

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра теоретической физики

**Задания по квантовой теории поля
в сильном внешнем магнитном поле**

Методические указания

Ярославль 2000

ББК В315

315

Задания по квантовой теории поля в сильном внешнем магнитном поле: Метод. указания / Сост. Л.А. Василевская, Н.В. Михеев, А.Я. Пархоменко; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2000. 32 с.

Излагаются основные методы вычислений квантовых процессов в присутствии сильного внешнего магнитного поля в виде набора заданий с подробными решениями и ответами.

Методические указания предназначены для магистрантов и аспирантов, специализирующихся по кафедре теоретической физики.

Р е ц е н з е н т: кафедра теоретической физики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Методические указания изданы при финансовой поддержке
гранта РФФИ № 98-02-16694.

© Ярославский государственный университет, 2000

© Л.А. Василевская, Н.В. Михеев, А.Я. Пархоменко, 2000

Вводные задания

Задание 1. Построить базис для частицы в постоянном однородном магнитном поле.

Решение. Для любой частицы с импульсом p_μ , находящейся в электромагнитном поле, можно ввести удобный для анализа квантовых процессов с ее участием базис. Заметим, что конфигурация чисто магнитного поля, наиболее важная в приложении к астрофизическим объектам, обладает набором специфических свойств, использование которых существенно упрощает расчеты конкретных реакций.

Из электродинамики известно, что электромагнитное поле полностью определяется тензором напряженностей $F_{\mu\nu}$. В дополнение к нему также вводится дуально сопряженный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль напряженности магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. В такой системе отсчета тензоры $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ имеют следующий явный вид:

$$F_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

В дальнейшем удобно пользоваться не самим тензором электромагнитного поля и дуальным к нему, а их безразмерными аналогами:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B}, \quad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{F}_{\mu\nu}}{B}, \quad (1.2)$$

явный вид которых в выбранной нами системе отсчета представлен числовыми матрицами в формуле (1.1).

Представляет интерес проанализировать алгебру введенных безразмерных тензоров (1.2). Начнем с бинарных произведений:

$$\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\rho}\varphi^\rho{}_\nu, \quad \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\tilde{\varphi}^\rho{}_\nu. \quad (1.3)$$

В отличие от антисимметричных тензоров $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$, тензоры $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ симметричны в соответствии с общими свойствами свертки тензоров. В выбранной нами системе координат эти тензоры имеют следующий явный вид:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Из явного представления тензоров видно, что они не являются линейно независимыми, а связаны друг с другом посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Проведенный анализ показывает, что наличие постоянного однородного внешнего магнитного поля естественным образом разбивает четырехмерное пространство Минковского на два непересекающихся подпространства: двумерное евклидово подпространство с метрическим тензором $\Lambda_{\mu\nu}$, ортогональное вектору напряженности магнитного поля \mathbf{B} , и двумерное псевдоевклидово подпространство с метрическим тензором $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Безразмерные тензоры электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ играют роль тензоров Леви-Чивита (полностью антисимметричных тензоров) этих подпространств и обладают следующими свойствами:

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}, \quad (1.6)$$

$$\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - \Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho}. \quad (1.7)$$

Для введенного набора тензоров справедливы следующие бинарные соотношения:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}\varphi)_{\mu\nu} &= (\tilde{\varphi}\Lambda)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\varphi)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\Lambda)_{\mu\nu} = 0, \\ (\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\Lambda)_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu\nu}, \\ (\tilde{\Lambda}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} &= \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\varphi)_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

При конкретных вычислениях оказывается удобным ввести специальные обозначения для каждого из подпространств: \perp — для евклидова подпространства с метрикой $\Lambda_{\mu\nu}$ и \parallel — для псевдоевклидова подпространства с метрикой $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. При таком соглашении произвольный 4-вектор $A^\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ можно разбить на две ортогональные составляющие:

$$A_\mu = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}A^\nu - \Lambda_{\mu\nu}A^\nu = A_{\parallel\mu} - A_{\perp\mu}, \quad (1.9)$$

где $A_{\parallel}^\mu = (A_0, 0, 0, A_3)$ и $A_{\perp}^\mu = (0, A_1, A_2, 0)$ в соответствии со свойством (1.5). Такое разбиение позволяет ввести скалярное произведение векторов в каждом подпространстве по отдельности:

$$\begin{aligned} (AB) &= (AB)_{\parallel} - (AB)_{\perp}, \\ (AB)_{\parallel} &= (A\tilde{\Lambda}B) = A^\mu\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}B^\nu, \\ (AB)_{\perp} &= (A\Lambda B) = A^\mu\Lambda_{\mu\nu}B^\nu, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где A_μ и B_μ — произвольные 4-векторы.

Деление четырехмерного пространства на два непересекающихся подпространства приводит к эффективной модификации свойств γ -матриц. Будем обозначать γ -матрицы \parallel подпространства как $\gamma_{\parallel\mu}$, а \perp подпространства — $\gamma_{\perp\mu}$. Введем проекционные операторы Π_{\pm} :

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2} \left[I \mp \frac{i}{2} (\gamma \varphi \gamma) \right] = \frac{1}{2} [I \pm i \gamma_1 \gamma_2], \quad (1.11)$$

где учтен явный вид тензора $\varphi_{\mu\nu}$ в выбранной системе отсчета. Отметим следующие мультипликативные свойства проекционных операторов:

$$\Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\pm} \Pi_{\mp} = 0, \quad (1.12)$$

а также их коммутационные свойства по отношению к γ -матрицам:

$$\Pi_{\pm} \gamma_{\mu} = \begin{cases} \gamma_{\mu} \Pi_{\pm} & \mu = 0, 3, \\ \gamma_{\mu} \Pi_{\mp} & \mu = 1, 2. \end{cases} \quad (1.13)$$

Последнее свойство интересно тем, что если встречается конструкция вида $\Pi_{\pm} \gamma_{\mu} \Pi_{\pm}$, то эффективно от γ -матрицы остается только ее продольная составляющая — $\gamma_{\parallel\mu}$. Следует отметить также и коммутативность проекционных операторов Π_{\pm} с матрицей γ_5 :

$$\Pi_{\pm} \gamma_5 = \gamma_5 \Pi_{\pm}. \quad (1.14)$$

Широко используемой операцией является взятие шпура произведения некоторого числа γ -матриц. В случае сильного магнитного поля вычисление шпуров эффективно реализуется только в \parallel подпространстве. Как и в обычном четырехмерном пространстве в \parallel подпространстве шпур нечетного числа γ -матриц равен нулю, а несколько первых шпуров четного числа — следующие:

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{\Pi_{\pm}\} &= 2, & \text{Sp}\{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \Pi_{\pm}\} &= 2 \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \\ \text{Sp}\{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \Pi_{\pm}\} &= 2 [\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\rho\sigma} + \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma} \tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho} \tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}], \\ \text{Sp}\{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_5 \Pi_{\pm}\} &= \pm 2 \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \\ \text{Sp}\{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma_5 \Pi_{\pm}\} &= \pm 2 [\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\varphi}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Полезны и другие часто встречающиеся соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2, & \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 0, \\ \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2 \gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel\nu}, \\ \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \gamma_{\parallel\rho} + \tilde{\Lambda}_{\nu\rho} \gamma_{\parallel\mu} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho} \gamma_{\parallel\nu}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Легко показать, что свертка двух γ -матриц, между которыми находится любое нечетное число γ -матриц, обращается в нуль.

Наличие внешнего магнитного поля, а следовательно, и набора тензоров $\varphi_{\mu\nu}$, $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$, $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ позволяет естественным образом ввести базис четырехмерного импульсного пространства для любой частицы с 4-импульсом p_μ :

$$\begin{aligned} b_\mu^{(1)} &= (\varphi p)_\mu, & b_\mu^{(2)} &= (\tilde{\varphi} p)_\mu, \\ b_\mu^{(3)} &= p_\parallel^2 (\Lambda p)_\mu - p_\perp^2 (\tilde{\Lambda} p)_\mu, & b_\mu^{(4)} &= p_\mu. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Эти векторы взаимно ортогональны, но не нормированы, поэтому приведем значения квадратов этих векторов:

$$\begin{aligned} \left(b^{(1)}\right)^2 &= -p_\perp^2, & \left(b^{(2)}\right)^2 &= -p_\parallel^2, \\ \left(b^{(3)}\right)^2 &= -p^2 p_\perp^2 p_\parallel^2, & \left(b^{(4)}\right)^2 &= p^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отсюда видно, что ортонормированный базис может быть легко построен как для времениподобного $p^2 > 0$, так и для пространственноподобного $p^2 < 0$ вектора. Для безмассовой частицы на массовой поверхности ($p^2 = 0$) третий и четвертый базисные векторы оказываются изотропными, что не позволяет их нормировать. Однако это не мешает пользоваться набором ненормированных базисных векторов (1.17) при расчетах процессов с участием безмассовых частиц. Следует также отметить, что первый и второй базисные векторы целиком лежат в \perp и \parallel подпространствах соответственно, в то время как третий и четвертый имеют составляющие в обоих подпространствах. Выпишем явный вид набора базисных векторов в выбранной нами системе отсчета:

$$\begin{aligned} b_\mu^{(1)} &= (0, -p_2, p_1, 0), & b_\mu^{(2)} &= (p_3, 0, 0, -E), \\ b_\mu^{(3)} &= (-p_\perp^2 E, p_\parallel^2 p_1, p_\parallel^2 p_2, p_\perp^2 p_3), & b_\mu^{(4)} &= (E, -p_1, -p_2, -p_3). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Введение базиса (1.17) позволяет делать разложения 4-тензора любого ранга в соответствии с правилами:

$$V_\mu = \sum_\lambda v_\lambda \frac{b_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{(b^{(\lambda)})^2}}, \quad T_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\lambda'} t_{\lambda\lambda'} \frac{b_\mu^{(\lambda)} b_\nu^{(\lambda')}}{\sqrt{(b^{(\lambda)})^2 (b^{(\lambda')})^2}}, \quad (1.20)$$

где V_μ и $T_{\mu\nu}$ — произвольные 4-вектор и 4-тензор второго ранга, а v_λ и $t_{\lambda\lambda'}$ — их составляющие в этом базисе.

Задание 2. Найти решение уравнения Дирака для фермиона с зарядом Qe ($e > 0$ – элементарный заряд) в постоянном однородном внешнем магнитном поле.

Решение. Уравнение Дирака для фермиона во внешнем электромагнитном поле с 4-потенциалом $A_\mu = A_\mu(\mathbf{r}, t)$ имеет вид:

$$\left[i\hat{\partial} - Qe\hat{A} - m \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\hat{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$ и $\hat{A} = A_\mu \gamma^\mu$.

Решения этого уравнения, полученные для постоянного однородного магнитного поля \mathbf{B} , получили свое наибольшее приложение в астрофизике. В частности, на поверхности пульсаров обнаружены достаточно сильные магнитные поля $B \sim 10^{13} - 10^{14}$ Гс, а согласно теоретическим моделям в ядрах таких пульсаров напряженности полей могут быть на два-три порядка больше. В этой связи непосредственный интерес представляют не просто точные решения уравнения Дирака в магнитном поле, а их асимптотика в случае экстремально больших напряженностей.

Для решения уравнения (2.1) выберем систему координат таким образом, чтобы вектор напряженности магнитного поля \mathbf{B} был направлен по оси Oz , а векторный потенциал \mathbf{A} – по оси Oy . В такой калибровке 4-потенциал внешнего магнитного поля можно представить в виде:

$$A^\mu = (0, 0, xB, 0). \quad (2.2)$$

Для решения поставленной задачи удобно ввести вспомогательную функцию $\Phi(\mathbf{r}, t)$, которая является решением квадрированного уравнения Дирака:

$$\left[\left(i\hat{\partial} - Qe\hat{A} \right)^2 - m^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

при этом точное решение уравнения (2.1) связано с функцией $\Phi(\mathbf{r}, t)$ соотношением:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[i\hat{\partial} - Qe\hat{A} + m \right] \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

Найдем явный вид функции $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Используя известное свойство произведения двух γ -матриц – $\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор и $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$, а также условие Лоренца для 4-потенциала – $\partial_\mu A^\mu = 0$, квадрированное уравнение (2.3) приводится к виду:

$$\left[-\partial^2 - 2iQe(A\partial) + Q^2 e^2 A^2 + \frac{i}{2} Qe(\sigma F) - m^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

где $F_{\mu\nu}$ – тензор внешнего магнитного поля, и $(\sigma F) = \sigma_{\mu\nu} F^{\nu\mu}$. Можно показать, что $(\sigma F) = -2iB\Sigma_3$, где Σ_3 – проекция релятивистского оператора спина фермиона на ось Oz . Будем считать, что функция $\Phi(\mathbf{r}, t)$ является собственной функцией оператора Σ_3 :

$$\Sigma_3 \Phi_\lambda(\mathbf{r}, t) = \lambda \Phi_\lambda(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

где собственное значение λ имеет смысл удвоенного среднего значения проекции спина фермиона. Тогда оператор в квадрированном уравнении (2.5) становится пропорциональным единичной матрице пространства Дирака, что позволяет фактически перейти от матричного к скалярному уравнению. Принимая во внимание явный вид 4-потенциала (2.2), распишем явно квадрированное уравнение (2.5) в выбранной нами системе координат:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta - 2iQeBx \frac{\partial}{\partial y} - Q^2 e^2 B^2 x^2 + QeB\lambda - m^2 \right] \Phi_\lambda(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.7)$$

где Δ – оператор Лапласа. Оператор уравнения (2.7) не зависит явно от времени, поэтому функция $\Phi(\mathbf{r}, t)$ является стационарным решением этого уравнения и описывает квантовую частицу с сохраняющимся значением энергии E . Поскольку приведенное уравнение (2.7) имеет явную зависимость только от переменной x , то оператор этого уравнения будет коммутировать с операторами $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$. Эти дифференциальные операторы определены в лоренцевском 4-пространстве-времени, поэтому они также будут коммутировать и с оператором Σ_3 , являющимся постоянной величиной в этом пространстве. Исходя из вышесказанного, будем искать положительно частотное решение уравнения (2.7) в виде:

$$\Phi_\lambda^{(+)}(\mathbf{r}, t) = f(x) e^{-i(Et - p_2 y - p_3 z)} u_\lambda \quad (2.8)$$

как собственную функцию трех операторов:

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Sigma_3 \quad (2.9)$$

с собственными значениями p_2 , p_3 и λ соответственно. Будем также считать, что постоянный биспинор u_λ является решением уравнения (2.6).

Подставляя решение (2.8) в уравнение (2.5) и вводя вместо x новую безразмерную переменную $\xi = \sqrt{|Q|eB}(x - p_2/QeB)$, получим следующее уравнение для функции $f(\xi)$:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \frac{E^2 - p_3^2 - m^2 + QeB\lambda}{|Q|eB} \right] f(\xi) = 0. \quad (2.10)$$

Полученное уравнение по виду совпадает с уравнением Шредингера для одномерного гармонического осциллятора. Из нерелятивистской квантовой механики известно, что собственные функции такого уравнения обращаются в нуль при $\xi \rightarrow \infty$, когда собственные значения пропорциональны положительным целым нечетным числам:

$$\frac{E^2 - p_3^2 - m^2 + QeB\lambda}{|Q|eB} = 2\nu + 1, \quad (2.11)$$

где $\nu = 0, 1, \dots$ – целое неотрицательное число. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид:

$$f_\nu(\xi) = \mathcal{N} e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi), \quad (2.12)$$

где $H_\nu(\xi)$ – полиномы Эрмита, а \mathcal{N} – нормировочный множитель. В итоге точные решения квадрированного уравнения Дирака и соответствующий им спектр энергии можно записать в виде:

$$\Phi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N} e^{-i(Et - p_2 y - p_3 z)} e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi) u_\lambda, \quad (2.13)$$

$$E^2 = p_3^2 + m^2 + 2|Q|eBn, \quad n = \nu + \frac{1}{2}(1 - \rho\lambda), \quad (2.14)$$

где введены главное квантовое число n , нумерующее энергетические уровни заряженного фермиона в магнитном поле (уровни Ландау) и принимающее целые неотрицательные значения, и знак заряда фермиона $\rho = Q/|Q|$. Из выражения для энергии (2.14) следует, что спектр энергии фермиона имеет двукратное вырождение по квантовому числу λ при $n \geq 1$ и бесконечнократное вырождение по числу p_2 , если оно непрерывно.

Воспользуемся уравнением (2.4), чтобы по функции $\Phi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ восстановить функцию $\Psi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ – точное решение уравнения Дирака в магнитном поле. Распишем явно оператор $[i\hat{\partial} - Qe\hat{A} + m]$ в выбранной нами системе координат и подействуем им на функцию $\Phi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ из (2.13), что дает следующее выражение для функции $\Psi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \Psi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{N} e^{-i(Et - p_2 y - p_3 z)} \\ &\times \left[\hat{p}_\parallel + m + i\sqrt{|Q|eB} \left(\gamma_1 \frac{d}{d\xi} - i\rho\gamma_2 \xi \right) \right] e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi) u_\lambda. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Следует напомнить, что уравнение по переменной ξ (2.10) формально совпадает с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора.

Поэтому по аналогии с квантовым осциллятором удобно ввести повышающий a^+ и понижающий a^- операторы:

$$a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi \mp \frac{d}{d\xi} \right). \quad (2.16)$$

Напомним действие операторов a^{\pm} на волновую функцию осциллятора:

$$a^{\pm} \left[e^{-\xi^2/2} H_{\nu}(\xi) \right] = \sqrt{\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} e^{-\xi^2/2} H_{\nu \pm 1}(\xi). \quad (2.17)$$

Если также ввести следующие линейные комбинации γ -матриц:

$$\gamma_{\pm 1} = \frac{1}{2} (\gamma_1 \pm i\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\pm} \\ -\sigma_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2), \quad (2.18)$$

где σ_i , $i = 1, 2, 3$ – матрицы Паули, то функция $\Psi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ приводится к виду:

$$\begin{aligned} \Psi_{n\lambda p_2 p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{N} e^{-i(Et - p_2 y - p_3 z)} \\ &\times \left[\hat{p}_{\parallel} + m + i\sqrt{2|Q|eB} (a^- \gamma_{-\rho} - a^+ \gamma_{\rho}) \right] e^{-\xi^2/2} H_{\nu}(\xi) u_{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

При таком подходе остается произвол в выборе постоянного биспинора u_{λ} . Зафиксируем этот произвол, потребовав, чтобы слагаемое $\sim a^+$ в формуле (2.19) обратилось в нуль. Выберем биспинор вида:

$$u_{\lambda} = \begin{pmatrix} \varphi_{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\lambda} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

который является собственной функцией оператора проекции спина Σ_3 , а также удовлетворяет уравнению:

$$\gamma_{\rho} u_{\lambda} = \delta_{\rho, -\lambda} \gamma_5 u_{-\lambda}. \quad (2.21)$$

Из этого уравнения следует, что слагаемое, пропорциональное повышающему оператору, обращается в нуль, если $\lambda = \rho$. Поэтому при таком выборе биспинора точное решение уравнения Дирака в постоянном однородном магнитном поле может быть приведено к виду:

$$\Psi_{n, \rho, p_2, p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{p}_{\parallel} + m] \Phi_{n, \rho, p_2, p_3}(\mathbf{r}, t) + i\sqrt{2|Q|eB\nu} \gamma_5 \Phi_{n-1, -\rho, p_2, p_3}(\mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Основным уровнем Ландау естественно считать квантовое состояние с $n = 0$, причем вспомогательное число ν , определяющее набор дискретных уровней, также равно нулю. Согласно определению энергетических

уровней (2.14) на основном уровне соотношение между энергией и импульсом равно: $E^2 = p_3^2 + m^2$, что соответствует свободному движению заряженного фермиона вдоль оси Oz . При этом волновая функция заряженного фермиона $\Psi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ оказывается связанной только с одной вспомогательной функцией $\Phi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ соотношением:

$$\Psi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{p}_{\parallel} + m] \Phi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.23)$$

После подстановки явного вида функции $\Psi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ (2.13) нормировочный множитель \mathcal{N} определяется из условия:

$$\int dV \left| \Psi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right|^2 = 1, \quad (2.24)$$

где интегрирование проводится по объему бесконечного (вдоль оси Ox) цилиндра с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами L_y и L_z .

Отрицательно частотное решение можно получить из положительно частотного (2.23) заменами: $E \rightarrow -E$, $p_i \rightarrow -p_i$ ($i = 2, 3$) и $u^{(+)}(p_3) \rightarrow u^{(-)}(p_3)$. В заключение выпишем окончательный результат для положительно и отрицательно частотных решений уравнения Дирака заряженного фермиона, находящегося на основном уровне Ландау ($n = 0$) во внешнем постоянном однородном магнитном поле:

$$\Psi_{0,\rho,p_2,p_3}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{\sqrt{|Q|eB/\pi}}{2EL_yL_z} \right]^{1/2} e^{\mp i(Et - p_2y - p_3z)} e^{-\xi^2/2} u_{\rho}^{(\pm)}(p_3), \quad (2.25)$$

$$u_{\rho}^{(\pm)}(p_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{E \pm m} \varphi_{\rho} \\ \zeta \rho \sqrt{E \mp m} \varphi_{\rho} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где $\xi = \sqrt{|Q|eB}(x \mp p_2/QeB)$, $\rho = Q/|Q|$ – знак заряда, $\zeta = p_3/|p_3|$ – знак импульса вдоль направления магнитного поля, φ_{ρ} – постоянные спиноры, определяемые уравнением (2.20). Следует также заметить, что биспиноры $u_{\rho}^{(\pm)}(p_3)$ нормированы условием $\bar{u}_{\rho}^{(\pm)}(p_3)u_{\rho}^{(\pm)}(p_3) = \pm 2m$ точно так же, как положительно и отрицательно частотные решения свободного уравнения Дирака.

Задание 3. Найти пропагатор электрона в сильном магнитном поле.

Решение. Магнитное поле естественно считать сильным, если оно определяет наибольший энергетический масштаб задачи:

$$eB \gg m^2, E^2, \dots \quad (3.1)$$

В этом случае электроны будут находиться на основном уровне Ландау ($n = 0$), что существенно упрощает задачу о нахождении пропагатора электрона в таком сильном магнитном поле.

На основном уровне Ландау электрон ($\rho = -1$ – знак заряда фермиона) имеет сохраняющуюся проекцию спина на направление, противоположное напряженности магнитного поля, ($\lambda = -1$) и, в соответствии с (2.26), будет описываться волновой функцией вида:

$$\Psi_{0,-1,p_2,p_3}^{(\pm)} = \left[\frac{\sqrt{\beta/\pi}}{2EL_2L_3} \right]^{1/2} \exp \left\{ \mp i[Et - p_2y - p_3z] - \frac{\beta}{2} \left[x \pm \frac{p_2}{\beta} \right]^2 \right\} u_{-1}^{(\pm)}(p_3), \quad (3.2)$$

где $\beta = eB$ – чисто полевой параметр, E и p_3 – энергия и импульс электрона, причем $E^2 - p_3^2 = m^2$, p_2 – параметр с размерностью массы, определяющий положение максимума волновой функции на оси Ox , L_y и L_z – длины нормировочных отрезков вдоль осей Oy и Oz . Для вычисления пропагатора найдем сначала матрицу плотности $\rho_\lambda^{(\pm)}(p_3)$. Из квантовой теории поля известно, что для биспинора $u_\lambda^{(\pm)}(p)$ матрица плотности есть:

$$\rho_\lambda^{(\pm)}(p) = u_\lambda^{(\pm)} \bar{u}_\lambda^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\hat{p} \pm m) (I - \gamma_5 \hat{s}), \quad (3.3)$$

$$s^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{\xi} \mathbf{p}}{m}, \boldsymbol{\xi} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi} \mathbf{p})}{m(E + m)} \right), \quad (3.4)$$

где 4-импульс $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ и $\boldsymbol{\xi}$ – вектор поляризации электрона в его системе покоя. Учитывая в выбранной нами системе координат корреляцию между спином электрона и направлением магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, вектор поляризации – $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{e}_z$, так что 4-вектор поляризации (3.4) сведется к $s^\mu = -(p_3/m, \mathbf{e}_z E/m)$. Подставляя импульс p_μ и вектор поляризации s_μ в матрицу плотности (3.3) и проводя простые алгебраические преобразования, получим следующий результат:

$$\rho_{-1}^{(\pm)}(p_3) = \frac{1}{2} (\hat{p}_\parallel - m) (I - \Sigma_3), \quad (3.5)$$

где $\Sigma_3 = i\gamma_1\gamma_2$ – оператор проекции спина фермиона на ось Oz . Используя определение проекционного оператора Π_- (1.11), запишем матрицу плотности (3.5) в виде:

$$\rho_{-1}^{(\pm)}(p_3) = u_{-1}^{(\pm)} \bar{u}_{-1}^{(\pm)} = (\hat{p}_\parallel \pm m) \Pi_-. \quad (3.6)$$

Для вычисления пропагатора электрона представим его волновую функцию в виде разложения по операторам рождения и уничтожения:

$$\Psi(x) = \sum_{p_2, p_3} \left[a_{p_2 p_3} \Psi_{p_2 p_3}^{(+)}(x) + b_{p_2 p_3}^+ \Psi_{p_2 p_3}^{(-)}(x) \right], \quad (3.7)$$

$$\bar{\Psi}(x') = \sum_{p'_2, p'_3} \left[a_{p'_2 p'_3}^+ \bar{\Psi}_{p'_2 p'_3}^{(+)}(x') + b_{p'_2 p'_3} \bar{\Psi}_{p'_2 p'_3}^{(-)}(x') \right],$$

где в положительно и отрицательно частотных решениях (3.2) первые два индекса для краткости опущены. По определению, пропагатор электрона вычисляется как разность временного и нормального упорядочения произведения Ψ и $\bar{\Psi}$:

$$S(x, x') = T\{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')\} - N\{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')\}. \quad (3.8)$$

Принимая во внимание свойство антикоммутации операторов рождения и уничтожения электрона, пропагатор электрона (3.8) принимает вид:

$$S(x, x')|_{x_0 \gtrless x'_0} = \pm \sum_{p_2, p_3} \Psi_{p_2 p_3}^{(\pm)}(x) \bar{\Psi}_{p_2 p_3}^{(\pm)}(x'), \quad (3.9)$$

где x_0 и x'_0 – временные компоненты 4-векторов x_μ и x'_μ . При вычислении пропагатора электрона удобно перейти от суммирования к интегрированию:

$$\frac{1}{L_y L_z} \sum_{p_2, p_3} \rightarrow \int \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2}. \quad (3.10)$$

Подставляя явный вид функций $\Psi_{p_2 p_3}^{(\pm)}$ (3.2) в пропагатор (3.9), получим:

$$S(x, x')|_{x_0 \gtrless x'_0} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{2E} \left[(\hat{p}_\parallel + m) \Pi_- e^{-ip_0(x_0 - x'_0)} \right] \Big|_{p_0 = \pm E} \quad (3.11)$$

$$\times \exp \left\{ ip_2(y - y') + ip_3(z - z') - \frac{\beta}{2} \left(x + \frac{p_2}{\beta} \right)^2 - \frac{\beta}{2} \left(x' + \frac{p_2}{\beta} \right)^2 \right\}.$$

Следует заметить, что при выводе пропагатора в случае $x_0 < x'_0$ в интеграле была сделана замена переменных $p_2 \rightarrow -p_2$ и $p_3 \rightarrow -p_3$. Для проведения дальнейших преобразований воспользуемся соотношением:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0 f(p_0) e^{-ip_0(x_0 - x'_0)}}{p_\parallel^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{f(\pm E)}{2E} e^{\mp iE(x_0 - x'_0)} \Big|_{x_0 \gtrless x'_0} \quad (3.12)$$

Делая подстановку этого соотношения в пропагатор (3.11), получим:

$$S(x, x') = i \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int \frac{dp_0 dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} \frac{(\hat{p}_\parallel + m) \Pi_-}{p_\parallel^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_\parallel(x - x')_\parallel - ip_2(y - y')} \quad (3.13)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \left(x + \frac{p_2}{\beta} \right)^2 - \frac{\beta}{2} \left(x' + \frac{p_2}{\beta} \right)^2 \right\}.$$

Интеграл по p_2 – гауссов и берется с помощью формулы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-au^2-bu} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}. \quad (3.14)$$

В результате для пропагатора электрона получается следующее:

$$S(x, x') = e^{i\Phi(x, x')} \frac{\beta}{(2\pi)^3} e^{-\beta(x-x')^2_{\perp}/4} \int d^2 p_{\parallel} \frac{i(\hat{p}_{\parallel} + m)\Pi_{-}}{p_{\parallel}^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_{\parallel}(x-x')_{\parallel}}, \quad (3.15)$$

$$\Phi(x, x') = -\frac{\beta}{2} (x + x') (y - y'), \quad (3.16)$$

где интегрирование ведется в \parallel подпространстве $d^2 p_{\parallel} = dp_0 dp_3$. Следует несколько слов сказать относительно фазы $\Phi(x, x')$. Можно показать, что она может быть получена как результат интегрирования по отрезку прямой $\xi_{\mu} = s(x - x')_{\mu} + x'_{\mu}$, соединяющей точки x и x' четырехмерного пространства-времени, так что $0 < s < 1$. Вспомним также, что решение уравнения Дирака для электрона найдено нами в калибровке 4-потенциала внешнего поля вида: $A^{\mu}(x) = (0, 0, xB, 0)$. Тогда интеграл, вычисленный по указанному отрезку четырехмерного пространства-времени:

$$\int_{x'}^x A^{\mu}(\xi) d\xi_{\mu} = \int_0^1 ds (x - x')_{\mu} A^{\mu}(\xi), \quad (3.17)$$

с точностью до коэффициента сводится к (3.16). Поэтому фазу $\Phi(x, x')$ можно записать в следующем лоренц-инвариантном виде:

$$\Phi(x, x') = e \int_{x'}^x A^{\mu}(\xi) d\xi_{\mu}. \quad (3.18)$$

Фаза, представленная в такой форме, содержит неоднозначность, поскольку зависит от пути интегрирования. Чтобы избавиться от такой зависимости, вместо 4-потенциала $A^{\mu}(\xi)$ введем новый 4-вектор $K^{\mu}(\xi)$ и потребуем, чтобы он был потенциальным:

$$\partial_{\mu} K_{\nu} - \partial_{\nu} K_{\mu} = 0. \quad (3.19)$$

Указанного свойства можно добиться, если к потенциалу $A^{\mu}(\xi)$ добавить 4-вектор $\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\xi - x')_{\nu}$, где $F^{\mu\nu}$ – тензор внешнего постоянного электромагнитного поля. Поэтому фаза, записанная в лоренц-инвариантном виде и не зависящая от пути интегрирования, имеет вид:

$$\Phi(x, x') = e \int_{x'}^x d\xi_{\mu} \left[A^{\mu}(\xi) + \frac{1}{2} F^{\mu\nu}(\xi - x')_{\nu} \right]. \quad (3.20)$$

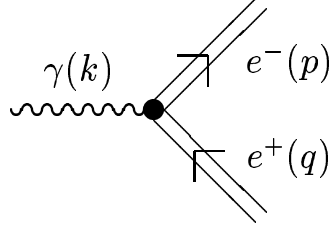


Рис. 1. Диаграмма, описывающая распад фотона на электрон-позитронную пару во внешнем электромагнитном поле

В заключение отметим, что наличие этой фазы в пропагаторе электрона (3.15) делает его калибровочно и трансляционно неинвариантным.

Древесные процессы

Задание 4. Вычислить вероятность распада фотона на электрон-позитронную пару в сильном внешнем магнитном поле.

Решение. Распад фотона на электрон-позитронную пару, запрещенный в вакууме законом сохранения энергии-импульса, становится возможным в присутствии внешнего магнитного поля. Это связано с тем, что магнитное поле выступает в роли активной внешней среды, взаимодействие с которой приводит к изменению законов сохранения, а значит, и кинематики процесса.

Поскольку распад фотона анализируется в пределе сильного магнитного поля $\beta = eB \gg m^2, \omega^2$, где m – масса электрона и ω – энергия фотона, то естественно волновые функции электрона и позитрона выбрать в асимптотическом виде (3.2). Перейдем теперь к вычислению S -матричного элемента процесса $\gamma \rightarrow e^+e^-$, изображенного диаграммой на рис. 1. В первом порядке теории возмущений S -матричный элемент вычисляется следующим образом:

$$S_{if} = i \langle f | T \int \mathcal{L}(x) dx | i \rangle, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{L}(x)$ – лагранжиан взаимодействия, $|i\rangle$ и $|f\rangle$ – векторы начального и конечного состояний. Лагранжиан взаимодействия электрона с фотоном в присутствии внешнего поля точно такой же, как и в вакууме $\mathcal{L}(x) = e[\bar{\Psi}(x)\hat{A}(x)\Psi(x)]$, поэтому S -матричный элемент принимает вид:

$$S_{if} = ie \int dx \langle f | [\bar{\Psi}(x)\hat{A}(x)\Psi(x)] | i \rangle \quad (4.2)$$

$$= \frac{ie}{\sqrt{2\omega V}} \int dx e^{-i(kx)} [\bar{\Psi}_{p_2 p_3}^{(+)}(x) \hat{\varepsilon} \Psi_{q_2 q_3}^{(-)}(x)],$$

где $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ и ε^μ – волновой вектор и вектор поляризации фотона, а волновая функция $\Psi^{(\pm)}$ определена в (3.2). Непосредственная подстановка волновых функций электрона и позитрона в S -матричный элемент приводит к результату:

$$\begin{aligned} S_{if} &= ie \left[\frac{\beta}{8\pi E E' \omega V L_y^2 L_z^2} \right]^{1/2} [\bar{u}_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{\varepsilon} u_{-1}^{(-)}(q_3)] \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\omega - E - E') \delta(k_2 - p_2 - q_2) \delta(k_3 - p_3 - q_3) \\ &\times e^{-(p_2^2 + q_2^2)/2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \{ -\beta x^2 - x(p_2 - q_2) + i k_1 x \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интеграл по x – гауссова типа и берется с помощью формулы (3.14), что приводит S -матричный элемент к виду:

$$S_{if} = ie \frac{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - p - q)}{\sqrt{8\pi E E' \omega V L_y L_z}} [\bar{u}_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{\varepsilon} u_{-1}^{(-)}(q_3)] e^{-k_\perp^2/4\beta} e^{-i k_1 (p_2 - q_2)/2\beta}, \quad (4.4)$$

где под трехмерной δ -функцией понимается произведение трех δ -функций, приведенных явно в (4.3), и $k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Вероятность распада фотона в единицу времени равна квадрату модуля S -матричного элемента, отнесенного к интервалу времени T , за который этот процесс произошел, и просуммированного по всевозможным конечным состояниям:

$$W = \sum_{p_2, p_3, q_2, q_3} \frac{|S_{if}|^2}{T}. \quad (4.5)$$

Как и в случае пропагатора электрона, при вычислении вероятности распада $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ удобно перейти от суммирования к интегрированию в соответствии с правилом (3.10). Подставляя выражение (4.4), получим следующий результат для вероятности распада:

$$W_\gamma = \frac{e^2 e^{-k_\perp^2/2\beta}}{16\pi\omega L_x} \int \frac{dp_2 dp_3 dq_2 dq_3}{E E'} \delta^{(3)}(k - p - q) \text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{\varepsilon} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \hat{\varepsilon}^* \right\}, \quad (4.6)$$

где $\rho_{-1}^{(\pm)}(p_3)$ – матрица плотности, определенная в (3.6). В подынтегральном выражении зависимость от переменных p_2 и q_2 имеется только в δ -функции: $\delta(k_2 - p_2 - q_2)$. Указанная δ -функция позволяет легко взять интеграл по одной из переменных, например по q_2 , а оставшийся интеграл

по p_2 называют “холостым”, поскольку получившееся подынтегральное выражение не зависит от p_2 . Если считать, что p_2 принимает всевозможные значения, то этот интеграл становится равным бесконечности, что дает для вероятности распада нефизический результат. Для аккуратного вычисления этого интеграла следует заметить, что параметр p_2 не имеет смысла проекции импульса электрона на ось Oy , а определяет положение максимума его волновой функции на оси Ox в соответствии с уравнением: $x - p_2/\beta = \text{const}$. Поэтому аккуратное вычисление “холостого” интеграла следующее:

$$\int dp_2 = \beta \int_0^{L_x} dx = \beta L_x. \quad (4.7)$$

Подставляя этот интеграл в (4.6) и вводя вместо квадрата заряда постоянную тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi$, получим следующее выражение для вероятности:

$$W_\gamma = \frac{\alpha\beta}{4\omega} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int \frac{dp_3 dq_3}{E E'} \delta(\omega - E - E') \delta(k_3 - p_3 - q_3) \text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{\varepsilon} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \hat{\varepsilon}^* \right\}. \quad (4.8)$$

Две оставшиеся δ -функции позволяют легко взять двойной интеграл. Это удобно сделать в системе отсчета, в которой $k_3 = 0$. Заметим, что при такого типа лоренц-преобразованиях конфигурация чисто магнитного поля сохраняется. Результат интегрирования равен:

$$\omega W_\gamma = \frac{\alpha\beta}{2} \frac{e^{-k_\perp^2/2\beta}}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{\varepsilon} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \hat{\varepsilon}^* \right\} \Big|_{\substack{E = E' = \omega/2 \\ p_3 = -q_3}}. \quad (4.9)$$

Перейдем к вычислению шпура. Подставляя явный вид матриц $\rho_{-1}^{(\pm)}$ из (3.6), для рассматриваемого шпура получим следующий результат:

$$\text{Sp} \left\{ (\hat{p}_\parallel + m) \hat{\varepsilon}_\parallel (\hat{q}_\parallel - m) \hat{\varepsilon}_\parallel^* \Pi_- \right\} = 2 \left[(p\varepsilon)_\parallel (q\varepsilon^*)_\parallel + (q\varepsilon)_\parallel (p\varepsilon^*)_\parallel \right] - k_\parallel^2 (\varepsilon\varepsilon^*)_\parallel, \quad (4.10)$$

где использованы свойства (1.15) шпуров γ -матриц.

Выясним, фотоны какой поляризации имеют ненулевую вероятность распада на электрон-позитронную пару. Для этого вспомним, что тензор напряженностей внешнего электромагнитного поля позволяет построить удобный базис (1.17) для такого рода анализа. При этом два поляризационных состояния фотона, ортогональных к его волновому вектору \mathbf{k} ,

могут быть выбраны пропорциональными первым двум базисным векторам $b_\mu^{(1)}$ и $b_\mu^{(2)}$:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} = \frac{b_\mu^{(1)}}{\sqrt{-(b^{(1)})^2}} = \frac{\varphi_{\mu\nu} k^\nu}{\sqrt{k_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\mu^{(2)} = \frac{b_\mu^{(2)}}{\sqrt{-(b^{(2)})^2}} = \frac{\tilde{\varphi}_{\mu\nu} k^\nu}{\sqrt{k_\parallel^2}}. \quad (4.11)$$

В выбранной нами системе отсчета ($k_3 = 0$) явный вид этих векторов следующий:

$$\varepsilon^{(1)} = (0, -k_2, k_1, 0)/\sqrt{k_\perp^2}, \quad \varepsilon^{(2)} = (0, 0, 0, 1). \quad (4.12)$$

Только 4-вектор “второй” фотонной поляризации имеет ненулевые составляющие в \parallel подпространстве, а значит, только фотон “второй” поляризации может распадаться на электрон-позитронную пару в сильном магнитном поле. При этом фотон “первой” поляризации остается стабильным по отношению к рассматриваемому распаду.

Подстановка $\varepsilon_\mu^{(2)}$ из (4.12) в выражение для шпура (4.10) приводит к простому результату $-4m^2$. Учитывая, что произведение энергии распадающегося фотона на вероятность его распада есть лоренц-инвариантная величина, перейдем в произвольную систему отсчета ($\omega \rightarrow \sqrt{k_\parallel^2}$) и для вероятности распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$ получим окончательный результат:

$$W_\gamma = \frac{2\alpha\beta m^2}{\omega} \frac{e^{-k_\perp^2/2\beta}}{\sqrt{k_\parallel^2(k_\parallel^2 - 4m^2)}}. \quad (4.13)$$

Задание 5. Вычислить вероятность распада аксиона на электрон-позитронную пару в сильном внешнем магнитном поле.

Решение. Аксион – это псевдоскалярная частица, введенная для решения проблемы СР-инвариантности сильных взаимодействий. В модели так называемого “невидимого” аксиона с прямой связью аксиона с обычными фермионами лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{g_{af}}{2m_f} [\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\Psi(x)] \partial^\mu a(x), \quad (5.1)$$

где g_{af} – юкавская константа связи, m_f – масса фермиона, $\Psi(x)$ и $a(x)$ – фермионная и аксионная волновые функции.

Распад аксиона на электрон-позитронную пару, запрещенный в вакууме законом сохранения энергии-импульса, становится возможным в

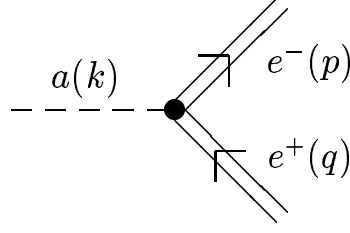


Рис. 2. Диаграмма, описывающая распад аксиона на электрон-позитронную пару во внешнем электромагнитном поле в модели с прямой связью аксиона с электроном

присутствии внешнего магнитного поля в полной аналогии с распадом фотона. Легко увидеть, что S -матричный элемент процесса, изображенного на рис. 2, можно получить из S -матричного элемента распада фотона (4.4) заменой: $ie\hat{\varepsilon} \rightarrow (g_{ae}/2m)\gamma_5\hat{k}$, что приводит к результату:

$$S_{if} = -\frac{g_{ae}}{2m} \frac{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - p - q)}{\sqrt{8\pi E E' \omega V L_y L_z}} [\bar{u}_{-1}^{(+)}(p_3) \gamma_5 \hat{k} u_{-1}^{(-)}(q_3)] e^{-k_{\perp}^2/4\beta} e^{-ik_1 k_2/2\beta}, \quad (5.2)$$

где k_{μ} – 4-импульс аксиона. Для вычисления вероятности распада аксиона воспользуемся вероятностью распада фотона (4.9), в которой сделаем соответствующие замены, что позволяет получить следующий результат:

$$\omega W_a = \frac{g_{ae}^2 \beta}{32\pi m^2} \frac{e^{-k_{\perp}^2/2\beta}}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \gamma_5 \hat{k} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \gamma_5 \hat{k} \right\} \Big|_{\substack{E = E' = \omega/2 \\ p_3 = -q_3}}. \quad (5.3)$$

Вычислим шпур γ -матриц в вероятности распада:

$$\text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \gamma_5 \hat{k} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \gamma_5 \hat{k} \right\} = \text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{k} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \hat{k} \right\} + 2m^2 \text{Sp} \left\{ \hat{k}_{\parallel} \hat{k}_{\parallel} \Pi_{-} \right\}. \quad (5.4)$$

Если учесть, что электрон и позитрон находятся на массовой поверхности ($p_{\parallel}^2 = q_{\parallel}^2 = m^2$), а также закон сохранения импульса в \parallel подпространстве $k_{\parallel} = p_{\parallel} + q_{\parallel}$, то первый шпур $\text{Sp} \left\{ \rho_{-1}^{(+)}(p_3) \hat{k} \rho_{-1}^{(-)}(q_3) \hat{k} \right\} = -(p_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2)^2$ обращается в нуль, а второй – $\text{Sp} \left\{ \hat{k}_{\parallel} \hat{k}_{\parallel} \Pi_{-} \right\} = 2k_{\parallel}^2 = 2\omega^2$. Далее, возвращаясь в произвольную систему отсчета из системы, где $k_3 = 0$, получаем окончательный результат для вероятности распада аксиона на электрон-позитронную пару:

$$W_a = \frac{g_{ae}^2 \beta}{8\pi \omega} \frac{e^{-k_{\perp}^2/2\beta}}{\sqrt{1 - 4m^2/k_{\parallel}^2}}. \quad (5.5)$$

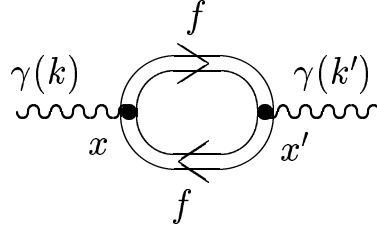


Рис. 3. Диаграмма перехода фотона $\gamma \rightarrow \gamma$ в низшем порядке теории возмущений во внешнем электромагнитном поле

Однопетлевые двухточечные процессы

Задание 6. Вычислить поляризационный оператор фотона в сильном магнитном поле.

Решение. Поляризационный оператор фотона может быть получен из амплитуды перехода фотона в фотон. В низшем порядке теории возмущений данный процесс описывается двухточечной петлевой диаграммой, изображенной на рис. 3. Основной вклад в амплитуду будет давать электрон – частица, обладающая наибольшим удельным зарядом. Будем считать, что напряженность магнитного поля является самым большим параметром задачи $eB \gg m^2, \omega^2$. Наличие внешнего поля не меняет локального лагранжиана взаимодействия: $\mathcal{L}(x) = eJ_\mu(x)A^\mu(x)$, где $J_\mu(x) = [\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)]$ – электронный ток. S -матричный элемент есть:

$$S_{if} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4x' \langle \gamma(k') | T \{ J_\mu(x) J_\nu(x') \} A^\mu(x) A^\nu(x') | \gamma(k) \rangle. \quad (6.1)$$

Поскольку фотон – нейтральная частица, то внешнее магнитное поле не меняет вида его волновой функции, и при вычислениях можно воспользоваться ее стандартным вторично квантованным представлением в виде разложения по плоским волнам. После свертки волновых функций электрона в пропагатор $S(x, x')$ (3.15) S -матричный элемент приводится к виду:

$$S_{if} = \frac{-(ie)^2}{\sqrt{4\omega\omega'V^2}} \int d^4x d^4x' \text{Sp} \{ S(x' - x) \hat{\varepsilon} S(x - x') \hat{\varepsilon}'^* \} e^{-i(kx) + i(k'x')}. \quad (6.2)$$

Следует отметить, что для двухточечной петли с циркулирующим зарядом неинвариантный фазовый множитель (3.20) в электронном пропагаторе (3.15) обращается в единицу, поскольку

$$\Phi(x, x') + \Phi(x', x) = 0. \quad (6.3)$$

В результате S -матричный элемент (6.2) оказывается трансляционно инвариантным. Переход от переменной интегрирования x' к новой переменной $z = x' - x$ позволяет легко проинтегрировать по x , что дает четырехмерную δ -функцию, соответствующую закону сохранения энергии-импульса и отражающую тот факт, что начальное и конечное состояния образованы электрически нейтральными частицами. Отмеченное свойство амплитуды перехода фотона в фотон позволяет воспользоваться стандартным определением инвариантной амплитуды:

$$S_{if} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - k')}{2\omega V} M_{\gamma \rightarrow \gamma}, \quad (6.4)$$

что приводит к следующему результату:

$$M_{\gamma \rightarrow \gamma} = -ie^2 \int d^4 z \operatorname{Sp} \{ S(z) \hat{\varepsilon} S(-z) \hat{\varepsilon}'^* \} e^{i(kz)}. \quad (6.5)$$

Как было указано выше, амплитуда перехода фотона в фотон позволяет получить поляризационный оператор фотона $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$:

$$iM_{\gamma \rightarrow \gamma} = \mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \varepsilon_\mu'^*(k) \varepsilon_\nu(k). \quad (6.6)$$

Воспользовавшись явным видом амплитуды (6.5), для поляризационного оператора получим:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = e^2 \int d^4 z e^{i(kz)} \operatorname{Sp} \{ \gamma_\mu S(z) \gamma_\nu S(-z) \}. \quad (6.7)$$

Подставляя пропагаторы электронов в виде (3.15) и интегрируя по z , поляризационный оператор фотона можно привести к виду:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -\frac{e^2 \beta}{2\pi} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \operatorname{Sp} \left\{ \gamma_{\parallel\mu} \frac{\hat{p}_\parallel + m}{p_\parallel^2 - m^2} \gamma_{\parallel\nu} \frac{\hat{p}_\parallel - \hat{k}_\parallel + m}{(p - k)_\parallel^2 - m^2} \Pi_- \right\}. \quad (6.8)$$

Получившийся интеграл по двумерному псевдоевклидову пространству идентичен по виду (за исключением проекционного оператора Π_-) интегралу по четырехмерному пространству, возникающему при вычислении поляризационного оператора в вакууме. Поэтому в дальнейшем естественно воспользоваться методикой, используемой при вычислениях в вакууме. Вводя параметризацию Фейнмана и вычисляя шпур в двумерном пространстве, поляризационный оператор можно привести к виду:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -\frac{e^2 \beta}{\pi} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int_0^1 dx \left\{ 2T_{\mu\nu} - V_\mu k_\nu - V_\nu k_\mu + \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \left[m^2 S + (Vk) - (T\tilde{\Lambda}) \right] \right\}, \quad (6.9)$$

где введены скалярный S , векторный V_μ и тензорный $T_{\mu\nu}$ интегралы:

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{1}{[p_\parallel^2 - 2x(pk)_\parallel + xk_\parallel^2 - m^2]^2}, \\ V_\mu &= \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{p_{\parallel\mu}}{[p_\parallel^2 - 2x(pk)_\parallel + xk_\parallel^2 - m^2]^2}, \\ T_{\mu\nu} &= \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{[p_\parallel^2 - 2x(pk)_\parallel + xk_\parallel^2 - m^2]^2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из введенного набора интегралов скалярный и векторный конечны и хорошо определены:

$$S = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{m^2 - x(1-x)k_\parallel^2}, \quad V_\mu = \frac{i}{4\pi} \frac{x k_{\parallel\mu}}{m^2 - x(1-x)k_\parallel^2}, \quad (6.11)$$

в то время как тензорный $T_{\mu\nu}$ имеет логарифмическую расходимость и должен быть регуляризован, т. е. каким-либо образом доопределен.

Анализ показывает, что в поляризационный оператор (6.9) тензорные интегралы входят в такой комбинации, что имеет место “случайное” сокращение логарифмической расходимости. Однако результат вычислений существенным образом зависит от метода регуляризации, поскольку имеет место неопределенность типа “бесконечность минус бесконечность”, порождающая произвол в остающихся конечных членах. Такое поведение поляризационного оператора фотона отражает недостаток двумерной КЭД, эффективно возникающей в случае сильного магнитного поля, в ее применении к вычислению двухточечных петлевых амплитуд. Наиболее корректный подход для получения правильного результата состоит в вычислении поляризационного оператора фотона в магнитном поле произвольной напряженности и взятии предела сильного поля. Однако такой же результат может быть получен и при использовании метода размерной регуляризации, которым мы и воспользуемся.

Тензорный интеграл, вычисленный методом размерной регуляризации, равен:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{[m^2 - x(1-x)k_\parallel^2]^{1-n/2}} \left[\frac{x^2 k_{\parallel\mu} k_{\parallel\nu}}{m^2 - x(1-x)k_\parallel^2} - \frac{\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}}{2-n} \right], \quad (6.12)$$

где введен вспомогательный параметр $n \neq 2$ – размерность \parallel подпространства импульсов, который следует положить $n = 2$ только в конце вычислений. Как было отмечено ранее, разность двух слагаемых в (6.9),

содержащих тензорные интегралы, конечна и в пределе двумерного пространства ($n = 2$) есть:

$$2T_{\mu\nu} - (T\tilde{\Lambda})\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi} \left[\frac{x^2(2k_{\parallel\mu}k_{\parallel\nu} - k_{\parallel}^2\tilde{\Lambda}_{\mu\nu})}{m^2 - x(1-x)k_{\parallel}^2} - \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \right], \quad (6.13)$$

где учли, что в n -мерном \parallel подпространстве $(\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}) = n$.

Подставляя в поляризационный оператор (6.9) значения скалярного и векторного интегралов (6.11), а также разность (6.13) тензорных интегралов, получим следующий результат:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(R)} = -\frac{2i\alpha\beta}{\pi} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \left(k_{\parallel}^2\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - k_{\parallel\mu}k_{\parallel\nu} \right) \int_0^1 \frac{x(1-x)dx}{m^2 - x(1-x)k_{\parallel}^2}. \quad (6.14)$$

Интеграл по x зависит от соотношения между массой и импульсом фотона. При $k_{\parallel}^2 > 4m^2$ у интеграла в (6.14) появляется мнимая часть, т. е. фотон становится нестабильным и может распадаться на электрон-позитронную пару.

В заключение следует отметить, что вычисление поляризационного оператора методом размерной регуляризации автоматически приводит к калибровочно инвариантному результату:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(R)} k^{\nu} = 0 \quad (6.15)$$

в соответствии с общими требованиями квантовой электродинамики.

Задание 7. Найти собственные функции и собственные значения поляризационного оператора фотона в сильном магнитном поле.

Решение. Задача о нахождении собственных функций и собственных значений поляризационного оператора фотона (6.14) существенно упрощает дальнейший анализ этого тензора. Из условия калибровочной инвариантности поляризационного оператора (6.15) следует, что 4-импульс фотона k_{μ} является собственной функцией $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(R)}$ с нулевым собственным значением. При этом 4-импульс фотона можно считать “четвертым” базисным вектором $b_{\mu}^{(4)}$ из набора (1.17). Легко проверить, что и три других базисных вектора $b_{\mu}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) также являются собственными функциями поляризационного оператора (6.14):

$$(\mathcal{P}^{(R)} b^{(1)})_{\mu} = 0, \quad (\mathcal{P}^{(R)} b^{(2)})_{\mu} = i\kappa b_{\mu}^{(2)}, \quad (\mathcal{P}^{(R)} b^{(3)})_{\mu} = 0, \quad (7.1)$$

причем первый и третий – с нулевыми собственными значениями. Только второй базисный вектор $b_\mu^{(2)} = (\tilde{\varphi}k)_\mu$ имеет ненулевое собственное значение:

$$\varkappa = -i \frac{(b^{(2)} \mathcal{P}^{(R)} b^{(2)})}{(b^{(2)})^2} = -\frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int_0^1 \frac{k_\parallel^2 x(1-x) dx}{m^2 - x(1-x)k_\parallel^2}. \quad (7.2)$$

Это означает, что в разложении тензора $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(R)}$ по базису в соответствии с (1.20) “выживает” только одно слагаемое, так что поляризационный оператор (6.14) принимает вид:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(R)} = i\varkappa \frac{b_\mu^{(2)} b_\nu^{(2)}}{(b^{(2)})^2} = -i\varkappa \frac{(\tilde{\varphi}k)_\mu (\tilde{\varphi}k)_\nu}{k_\parallel^2}. \quad (7.3)$$

Только фотон “второй” поляризации с $\varepsilon_\mu^{(2)} = (\tilde{\varphi}k)_\mu / \sqrt{k_\parallel^2}$ дает вклад в поляризационный оператор в сильном магнитном поле.

Перейдем к вычислению собственного значения \varkappa . Для этого в формуле (7.2) удобно перейти к новой переменной интегрирования $u = 2x - 1$ и ввести параметр $v^2 = 1 - 4m^2/k_\parallel^2$:

$$\varkappa = -\frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-k_\perp^2/2\beta} \left[\int_0^1 \frac{(1-v^2) du}{u^2 - v^2 - i\varepsilon} - 1 \right], \quad (7.4)$$

где учли, что интеграл берется в комплексной плоскости и бесконечно малое слагаемое $i\varepsilon$ в знаменателе определяет смещение положения полюсов с вещественной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Воспользуемся теперь формулой Сохоцкого из теории функций комплексной переменной:

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathbf{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (7.5)$$

и представим интеграл по u в виде:

$$\int_0^1 \frac{du}{u^2 - v^2 - i\varepsilon} = \oint_0^1 \frac{du}{u^2 - v^2} + \frac{i\pi}{2v} \int_0^1 du [\delta(u-v) + \delta(u+v)]. \quad (7.6)$$

Мнимая часть этого интеграла будет отлична от нуля, если $0 \leq |v| \leq 1$, так, чтобы аргумент какой-либо из δ -функций обратился в нуль. Пусть для определенности параметр v будет неотрицательным, т. е. $0 \leq v \leq 1$, и в мнимой части “сработает” только одна δ -функция – $\delta(u-v)$. Такое

ограничение на v приводит к ограничению снизу на продольную составляющую квадрата 4-импульса фотона: $k_{\parallel}^2 \geq 4m^2$, что эквивалентно введению Θ -функции $-\Theta(k_{\parallel}^2 - 4m^2)$. Окончательно собственное значение можно записать как:

$$\varkappa = -\frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \left[H(v) + i\pi \frac{1-v^2}{2v} \Theta(k_{\parallel}^2 - 4m^2) \right], \quad (7.7)$$

где введена вещественная функция:

$$H(v) = \int_0^1 \frac{(1-v^2) du}{u^2 - v^2} - 1, \quad (7.8)$$

в которой интеграл понимается в смысле главного значения. Функция $H(v)$ имеет различные значения в зависимости от знака v^2 .

Отрицательные v^2 . Этому случаю соответствует следующее значение квадрата продольной составляющей 4-импульса фотона: $0 \leq k_{\parallel}^2 < 4m^2$. В этой кинематической области \varkappa вещественна и равна:

$$\varkappa = \frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \left[1 - \frac{4m^2}{\sqrt{k_{\parallel}^2(4m^2 - k_{\parallel}^2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k_{\parallel}^2}{4m^2 - k_{\parallel}^2}} \right]. \quad (7.9)$$

Положительные v^2 . В этом случае $k_{\parallel}^2 > 4m^2$, и в соответствии с формулой (7.7) для \varkappa получим:

$$\varkappa = \frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \left[1 + \frac{1-v^2}{2v} \left(\ln \frac{1+v}{1-v} - i\pi \right) \right], \quad (7.10)$$

где $v = \sqrt{1 - 4m^2/k_{\parallel}^2}$. Появление мнимой части у \varkappa означает, что при таких значениях квадрата продольной составляющей 4-импульса фотон становится нестабильным и может распадаться на электрон-позитронную пару. Вероятность распада $\gamma^{(2)} \rightarrow e^+e^-$ может быть определена по мнимой части \varkappa :

$$W_{\gamma} = -\frac{\operatorname{Im} \varkappa}{2\omega} = \frac{2\alpha\beta m^2}{\omega} \frac{e^{-k_{\perp}^2/2\beta}}{\sqrt{k_{\parallel}^2(k_{\parallel}^2 - 4m^2)}}. \quad (7.11)$$

Это выражение в точности совпадает с вероятностью (4.13), полученной непосредственным вычислением в задании 4.

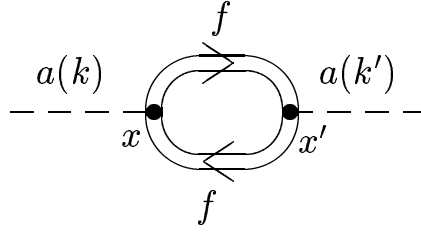


Рис. 4. Диаграмма перехода аксиона $a \rightarrow a$ в низшем порядке теории возмущений во внешнем электромагнитном поле

Задание 8. Вычислить массовый оператор аксиона в сильном магнитном поле.

Решение. Массовый оператор аксиона может быть получен из амплитуды перехода аксиона в аксион, который в низшем порядке теории возмущений описывается двухточечной петлевой диаграммой, изображенной на рис. 4. Как и в случае поляризационного оператора фотона, основной вклад в амплитуду будет давать электрон – частица, обладающая наибольшим удельным зарядом. Для корректного вычисления амплитуды воспользуемся локальным лагранжианом взаимодействия аксиона с электроном: $\mathcal{L}(x) = (g_{ae}/2m) J_\mu^{(5)}(x) \partial^\mu a(x)$, где $J_\mu(x) = [\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi(x)]$ – аксиально-векторный ток. S -матричный элемент есть:

$$S_{if} = \frac{(ig_{ae})^2}{8m^2} \int d^4x d^4x' \langle a(k') | T \{ J_\mu^{(5)}(x) J_\nu^{(5)}(x') \} [\partial^\mu a(x)] [\partial^\nu a(x')] | a(k) \rangle. \quad (8.1)$$

Так же, как и для фотона, для волновой функции аксиона воспользуемся стандартным вторично квантованным представлением в виде разложения по плоским волнам. Сворачивая волновые функции электрона в пропагаторы $S(x, x')$ (3.15), запишем S -матричный элемент в виде:

$$S_{if} = \frac{g_{ae}^2}{8m^2 V \sqrt{\omega \omega'}} \int d^4x d^4x' \text{Sp} \left\{ S(x' - x) \hat{k} \gamma_5 S(x - x') \hat{k}' \gamma_5 \right\} e^{-i(kx) + i(k'x')}. \quad (8.2)$$

Неинвариантный фазовый множитель обращается в единицу в соответствии с (6.3), что приводит к трансляционной инвариантности S -матричного элемента (8.2). В полной аналогии с фотоном можно ввести инвариантную амплитуду перехода $a \rightarrow a$ в соответствии со стандартным определением (6.4):

$$M_{a \rightarrow a} = -\frac{ig_{ae}^2}{4m^2} \int d^4z \text{Sp} \left\{ S(z) \hat{k} \gamma_5 S(-z) \hat{k} \gamma_5 \right\} e^{i(kz)}. \quad (8.3)$$

Подставим пропагатор электрона в форме (3.15) и проинтегрируем амплитуду перехода по z :

$$M_{a \rightarrow a} = \frac{ig_{ae}^2 \beta}{8\pi m^2} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \text{Sp} \left\{ \frac{(\hat{p}_\parallel + m) \Pi_-}{p_\parallel^2 - m^2} \hat{k} \gamma_5 \frac{(\hat{p}_\parallel - \hat{k}_\parallel + m) \Pi_-}{(p - k)_\parallel^2 - m^2} \hat{k} \gamma_5 \right\}. \quad (8.4)$$

С учетом антикоммутационных свойств матрицы γ_5 амплитуда перехода может быть записана в форме:

$$M_{a \rightarrow a} = -\frac{ig_{ae}^2 \beta}{4\pi} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{\text{Sp}\{\hat{k}_\parallel \hat{k}_\parallel \Pi_-\}}{[p_\parallel^2 - m^2][(p - k)_\parallel^2 - m^2]} - \frac{ig_{ae}^2 (k \mathcal{P} k)}{16\pi \alpha m^2}, \quad (8.5)$$

где $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ – поляризационный оператор фотона (6.14). Второе слагаемое обращается в нуль в силу калибровочной инвариантности поляризационного оператора (6.15). Шпур в первом слагаемом равен $\text{Sp}\{\hat{k}_\parallel \hat{k}_\parallel \Pi_-\} = 2k_\parallel^2$, а интеграл по p_\parallel после введения параметризации Фейнмана сводится к скалярному интегралу S со значением (6.11). Результат для амплитуды следующий:

$$M_{a \rightarrow a} = \frac{g_{ae}^2 \beta}{8\pi^2} e^{-k_\perp^2/2\beta} \int_0^1 \frac{k_\parallel^2 dx}{m^2 - x(1-x)k_\parallel^2}. \quad (8.6)$$

Получившийся интеграл по x , вообще говоря, комплексный, и его реальная часть с точностью до множителя совпадает с функцией $H(v) + 1$, определенной в формуле (7.8), а мнимая часть становится отличной от нуля при $k_\parallel^2 > 4m^2$.

Индукцированная внешним полем поправка к массе аксиона, с точностью до знака совпадающая с амплитудой перехода $a \rightarrow a$, равна:

$$\delta m_a^2 = -M_{a \rightarrow a} = -\frac{g_{ae}^2 \beta}{2\pi^2} e^{-k_\perp^2/2\beta} \left[\frac{1 + H(v)}{1 - v^2} + \frac{i\pi}{2v} \Theta(k_\parallel^2 - 4m^2) \right], \quad (8.7)$$

где $v^2 = 1 - 4m^2/k_\parallel^2$. Как и в случае собственного значения \varkappa поляризационного оператора фотона, поправка к массе аксиона существенно различна при $k_\parallel^2 < 4m^2$ и $k_\parallel^2 > 4m^2$.

Отрицательные v^2 . Этому случаю соответствует $0 \leq k_\parallel^2 < 4m^2$. В этой кинематической области поправка δm_a^2 вещественна и равна:

$$\delta m_a^2 = -\frac{g_{ae}^2 \beta}{2\pi^2} e^{-k_\perp^2/2\beta} \sqrt{\frac{k_\parallel^2}{4m^2 - k_\parallel^2}} \arctg \sqrt{\frac{k_\parallel^2}{4m^2 - k_\parallel^2}}. \quad (8.8)$$

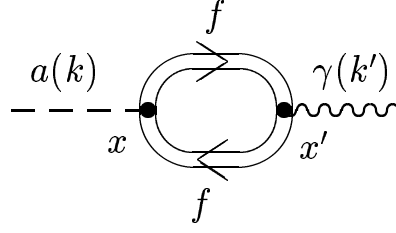


Рис. 5. Диаграмма перехода $a \rightarrow \gamma$ в низшем порядке теории возмущений во внешнем электромагнитном поле

Положительные v^2 . В этом случае $k_{\parallel}^2 > 4m^2$, и в соответствии с формулой (8.7) получим:

$$\delta m_a^2 = -\frac{g_{ae}^2 \beta}{4\pi^2 v} \left[\ln \frac{1-v}{1+v} + i\pi \right] e^{-k_{\perp}^2/2\beta}. \quad (8.9)$$

Возникновение мнимой части у δm_a^2 при таких значениях квадрата продольной составляющей 4-импульса аксиона указывает на его нестабильность в рассматриваемой кинематической области, т. е. существует ненулевая вероятность распада аксиона на электрон-позитронную пару. Вероятность распада $a \rightarrow e^+e^-$ может быть определена по мнимой части квадрата массы аксиона:

$$W_a = -\frac{\text{Im } \delta m_a^2}{2\omega} = \frac{g_{ae}^2 \beta}{8\pi\omega} \frac{e^{-k_{\perp}^2/2\beta}}{\sqrt{1 - 4m^2/k_{\parallel}^2}}. \quad (8.10)$$

Этот результат в точности совпадает с вероятностью (5.5), полученной ранее непосредственным вычислением в задании 5.

Задание 9. Вычислить амплитуду перехода аксиона в фотон в сильном магнитном поле.

Решение. Амплитуда перехода аксиона в фотон, запрещенного в вакууме из-за различий в спине частиц, становится отличной от нуля в присутствии внешнего электромагнитного поля. В низшем порядке теории возмущений этот процесс описывается двухточечной петлевой диаграммой, изображенной на рис. 5, как и в предыдущих заданиях 6 и 8. Основной вклад в амплитуду будет давать электрон. В соответствии с диаграммой, S -матричный элемент перехода может быть записан:

$$S_{if} = \frac{eg_{ae}}{2m} \int d^4x d^4x' \langle \gamma(k') | T \{ J_{\mu}^{(5)}(x) J_{\nu}(x') \} (\partial^{\mu} a(x)) A^{\nu}(x') | a(k) \rangle. \quad (9.1)$$

Воспользуемся стандартным вторично квантованным представлением в виде разложения по плоским волнам для волновых функций аксиона и фотона. После свертки электронных волновых функций $\Psi(x)$ в пропагаторы $S(x, x')$ S -матричный элемент принимает вид:

$$S_{if} = \frac{ie g_{ae}}{4mV\sqrt{\omega\omega'}} \int d^4x d^4x' \text{Sp} \left\{ \hat{k} \gamma_5 S(x' - x) \hat{\varepsilon}^* S(x - x') \right\} e^{-i(kx) + i(k'x')}. \quad (9.2)$$

Неинвариантный фазовый множитель обратился в единицу в соответствии с (6.3), что приводит к трансляционной инвариантности S -матричного элемента (9.2). После перехода к новой переменной интегрирования $z = x' - x$ интеграл по x легко берется и дает четырехмерную δ -функцию, соответствующую закону сохранения энергии-импульса. Воспользуемся стандартным определением инвариантной амплитуды (6.4) для перехода $a \rightarrow \gamma$:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = -\frac{e g_{ae}}{2m} \int d^4z \text{Sp} \left\{ S(z) \hat{\varepsilon}^* S(-z) \hat{k} \gamma_5 \right\} e^{i(kz)}. \quad (9.3)$$

Подставляя пропагатор электрона в форме (3.15) и интегрируя амплитуду перехода $a \rightarrow \gamma$ по z , получим:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = -\frac{e g_{ae} \beta}{4\pi m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \text{Sp} \left\{ \frac{(\hat{p}_{\parallel} + m) \Pi_{-}}{p_{\parallel}^2 - m^2} \hat{\varepsilon}^* \frac{(\hat{p}_{\parallel} - \hat{k}_{\parallel} + m) \Pi_{-}}{(p - k)_{\parallel}^2 - m^2} \hat{k} \gamma_5 \right\}. \quad (9.4)$$

Значения двух отличных от нуля шпуров в интеграле вычисляются с помощью формул (1.15) и равны:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{\varepsilon}_{\parallel}^* \hat{k}_{\parallel} \gamma_5 \Pi_{-} \} &= 2(k \tilde{\varphi} \varepsilon^*), \\ \text{Sp} \{ \hat{p}_{\parallel} \hat{\varepsilon}_{\parallel}^* (\hat{p}_{\parallel} - \hat{k}_{\parallel}) \hat{k}_{\parallel} \gamma_5 \Pi_{-} \} &= 2 \left[2(\varepsilon^* p)_{\parallel} (k \tilde{\varphi} p) - p_{\parallel}^2 (k \tilde{\varphi} \varepsilon^*) + k_{\parallel}^2 (p \tilde{\varphi} \varepsilon^*) \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

После введения параметризации Фейнмана амплитуда перехода $a \rightarrow \gamma$ в терминах скалярного, векторного и тензорного интегралов (6.10) имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{a \rightarrow \gamma} &= -\frac{e g_{ae} \beta}{4\pi m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} \int_0^1 dx \left[2(k \tilde{\varphi} T \varepsilon^*) - (T \tilde{\Lambda}) (k \tilde{\varphi} \varepsilon^*) \right. \\ &\quad \left. + k_{\parallel}^2 (V \tilde{\varphi} \varepsilon^*) + m^2 (k \tilde{\varphi} \varepsilon^*) S \right]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Скалярный и векторный интегралы имеют значения, приведенные в (6.11), а два тензорных интеграла, имеющих логарифмические расходимости,

входят в виде точно такой же разности $2T_{\mu\nu} - (T\tilde{\Lambda})\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$, что и в поляризаационном операторе фотона $\mathcal{P}_{\mu\nu}$. Напомним, что в этой разности расходимости “случайным” образом сокращаются, и результат существенно зависит от способа регуляризации тензорного интеграла. Воспользуемся выражением (6.13) для разности, полученным методом размерной регуляризации, и получим для амплитуды перехода следующее выражение:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = -\frac{ieg_{ae}\beta}{4\pi^2 m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} (k\tilde{\varphi}\varepsilon^*) \int_0^1 \frac{k_{\parallel}^2 x(1-x) dx}{m^2 - x(1-x)k_{\parallel}^2}. \quad (9.7)$$

Интеграл по x в точности такой же, как и в собственном значении \varkappa (7.2) поляризаационного оператора фотона, поэтому с учетом анализа этого интеграла в задаче 7 выпишем здесь только окончательный результат:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = -\frac{ieg_{ae}\beta}{4\pi^2 m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} (k\tilde{\varphi}\varepsilon^*) \left[H(v) + i\pi \frac{1-v^2}{2v} \Theta(k_{\parallel}^2 - 4m^2) \right], \quad (9.8)$$

где $v^2 = 1 - 4m^2/k_{\parallel}^2$, и функция $H(v)$ определена в (7.8). Следует обратить внимание на общий псевдоскалярный множитель $(k\tilde{\varphi}\varepsilon^*)$, пропорциональный свертке тензора электромагнитного поля фотона и дуального тензора внешнего магнитного поля и отражающий специфику взаимодействия аксиона с фотонами. С учетом псевдоскалярной природы аксиона эффективный лагранжиан, который может быть восстановлен по этой амплитуде, будет скалярной величиной.

Как и в случае собственного значения \varkappa поляризаационного оператора фотона, амплитуда перехода аксиона в фотон различна при $k_{\parallel}^2 < 4m^2$ и $k_{\parallel}^2 > 4m^2$. Рассмотрим каждый из указанных случаев по отдельности.

Отрицательные v^2 . Этому случаю соответствует $0 \leq k_{\parallel}^2 < 4m^2$. В этой кинематической области амплитуда перехода чисто мнимая и равна:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = \frac{ieg_{ae}\beta}{4\pi^2 m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} (k\tilde{\varphi}\varepsilon^*) \left[1 - \frac{4m^2}{\sqrt{k_{\parallel}^2(4m^2 - k_{\parallel}^2)}} \arctg \sqrt{\frac{k_{\parallel}^2}{4m^2 - k_{\parallel}^2}} \right]. \quad (9.9)$$

Положительные v^2 . В этом случае $k_{\parallel}^2 > 4m^2$, и в соответствии с формулой (9.8) получим:

$$M_{a \rightarrow \gamma} = \frac{ieg_{ae}\beta}{4\pi^2 m} e^{-k_{\perp}^2/2\beta} (k\tilde{\varphi}\varepsilon^*) \left[1 + \frac{1-v^2}{2v} \left(\ln \frac{1+v}{1-v} - i\pi \right) \right]. \quad (9.10)$$

Возникновение вещественной части у амплитуды перехода аксиона в фотон при таких значениях квадрата продольной составляющей 4-импульса

аксиона (а значит, и фотона в соответствии с законом сохранения энергии-импульса) указывает на нестабильность этих частиц в рассматриваемой кинематической области, т. е. дополнительно у аксиона появляется возможность распадаться на электрон-позитронную пару.

Следует отметить, что полученная нами амплитуда перехода аксиона в фотон может быть неверна из-за аномалии Адлера-Белла-Джакива. Чтобы получить корректный результат для амплитуды, следует применить следующую процедуру: вычесть из амплитуды (9.8) линейное по внешнему полю слагаемое при нулевом переданном 4-импульсе $k_\mu = 0$ ($k_\parallel = 0$, $k_\perp = 0$) и к полученному выражению прибавить корректное выражение, соответствующее аномалии. В пределе сильного магнитного поля амплитуда перехода аксиона в фотон (9.7) пропорциональна k_\parallel^2 и обращается в нуль в пределе $k_\parallel = 0$. Это означает, что вычисленная нами амплитуда (9.8), вообще говоря, является правильной только с точностью до аномального члена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1989.
2. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1981.
3. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. *Квантовая электродинамика*. М.: Изд-во МГУ, 1983.
4. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. *Квантовая теория поля*: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1.
5. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. *Квантовые процессы в сильном внешнем поле*. М.: Изд-во МГУ, 1989.
6. Михеев Н.В. *Методы вычислений электромагнитных и слабых процессов в квантовой теории поля*. Ярославль, 1998.
7. Михеев Н.В. *Лабораторные задания по курсу "Радиационные поправки и перенормировки в квантовой электродинамике"*. Ярославль, 1990.

**Задания по квантовой теории поля
в сильном внешнем магнитном поле**

Составители: Василевская Любовь Александровна
Михеев Николай Владимирович
Пархоменко Александр Яковлевич

Корректор В.Н. Чулкова

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.

Подписано в печать 8.06.2000. Формат 60 × 84/16.

Бумага DATA COPY. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,7.

Тираж 50 экз. Заказ № 150.

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе ЯрГУ.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.