МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ П. Н. Нестеров

«18» мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

«Специальная дисциплина в соответствии с темой диссертации
на соискание ученой степени кандидата наук»

программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
по научной специальности
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Форма обучения очная

Программа одобрена
на заседании кафедры алгебры и математической логики
от «17» мая 2022 года, протокол № 9

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины является обеспечение фундаментальной подготовки в одной из основных областей современной математики, освоение языка и методов одного из наиболее мощных инструментов современной математики. Курс лежит в основе большей части современной электронной техники, численных методов алгебры и математических методов защиты информации, имеющих применение во многих областях естествознания. Его главной задачей является обучение основным методам решения задач в указанной области, ознакомление с историей развития математической логики, алгебры и теории чисел и вкладом в неё российских математиков.

Основная задача дисциплины – научить студентов пониманию языка математической логики, алгебры и теории чисел, воспитанию культуры вычислений с помощью алгебры логики и теории чисел, умениям применять основной аппарат и алгоритмы математической логики, алгебры и теории чисел в различном контексте. Содержание курса является базой для дальнейшего развития содержания дисциплины в специальных курсах.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Данная дисциплина является обязательной для освоения и направлена на подготовку к сдаче кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика по отрасли наук: физико-математические.

3. Планируемые результаты освоения дисциплины: -

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

- требуемые разделы математической логики, алгебры и теории чисел в объеме, необходимом для проведения исследований;

Уметь:

- классифицировать поставленные задачи в соответствии с фундаментальными разделами математики;
- применять математический аппарат для решения поставленных задач;

Владеть:

- современными методами проведения исследований в области математической логики, алгебры и теории чисел.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1.	Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 1.	3	6			2	28	Задания для самостоятельной работы
2.	Теория чисел	3	6			2	28	
	Всего за 3 семестр 72 часа		**12**			**4**	**56**	
3.	Алгебра	4	12			4	56	
	Всего за 4 семестр 72 часа		**12**			**4**	**56**	
4.	Математическая логика. и теория алгоритмов. Часть 2.	5	12			4	38	Задания для самостоятельной работы
							18	Кандидатский экзамен
	Всего за 5 семестр 72 часа		**12**			**4**	**56**	
	Всего 216 часов.		**36**			**12**	**168**	

Содержание разделов дисциплины:

1. Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 1.

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи выполнимость.
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

2. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности .
2. Первообразные корни и индексы.

3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. * Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами. ([16]).
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
11. Трансцендентность чисел e и π.

3. Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n, $n \geq 5$ и SO_3.
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа .
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы .
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности .
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса .
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. * Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. * Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. * Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

4. Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 2.

1. * Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
2. * Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
3. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
4. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
5. * Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
6. * Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

7. * Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы аспирантов. На консультациях по просьбе аспирантов рассматриваются наиболее сложные разделы дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы аспирантов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
4. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., Наука, 1985.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
6. Ершов Ю.Л, Палютин Е.А. Математическая логика. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
7. Новиков П.С. Элементы математической логики. Изд. 2. М.: Наука, 1973

б) дополнительная литература

8. Гэри М, Джонсон Д. Вычислительные машины и трудноршаемые задачи. М.: Мир, 1982..
9. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.
10. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Изд. 3. М.: Наука, 1984.
11. Ершов Ю.Л.. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука, 1980.
12. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
13. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
14. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
15. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ, 1995.

17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М., Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
19. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009
20. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
21. Владимиров Д.А., Булевы алгебры. М., Наука, 1969
22. Сарнак П. Модулярные формы и х приложения, М.: ФАЗИС, 1998
23. Серр Ж.П., Курс арифметики. М., Мир, 1972.
24. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.

в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав следующие помещения:
- учебные аудитории для проведения лекций;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

Помещения для самостоятельной работы должны быть оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
доктор физико-математических наук Л.С. Казарин

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Специальная дисциплина в соответствии с темой диссертации
на соискание ученой степени кандидата наук»
по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Оценочные материалы
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации
аспирантов по дисциплине

1. Контрольные задания и (или) иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы

3 семестр

Тема: Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 1.

1.Докажите, что класс языков NP замкнут относительно объединения, пересечения, конкатенации и *-операции Клини.
2.Можно ли за полиномиальное время определить выполнимость булевой формулы, заданной в дизъюнктивной нормальной форме? А для формулы в конъюктивной нормальной форме?
3. Доказать, что множество дизъюнктов S невыполнимо, когда существует резолютивный вывод пустого дизъюнкта из S.
4. Сформулировать определение независимости аксиомы от остальных аксиом системы. Предложить (возможный) план доказательства независимости аксиомы.
5. Пусть формула A, содержит n предикатов, которые зависят только от одной (и той же) переменной и является истинной для всякой области, содержащей не более 2^n элементов, то формула A тождественно истинна. Доказать.
6. Доказать, что если формула A выводима в исчислении высказываний, то не(не A) выводима в интуиционистском исчислении высказываний. Верно ли, что любая формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний, выводима в исчислении высказываний?

5 семестр

Тема: Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 2.

1. Доказать, что если для любого x из F(x) следует G(x), то из справедливости для любого x F(x) следует справедливость для любого x G(x).
2. Операции с кванторами в логике предикатов и примитивные формулы. Описать применения.
3. Доказать непротиворечивость ограниченной арифметики.
4. Мощность множества алгебраических чисел.
5. Доказать, что булева алгебра является дистрибутивной решеткой.
6. Каждый максимальный фильтр D на булевой алгебре является простым. Доказать.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине проводится устно по экзаменационным билетам.

Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса.

На подготовку к ответу дается от 60 до 120 минут.

Список вопросов к экзамену:

Математическая логика и теория алгоритмов.

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы .
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи выполнимость.
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
9. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
10. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Алгебра

1.Теоремы Силова.

2. Простота группы A_n, $n \geq 5$ и SO_3.

3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.

4. Свободные группы и определяющие соотношения.

5.Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа .

6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы .

7.Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности .

8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса .
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.

3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.

2. Первообразные корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
11. Трансцендентность чисел e и π.

2.1 Описание процедуры выставления оценки

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется аспиранту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Аспирант дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует научную терминологию.

Оценка «Хорошо» выставляется аспиранту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются аспирантом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется аспиранту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. При ответах аспирант допускает ошибки в определении и раскрытии отдельных понятий, формулировке положений, которые аспирант затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа аспирант не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется аспиранту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов аспиранта.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также аспиранту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.