

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ,
канд.техн.наук, доцент

г. Череповец - 2022

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/195426>
2. Смышляева, Т. В. Математика. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Т. В. Смышляева, Е. Ю. Рекка, О. А. Федосеева. — Пермь: ПНИПУ, 2017. — 115 с. — ISBN 978-5-398-01849-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/160856>

Дополнительная литература:

1. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-1176-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210617>
2. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов / Владимиров В.С. - 4-е изд., исправ. и доп. - Москва: Физматлит, 1981. - 512 с.
3. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - 3-е изд., испр. - Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 464 с
4. Высшая математика в упражнениях и задачах: в двух частях. Ч. 1 / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. и др. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 368 с.
1. Высшая математика в упражнениях и задачах: в двух частях. Ч. 2 / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников, 1989. - 735 с.: ил. + Указатель. - ISBN 5-02-013950-5.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Дьячкина И.П. Уравнения математической физики. Методические рекомендации по изучению курса. Учебно-методическое пособие. / И.П. Дьячкина, О.А. Кашинцева, Л.А. Полеводова – г. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. – 2007 г. – 52 с.
2. Киселева Г.А. Математика. Методические указания по подготовке к контрольным работам. Учебно-методическое пособие. Часть 3.- Череповец, 2011.
3. Макаров, А.П. Уравнения математической физики: учебное пособие для вузов / Макаров А.П. - Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2005. - 179 с. - ISBN 5-85341-162-4.
4. Парыгина С.А. Математика. Дифференциальные уравнения. Учебно-методическое пособие. / С.А. Парыгина, И.А. Сарычева - г. Череповец: ФГБОУ ВПО ЧГУ. – 2013 г. – 60 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>

2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытое образование, онлайн курсы: Дифференциальные уравнения: <https://openedu.ru/course/ITMOUniversity/DIFEQ/>

Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

Лекции

№ п/п	Тема лекции	Количес тво часов
1	<p>Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах, приводимые к однородным, Лагранжа, Клеро. Задача Коши, теорема существования и единственности. Изоклины. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 1-го порядка. Прикладные аспекты: решение прикладных задач.</p> <p>Решение ДУ численными методами: методы Эйлера, Рунге-Кутте и Адамса.</p>	8
2	<p>Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков: однородные и неоднородные. Линейная независимость решений. Определитель Вронского. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям высших порядков.</p>	4
3	<p>Системы дифференциальных уравнений. Нормальные однородные системы дифференциальных уравнений. Методы решений. Понятие устойчивости решения. Фазовое пространство. Устойчивость решений линейных однородных систем ДУ. Критерий устойчивости по первому приближению. Теорема Рауса-Гурвица. Траектории решений системы. Нахождение направлений движения по траекториям. Теория устойчивости по Ляпунову.</p>	4
4	<p>Основные положения математической физики. Уравнения 1-го порядка. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Постановка задач для уравнений математической физики. Понятие о краевых задачах. Основные типы краевых задач.</p> <p>Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Волновое уравнение. Смешанная задача (конечная струна) и ее решение методом разделения переменных (методом Фурье). Решение задачи Коши для одномерного однородного уравнения колебаний (метод Даламбера - метод характеристик).</p> <p>Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (бесконечный стержень) методом Фурье. Интеграл Фурье. Функция источника. Уравнения теплопроводности (стержень конечной длины) Охлаждение стержня конечной длины. Стационарное распределение температуры.</p>	12

	Решение задачи теплопроводности методом конечных разностей. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа.	
Итого		24

Практические занятия

№ раздела (модуля)	Тема практического занятия	Количество часов
1	1. Дифференциальные уравнения 1 порядка: ДУ с разделяющимися переменными. Метод изоклин. Однородные ДУ, линейные ДУ (метод Бернулли).	2 ч.
1	2. Дифференциальные уравнения 1 порядка: линейные ДУ (метод Лагранжа), ДУ Бернулли (два метода), ДУ в полных дифференциалах.	2 ч.
1	3. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным. Решение всех типов ДУ первого порядка.	2 ч.
1	4. Приложение Д.У.1-го порядка. Задачи, сводящиеся к ДУ 1-го порядка.	2 ч.
1	5. Решение ДУ численными методами: методы Эйлера, Рунге-Кутте и Адамса.	
1	6. Контрольная работа «ДУ 1 порядка».	2 ч.
2	7. ДУ 2-го и высших порядков (решение методом понижения порядка).	2 ч.
2	8. Решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами (второго и высших порядков). Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами методом по виду правой части.	2 ч.
2	9. Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.	2 ч.
2	10. Проверочная работа. Интегрирование дифференциальных уравнений помощью рядов.	2 ч.
3	Решение линейных однородных нормальных систем ДУ.	
3	11. Решение линейных однородных нормальных систем ДУ. Задачи, сводящиеся к ДУ 2-го порядка и системам уравнений.	2 ч.
3	12. Устойчивость систем ЛОУ.	
3	13. Контрольная работа «ДУ II порядка и системы ЛОУ».	2 ч.
4	14. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в частных производных. Методы решения. Простейшие дифференциальные уравнения 2-го порядка в частных производных. Методы решения.	2 ч.
4	15. Интегрирование линейных уравнений 1-го порядка. Интегрирование квазилинейных уравнений 1-го порядка. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.	2 ч.
4	16. Метод характеристик (или Даламбера, или распространяющихся волн) для решения одномерного волнового уравнения (или уравнения колебания струны).	2 ч.
4	17. Смешанная задача (конечная струна) и ее решение методом разделения переменных (методом Фурье).	2 ч.
4	18. Контрольная работа «Волновое уравнение».	
4	19. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (бесконечный стержень) методом Фурье.	2 ч.
4	20. Решение задачи теплопроводности методом конечных разностей.	2 ч.
4	21. Контрольная работа «Уравнение теплопроводности».	2 ч.
Итого		42 ч.

Средства контроля качества обучения

Тематика индивидуальных заданий	
<p>1. <i>Индивидуальное задание по теме «Дифференциальные уравнения 1-го порядка».</i> Найти общие (где требуется, частное) решения ДУ: 1) $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$; 2) $y' = 23 \cdot e^{\frac{5y}{x}} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 0$; 3) $y' - 16 \frac{y}{x} = x^7 + 9x^5$; 4) $(x^2y + 4)dx + (\frac{x^3}{3} + y)dy = 0$.</p>	
<p>2. <i>Индивидуальное задание по теме «Приложения дифференциальных уравнений 1-го порядка».</i> Ускорение локомотива, начальная скорость которого равна v_0, прямо пропорциональна силе тяги F и обратно пропорциональна массе поезда m. Сила тяги локомотива $F(t) = b - kv(t)$, где $v(t)$ – скорость локомотива в момент t, b и k – постоянные величины. Определить зависимость силы тяги локомотива от времени t.</p>	
<p>3. <i>Индивидуальное задание по теме «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами».</i> Найти с точностью до 0,001 решение дифференциального уравнения $y' = 1 + 0,2y \cdot \sin x - y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$, методами методы Эйлера, Рунге-Кутте и Адамса с точностью 10^{-4}. Построить приближенную интегральную кривую. Начальный отрезок определить методом Рунге-Кутта.</p>	
<p>4. <i>Индивидуальное задание по теме «Решение простейших уравнений в частных производных»</i> 1. Найти решение ДУ в частных производных: 1) $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 5y$, 2) $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 2y - x$, 3) $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x} = 3 - x$, 4) $xz_{xy} + z_y = 0$ 2. Определить, какие из уравнений являются линейными (однородными, неоднородными), какие – нелинейными (квазилинейными): 1) $3u_{xy} + 5u_{xx} - 3u_y + u_x + x = 0$ 2) $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xuy = 0$ 3) $u_{xy} + u_y + u^2 - xy = 0$ 4) $2xu_{xy} - 6\frac{\partial}{\partial x}(u^2 - xy) + u_{yy} = 0$ 5) $\frac{\partial}{\partial y}(yu_y + u_x^2) - 3u_xu_{xy} + u_x - 6u = 0$ 3. Определить тип уравнения и найти его общий интеграл: 1) $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 2) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$. 4. Найти решение уравнения $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, удовлетворяющее условию $u(0, y) = \frac{1}{y^2}$.</p>	
<p>5. <i>Индивидуальное задание по теме «Решение уравнения теплопроводности численным методом»</i> Используя метод сеток, решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных условиях $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(0,6, t) = \psi(t)$. $x \in [0; 0,6]$. Решение выполнить при $h=0,1$ для $t \in [0; 0,01]$, считая $\sigma = 1/6$.</p>	
Тематика контрольных работ	
<p>1. <i>Контрольная работа «Дифференциальные уравнения 1-го порядка».</i> <i>Примерный вариант</i> 1) Найти общее решение ДУ $y' = \sqrt{\frac{y^2 - 121x^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$.</p>	

- 2) Найти частное решение ДУ $y' - 14y = e^{27x}$, $y(0) = 1$.
- 3) Найти общее решение ДУ $(3x - 2y^2)dx + (1 - 4yx)dy = 0$.
- 5) Найти уравнение кривой, проходящей в точке $(0,5; -1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого её касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.
- 6) Найти общее решение ДУ $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.
- 7) Построить методом изоклин решения ДУ $y' = x - y$.

2. Контрольная работа «Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Системы ДУ».

Примерный вариант

- 1) Найти решение задачи Коши $y'' = y' \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
- 2) Решить нормальную однородную систему тремя способами:
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = -2x + 5y \end{cases}$$
- 3) Исследовать на устойчивость решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$
- 3) Найти общее решение уравнения: $y'' - 4y' + 5y = x + 1$.
- 4) Найти общее решение уравнения: $y'' - 2y' + y = \operatorname{tg} x$
- 5) Указать вид частного решения: $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

3. Контрольная работа «Волновое уравнение математической физики».

Примерный вариант

1. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, t)|_{t=0} = \sin 8x$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 4$.
2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, t)|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos 2x$ и граничному условию $u(0, t) = 0$.
3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, t)|_{t=0} = x^2 + x + 1$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ и граничному условию $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.
4. Струна закреплена на концах $x = 0$, $x = 3$. В начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной OAB , где $O(0,0)$, $A(2, -0.1)$, $B(3, 0)$. Найти форму струны в любой момент времени и в момент времени $t = 10$ мин, если начальные скорости точек отсутствуют.

4. Контрольная работа «Уравнение теплопроводности».

Примерный вариант

1. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ x, & 2 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4, \end{cases}$, $-\infty < x < +\infty$.
2. Концы стержня длиной $l = 100$ см поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру $u(x, t)$ в точках стержня для любого момента времени t , если

известно начальное распределение температуры: $u(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 25, \\ \frac{100}{15} - \frac{x}{15}, & 25 < x \leq 100 \end{cases}.$

3. Концы стержня длиной $l = 15$ см поддерживаются при температуре, равной нулю. Коэффициент температуропроводности $a^2 = 4$. Определить температуру $u(x,t)$ в точках стержня для любого момента времени t , если известно начальное распределение температуры: $u(x,t)|_{t=0} = 5 \sin \frac{\pi x}{15} - 2 \sin \frac{3\pi x}{15}.$

4. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее граничным условиям $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ и начальному условию $u(x,0) = 5 \sin 3x.$

5. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $0 < x < 3, t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,t)|_{t=0} = x$, и граничным условиям $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=3} = 0.$

№ п./п.	Вопросы к экзамену
1	Определение дифференциального уравнения, порядка ДУ, решения, общего решения, общего интеграла, частного решения, начальных условий. Простейшее ДУ.
2	Формулировка теоремы Коши. Геометрический смысл частных решений д.у. Основное свойство общего решения. Возможные и особые решения.
3	Изоклины. Метод изоклин.
4	Определение и решение ДУ 1 порядка с разделяющимися переменными.
5	Определение и решение однородных ДУ 1 порядка.
6	Определение линейного ДУ 1 порядка. Решение методами Бернулли и Лагранжа.
7	Определение и решение уравнения Бернулли. Решение методами Бернулли и подстановки.
8	Определение и решение уравнения в полных дифференциалах.
9	Определение и решение уравнения, сводящегося к однородному.
10	Определение и решение уравнения Лагранжа.
11	Определение и решение уравнения Клеро.
12	Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Коши) методом Эйлера, Адамса, Рунге-Кутте.
13	Дифференциальные уравнения высших порядков: определение общего решения, задача Коши. Формулировка теоремы существования единственности решения. Частные случаи. Определитель Вронского.
14	Частные случаи уравнений 2 порядка, решаемых методом понижения порядка.
15	Частные случаи уравнений n -го порядка, решаемых методом понижения порядка.
16	Основные понятия линейных ДУ 2 порядка. Свойства линейных однородных уравнений. Структура линейного однородного уравнения. Лемма об основном свойстве общего решения. Линейные однородные уравнения 2 порядка. Формула общего решения.
17	Однородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение в зависимости от корней характеристического уравнения: корни действительные различные и равные, комплексные сопряженные.
18	Неоднородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Метод

	неопределенных коэффициентов. Формулировка теоремы о решении ДУ с правой частью в виде суммы функций.
19	Неоднородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа.
20	Линейные ДУ n -го порядка. Общее решение однородного уравнения. Условие линейной независимости частных решений. Теорема об общем решении неоднородного уравнения. Определитель Вронского. Линейные ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами.
21	Нормальные системы д.у. Определение общего решения. Приведение систем и уравнений к нормальной системе. Сведение нормальной системы к дифференциальному уравнению.
22	Нормальные системы д.у. Задача Коши. Формулировка теоремы существования единственности решения. Механическая и геометрическая иллюстрация решений системы д.у. Общее решение неоднородной нормальной системы линейных уравнений.
23	Нормальные однородные системы линейных д.у. с постоянными коэффициентами. Вывод характеристического уравнения. Нахождение общего решения методом неопределенных коэффициентов.
24	Нормальные однородные системы линейных д.у. с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.
25	Понятие устойчивости решения. Асимптотическая устойчивость. Траектории решений системы. Нахождение направлений движения по траекториям.
26	Устойчивость решений линейных однородных систем ДУ. Основные теоремы. Теорема Рауса-Гурвица.
27	Простейшие ДУ с частными производными и методы их решения. Свои примеры.
28	Уравнения с частными производными 1-го порядка. Понятие характеристики квазилинейного уравнения 1-го порядка.
29	Интегрирование линейных уравнений 1-го порядка. Интегрирование квазилинейных уравнений 1-го порядка. Задача Коши для квазилинейных уравнений 1-го порядка.
30	Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка.
31	Начальные и краевые условия. Понятие о краевых задачах. Основные типы краевых задач.
32	Основные уравнения математической физики: волновое. Теплопроводности, эллиптическое.
33	Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Смешанная задача (конечная струна) и ее решение методом разделения переменных (методом Фурье).
34	Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Решение задачи Коши для одномерного однородного уравнения колебаний (метод Даламбера).
35	Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Уравнение теплопроводности.
36	Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (бесконечный, полубесконечный и ограниченный стержень) методом Фурье.
37	Решение уравнения теплопроводности численным методом - методом сеток. Конечно-разностные схемы решения краевой задачи для уравнения теплопроводности. Явные и неявные схемы. Сходимость, устойчивость.
36	Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа.