МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра теоретической информатики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ИВТ
______________Д.Ю. Чалый
«_18_»____мая______2020 г.

Рабочая программа дисциплины
«Математическая логика»

Направление подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль)
«Прикладная информатика в экономике»

Форма обучения
очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 16 апреля 2020 г.,
протокол № 8

Программа одобрена НМК
факультета ИВТ
протокол № 7 от
17 мая 2020 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Математическая логика» являются приобретение фундаментальных знаний и умений в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения.

Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами математической логики, ознакомление с их применениями в информатике, в частности, для верификации программ, изучение основ теории алгоритмов, установление существования алгоритмически неразрешимых проблем и значение этого фундаментального факта теории алгоритмов для алгоритмической практики и компьютерных наук, ознакомление с базовыми подходами к оценке сложности алгоритмов и задач и некоторыми приемами построения эффективных алгоритмов.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математическая логика» относится к базовой части ОП бакалавриата. Рассматриваемая дисциплина играет исключительно важную роль для общематематической подготовки бакалавров. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин "Математический анализ", “Алгебра и геометрия”, "Информатика". Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Математическая логика и приложения в информатике и компьютерных науках", используются обучаемыми при изучении обще профессиональных и специальных дисциплин математического и компьютерного циклов.

Получаемые в рамках дисциплины знания являются основой понимания последующих курсов, таких как теория формальных языков, теория неклассических логик, логическое программирование и других формально-аксиоматических теорий, лежащих в основе современных информационных прикладных систем.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	**Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)**	**Перечень планируемых результатов обучения**
Общепрофессиональные компетенции		

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.4 демонстрирует понимание и навыки использования знаний, умений и навыков, полученных и сформированных при изучении математических и естественных наук	**Знать:** основные понятия, принципиальные результаты и методы математической логики. **Уметь**: решать стандартные задачи математической логики. **Владеть навыками:** установления выводимости формул в ИВ и ИП, написания программ для машин Тьюринга, оценки временной и емкостной сложности Тьюринговых алгоритмов.
ПК-6 Способен использовать математические и естественно-научные методы для решения прикладных задач	ПК-6.4 Знает принципы построения научной работы, современные методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации.	**Знать:** основные понятия, принципиальные результаты и методы математической логики. **Уметь**: решать стандартные задачи математической логики. **Владеть навыками:** установления выводимости формул в ИВ и ИП, написания программ для машин Тьюринга, оценки временной и емкостной сложности Тьюринговых алгоритмов.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)* ***Формы ЭО и ДОТ (при наличии)***
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение.	2	2	4				8	Устный опрос Реферат
2	Логика высказываний и логика предикатов	2	2	5				8	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
3	Булевы функции.	2	2	5				8	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
4	Логические исчисления. Исчисление высказываний	2	2	5				8	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
5	Исчисление предикатов.	2	2	5				8	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос Реферат Контрольная работа
6	Метод резолюций.	2	2	5				8	Задания для самостоятельной (домашней) работы
7	Применения математической логики в информатике.	2	5	5				5	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос Реферат
		2							Экзамен
	ИТОГО		**17**	**34**		**4**	**0,5**	**53**	
	в том числе с ЭО и ДОТ								

Содержание разделов дисциплины:

1.Введение.
Понятие множества. Операции над множествами и их свойства. Соответствия, функции, отношения и их типы. Сравнение мощностей множеств. “наивная” теория множеств – теоремы о счетных множествах, о несчетности множества действительных чисел, о шкале мощностей. Парадоксы. Теория алгоритмов и принципиальные возможности вычислительных машин. Сложность алгоритмов и её значение для практики.
2. Исчисление высказываний

Высказывания как предложения, имеющие истинностное значение. Понятие формальной аксиоматической теории. Исчисление высказываний (ИВ) как пример аксиоматической теории. Понятие и примеры выводимости. Теорема о дедукции. Переформулировка аксиом как правил выводимости. Формализация понятия истинности на основе булевых функций. Связь между выводимостью и истинностью. Решение основных проблем формальной теории ИВ – непротиворечивость, полнота, разрешимость. Проблема разрешимости для других математических теорий.

Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тождественно истинные и выполнимые формулы. Булевы алгебры. Алгебра высказываний и алгебра подмножеств множества как примеры булевых алгебр. Предикаты на множестве и их связь с отношениями. Логические операции над предикатами. Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации. Оценки.. Выполнимые, тождественно истинные и тождественно ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
3. Булевы функции

Алгебра булевых функций как функциональная система с операциями. Теоремы о СДНФ и СКНФ. Теорема о булевских многочленах. Формулы в данном базисе. Теоремы о выразимости и полноте. Базисы замкнутых классов булевых функций. Пример применения к функциональному проектированию – схема двоичного сумматора и инвертора.

Булевы функции. Их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций. Базисы замкнутых классов булевых функций. Минимизация булевых функций.
4. Логические исчисления. Исчисление высказываний.

Общее понятие о логическом исчислении. Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез. Теорема дедукции. Непротиворечивость исчисления высказываний. Задача полноты ИВ.
5. Элементы исчисления предикатов

Алгебра предикатов и интерпретация формул исчисления предикатов (ИП) в данной предметной области. Определение формальной аксиоматической системы ИП. Простейшие примеры выводимости. Общезначимость и выводимость. Непротиворечивость ИП. Пример формулы, тожественно истинной в любой конечной предметной области, но не выводимой. Алгоритмическая неразрешимость проблемы общезначимости формул ИП.

Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез. Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам. Теоремы непротиворечивости и адекватности. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов. Элементы теории моделей. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.

6.Метод резолюций.

Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Семантические деревья. Метод резолюции для логики предикатов. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов. Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах. Методика составления и реализация логических программ.

7. Применения математической логики в информатике.

Логико-математические подходы к верификации программ. Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

– для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office, издательская система LaTeX;

- компиляторы с высокоуровневых языков программирования;

– для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Белов, Ю. А., Лекции по математической логике и теории алгоритмов [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлению Фундаментальная информатика и информационные технологии / Ю. А. Белов, В. А. Соколов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2013, 138с
2. Белова Л. Ю., Элементы теории множеств и математической логики : теория и задачи [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Л. Ю. Белова, Ю. А. Белов ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2012, 200 с.
3. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию: учеб. пособие для вузов. / П. С. Александров - 2-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2010. - 367 с.

б) дополнительная литература

4. Дурнев, В. Г., Введение в математическую логику [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. Г. Дурнев, Ярославль, ЯрГУ, 2006, 221 с.
5. Лавров, И. А., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. - 5-е изд., испр., М., ФИЗМАТЛИТ, 2003, 255с
6. Клини, С., Математическая логика, М., Мир, 1973, 480 с.
7. Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:
-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
-помещения для самостоятельной работы;
-помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, хранящиеся на электронных носителях и обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочим программам дисциплин.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор:

Доцент кафедры теоретической информатики, к.ф.-м.н.		Ю.А. Белов
должность, ученая степень	*подпись*	*И.О. Фамилия*

Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Математическая логика»

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

Задания для самостоятельной работы

Задания по теме 1

Домашние задания по теме № 1 **"Логика высказываний и логика предикатов"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 47 из параграфа 1 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.29 из параграфа 1 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Задания для самостоятельного решения № 1- 45 из параграфа 5 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 5.1 - 5.42 из параграфа 5 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Типовые индивидуальные задания

Задания по теме «Булевы функции»

1. Каково число булевых функций от n переменных, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения?
2. Каково число булевых функций от n переменных, принимающих на смежных наборах противоположные значения?
3. Доказать, что если функция f реализуема формулой над C глубины k, то она реализуема над C
4. .4. Найти число различных булевых многочленов длины k от n переменных, равных нулю на нулевом и единичном наборах значений переменных.
5. Найти булеву функцию от n переменных, у которой длина многочлена в 2n раз превосходит длину её СДНФ.
6. Перечислить все самодвойственные функции. существенно зависящие от переменных x, y, z.
7. Выражается ли $x \Rightarrow y$ через систему $\{0, 1, x \cdot y, x \vee y, x \cdot y \vee z, x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z\}$?
8. Выражается ли $x \Rightarrow y$ через систему $\{x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}$?

9. Выражается ли $x \vee y$ через $\{x \cdot y', x \oplus y \oplus z\}$?
10. Выражается ли $x \vee y$ через $\{x', (x \oplus y)'\}$?
11. Выражается ли $x \downarrow y$ через $\{x \cdot y \vee z', ((z' \Rightarrow y) \Rightarrow x)\}$?
12. Выражается ли $x \cdot y$ через $\{x', (x \oplus y)'\}$?
13. Выражается $x|y$ ли через $\{x \cdot y \cdot z' \vee x \cdot z', z'\}$?
14. Выражается ли $x \cdot y$ через $\{x \oplus y \oplus z, x \Rightarrow y\}$?
15. Перечислить все функции, существенно зависящие от трех переменных, такие, что отождествление любых двух переменных приводит к функции, существенно зависящей ровно от одной переменной.
16. Доказать, что из многочлена степени $k \geq 3$ можно с помощью отождествления переменных получить многочлен степени $k-1$.
17. Доказать, что любой базис в T_0 содержит не более трех функций. Дать примеры базисов класса T_0, состоящих из одной, двух и трёх функций.
18. Доказать, что любой базис в $T_0 \cap T_1$ содержит не более двух функций. Привести пример
19. базиса, состоящего из одной функции.
20. Каково число монотонных самодвойственных функций, существенно зависящих ровно от четырёх переменных?
21. Доказать, что любая монотонная функция, отличная от константы, имеет ДНФ из монотонных функций.. Аналогичное утверждение имеется для КНФ.
22. Доказать, что система $\{0, 1, x \wedge y, x \vee y\}$ образует базис в M.
23. Доказать, что всякий базис в M содержит не более четырёх и не менее трёх функций.
24. Доказать, что любая функция из $M \cap S$, существенно зависящая более чем от одной переменной, образует базис в $M \cap S$.
25. Доказать, что если функция f существенно зависит более, чем от одной переменной и принадлежит классу $M \cap S$, то система $\{0, \bar{\ } f\}$ полна в B_2.

Домашние задания по теме "Булевы функции"

26. Задания для самостоятельного решения № 1 - 36 из параграфа 2 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
27. Задания для самостоятельного решения № 8.1 - 8.45 из параграфа 8 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретнымфункциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин,В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме **"Логические исчисления. Исчисление высказываний"** (для проверки сформированности ОПК-2)

28. Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
29. Задания для самостоятельного решения № 3.1 - 3.10 из параграфа 3 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретнымфункциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин,В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 5 **"Исчисление предикатов"** (для проверки сформированности ОПК-3)

30. Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
31. Задания для самостоятельного решения № 6.1 - 6.15 из параграфа 6 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретнымфункциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин,В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 6 **"Метод резолюций"** (для проверки сформированности ОПК-2)

32. Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме "Применения математической логики в информатике" (для проверки сформированности ОПК-3)

33. Задания для самостоятельного решения в конце параграфов 6.2 и 6.3 главы 6 учебного пособия Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости. СПб., ЛЕМА, 2011. 284 с.

Домашние задания по теме "Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов" (для проверки сформированности ОПК-3)

34. Задания для самостоятельного решения № 1 - 44 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
35. Задания для самостоятельного решения № 1 - 25 из параграфа 2 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
36. Задания для самостоятельного решения № 15.1 - 15.19 из параграфа 15 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме "Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость" (для проверки сформированности ОПК-2)

37. Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
38. Задания для самостоятельного решения № 1 - 43 из параграфа 4 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 10 " Сложность алгоритмов и вычислений" (для проверки сформированности ОПК-3)

39. Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 10 **"Сложностная классификация переборных задач"** (для проверки сформированности ОПК-3)

40. Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Проверка сформированности компетенций

Типовой вариант контрольной работы

Задания по теме «Булевы функции»

Замечание: обозначение $m(x, y, z) = x\cdot y\vee y\cdot z\vee x\cdot z = x\cdot y\oplus y\cdot z\oplus x\cdot z$ – медиана, или функция голосования. Проверить.

1. Доказать, что $m(x, y, z)\in [m(x', y, z)]$.
2. Доказать, что $x\oplus y\oplus z \in [m(x', y, z)]$.
3. Доказать, что $[\,(m(x, y, z))'\,]=S$.
4. Выражается ли $x\oplus y$ через систему $\{0, 1, x\cdot y, x\vee y\}$?
5. Выражается ли $x \Rightarrow y$ через систему $\{0, 1, x\cdot y, x\vee y, x\cdot y\vee z, x\cdot y\vee y\cdot z\vee x\cdot z\}$?
6. Выражается ли $x \Rightarrow y$ через систему $\{x\cdot y, x\oplus y\oplus z\}$?
7. Выражается ли $x\vee y$ через $\{x\cdot y', x\oplus y\oplus z\}$?
8. Выражается ли $x\vee y$ через $\{x', (x\oplus y)'\}$?
9. Выражается ли $x\downarrow y$ через $\{x\cdot y\vee z', ((z' \Rightarrow y)\Rightarrow x)\}$?
10. Выражается ли $x\cdot y$ через $\{x', (x\oplus y)'\}$?
11. Выражается $x|y$ ли через $\{x\cdot y\cdot z'\vee x\cdot z', z'\}$?
12. Выражается ли $x\cdot y$ через $\{x\oplus y\oplus z, x\Rightarrow y\}$?
13. В системе $\{\Rightarrow, \vee, 1, \oplus\}$ выяснить, какая из четырёх функций выражается через остальные три, какая не выражается.
14. В системе $\{\Rightarrow, x\cdot y, 1, \oplus\}$ выяснить, какая из четырёх функций выражается через остальные три, какая не выражается.
15. Базисы в T_0 : $\{x\cdot y \oplus z\}$, $\{x\cdot y, x\oplus y\}$, $\{0, x\cdot y, x\oplus y\oplus z\}$, $\{x\vee y, x\cdot y'\}$, $\{x\vee y, x\oplus y\}$.
16. Базисы в T_0: $\{0, xy'\vee xz\vee y'z\}$, $\{0, x\vee y, x\oplus y\oplus z\}$.
17. Базис в T_0 : $\{x\cdot y\oplus x, x\oplus y\}$.
18. Система $\{x\cdot y', x\oplus y\oplus z\}$ -- базис в T_0.
19. Доказать, что любой базис T_0 состоит из одной, двух или трёх функций. Аналогичное утверждение для T_1.
20. Базисы в T_1: $\{x\cdot y, (x\oplus y)'\}$, $\{x\vee y, (x\oplus y)'\}$, $\{((x\vee y)\oplus z)'\}$, $\{x\cdot y, x\vee y'\}$, $\{x\cdot y, x\Rightarrow y\}$, $\{x\cdot y, x\oplus y\oplus\}$, $\{x\Rightarrow y, x\oplus y\oplus z\}$, $\{1, x\cdot y, x\oplus y\oplus z\}$.
21. Является ли система $\{z', (x\oplus y\oplus z)'\}$ полной?
22. Является ли система $\{z', (x\cdot y\cdot)'z\vee x'\ y\cdot z'\vee y\cdot z\}$ полной?
23. Является ли система $\{x\vee y\vee z', x\Rightarrow (y\vee z)'\}$ полной?
24. Является ли система $\{x\vee y\Rightarrow (x\cdot z)', (x|y)\vee z\}$ полной?
25. Является ли система $\{x\cdot y\vee z', ((z'\Rightarrow y)\Rightarrow x)\}$ полной?
26. Является ли система $\{(x\oplus y)\Rightarrow (y\oplus z), x')\}$ полной?
27. Являются ли системы $\{x\Rightarrow y, x\oplus y\}$, $\{x\Rightarrow y, 0\}$ полными?
28. Являются ли указанные системы $\{yx\Rightarrow z, z'\}$, $\{x\oplus y, (x\Rightarrow y)'\}$, $\{x\Rightarrow y, x\Rightarrow (z\cdot y)'\}$, $\{x\vee y\Rightarrow (x\cdot z)', x(y\vee z)\}$, $\{x\vee y\vee z, x\Rightarrow (z\vee y)'\}$ полными?

29. Являются ли указанные системы $\{(x \oplus y)', (xy \vee xz \vee yz)'\}$, $\{(x \vee y)' \Rightarrow z', \ x \oplus y\}$ полными?

30. Являются ли указанные системы $\{(x \oplus y \oplus z)', x \Rightarrow y\}$ $\{x \Rightarrow yz, \ xy'\}$ полными?

31. Простые базисы в P_2: $\{0, 1, x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}$, $\{0, 1, x \vee y, x \oplus y \oplus z\}$, $\{0, 1, m(x, y, z), x \oplus y \oplus z\}$.

32. Системы $\{x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}$, $\{x \cdot y \oplus z \oplus t\}$ – базисы в $T_0 \cap T_1$.

33. Система $\{(x \oplus y)'\}$ -- базис в $L \cap T_1$.

34. Система $\{x \oplus y\}$ – базис в $L \cap T_0$.

35. Является ли базисом в $T_0 \cap T_1$ система $\{x \oplus y \oplus z, \ x \cdot y, x \vee y \vee z\}$?

$0, x \cdot y' \vee x \cdot z, y' \cdot z$

36. Является ли базисом в T_0 система { }?

37. Система $\{0, 1, x \cdot y, x \vee y\}$ является базисом в M.

38. Из системы $\{0, 1, x \cdot y, x \vee y, x \cdot y \vee z, x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z\}$ выделить все подмножества функций, составляющих базис в M.

39. Привести примеры базисов в $M \cap T_1$, в $T_0 \cap M$, в $L \cap M$.

40. Система $\{(x \oplus y \oplus z)'\}$ является базисом в S.

41. Класс, двойственный к данному замкнутому классу, также является замкнутым классом. Доказать.

42. Указать классы, двойственные к T_0, T_1, L, M, S.

43. Перечислить все замкнутые конечные классы функций – всего 9: [0], [1], [x], [0, 1], [0, x], [1, x], [x, x'], [1, 0, x], [0, 1, x, x'].

44. Являются ли полными следующие системы: $(S \cap M) \cup (L \setminus M)$, $(L \cap T_1) \cup (S \cap M)$, $(L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$, $(M \setminus T_0)$(@S)@ ∪) , $(M \setminus T_0)$(@L)@ ∪) , $(M \setminus S)$(S{T@ ∪ (L ∩ S), (L ∩ M) ∪ (| 0)) ?

Задания по теме «Исчисления высказываний»

Используя теорему о десяти выводимых правилах, леммы о противоположной теореме и о противоречии,
доказать, что имеются следующие отношения выводимости:

1. $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$, 2. $A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$

3. $A \to B \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$, 4. $A \to B \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

4. $A \to \neg B \vdash B \to \neg A$, 6. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

5. $\vdash A \to A$, 8. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

6. $\vdash \neg A \vee A$, 10. $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$

Доказать следующие равносильности:

7. $A \to B \equiv \neg A \vee B$, 13. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

8. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$,

9.. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

10. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

11. $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$

12. Доказать, что $X \vee Y$ и $X \wedge Y$ монотонно возрастают по X и по Y , $\neg X$ - монотонно убывает по X, $X \to Y$ монотонно возрастает по Y и монотонно убывает по X.

13. Доказать, что аксиома 10 ИВ независима.

14. Доказать, что аксиомы 3 - 9 ИВ независимы.

15. Доказать, что в ИИВ справедлива теорема о дедукции: пусть $\Gamma = \{A1, A2, \ldots, Ak\}$ – произвольный набор формул, $k \geq 0$, A,B - еще две формулы ИИВ. Тогда, если $\Gamma, A \vdash$иив B, то $\Gamma \vdash$иив $A \to B$.

16. Доказать, что формула $\neg\neg A \to A$ не доказуема в ИИВ.

17. Доказать, что формула $A \vee \neg A$ не доказуема в ИИВ.

18. Пусть задана предметная область D = {a, b, c} из трёх предметов и формула $\exists y(\forall x A(x, y, z) \to \exists t B(y, t))$. Перечислить интерпретации данной формулы на данной области, не являющиеся тождественно ложными.

Задания по теме «Элементы исчисления предикатов»

1. Пусть задана предметная область D = {a, b, c} из трёх предметов и формула $\exists y(\forall x A(x, y, z) \to \exists t B(y, t))$. Перечислить иинтерпретации данной формулы на данной области, не являющиеся тождественно ложными.
2. Построить 2-общезначимую, но не общезначимую формулу ИП.
3.Записать формулу с двумя свободными переменными x и y истинными тогда и только тогда $x<y$; когда x является делителем y.
4.Используя связки ИП, записать формулы с одной свободной переменной x, истинные в D=N тогда и только тогда, когда x=0; когда x–четное число; когда x простое число.
5. Рассматривая в качестве предметной области поле вычетов по модулю простого p, записать основные законы операций в данном поле, используя две предикатные буквы для суммы и произведения и правила построения формул ИП.

Критерии оценивания сформированности компетенции:

ОПК-2 – задания по темам «Булевы функции» и «Элементы исчисления предикатов»
ОПК-3 – задания по теме «Исчисления высказываний»

«отлично» - выполнено 3 задания (по одному из каждой темы), уровень сформированности компетенции высокий;
«хорошо» - выполнено 3 задания (по одному из каждой темы) с незначительными недочетами, уровень сформированности компетенции продвинутый;
«удовлетворительно» - выполнено 2 задания, уровень сформированности компетенции пороговый.

Список заданий к зачету

Зачет выставляется по результатам тестового задания и краткого собеседования со студентом после его проверки. Тестовое задание аналогично по своей структуре заданиям из контрольной работы, варианты конкретных заданий для каждого обучающегося подбираются с учётом текущей успеваемости данного студента по конкретным темам.

Список вопросов к экзамену

1) Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тождественно истинные и выполнимые формулы.
2) Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации.
3) Оценки. Значение терма и формулы на оценке при данной интерпретации. Выполнимые, тождественно истинные и тождественно ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
4) Булевы функции и их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина.
5) Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций.
6) Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.
7) Логические исчисления. Общее понятие о логическом исчислении.
8) Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез.
9) Теорема дедукции для ИВ. Непротиворечивость исчисления высказываний.
10) Формулы ИВ и булевы функции.

11) Критерий выводимости формулы ИВ из аксиом и условий. Разрешимость аксиоматической теории ИВ.
12) Исчисление предикатов. Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез.
13) Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам.
14) Теоремы непротиворечивости и адекватности. Непротиворечивость исчисления предикатов.
15) Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов.
16) Элементы теории моделей. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.
17) Метод резолюции. Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Секвенциальный и натуральный вывод в исчислении предикатов.
18) Сколемовская стандартная форма. Семантические деревья. Метод резолюции для логики предикатов. Унификация. Теорема о наиболее общем унификаторе. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов.
19) Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах.
20) Основные понятия логического программирования: хорновские дизъюнкты, SLD - резолюция. Методика составления и реализация логических программ.
19) Применения математической логики в информатике. Исчисление Хоара для доказательства корректности программ.
20) Логико-математические подходы к верификации программ. Операционная семантика. Оценки для интерпретаций языков. Значение терма и формулы на данной оценке.
21) Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.
22) Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость. Нумерация слов в счетном алфавите и арифметизация алгоритмов.
23) Примеры алгоритмически неразрешимых массовых задач. Примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач из математической логики, теории алгоритмов, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, математического анализа и теории конечных автоматов.
24) Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.
25) Сложность алгоритмов и вычислений. Подходы к оценкам сложности алгоритмов и вычислений. Сложность вычисления на машине Тьюринга. Временная и емкостная меры сложности.
26) Существование сколь угодно сложно вычислимых функций.
27) Теория алгоритмов и задачи использования ЭВМ. Вычислительные возможности современных ЭВМ. Модель ЭВМ – машина произвольного доступа (МПД). МПД - вычислимые функции и их связь с частично рекурсивными функциями

Экзамен заключается в решении нескольких задач по темам, раскрываемых в рамках дисциплины. Задания аналогичны тем, которые даются в качестве индивидуальных заданий.

Критерии оценивания сформированности компетенции:

«отлично» - выполнено 3 задания (по одному из каждой темы), уровень сформированности компетенции высокий;

«хорошо» - выполнено 3 задания (по одному из каждой темы) с незначительными недочетами, уровень сформированности компетенции продвинутый;

«удовлетворительно» - выполнено 2 задания, уровень сформированности компетенции пороговый.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины
«Математическая логика»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Методические указания для студентов по освоению дисциплины
Основной формой изложения учебного материала по данной дисциплине являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что математическая логика излагается как формальная аксиоматическая теория, с примерами которых студенты до этого фактически не были знакомы.
По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам.
Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы построения аксиоматических математических теорий.
Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.
Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.
Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом современной математической логики, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольной работы в 1-ом семестре и самостоятельных работ в обоих семестрах изучения дисциплины. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.
В конце первого семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет, в конце всего курса – экзамен. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам тестирования и краткого собеседования по его результатам. Экзамен принимается в аудитории, где студентам предлагаются экзаменационные билеты, каждый из которых включает в себя две задачи. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 30 минут. До экзамена, и во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.
Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «математическая логика» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.
Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://window.edu.ru/library).
Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.
Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. Головной разработчик проекта - Федеральное государственное автономное учреждение Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций (ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика") www.informika.ru.
ИС "Единое окно" объединяет в единое информационное пространство электронные ресурсы свободного доступа для всех уровней образования в России. Разделы этой системы:
- Электронная библиотека – является крупнейшим в российском сегменте Интернета хранилищем полнотекстовых версий учебных, учебно-методических и научных материалов с открытым доступом. Библиотека содержит более 30 000 материалов, источниками которых являются более трехсот российских вузов и других образовательных и научных учреждений. Основу наполнения библиотеки составляют электронные версии учебно-методических материалов, подготовленные в вузах, прошедшие рецензирование и рекомендованные к использованию советами факультетов, учебно-методическими комиссиями и другими вузовскими структурами, осуществляющими контроль учебно-методической деятельности.
- Интегральный каталог образовательных интернет-ресурсов содержит представленные в стандартизованной форме метаданные внешних ресурсов, а также содержит описания полнотекстовых публикаций электронной библиотеки. Общий объем каталога превышает 56 000 метаописаний (из них около 25 000 - внешние ресурсы). Расширенный поиск в "Каталоге" осуществляется по названию, автору, аннотации, ключевым словам с возможной фильтрацией по тематике, предмету, типу материала, уровню образования и аудитории.
- Избранное. В разделе представлены подборки наиболее содержательных и полезных, по мнению редакции, интернет-ресурсов для общего и профессионального образования.
- Библиотеки вузов. Раздел содержит подборки сайтов вузовских библиотек, электронных каталогов библиотек вузов и полнотекстовых электронных библиотек вузов.
Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:
1. Личный кабинет (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.
2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.