

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Плотникова Н.В., доцент кафедры МиИ,  
канд.ф.-м.наук, доцент

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ,  
канд.техн.наук, доцент

## **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

### **Основная литература:**

1. Каштаева, С. В. Математическое моделирование: учебное пособие / С. В. Каштаева. — Пермь: ПГАТУ, 2020. — 112 с. — ISBN 978-5-94279-487-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/156708>
2. Пышнограй, Г. В. Математическое моделирование: учебное пособие / Г. В. Пышнограй, Л. М. Бронникова. — Барнаул: АлтГПУ, 2015. — 187 с. — ISBN 978-5-88210-780-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/112167>
3. Карнадуд, О. С. Конспект лекций по математическому моделированию: учебное пособие / О. С. Карнадуд, П. Н. Победаш, С. В. Аленин. — Кемерово: КузГТУ имени Т.Ф. Горбачева, 2020. — 85 с. — ISBN 978-5-00137-121-2. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/145120>
4. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. — Москва: Физматлит, 2002. — 417 с. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76683>

### **Дополнительная литература:**

1. Математическое и компьютерное моделирование: учебное пособие / А. Н. Бугров, Е. Ю. Кирпичева, А. А. Миловидова, Т. О. Махалкина. — Дубна: Государственный университет «Дубна», 2019. — 71 с. — ISBN 978-5-89847-570-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/154489>
2. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие для вузов / Н. В. Голубева. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-8721-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/179611>
3. Горлач, Б. А. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация: учебное пособие для вузов / Б. А. Горлач, В. Г. Шахов. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 292 с. — ISBN 978-5-8114-9551-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/200447>
4. Ермоленко А.В. К решению обратных задач с использованием теории пластин типа Кармана-Тимошенко-Нагди // Вестн. Сыкт. Ун-та. Сер.1. Математика. Механика. Информатика. Вып. 12. — Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2010. С.45-52.
5. Ермоленко А.В. Аналитическое решение контактной задачи для жестко закрепленной пластины и основания // В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. С.11-17.
6. Маликов, Р. Ф. Основы математического моделирования: учебное пособие / Р. Ф. Маликов; ответственный редактор Р. И. Саитов. — Уфа: БГПУ имени М. Акмуллы, 2005. — 136 с. — ISBN 5-87978-273-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/43197>
7. Михайловский Е.И., Ермоленко А.В., Миронов В.В., Тулубенская Е.В. Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек. — Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2009. — 141 с
8. Филин А.П. Элементы теории оболочек. — Л.: Стройиздат, 1987. — 384 с.

## **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

1. Данилов, Н.Н. Математическое моделирование: учебное пособие / Н.Н. Данилов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет». - Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. - 98 с. - ISBN 978-5-8353-1633-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=278827>

## **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)**

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Stepik, онлайн курсы: Введение в математическое моделирование/ Stepik, <https://stepik.org/course/89909/promo>
5. Лань: электронно-библиотечная система: сайт / ООО «Издательство ЛАНЬ». – URL: <https://e.lanbook.com>. – Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. ИБИС: универсальные базы электронных периодических изданий: сайт / ООО «ИБИС». – URL: <https://dlib.eastview.com>. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

## **Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов**

### **Лекции**

№ п/п	Тема лекции	Количе ство часов
1	Понятие о моделировании. Классификация моделей. Этапы и принципы моделирования. Примеры математических моделей.	4
2	Общая задача линейного программирования. Графический метод решения задачи.	4
2	Классическая форма записи задачи линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования.	6
2	Двойственность в линейном программировании.	4
2	Целочисленное программирование.	4
3	Транспортная задача линейного программирования. Опорные планы транспортной задачи. Решение транспортной задачи.	4
4	Общая задача нелинейного программирования. Выпуклые и вогнутые функции. Метод множителей Лагранжа.	6
4	Теорема Куна – Таккера. Седловая точка и задача нелинейного программирования. Применение теоремы Куна – Таккера для задачи	4

	выпуклого программирования.	
4	Динамическое программирование.	4
5	Элементы теории упругости	5
5	Вывод уравнений линейной теории Кирхгофа. Теория пологих оболочек уравнений линейной теории Кирхгофа	5
5	Практические задачи, основанные на использовании современных математических моделей пластин и оболочек	4
	Итого	54

### Лабораторные работы

№ п/п	Тема лабораторной работы	Количество часов
2	Графический метод решения задачи линейного программирования. Классическая форма записи задачи линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Целочисленное программирование.	12
3	Транспортная задача линейного программирования. Опорные планы транспортной задачи. Методы решения транспортной задачи.	4
4	Общая задача нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа. Теорема Куна – Таккера. Седловая точка и задача нелинейного программирования. Применение теоремы Куна – Таккера для задачи выпуклого программирования. Динамическое программирование.	8
	Итого	24

### Практические занятия

№ п/п	Тема практического занятия	Количество часов
1	Понятие о моделировании. Классификация моделей. Этапы и принципы моделирования. Примеры математических моделей.	4
2	Графический метод решения задачи линейного программирования. Классическая форма записи задачи линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Целочисленное программирование.	12
3	Транспортная задача линейного программирования. Опорные планы транспортной задачи. Методы решения транспортной задачи.	4
4	Общая задача нелинейного программирования. Выпуклые и вогнутые функции. Метод множителей Лагранжа. Теорема Куна – Таккера. Седловая точка и задача нелинейного программирования. Применение теоремы Куна – Таккера для задачи выпуклого программирования. Динамическое программирование.	16
5	Элементы теории упругости.	12
5	Практические задачи, основанные на использовании современных математических моделей пластин и оболочек	16
	Итого	64

## Средства контроля качества обучения

### Образцы заданий проверочных работ

#### Задача 1.

На предприятии имеется три вида сырья и можно производить два вида продукции. Данные о расходе на производство единицы продукции, запасов сырья и прибыли представлены в таблице:

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		А	В
1	45	3	4
2	31	5	2
3	30	2	3
Прибыль от реализации 1 ед. продукции		7	5

Найти оптимальный план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольшую прибыль. Решить задачу симплексным методом.

#### Задача 2.

Пять предприятий для производства продукции используют 4 вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 50; 100; 125; 75; 50 единиц. Сырье сосредоточено в 4 местах его получения, а запасы соответственно равны 100; 50; 150; 100 единиц. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и представлены в таблице.

$B_j$ $A_i$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$A_1$ 100	4 50	5 50	3	7	2
$A_2$ 50	2	3 50	8	7	5
$A_3$ 150	4	2	4 125	3 25	6
$A_4$ 100	6	4	5	3 50	5 50

Требуется найти план перевозок, при котором суммарные транспортные затраты будут наименьшими.

#### Задача 3.

Решить задачу графическим методом

$$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

#### Задача 4.

Составить экономико-математическую модель задачи: Для выпуска изделий двух типов А и В на заводе используют сырье четырех видов (I, II, III, IV). Для изготовления изделия А необходимо: 2 ед. сырья первого вида, 1 ед. второго вида, 2 ед. третьего вида и 1 ед. четвертого вида. Для изготовления изделия В требуется: 3 ед. сырья первого вида, 1 ед. второго вида, 1 ед. третьего вида. Запасы сырья составляют: I вида – 21 ед., II вида – 8 ед., III вида – 12 ед., IV вида – 5 ед. Выпуск одного изделия типа А приносит 3 УДЕ прибыли, а одного изделия типа В – 2 УДЕ. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

#### Задача 5.

Составить двойственную задачу к задаче  $f(x) = x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

и найти ее решение.

#### Задача 6.

Составить математическую модель задачи: На четырех станках (I, II, III, IV) обрабатываются два вида деталей (А и В). Каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известны время обработки деталей на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль, полученная от выпуска одной детали. Данные приведены в таблице:

Станки	Время обработки детали, ч.		Время работы станка (цикл пр-ва), ч.
	А	В	
I	1	2	16
II	2	3	26
III	1	1	10
IV	3	1	24
Прибыль от 1 детали, УДЕ	4	1	

Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль при условии, что количество деталей вида В не должно быть меньше количества деталей вида А.

#### Задача 7.

Предприятие планирует выпускать 3 вида продукции – П1, П2, П3. Для этого оно располагает объемами ресурсов 3-х видов Р1, Р2, Р3. Затраты каждого ресурса на изготовление единицы продукции и цена единицы продукции приведены в таблице:

П <sub>j</sub> Р <sub>i</sub>	П1	П2	П3	Объем $b_i$
Р1	4	2	1	180
Р2	3	1	1	210
Р3	1	2	5	244
Цена $c_j$	10	14	12	

Требуется:

- 1) построить модель исходной и двойственной задач;

- 2) решить исходную задачу симплексным методом;
- 3) найти оптимальное решение двойственной задачи, используя проверочную строку последней симплексной таблицы;
- 4) дать экономический анализ основным и дополнительным переменным оптимальных решений обеих задач;
- 5) в ответе записать оптимальные решения обеих задач и значения их целевых функций; указать наиболее дефицитный ресурс и наиболее убыточный вид продукции.

### Задача 8.

На складах имеются запасы однотипного товара в количестве  $a$  (35; 40; 40; 50), который необходимо доставить потребителям. Потребности потребителей задает вектор  $b$  (31; 52; 17; 20). Матрица затрат на доставку единицы товара от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозок с минимальными транспортными затратами.

### Образцы индивидуальных заданий

**№ 1.** Фирма выпускает два вида мороженого, для изготовления которого используется молоко и наполнители. Расходы исходных продуктов на 1 кг мороженого приведены в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 д.е., шоколадного – 14 д.е. Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

**№ 2.** Совет директоров рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырёх предприятиях, принадлежащих фирме. Для расширения производства выделяются средства в объёме 120 млн.р с дискретностью 20 млн. р. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены в таблице. Найдите распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Выделяемые средства, млн. р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

**№ 3.** Практические задачи, основанные на использовании современных математических моделей пластин и оболочек.

- 1). Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрически изгибаемой пластины методом функции Грина.
- 2). Расчет напряженно-деформированного состояния круглой осесимметрично изгибаемой пластины.
- 3). Контактная задача со свободной границей для цилиндрически изгибаемой пластины.
- 4). Обратная контактная задача для полой оболочки.

### Тематика заданий лабораторных работ

*Цель лабораторных работ:* изучение приемов и методов решения задач линейного и нелинейного программирования, использование современных математических моделей пластин и оболочек; приобретение навыков использования специальных средств MS Excel для решения и анализа задач.

### Образец задания лабораторной работы

**№ 1.** Четыре предприятия экономического района для производства продукции используют некоторое сырье. Спрос на сырье каждого из предприятий соответственно составляет: 120, 50, 190 и 110 усл. ед. Сырье сосредоточено в трех местах. Предположения поставщиков сырья соответственно равны: 160, 140 и 170 усл. ед. На каждое предприятие сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы перевозок заранее известны и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В  $i$ -й строке  $j$ -го столбца матрицы  $C$  указан тариф на перевозку сырья от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю,  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$ .

Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок минимальна.

Решить задачу с помощью ППП Excel.

**№ 2.** Составьте математическую модель транспортной задачи. Используя метод потенциалов, найдите оптимальный план перевозок.

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы транспортные затраты на перевозку единицы груза. Слева указаны мощности поставщиков, а сверху - мощности потребителей.

Потребители Поставщики	100	60	30	80	50
130	2	3	6	8	2
90	8	1	2	3	5
100	7	4	4	1	4



**№ 3.** Минимизировать целевую функцию  $f(\bar{x}) = x_1 + x_2$  при ограничении

$$\begin{cases} g_1(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \\ g_2(\bar{x}) = x_1 - 2 \end{cases}$$

с точностью  $\varepsilon = 0,1$  (на компьютере  $\varepsilon = 0,0001$ )

#### Вопросы к зачету (4 семестр)

1. Понятие о моделировании. Классификация моделей. Примеры математических моделей.
2. Этапы и принципы моделирования.
3. Общая задача линейного программирования. Классическая форма записи задачи линейного программирования.
4. Графический метод решения задачи линейного программирования.
5. Симплексный метод решения задач линейного программирования.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Целочисленное программирование.

#### Вопросы к экзамену (5 семестр)

1. Транспортная задача линейного программирования. Опорные планы транспортной задачи.
2. Решение транспортной задачи.
3. Общая задача нелинейного программирования. Выпуклые и вогнутые функции.
4. Метод множителей Лагранжа.
5. Теорема Куна – Таккера.
6. Седловая точка и задача нелинейного программирования.
7. Применение теоремы Куна – Таккера для задачи выпуклого программирования.
8. Динамическое программирование.

#### Вопросы к экзамену (6 семестр)

1. Понятие тензора 2-го ранга.
2. Тензор деформации Грина-Лагранжа и свойства его компонент.
3. Тензор поворота, тензор малых деформаций Коши, формула Коши для напряжений.
4. Уравнения равновесия, уравнения неразрывности Сен-Венана, закон Гука, теорема Клайперона.
5. Вывод полевых (из уравнений равновесия теории упругости) и граничных (из теоремы Клайперона) уравнений линейной теории Кирхгофа.
6. Методы преобразования уравнения Кирхгофа при рассмотрении плоских пластин различных очертаний.
7. Теория пологих оболочек Маргера-Тимошенко-Нагди. Использование М-алгоритма для уточнений уравнения Маргера (приведенные в монографии А.П. Филина).
8. Модели механики пластин и оболочек.