеры теорий первого порядка.
39. Интерпретация языка теории. Модель теории. Категоричность теории. Теория натуральных чисел.
40. Теоремы Геделя о неполноте и непротиворечивости. Смысл и значение теорем Геделя для практической информатики.