

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ,
канд.техн.наук, доцент

г. Череповец - 2022

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Карташев, А. П. Математический анализ: учебное пособие / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. — 2-е изд. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-0700-2. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210116>
2. Математический анализ: учебное пособие / составитель Е. П. Ярцева. — Ставрополь: СКФУ, 2017. — 256 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/155295>
3. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 частях / Г. М. Фихтенгольц. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, [б. г.]. — Часть 1: Основы математического анализа — 2022. — 444 с. — ISBN 978-5-8114-9104-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/184192>
4. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — Часть 2: Основы математического анализа — 2022. — 464 с. — ISBN 978-5-8114-9256-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/189424>

Дополнительная литература:

1. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. — 24-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 624 с. — ISBN 978-5-8114-9078-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/184105>
 2. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 10-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 492 с. — ISBN 978-5-8114-9878-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/200084>
 3. Математический анализ: учебное пособие для бакалавров / Кытманов А.М., Лейнартас Е.К., Лукин В.Н. и др.; под общ. ред. А.М. Кытманова. - Москва: Юрайт, 2014. - 607 с. + Предметный указатель. - (Бакалавр. Базовый курс). - Библиогр.: с.601. - ISBN 978-5-9916-2808-2.
 4. Баврин, И.И. Высшая математика. Учебник для ВТУЗов [текст] / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. — М.: ВЛАДОС, 2004 г.
- Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие.- 22 изд., перераб. [текст] / Г.Н. Берман.— СПб: Профессия, 2003-2006 г

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Математика. Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. Часть 3. / Сост. Т. В. Гордобаева, С. А. Парыгина, Н. В. Плотникова, И. А. Сенатова. — Череповец: ФГБОУ ВПО ЧГУ. — 2012.
2. Кашинцева О.А. Гармонический анализ. Учеб.-методическое пособие. —г. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. — 2006 г. — 54 с.
3. Киселева Г.А. Математика. Методические указания по подготовке к контрольным работам. Учебно-методическое пособие. Часть 3.- Череповец, 2011.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытое образование, онлайн курсы: Высшая математика. Математический анализ. URL: <https://openedu.ru/course/mipt/MATAN/>; Математический анализ. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов

Лекции

№ раздела (модуля)	Тема лекционного занятия	Количество часов
1	<i>Понятие величины.</i> Определение. Свойства. Типы. <i>Множества.</i> Основные определения теории множеств. Числовые множества: множество натуральных, целых, рациональных, иррациональных, действительных, комплексных чисел. Расширенное множество действительных чисел. <i>Функция.</i> Основные определения теории функций. Область определения и множество значений функции. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Супремум, инфимум. Многочлены и рациональные дроби. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. <i>Предел числовой последовательности.</i> Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.	2 ч.
1	<i>Предел функции.</i> Функция. Основные определения теории функций. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Эквивалентные функции и их применение к отысканию пределов. Сравнение бесконечно малых функций. Символы o и O . <i>Непрерывность функции.</i> Свойства непрерывных функций Точки разрыва и их классификация.	2 ч.
2	<i>Дифференциальное исчисление.</i> Понятие функции, дифференцируемой в точке. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования. Дифференциал. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Производные и дифференциалы высших порядков.	2 ч.
2	<i>Приложение дифференциального исчисления.</i> Приближенное вычисление значения функции с помощью дифференциала. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена. Возрастание и убывание, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции. Исследование выпуклости функции. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Кривизна плоской линии.	3 ч.
3	<i>Дифференциальное исчисление</i> Пространство R_n . Множества в R_n . Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные.	3 ч.

	Дифференциал. Дифференцирование сложных, неявных функций. <i>Приложение дифференциального исчисления ФНП.</i> Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательная линия и нормальная плоскость к кривой в пространстве. Формула Тейлора. Экстремумы и условные экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения.	
4	<i>Интегральное исчисление.</i> Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования. Интегрирование рациональных, тригонометрических, иррациональных функций.	2 ч.
4	Определенный интеграл и его свойства. Условия существования и оценки. Теорема о среднем. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление интегралов.	2 ч.
4	Несобственные интегралы. Неберущиеся интегралы. Интегралы от функции с двумя переменными. <i>Приложение интегрального исчисления.</i> Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоской области, объемов тел, площадей части поверхности, длин дуг, работы, пути, координат центра тяжести.	2 ч.
5	<i>Числовые ряды.</i> Определение числового ряда. Сходимость и сумма ряда. Необходимый и достаточные признаки сходимости. Знакопеременные ряды и знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.	2 ч.
5	<i>Функциональные ряды.</i> Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область и радиус сходимости. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов.	2 ч.
5	<i>Гармонический анализ.</i> Периодические функции. Гармонические колебания. <i>Ряды Фурье.</i> Тригонометрические ряды. Условия сходимости. Теорема Дирихле. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π и $2l$, четных и нечетных функций с периодом 2π и $2l$; функций, заданных на полупериоде, функций с «двойной симметрией».	2 ч.
	Итого	24 ч.

Практические занятия

№ недели	Тема практического занятия	Кол-во часов
1	1. Комплексные числа . Пределы числовой последовательности и функции.	2 ч.
1	2. Пределы функции. Замечательные пределы.	2 ч.
1	3. Эквивалентные бесконечно малые. Односторонние пределы.	2 ч.
1	4. Непрерывность функции и точки разрыва.	2 ч.
2	5. Производные элементарных, сложных функций.	2 ч.
2	6. Производные неявных, обратных, параметрических функций. Логарифмическая производная.	2 ч.
2	7. Касательная и нормаль к поверхности. Производные высших порядков.	2 ч.
2	8. Дифференциалы 1-го и высших порядков. Нахождение значений функций.	2 ч.
2	9. Формулы Тейлора и Маклорена. Правило Лопиталя.	2 ч.
2	10. Исследование графика функции.	2 ч.
1, 2	11. Контрольная работа по теме «Введение в мат. анализ и дифференцирование функции одной переменной».	2 ч.
3	12. ФНП. Область определения. Вычисление частных производных 1-го и высших порядков. Дифференциалы 1 и 2 порядков.	2 ч.
3	13. Касательная и нормаль к поверхности. Полная производная. Дифференцирование неявно заданных функций.	2 ч.
3	14. Безусловный и условный экстремум.	2 ч.
3	15. Контрольная работа по теме «ДФДП».	2 ч.

№ недели	Тема практического занятия	Кол-во часов
4	16. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Подведение под знак дифференциала.	
4	17. Подведение под знак дифференциала. Интегрирование по частям.	
4	18. Интегрирование рациональных дробей.	
4	19. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.	
4	20. Интегрирование иррациональных функций. Определенный интеграл.	
4	21. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. ДИЗ «Приложения определенных интегралов».	
4	22. Несобственные интегралы.	
4	23. Контрольная работа.	2 ч.
5	24 Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости положительных рядов.	2 ч.
5	25. Достаточные признаки сходимости положительных рядов. Вычисление суммы ряда. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.	2 ч.
5	26. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости рядов с вещественными членами.	2 ч.
5	27. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости рядов с вещественными членами. Ряды Тейлора и Маклорена. ДИЗ «Приложения рядов».	2 ч.
6	28. Гармонический анализ. Тест по теме «Гармонический анализ» (на портале). Ряды Фурье.	2 ч.
6	29. Ряды Фурье. Проверочная работа по теме «Ряды Фурье».	2 ч.
5, 6	30. Контрольная работа по теме «Ряды»	2 ч.

Средства контроля качества обучения

Тематика индивидуальных заданий
<p>1. Индивидуальное задание по теме «Комплексные числа. Функция».</p> <p>1) Изобразить на комплексной плоскости число $z = (3+i)^2 / (1-2i)$.</p> <p>2) Найти сумму и частное чисел $z_1 = 3e^{i\pi}$, $z_2 = (4+3i)^3$.</p> <p>3) Найти действительную и мнимую части, модуль, аргумент числа, сопряженное комплексному числу $z = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$.</p> <p>4) Найти корень из комплексного числа $\sqrt[3]{1+i}$. Изобразить на окружности.</p> <p>5) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $0 < \operatorname{Re} z < 3$, $0 < \operatorname{arg} z < \pi$</p> <p>6) Найти и изобразить на числовой прямой множества A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$; $A = \{x \in \mathbf{N} x/(x-1) < 2\}$; $B = \{x \in \mathbf{R} \lg(x+1) > 1\}$.</p> <p>6) Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}}$.</p> <p>7). Найти область определения функции $y = \log_2(x+1) - 2$.</p> <p>8). Найти область определения и область значения функции $y = \frac{1}{3\sqrt{2x-x^2}}$.</p>
<p>2. Индивидуальное задание по теме «Предел последовательности и функции и непрерывность функции».</p> <p>1. Найти пределы последовательности или функции (не используя правило Лопиталя):</p>

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{x-1}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{7 - 3x}}{x^2 - 9}$; g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$

2. Задана функция $y = f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции классифицировать характер разрыва. Построить график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = 3^{\frac{2}{3-x}}$.

3. При каком значении A функция будет непрерывной: $f(x) = \begin{cases} A(x-3), & x \leq -5, \\ (x+1)^2, & -5 < x \leq 3 \end{cases}$?

3. Индивидуальное задание по теме «Производная, дифференциал».

1. Найти производные функций: 1) y'_x сложной функции, 2) y'_x функции, заданной параметрически, 3) x'_y обратной функции. 4) y'_x степенно-показательной функции, 5) y'_x неявно заданной уравнением функции:

1) $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^t - 3}{2}$, $x = \operatorname{tg}(t^2 + 1)$; 3) $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$;

4) $y = x^{\ln x}$, 5) $(y^2 + 1) \sin x = \operatorname{arctg}(yx^2)$.

2. Найти дифференциал первого порядка функции: $y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.

3. Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = 2x^4 - 5x^2 - 2$ в точке с абсциссой $x = -2$, а также уравнение касательной и нормали к этой линии в данной точке.

4) Индивидуальное задание «Подведение под знак дифференциала»

1) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{x}{3} \right) dx$; 2) $\int x \cos x^2 dx$ 3) $\int \frac{x^2 dx}{4 + x^3}$; 4) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 5) $\int x e^{x^2} dx$;

6) $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$; 7) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; 8) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$.

5) Индивидуальное задание по теме «Приложения определенного интеграла».

1) Вычислить площадь S петли кривой $x = \frac{t}{3}(6-t)$, $y = \frac{t^2}{8}(6-t)$.

2) Вычислить длину одного лепестка кривой $\rho = a * \sin 2\varphi$.

3) Вычислить объем V тела, образованного вращением вокруг оси (ОХ) одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

4) Вычислить площадь Q поверхности фигуры, образованной вращением вокруг оси (ОХ) дуги кривой $x^2 - y^2 = 4$, ($2 \leq x \leq 4$).

6) Индивидуальное задание по теме «Приложение рядов»

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x$

2. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 0,001.

4. Вычислить $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Тематика проверочных работ

1. Проверочная работа по теме «Табличные производные ФОП».

Найти производные функций:

- 1) $y = \sin \frac{x}{2}$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 3x$; 3) $y = \log_3 3x$ 4) $y = e^{2x+3}$; 5) $y = \operatorname{ctg} 4x$; 6) $y = \arcsin(1-x)$; 7) $y = \sqrt{2+3x}$; 8) $y = \ln 5x$; 9) $y = \frac{3}{2x}$

2. Проверочная работа по теме «ФДП. Частные производные 1 и 2 порядка».

1. Вычислить предел функции. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)}{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}}$.
2. Найти частные производные 1 и 2 порядка функции: $z = x + 2xy - e^y$.

3. Проверочная работа по теме «Методы интегрирования»

- 1) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^3}$ 2) $\int (x+1)e^x dx$ 3) $\int \cos^2 x dx$

4. Проверочная работа (тест) по теме «Гармонический анализ».

1. Чему может быть равно значение параметра a , при котором функция $f(x) = \sin(2ax)$ имеет период, равный $\frac{\pi}{2}$?
2. Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \sin 4x$.
3. Найти периоды функций: $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \operatorname{ctg}(2x+1)$, $f(x) = \cos(\pi+1)x$.
4. Наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x - 7 \sin 6x + 2 \operatorname{tg} \frac{9}{2}x$ равен
- 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) 3π , 3) $\frac{2\pi}{3}$, 4) 6π .
5. Какой вид имеют гармонические колебания с начальной фазой $\frac{\pi}{6}$ и амплитудой, равной 4:
- Варианты ответов: 1) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 2) $f(t) = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 3) $f(t) = A \sin(4t + \frac{\pi}{6})$,
- 4) $f(t) = 4 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 5) $f(t) = A \cos(\frac{\pi}{6}t + 4)$, $f(t) = 4 \cos(\frac{\pi}{6}t + \varphi)$?
6. Найти период T функции $f(x)$, если ее круговая частота равна 2.
7. Сколько составляет сдвиг по фазе гармоники $2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ относительно гармоники $\sin x$?

5. Проверочная работа по теме «Ряды Фурье».

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \pi + x$ при $-\pi < x \leq \pi$.
2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1, \\ 1, 1 < x \leq 2 \end{cases}$ в ряд Фурье по синусам.

Тематика расчетно-графического задания

1. Исследовать функцию $y = \frac{x+5}{x-2}$ и построить ее график.

Тематика контрольных работ

Контрольная работа № 1 по теме «Предел и непрерывность функции. ДФОП»
Примерный вариант.

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{2+x^2} \right)^{x^2+3}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, построить график

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -\infty < x \leq -1 \\ 1 + x & -1 < x < 4 \\ 2x - 5 & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}, \quad б) f(x) = 5^{\left(\frac{4}{1-x}\right)}$$

3. Вычислить пределы функций, пользуясь правилом Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{4x} - 3}{x \sin^2 x}, \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

4. Вычислить производные функций:

$$a) \arctg\left(\frac{\ln x^2}{4^{y+2}}\right) + x^4 \sqrt{y} + (1+x)^{x^2+1} = \ln 2, \quad б) y = \frac{\ln^2 3x}{8 \cos(2x-1)}, \quad в) y = \operatorname{tg} x \cdot \log_2^2 2x, \quad x'_y = ?$$

5. Найти дифференциал 1 и 2 порядков функции $y = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{3}\right)$.

6. Разложить по формуле Тейлора функцию $y = 2^{x+1}$ в точке $x = 1$.

7. Дан круг радиусом $a = 4$. Увеличим a на 2 см. Найти изменение длины дуги окружности и ее дифференциал.

2. Контрольная работа № 2 по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Примерный вариант.

1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(2x - y)$.
2. Найти все частные производные 1 и 2 порядка функции $z = \cos(3x^2 - y^3)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \arccos(x + y)$.
4. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
 - a) $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$ в точке $M(-1; 1; 3)$.
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$ в точке $M(2; 1; -1)$.
5. Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ на экстремум.
6. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны между собой уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.
7. Вычислить значение производной сложной функции $z = \frac{y}{x}$, где $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$ при $t = 0$.
8. Продифференцировать неявно заданную уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^3 = 59$ функцию z , вычислить значения производных в точке $M(3; 1; 4)$.
9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^4 - 8x^2 + y^3 - 3y - 1$ в заданной области $D: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0$.

3. Контрольная работа № 3 по теме «Интегрирование».

Примерный вариант.

- 1) $\int x \sin(2x^2 - 3) dx$; 2) $\int \sin^2 2x dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$; 4) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$; 5) $\int (1-x)e^{3x} dx$;
- 6) $\int \frac{13-x}{(x-6)(x^2+1)} dx$; 7) $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 8}{x^3 - 16x} dx$; 8) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} dx$; 9) $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x dx$
- 10) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Сделать чертеж.
- 11) Найти интеграл от ФДП: $\int x \sin(2y^2 - 3) dx$

4. Контрольная работа № 4 по теме «Ряды»

Примерный вариант

1). Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}$.

2). Исследовать на абсолютную сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2}$.

3). Доказать, что ряд сходится и найти его сумму: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(n-2)}$.

4). Определить радиус, интервал сходимости и выяснить поведение на концах интервала сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 5^n}$.

Образцы тестовых заданий

1. Модуль комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$ равен а) 2 б) 4 в) $\sqrt{2}$ г) $\sqrt{3}$

2. $z = \sqrt{3} - i$. Найдите комплексно сопряженное число \bar{z} .

Варианты ответа: а) $-\sqrt{3} - i$ б) $\sqrt{3} - i$ в) $\sqrt{3} + i$ г) $-\sqrt{3} + i$

3. Число π принадлежит множеству:

$A = \{a \mid a \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 10\}$ $B = \{b \mid b \in \mathbb{Z}, -2 \leq b < 5\}$ $C = \{c \mid c \in \mathbb{R}, -3 < c < 3,6\}$ $D = \{d \mid d \in \mathbb{Q}, d < 4\}$

4. Значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n+n^3}{n^3}$ равно а) 2 б) 1 в) 0 г) ∞

5. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{\sin^2 x}$ равно а) 10 б) 5 в) -2 г) 0

6. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ равно а) 1 б) $e^{\frac{1}{2}}$ в) e^2 г) e^{-2}

7. Точка $x_0 = -2$ является точкой разрыва первого рода графика функции:

Варианты ответа:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -2 \\ \frac{1}{x+2}, & x > -2 \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x^2, & x \geq -2 \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -2 \\ x+2, & x \geq -2 \end{cases}$

8. Найти производную функции $y = e^x(1 + \sin x)$ Варианты ответа:

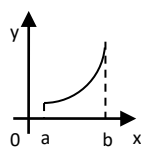
а) $y' = e^x(1 + \sin x - \cos x)$ б) $y' = e^x \sin x$

в) $y' = e^x(1 + \sin x + \cos x)$ г) $y' = e^x \cos x$

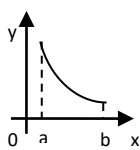
9. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{5}{x} + 4e^x$ Варианты ответа: а) $5 + 4e$ б) 9 в) 5 г) $-5 + 4e$

10. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = -0,5x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$. Варианты ответа: а) -3 б) -4,5 в) 3 г) 0

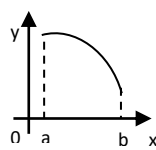
11. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a; b]$ одновременно выполняются условия $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$



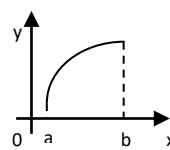
а)



б)



в)



г)

12. Укажите верное утверждение

а) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ б) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

в) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = f(x) \int g(x) dx$ г) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

13. Выберите верное утверждение:
- а) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = 2 \operatorname{tg} 2x + c$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -\operatorname{tg} 2x + c$
- в) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \operatorname{ctg} x + c$ г) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + c$
14. Множество первообразных функции $f(x) = \sin(3x + 2)$ имеет вид:
- а) $\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + C$ б) $-\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + C$ в) $-3 \cos(3x + 2) + C$ г) $-3 \cos x + C$
15. Укажите формулу интегрирования по частям
- а) $\int u dv = uv + \int v du$ б) $\int u dv = uv - \int v du$
- в) $\int u dv = \int v du - uv$ г) $\int u dv = uv \cdot \int v du$
16. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 + 1$, $y = 3$ определяется интегралом
- а) $\int_1^3 (2 - 2x^2) dx$ б) $\int_{-1}^1 (2x^2 - 2) dx$ в) $\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$ г) $\int_1^3 (2x^2 - 2) dx$
17. Частная производная функции $z = x^4 \cos y$ по переменной y в точке $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равна
- Варианты ответа: а) 4 б) -1 в) 1 г) 0
18. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в точке $M_0(1; 2; 3)$ имеет вид: $4(x - 1) - 5(y - 2) + (z - 3) = 0$. Определить $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}$
- а) 4 б) -4 в) 10 г) -5
19. Экстремум функции $z = 4x^2 + y^2 - 3$ равен... Варианты ответа:
- а) 4 б) -3 в) 3 г) 0
20. Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 10$, равен
- а) 40π б) 20π в) 10π г) $0,4\pi$
21. Какой вид имеют гармонические колебания с начальной фазой $\frac{\pi}{6}$ и амплитудой, равной 4:
- 1) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 2) $f(t) = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 3) $f(t) = A \sin(4t + \frac{\pi}{6})$, 4) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 5) $f(t) = A \cos(\frac{\pi}{6}t + 4)$, 6) $f(t) = 4 \cos(\frac{\pi}{6}t + \varphi)$?
22. Коэффициент b_1 в разложении в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$ равен.... Варианты ответа: а) 0 б) $\frac{2\pi}{3}$ в) $\frac{2\pi^3}{3}$ г) $\frac{2}{\pi}$

Тематика индивидуальных заданий, рефератов, проверочных и контрольных работ

Тематика индивидуальных заданий
<p>3. Индивидуальное задание по теме «Комплексные числа. Функция».</p> <p>1) Изобразить на комплексной плоскости число $z = (3+i)^2 / (1-2i)$.</p> <p>2) Найти сумму и частное чисел $z_1 = 3e^{\pi i}$, $z_2 = (4+3i)^3$.</p> <p>3) Найти действительную и мнимую части, модуль, аргумент числа, сопряженное комплексному числу $z = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$.</p>

- 4) Найти корень из комплексного числа $\sqrt[3]{1+i}$. Изобразить на окружности.
- 5) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:
 $0 < \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{arg} z < \pi$
- 6) Найти и изобразить на числовой прямой множества $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, $A = \{x \in \mathbf{N} | x(x-1) < 2\}$; $B = \{x \in \mathbf{R} | \lg(x+1) > 1\}$.
- 6) Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}}$.
- 7). Найти область определения функции $y = \log_2(x+1) - 2$.
- 8). Найти область определения и область значения функции $y = \frac{1}{3^{\sqrt{2x-x^2}}}$.

2. Индивидуальное задание по теме «Предел последовательности и функции и непрерывность функции».

1. Найти пределы последовательности или функции (не используя правило Лопиталя):
- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{x-1}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{7 - 3x}}{x^2 - 9}$; g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$
2. Задана функция $y = f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции классифицировать характер разрыва. Построить график функции:
- 1) $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = 3^{\frac{2}{3-x}}$.
3. При каком значении A функция будет непрерывной: $f(x) = \begin{cases} A(x-3), & x \leq -5, \\ (x+1)^2, & -5 < x \leq 3 \end{cases}$?

3. Индивидуальное задание по теме «Производная, дифференциал».

1. Найти производные функций: 1) y'_x сложной функции, 2) y'_x функции, заданной параметрически, 3) x'_y обратной функции. 4) y'_x степенно-показательной функции, 5) y'_x неявно заданной уравнением функции:
- 1) $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^t - 3}{2}, x = \operatorname{tg}(t^2 + 1)$; 3) $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$;
- 4) $y = x^{\ln x}$, 5) $(y^2 + 1) \sin x = \operatorname{arctg}(yx^2)$.
2. Найти дифференциал первого порядка функции: $y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.
3. Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = 2x^4 - 5x^2 - 2$ в точке с абсциссой $x = -2$, а также уравнение касательной и нормали к этой линии в данной точке.

4) Индивидуальное задание «Подведение под знак дифференциала»

- 1) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{x}{3} \right) dx$; 2) $\int x \cos x^2 dx$ 3) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^3}$; 4) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 5) $\int x e^{x^2} dx$;
- 6) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; 7) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; 8) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

5) Индивидуальное задание по теме «Приложения определенного интеграла».

- 1) Вычислить площадь S петли кривой $x = \frac{t}{3}(6-t), y = \frac{t^2}{8}(6-t)$.
- 2) Вычислить длину одного лепестка кривой $\rho = a * \sin 2\varphi$.
- 3) Вычислить объем V тела, образованного вращением вокруг оси (OX) одной полуволены

синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

4) .Вычислить площадь Q поверхности фигуры, образованной вращением вокруг оси (OX) дуги кривой $x^2 - y^2 = 4$, ($2 \leq x \leq 4$).

б) Индивидуальное задание по теме «Приложение рядов»

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x$

2. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 0,001.

4. Вычислить $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Тематика проверочных работ

1. Проверочная работа по теме «Табличные производные ФОП».

Найти производные функций:

1) $y = \sin \frac{x}{2}$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 3x$; 3) $y = \log_3 3x$ 4) $y = e^{2x+3}$; 5) $y = \operatorname{ctg} 4x$; 6) $y = \arcsin(1-x)$; 7)

$y = \sqrt{2+3x}$; 8) $y = \ln 5x$; 9) $y = \frac{3}{2x}$

2. Проверочная работа по теме «ФДП. Частные производные 1 и 2 порядка».

1. Вычислить предел функции. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)}{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. Найти частные производные 1 и 2 порядка функции: $z = x + 2xy - e^y$.

3. Проверочная работа по теме «Методы интегрирования»

1) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^3}$ 2) $\int (x+1)e^x dx$ 3) $\int \cos^2 x dx$

4. Проверочная работа (тест) по теме «Гармонический анализ».

1. Чему может быть равно значение параметра a , при котором функция $f(x) = \sin(2ax)$ имеет период, равный $\frac{\pi}{2}$?

2. Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \sin 4x$.

3. Найти периоды функций: $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \operatorname{ctg}(2x+1)$, $f(x) = \cos(\pi+1)x$.

4. Наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x - 7 \sin 6x + 2 \operatorname{tg} \frac{9}{2}x$ равен

1) $\frac{\pi}{3}$, 2) 3π , 3) $\frac{2\pi}{3}$, 4) 6π .

5. Какой вид имеют гармонические колебания с начальной фазой $\frac{\pi}{6}$ и амплитудой, равной 4:

Варианты ответов: 1) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 2) $f(t) = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 3) $f(t) = A \sin(4t + \frac{\pi}{6})$,

4) $f(t) = 4 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 5) $f(t) = A \cos(\frac{\pi}{6}t + 4)$, $f(t) = 4 \cos(\frac{\pi}{6}t + \varphi)$?

6. Найти период T функции $f(x)$, если ее круговая частота равна 2.

7. Сколько составляет сдвиг по фазе гармоник $2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ относительно гармоник $\sin x$?

5. Проверочная работа по теме «Ряды Фурье».

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \pi + x$ при $-\pi < x \leq \pi$.

2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ в ряд Фурье по синусам.

Тематика расчетно-графического задания

1. Исследовать функцию $y = \frac{x+5}{x-2}$ и построить ее график.

Тематика контрольных работ

Контрольная работа № 1 по теме «Предел и непрерывность функции. ДФОП» Примерный вариант.

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + x^2}{2 + x^2} \right)^{x^2 + 3}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, построить график

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -\infty < x \leq -1 \\ 1 + x & -1 < x < 4 \\ 2x - 5 & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$, б) $f(x) = 5^{\left(\frac{4}{1-x}\right)}$

3. Вычислить пределы функций, пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{4x} - 3}{x \sin^2 x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$.

4. Вычислить производные функций:

а) $\arctg\left(\frac{\ln x^2}{4^{y+2}}\right) + x^4 \sqrt{y} + (1+x)^{x^2+1} = \ln 2$, б) $y = \frac{\ln^2 3x}{8 \cos(2x-1)}$, в) $y = \operatorname{tg} x \cdot \log_2^2 2x$, $x'_y = ?$

5. Найти дифференциал 1 и 2 порядков функции $y = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{3}\right)$.

6. Разложить по формуле Тейлора функцию $y = 2^{x+1}$ в точке $x = 1$.

7. Дан круг радиусом $a = 4$. Увеличим a на 2 см. Найти изменение длины дуги окружности и ее дифференциал.

4. Контрольная работа № 2 по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Примерный вариант.

10. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(2x - y)$.

11. Найти все частные производные 1 и 2 порядка функции $z = \cos(3x^2 - y^3)$.

12. Найти полный дифференциал функции $z = \arccos(x + y)$.

13. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

а) $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$ в точке $M(-1; 1; 3)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$ в точке $M(2; 1; -1)$.

14. Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ на экстремум.

15. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны между собой уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

16. Вычислить значение производной сложной функции $z = \frac{y}{x}$, где $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$ при $t = 0$.

17. Продифференцировать неявно заданную уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^3 = 59$ функцию z , вычислить значения производных в точке $M(3; 1; 4)$.

18. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^4 - 8x^2 + y^3 - 3y - 1$ в заданной области $D: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0$.

3. Контрольная работа № 3 по теме «Интегрирование».

Примерный вариант.

- 1) $\int x \sin(2x^2 - 3) dx$; 2) $\int \sin^2 2x dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$; 4) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$; 5) $\int (1-x)e^{3x} dx$;
 6) $\int \frac{13-x}{(x-6)(x^2+1)} dx$; 7) $\int \frac{x^5+2x^2-8}{x^3-16x} dx$; 8) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4x-1}} dx$; 9) $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x dx$
 10) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Сделать чертеж.
 11) Найти интеграл от ФДП: $\int x \sin(2y^2 - 3) dx$

4. Контрольная работа № 4 по теме «Ряды»

Примерный вариант

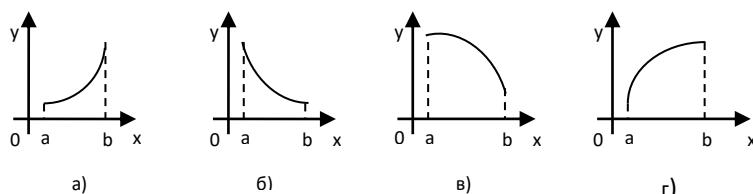
- 1). Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}$.
 2). Исследовать на абсолютную сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2}$.
 3). Доказать, что ряд сходится и найти его сумму: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(n-2)}$.
 4). Определить радиус, интервал сходимости и выяснить поведение на концах интервала сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 5^n}$.

Образцы тестовых заданий

1. Модуль комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$ равен а) 2 б) 4 в) $\sqrt{2}$ г) $\sqrt{3}$
 2. $z = \sqrt{3} - i$. Найдите комплексно сопряженное число \bar{z} .
 Варианты ответа: а) $-\sqrt{3} - i$ б) $\sqrt{3} - i$ в) $\sqrt{3} + i$ г) $-\sqrt{3} + i$
 3. Число π принадлежит множеству:
 $A = \{a | a \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 10\}$ $B = \{b | b \in \mathbb{Z}, -2 \leq b < 5\}$ $C = \{c | c \in \mathbb{R}, -3 < c < 3,6\}$ $D = \{d | d \in \mathbb{Q}, d < 4\}$
 4. Значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n+n^3}{n^3}$ равно а) 2 б) 1 в) 0 г) ∞
 5. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{\sin^2 x}$ равно а) 10 б) 5 в) -2 г) 0
 6. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ равно а) 1 б) $e^{\frac{1}{2}}$ в) e^2 г) e^{-2}
 7. Точка $x_0 = -2$ является точкой разрыва первого рода графика функции:
 Варианты ответа:
 а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -2 \\ \frac{1}{x+2}, & x > -2 \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x^2, & x \geq -2 \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -2 \\ x+2, & x \geq -2 \end{cases}$
 8. Найти производную функции $y = e^x(1 + \sin x)$ Варианты ответа:
 а) $y' = e^x(1 + \sin x - \cos x)$ б) $y' = e^x \sin x$
 в) $y' = e^x(1 + \sin x + \cos x)$ г) $y' = e^x \cos x$
 9. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{5}{x} + 4e^x$ Варианты ответа: а) $5 + 4e$ б) 9 в) 5 г) $-5 + 4e$
 10. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = -0,5x^2$ в

точке с абсциссой $x_0 = -3$. Варианты ответа: а) -3 б) -4,5 в) 3 г) 0

11. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a; b]$ одновременно выполняются условия $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$



12. Укажите верное утверждение

а) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ б) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

в) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = f(x) \int g(x) dx$ г) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

13. Выберите верное утверждение:

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = 2 \operatorname{tg} 2x + c$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -\operatorname{tg} 2x + c$

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \operatorname{ctg} x + c$ г) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + c$

14. Множество первообразных функции $f(x) = \sin(3x + 2)$ имеет вид:

а) $\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + C$ б) $-\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + C$ в) $-3 \cos(3x + 2) + C$ г) $-3 \cos x + C$

15. Укажите формулу интегрирования по частям

а) $\int u dv = uv + \int v du$ б) $\int u dv = uv - \int v du$

в) $\int u dv = \int v du - uv$ г) $\int u dv = uv \cdot \int v du$

16. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 + 1$, $y = 3$ определяется интегралом

а) $\int_1^3 (2 - 2x^2) dx$ б) $\int_{-1}^1 (2x^2 - 2) dx$ в) $\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$ г) $\int_1^3 (2x^2 - 2) dx$

17. Частная производная функции $z = x^4 \cos y$ по переменной y в точке $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равна

Варианты ответа: а) 4 б) -1 в) 1 г) 0

18. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в точке $M_0(1; 2; 3)$ имеет вид: $4(x - 1) - 5(y - 2) + (z - 3) = 0$. Определить $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}$

а) 4 б) -4 в) 10 г) -5

19. Экстремум функции $z = 4x^2 + y^2 - 3$ равен... Варианты ответа:

а) 4 б) -3 в) 3 г) 0

20. Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 10$, равен

а) 40π б) 20π в) 10π г) $0,4\pi$

21. Какой вид имеют гармонические колебания с начальной фазой $\frac{\pi}{6}$ и амплитудой, равной 4:

1) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 2) $f(t) = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$, 3) $f(t) = A \sin(4t + \frac{\pi}{6})$, 4) $f(t) = 4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, 5)

$f(t) = A \cos(\frac{\pi}{6}t + 4)$, 6) $f(t) = 4 \cos(\frac{\pi}{6}t + \varphi)$?

22. Коэффициент b_1 в разложении в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ на интервале

$(-\pi; \pi)$ равен.... Варианты ответа: а) 0 б) $\frac{2\pi}{3}$ в) $\frac{2\pi^3}{3}$ г) $\frac{2}{\pi}$

Вопросы к зачёту

1. Основные определения теории множеств. Операции над множествами.
2. Предельные, изолированные, внутренние точки множества. Ограниченное множество. Понятие супремума и инфимума.
3. Числовые множества: множество натуральных, целых, рациональных, действительных. Действительные числа и их свойства. Расширенное множество действительных чисел.
4. Множество комплексных чисел (три формы, геометрическое изображение, действия).
5. Функция. Определение функции. Область определения и множество значений функции. Основные определения теории функций.
6. Классификаций функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
7. Определение числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Основные определения.
8. Теорема об ограниченной последовательности. Теорема о вычислении пределов суммы, разности, произведения, частного.
9. Признаки существования предела числовой последовательности.
10. Предел функции. Два определения. Теоремы о пределах. Способы вычисления пределов.
11. Замечательные пределы функций.
12. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Определение. Сравнение б.м. Теорема о произведении двух б.м. Эквивалентные б.м. Теоремы. Сумма б.м. Таблица эквивалентных б.м.
13. Односторонние пределы функции. Определение. Формулировка леммы.
14. Два определения непрерывности функции в точке. Непрерывность функции на промежутке.
15. Свойства непрерывных функций: теорема о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций, теоремы о непрерывности в точке сложной, обратной и элементарных функций.
16. Свойства непрерывных функций: 1-ая и 2-ая теоремы Вейерштрасса (о непрерывности на промежутке).
17. Свойства непрерывных функций: 1-ая и 2-ая теоремы Больцано-Коши.
18. Непрерывность функции в точке. Разрыв функции. Типы разрывов.
19. Понятие производной. Два определения. Геометрический (вывод) и физический смысл.
20. Понятие дифференцируемости функции. Определение. Теорема 1 о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции.
21. Понятие дифференцируемости функции. Определение. Теорема 2 о связи между дифференцируемостью и непрерывностью.
22. Определение производной. Правило дифференцирования суммы и частного функций, разности и произведения функций. Правило дифференцирования сложной функции.
23. Правило дифференцирования обратной функции; функций, заданных параметрически и неявно.
24. Вычисление производной элементарных функций: постоянной, тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических, показательной, степенной. Понятие логарифмической производной.
25. Дифференциал. Определение. Свойства. Геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
26. Дифференциалы и производные высших порядков. Формулы Лейбница.
27. Теорема Ферма.
28. Теорема Ролля.

29. Теорема Лагранжа.
30. Теорема Коши.
31. Теорема Лопиталя. Следствие о раскрытии неопределенностей вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$.
32. Теоремы Тейлора и Маклорена. Запись остаточного члена в форме Пеано и Лагранжа.
33. Кривизна плоской линии.
34. Возрастание и убывание функций. Теорема о постоянной и монотонной функции. Определение экстремума функции и наиб.(наим.) значения. Теорема о необходимом условии существования экстремума. Ее геометрический смысл. Формулировка достаточных условий.
35. Выпуклость и вогнутость кривых. Определение. Определение точки перегиба. Теорема о необходимом и достаточном условии существования точек перегиба.
36. Асимптоты. Определение. Классификация.
37. Понятие функции двух и нескольких переменных. Область определения. Геометрическая интерпретация. Предел и непрерывность ФДП. Частные производные. Определения. Геометрический и физический смысл.
38. Частные производные второго порядка. Формулировка теоремы. Частные производные высших порядков.
39. Дифференцируемость ФДП (определение). Полный дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости: лемма. Геометрический смысл dz . Формулировка теоремы о достаточном условии дифференцируемости функции. Полные дифференциалы высших порядков.
40. Дифференцирование сложных функций. Полная производная. Частные производные.
41. Дифференцирование неявной функции. Формулировка теоремы о существовании неявной функции. Полная производная. Частные производные.
42. Дифференцирование неявной функции. Формулировка теоремы о существовании неявной функции. Полная производная. Частные производные.
43. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
44. Безусловный экстремум ФДП. Определение. Необходимое и достаточное условие экстремума.
45. Условный экстремум ФДП. Определение. Необходимое и достаточное условие экстремума.
46. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных.

Вопросы к экзамену

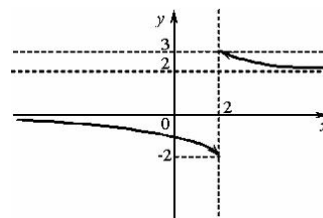
47. Первообразная и неопределенный интеграл. Определения и доказательство простейших свойств.
48. Основные методы интегрирования: непосредственное, метод замены переменной (подведение под знак дифференциала, подстановки). Метод интегрирования по частям. Вывод формулы.
49. Рациональные дроби. Разложение рациональной функции на элементарные дроби. Формулировка теорем.
50. Интегрирование рациональных дробей. Вычисление интегралов различных типов.
51. Интегрирование тригонометрических функций.
52. Интегрирование иррациональных функций.
53. Определенный интеграл. Определение. Простейшие свойства. Условия существования определенного интеграла.
54. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
55. Оценки определенных интегралов. Теорема о среднем (доказательство).
56. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница (вывод).
57. Замена переменных в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

58. Несобственные интегралы первого рода. Определение. Геометрический смысл. Вычисление интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$
59. Несобственные интегралы второго рода. Определение. Геометрический смысл. Вычисление интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$
60. Неберущиеся интегралы.
61. Интегралы от ФДП.
62. Числовые ряды. Определение ряда и его суммы, частичной суммы. Сходимость и расходимость. Бесконечная геометрическая прогрессия. Свойства сходящихся числовых рядов.
63. Необходимый признак сходимости числового ряда. Теорема (доказательство). Гармонический ряд (доказательство расходимости).
64. Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак сравнения и предельная форма признака сравнения (доказательство), признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Пример о сходимости ряда Дирихле.
65. Числовые ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимость. Достаточный признак сходимости.
66. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
67. Функциональные ряды. Критерий Коши. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
68. Степенные ряды. Определение. Теорема Абеля (доказательство). Область и радиус сходимости степенных рядов. Свойства степенных рядов.
69. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Теорема Тейлора.
70. Приближенное вычисление определенных интегралов, значений тригонометрических функций, радикалов с помощью степенных рядов.
71. Периодические функции. Гармонические колебания. Простые гармоники.
72. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле, основная теорема. Условия сходимости.
73. Ряды Фурье. Нахождение коэффициентов ряда Фурье.
74. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π , четных и нечетных с периодом 2π .
75. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$, четных и нечетных функций с периодом $2l$, заданных на полупериоде, со сдвинутым периодом, функций с «двойной симметрией».

Вариант зачетного теста

1. (2 балла) Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{1-x}}$ и запишите количество целых чисел, принадлежащих ей. .
2. (2 балла) Найдите действительную и мнимую части, модуль, аргумент комплексного числа $z = 2 - 2i$ и сопряженное ему, а также его сумму с числом $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.
- 3.(3 балла) Дайте определение предела числовой последовательности и найдите значения пределов $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$: 1) $a_n = \frac{5n^3 + 6n^2 + 3}{7n^3 - n + 3}$, 2) $a_n = \frac{n^4 + 5n^2 + 1}{7n^2 + n + 1}$, 3) $a_n = \left(\frac{3}{7}\right)^n$, 4) $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$
4. (4 балла) Вставьте пропущенные части определений: «Бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$ называется..... Проверьте, являются ли при $x \rightarrow 0$ функции $y = \sin^2 4x$ и $y = 4x^2$ эквивалентными бесконечно малыми. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$.

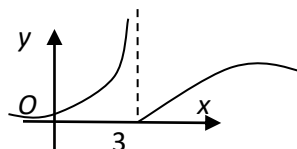
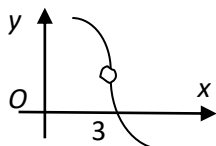
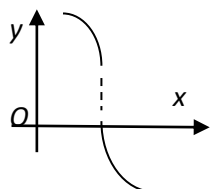
5. (3 балла) Если графику функции (рис.) соответствует условие $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$, то запишите, чему равно значение a . Найдите значение



одностороннего предела функции $\lim_{x \rightarrow -2-} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{x+2}}$.

6. (1,5 балла) Найдите значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^x$.

7. (1,5 балла) Вставьте пропущенную часть определения: «Функция называется непрерывной в точке a , если....». Установите согласно графику характер точки $x = 3$.



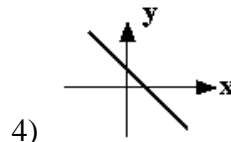
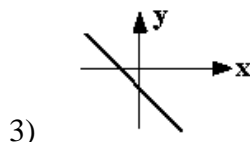
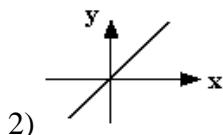
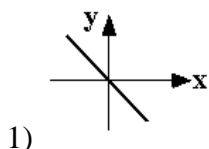
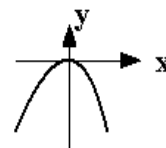
8. (4 балла) Дайте определение производной и найдите производные y'_x функций:

а) $y^3 \ln x + tg(x^2) = y + 1$, б) $y = (\text{arctg} x)^{x+1}$.

9. (2 балла) Дайте определение приращения функции и найдите дифференциал $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos(2x)}$.

10. (2 балла) Геометрический смысл производной: «Производной функции по Лейбницу называется....». Вставьте пропущенную часть определения. Запишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 3x - 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

11. (1,5 балла). Укажите график производной $f'(x)$ для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке.



12. (1 балл) Функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на интервале (a, b) и дифференцируема на нем. Укажите, какое из следующих условий выполняется: 1) $f'(x) > 0$ на (a, b) ; 2) $f'(x) \geq 0$ на (a, b) ; 3) $f'(x)$ принимает на (a, b) как положительные, так и отрицательные значения; 4) $f'(x) \leq 0$ на (a, b) .

13. (2 балла) Разложите по формуле Маклорена функцию $y = \ln(x+1)$.

14. (2 балла) Сформулируйте правило Лопиталья и найдите с его помощью значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

15. (2 балла) Запишите формулу для нахождения второй производной функции, заданной параметрически. Найдите производную третьего порядка функции $y = \cos(2x+1)$.

16. (1,5 балл) Частная производная функции $z = x^5 \cos 2y$ по переменной x в точке $M(1, \frac{\pi}{4})$

равна: Варианты ответов: 1) 5, 2) 0, 3) -2, 4) 2.

17. (2 балла) Установите соответствие между функциями и их производными: 1) $\frac{\partial^2(3xy + x^2)}{\partial x^2}$,
 2) $\frac{\partial^2(3xy + x^2)}{\partial x \partial y}$, 3) $\frac{\partial^2(3xy + 3y^2)}{\partial y^2}$, 4) $\frac{\partial^2(3xy + 4y^2)}{\partial y^2}$. Варианты ответов: а) 4, б) 3, в) 8, д) 2, е) 6.
18. (1,5 балла) Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 \ln y - 4e^y$.
19. (1,5 балла) Запишите уравнение нормали к поверхности $xy + yz = 4$ в точке $M(2, 1, 1)$.

Вариант экзаменационного билета

1 вопрос. Теорема о среднем. Доказательство.

2 вопрос. Нахождение интервала сходимости степенного ряда.

3 вопрос.

1) Укажите все верные утверждения (С- произвольная постоянная):

1) $\int (4x^2 - 3x)dx = 4 \int x^2 dx - 3 \int x dx$; 2) $\left(\int (2x) dx \right)' = 2x$; 3) $\int x \sin x dx = \int x dx \int \sin x dx$.

2) Решите интеграл: $\int \frac{x}{1-x^2} dx$

3) Вычислить интеграл: 1) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3} + 3}{1 - \sqrt{x+3}} dx$

4) Дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Определите, какое из

приведенных ниже утверждений верно в этом случае: 1) ряд сходится; 2) ряд может сходиться, а может расходиться; 3) указанный предел не может равняться нулю; 4) ряд расходится. Поясните выбор.

5) Укажите и докажите правильное утверждение относительно сходимости рядов: а)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^3+2}$: 1) а и b сходятся абсолютно; 2) а сходится условно, b сходится абсолютно, 3) а и b сходятся условно; 4) а расходится, b сходится условно; 5) а расходится, b сходится абсолютно.

б) Чему равен коэффициент a_0 ряда Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом π , заданной

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ формулой $f(x) = 2x + 1$?