

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий

Кафедра математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки (специальность):

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа:

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Очная форма обучения

Составители:

Кашинцева О.А., доцент кафедры МиИ,  
канд.техн.наук, доцент

г. Череповец - 2022

## **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

### **Основная литература:**

1. Кашинцева О.А. Математика. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов / Кашинцева О.А., Сенатова И.А. - Череповец: ФГБОУ ВПО ЧГУ, 2011. - 153 с. <https://edu.chsu.ru/>
2. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник для вузов / И. И. Привалов. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9392-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/193364>
3. Соболев, В. В. Введение в комплексный анализ: учебное пособие / В. В. Соболев, Г. И. Волокитин. — Ростов-на-Дону: Донской ГТУ, 2017. — 162 с. — ISBN 978-5-7890-1288-8. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/238121>

### **Дополнительная литература:**

1. Ганичева, А. В. Основы теории функции комплексной переменной. Операционное исчисление: учебное пособие для вузов / А. В. Ганичева. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 148 с. — ISBN 978-5-8114-7271-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/173082>
2. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 368 с. — ISBN 978-5-8114-1064-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210425>

## **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

1. Мандик, В.П. Комплексный анализ в вопросах и задачах: учебное пособие / В.П. Мандик. - Череповец: ЧГУ, 1996. - 100 с.

## **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)**

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытый МГТУ, онлайн курсы: Теория функций комплексного переменного: URL: <https://online.bmstu.ru/courses/course-v1:BMSTU+TFKP101+2018/about>

**Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов**

**Лекции**

	Тема лекции	Кол. часов
1	1. Комплексные числа: определение, изображение, три формы, действия над комплексными числами. Определение ФКП. Многосвязные области. Предел и непрерывность ФКП.	2 ч.
1	2. Основные элементарные ФКП, их свойства. Дифференцируемость ФКП. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Их свойства. Особые точки. Гармонические функции и гармонические пары.	2 ч.
1	3. Коэффициент растяжения. Конформные отображения, свойства. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Критерий конформности.	2 ч.
1	4. Свойства некоторых элементарных функций, их конформные отображения: линейной, простейшей дробно-линейной, дробно-линейной.	2 ч.
1	5. Свойства некоторых элементарных функций, их конформные отображения: степенной, показательной, Жуковского, тригонометрических и гиперболических.	2
1	6. Интеграл от ФКП. Определение, вычисление, свойства. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема Лиувилля. Примеры на вычисление интегралов.	2 ч.
1	7. Последовательности и ряды аналитических функций. Числовые ряды с комплексными членами. Функциональные ряды. Теорема Абеля. Нахождение радиуса и круга сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Таблица разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.	2 ч.
1	8. Ряды Лорана. Теорема Лорана и ее следствия. Примеры.	2 ч.
1	9. Изолированные особые точки, их классификация. Вычеты. Два определения. Вычисление. Основные теоремы о вычетах.	2 ч.
2	10. Применение вычетов к вычислению контурных и определенных интегралов. Области применения ТФКП.	2 ч.
2	11. Операционное исчисление. Оригинал. Показатель степени роста. Преобразование Лапласа. Класс изображений. Изображение элементарных функций. Свойства изображений. Таблицы свойств и изображений.	2 ч.
2	12. Нахождение изображения с помощью интеграла Лапласа и с помощью известных изображений и теорем. Определение оригинала по изображению. Определение оригинала по изображению при помощи таблиц и свойств изображений. Примеры.	2 ч.
2	13. Формула Меллина. Условия существования оригинала. Вычисление интеграла Меллина. Теоремы разложения. Определение оригинала по изображению при помощи теорем. Примеры.	2 ч.
2	14. Применение операционного исчисления. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	2 ч.
2	15. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, вычисление несобственных интегралов, вычисление контурных интегралов.	2 ч.
	Итого	30

## Практические занятия

№ раздела	Тема практического занятия	Количество часов
1	1. Комплексные числа. Понятие ТФКП. Изображение на комплексной плоскости. Нахождение значений функций.	2
	2. Выделение действительной и мнимой частей. Основные элементарные функции. Значения функций.	
1	3. Нахождение значений функций. Производная. Аналитичность функции. Условия Коши- Римана.	2
1	4. Проверочная работа. Конформные отображения.	2
1	5. Коэффициент растяжения, угол поворота.	2
1	6. Простейшая дробно-линейная функция. Ее свойства. Нахождение образов кривых при данном отображении. Дробно-линейные функции (задание образов трех точек).	2
1	7. Дробно-линейные функции. Их отображения. Интеграл от ФКП.	2
	8. Интеграл от ФКП. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.	
1	9. Контрольная работа.	2
1	10. Числовые ряды с комплексными членами. Степенные ряды с комплексными членами.	2
1	11. Ряды Лорана	2
1	12. Характер изолированных особых точек. Вычеты.	2
1	13. Вычеты. Применение вычетов к вычислению интегралов.	2
1	14. Контрольная работа.	2
2	15. Преобразование Лапласа. Оригинал. Показатель степени роста. Нахождение изображения с помощью интеграла Лапласа и с помощью известных изображений и теорем.	2
2	16. Восстановление оригинала по изображению с помощью таблицы и свойств изображений.	2
2	17. Восстановление оригинала по изображению. Теоремы разложения.	2
2	18. Применение операционного исчисления: решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	
2	19. Применение операционного исчисления: решение систем дифференциальных уравнений, вычисление несобственных интегралов.	2
2	20. Контрольная работа по теме «Элементы операционного исчисления».	2
	Итого	40

## Средства контроля качества обучения

Тематика индивидуальных заданий и проверочных работ
<p>1. Индивидуальное задание по теме «Комплексные числа».</p> <p>1) Изобразить на комплексной плоскости число <math>z = (3+i)^2 / (1-2i)</math>.</p> <p>2) Найти сумму и частное чисел <math>z_1 = 3e^{i\pi}</math>, <math>z_2 = (4+3i)^3</math>.</p> <p>3) Найти действительную и мнимую части, модуль, аргумент числа, сопряженное комплексному числу <math>z = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)</math>.</p> <p>4) Найти корень из комплексного числа <math>\sqrt[3]{1+i}</math>. Изобразить на окружности.</p> <p>5) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:  <math>0 &lt; \operatorname{Re} z &lt; 3</math>, <math>0 &lt; \arg z &lt; \pi</math></p>

2. Проверочная работа по теме «ТФКП».

1. Найти множество точек, удовлетворяющих условию:  $\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$ .
2. Найти значение функции в точке:  $Ln(2 + 2i)$ .
3. Проверить условия КРЭДа и найти производную функции:  $\omega = \cos 3z$ .
4. Найти действительную и мнимую части функции:  $u = z^2 + \frac{z}{z}$ .

3. Индивидуальное задание по теме «Применение операционного исчисления».

1. Решить методом операционного исчисления систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases} \quad \text{при заданных начальных условиях } x(0) = 0, y(0) = 5$$

**Тематика контрольных работ**

*Контрольная работа № 1 по теме «ТФКП»*

*Примерный вариант.*

1. Доказать, что функция  $\omega = (z - 3)^2$  определяет конформное отображение области  $D - \left\{ z : |z - i| \leq 1, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \right\}$ .
2. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении  $\omega = z^2$  в точке  $z_0 = 1 + i$ .
3. Найти образ кривой  $l : |z| = \frac{1}{2}$  при отображениях: а)  $\omega = 2z + 1$ , б)  $\omega = \frac{1}{z}$ , в)  $\omega = \frac{z}{z + i}$ .
4. Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки  $-1, i, 1 + i$  в точки  $0, 2i, 1 - i$ .
5. Вычислить интегралы
  - 1) непосредственно  $\int_l \operatorname{Im}(z - 1)^2 dz$ ,  $l$  – отрезок прямой от  $O(0, 0)$  до  $A(1, 1)$ .
  - 2) с помощью теоремы Коши:  $\oint_{|z-1|=1} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ .

*Контрольная работа № 2 по теме «ТФКП»*

*Примерный вариант.*

1. Исследовать на сходимость числовой ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3in^2 - 2n}{n^3 + 3 - i}$
2. Определить радиус и область сходимости ряда:  $\sum_{n=0}^{\infty} (n + i)z^n$ .
3. Разложить в ряд Тейлора по степеням  $(z - 1)$  функцию  $\omega = \ln z$ .
4. Вычислить вычеты функции в особых точках.
  - 1)  $\omega = \frac{\sin 2z}{(z + 1)^3}$ ; 2)  $\omega = \frac{2z}{z^2 - 1}$ ; 3)  $\omega = (z + 1)5^{\frac{1}{z+1}}$ ; 4)  $\omega = z^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{z^2}$ .
5. Вычислить интегралы
 

с помощью вычетов а)  $\oint_l \frac{dz}{(z^2 + 1)z}$ ,  $l : x^2 + y^2 = 2y$ . б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$ .
6. Разложить в ряд Лорана
  - 1) по степеням  $z$  функцию  $\omega = \frac{z}{z + 1}$  в окрестности точки  $z = 0$  и  $z = \infty$ .
  - 2) по степеням  $z$  функцию  $\omega = \frac{1}{(z - 1)(z + 2)}$  в области  $0 < |z| < 1$ .

*Контрольная работа № 3 «Операционное исчисление»  
Примерный вариант*

1. Пользуясь определением, найти изображение Лапласа функции:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 3-t, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}$$

2. Найти изображение функции  $\int_0^t \tau^2 \cos \pi \tau d\tau$

3. Найти оригиналы функций 1)  $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}$ , 2)  $F(p) = \frac{p}{p^2+6p+4}$ ,

3)  $F(p) = \frac{1}{p} \cos p$

4. Решить методом операционного исчисления дифференциальное уравнение  $y'' + y = 2 \cos t$  при заданных начальных условиях  $y(0) = 0, y'(0) = -1$

№ п./п.	Вопросы к экзамену
1	Комплексные числа: определение, изображения, три формы.
2	Действия над комплексными числами.
3	Понятие ФКП. Многосвязные области. Область определения и множество значений. Действительная и мнимая часть. Выражения для $x$ и $y$ .
4	Предел и непрерывность ФКП.
5	Основные элементарные функции.
6	Дифференцируемость ФКП. Определение производной. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Определение и свойства аналитических функций.
7	Гармонические функции. Гармонические пары.
8	Конформные отображения.
9	9. Сохранение углов при конформных отображениях. Геометрический смысл аргумента производной.
10	О постоянстве растяжений при конформных отображениях. Коэффициент растяжения. Геометрический смысл модуля производной.
11	Понятие многолистности. Критерий конформности.
12	Линейная функция. Ее конформное отображение.
13	Простейшая дробно-линейная функция. Ее конформное отображение. Геометрический смысл отображения. Понятие инверсии. Построение образа точки.
14	Дробно-линейная функция. Ее конформное отображение.
15	Степенная функция. Ее конформное отображение. Понятие римановой поверхности.
16	Тригонометрические, гиперболические функции, функция Жуковского. Их конформные отображения.
17	Интегрирование по комплексному аргументу. Определение интеграла от ФКП. Теорема существования. Свойства. Интеграл от многозначной функции.
18	Теорема Коши. Следствия из теоремы. Интегральная формула Коши. Следствия.
19	19. Числовые ряды с комплексными членами.
20	Функциональные (степенные) ряды с комплексными членами. Основные понятия. Теорема Абеля. Нахождение области и радиуса сходимости рядов.

21	Ряды Тейлора и Маклорена. Таблица разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.
22	Ряды Лорана. Теорема Лорана. Следствия.
23	Изолированные особые точки и их классификация. Типы бесконечно удаленной особой точки.
24	Два определения вычета. Формулы для нахождения вычетов.
25	Основные теоремы о вычетах.
26	Применение вычетов к вычислению интегралов.
27	Применение ТФКП.
28	Операционное исчисление. Определение оригинала. Показатель степени роста.
29	Преобразование Лапласа или изображение. Свойства изображений. Область определения и область аналитичности изображения. Преобразование Хевисайда.
30	Изображение некоторых элементарных функций: единичной функции Хевисайда.
31	Изображение некоторых элементарных функций: простейшей степенной, показательной.
32	Свойства изображений. Основные теоремы. Таблица изображений.
33	Нахождение изображения с помощью интеграла Лапласа. Свои примеры.
34	Нахождение изображения с помощью известных изображений и теорем. Свои примеры.
35	Определение оригинала по изображению при помощи использования таблицы и свойств изображений. Свои примеры.
36	Интеграл Меллина. Условия существования оригинала и вычисление интеграла Меллина.
37	Теоремы разложения.
38	Применение операционного исчисления для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
39	Применение операционного исчисления для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
40	Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений с частными производными.
41	Применение операционного исчисления для вычисления несобственных интегралов.

### Вариант экзаменационного теста

- (1,5 балла)** Найдите сумму чисел  $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ ,  $z_2 = (2+i)^2$ .
- (2 балла)** Найдите и изобразите геометрически на комплексной плоскости число  $z = \frac{1-i}{1+i} + i^{14}$ .
- (1,5 балла)** Изобразите геометрическую интерпретацию области, заданной условиями:  
 $\operatorname{Re} z < 1$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ,  $1 < |z-1| < 3$ .
- (2 балла)** Определите функцию  $w(z) = f(z)$  по известным действительной и мнимой частям  
 $\operatorname{Re} f(z) = 2x$ ,  $\operatorname{Im} f(z) = x - y$ .
- (1,5 балла)** Найдите значение  $\operatorname{Ln}(4+i4)$ .
- (2,5 балла)** Докажите, что функция аналитическая и найдите ее производную  $f(z) = 3z^2$ .
- (1,5 балла)** Найдите коэффициент растяжения и угол поворота в точке  $z=i$  для отображения  $f(z) = 2z^3 + 6z$ .
- (2 балла)** Найдите дробно-линейное отображение, переводящее точки  $i, 1, -1$  в точки  $0, \infty, 1$ .

9. (2,5 балла) Вычислите интеграл по заданному контуру  $\oint_L \frac{dz}{(z-2i)(z+2i)}$ , где  $L: |z-i|=2$ .

10. (2 балла) Исследуйте на абсолютную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2+2i}{i} \right)^n$ .

11. (3 балла) Найдите разложение в ряд Лорана по степеням  $z$  функции  $f(z) = \frac{5}{7+9z}$  1) в окрестности точки  $z=0$ , 2) в окрестности бесконечно удаленной точки  $z=\infty$ .

12. (6 баллов) Найдите вычеты функции 1)  $\text{выч} \left[ \frac{2}{z^2+9}; -3i \right]$ , 2)  $\text{выч} \left[ \frac{1}{(z-1)^2}; 1 \right]$ ,  
3)  $\text{выч} \left[ \frac{3}{z+5}; \infty \right]$ , 4)  $\text{выч} \left[ \frac{\text{tg} z}{3z}; 0 \right]$ .

13. (3 балла) Вычислите  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z+1)(z+3)}$ , где контур  $\Gamma = \{z: |z|=2\}$  при помощи одной из теорем о вычетах.

14. (3 балла) Пользуясь определением, найдите изображение функции по заданному оригиналу:  $f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 1 \\ t+1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \end{cases}$ .

15. (6 баллов) Найдите по изображениям оригиналы  $F(p) = \frac{p+1}{p^2+4p+6}$ ,  $F(p) = \frac{2-p}{p(p^2+6)}$ .