

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В.В. ХРЯЩЕВ, А.Л. ПРИОРОВ, В.А. ВОЛОХОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Сборник задач

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению Телекоммуникации
и специальностям Радиотехника, Радиофизика и электроника*

Ярославль 2008

УДК 621.37 / .39
ББК 388 – 01я73 – 4
Х 97

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2008 года*

Рецензенты:
научно-производственное предприятие
«Ярославское конструкторское бюро радиоприборов»;
Г.П. Штерн, кандидат технических наук, доцент

Хрящев, В.В. Основы теории цепей: сборник задач / В.В. Хрящев, А.Л. Приоров, В.А. Волохов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – 120 с.

Содержится набор практических упражнений по основным разделам курса «Основы теории цепей. Часть 2». Приводятся основные теоретические сведения, необходимые для квалифицированного решения предложенных задач, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения и список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 550400 (210400) Телекоммуникации и специальности 210302 Радиотехника (дисциплина «Основы теории цепей», блок ОПД), очной и заочной форм обучения. Оно также может быть использовано студентами специальности 010801 Радиофизика и электроника.

Ил. 36. Табл. 4. Библиогр.: 14 назв.

УДК 621.37 / .39
ББК 388 – 01я73 – 4

© Ярославский
государственный
университет, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Один старый французский математик сказал:
«Математическую теорию только тогда
можно считать совершенной, когда ты...
берешься изложить ее содержание
первому встречному».
Д. Гильберт

Состояние и перспективы развития информационных технологий в начале XXI века характеризуются становлением и широким практическим использованием техники цифровой обработки сигналов (ЦОС) – одной из самых динамичных и быстро развивающихся технологий в мире телекоммуникаций и информатизации общества. Методы и техника ЦОС вызывают повышенный интерес ученых и специалистов, работающих в различных областях, таких как связь и системы управления, радиотехника и электроника, акустика и сейсмология, радиовещание и телевидение, измерительная техника и приборостроение. Ежегодно во всем мире проводятся десятки международных научно-технических конференций и семинаров, посвященных решению актуальных проблем ЦОС. Издаются многочисленные книги и журналы, освещающие последние достижения в области теории и практики обработки цифровых сигналов. Постоянно растет число предприятий, организаций и научных центров, использующих в своих разработках методы и технологии ЦОС [1].

Вся история развития теории и техники ЦОС напрямую связана с достижениями в области дискретной схемотехники и компьютерных технологий. Дискретизация непрерывной информации во времени и квантование по уровню являются основой ее эффективного кодирования, преобразования, передачи и архивации. С появлением в 40-х годах XX века первых ЭВМ стало реальным возникновение нового фундаментального научного направления вычислительной математики, одним из разделов которого можно считать машинные алгоритмы цифровой обработки данных. Однако ограниченные вычислительные ресурсы используемых в те годы ЭВМ не позволяли проводить обработку данных в реальном времени. Положение начало радикально меняться с появлением в 60-х годах XX века класса малых ЭВМ, ориентированных преимущественно на решение задач управления и обработки данных в реальном времени. С этого момента формируется круг проблем и задач теории ЦОС как самостоятельного научного направления, которому в дальнейшем предстоит свой многоэтапный путь становления и развития.

Первый крупный вклад в теорию ЦОС внесли американские ученые Б. Голд и Ч. Рэйдер. Их монография [2] стала первой настольной книгой специалистов по ЦОС. Фундаментальной работой, подводящей итоги начального становления теории ЦОС как нового научного направления, является книга Л. Рабинера, Б. Гоулда [3]. Несколько позже появляется одно из первых учебных пособий по ЦОС авторов А. Оппенгейма и Р. Шафера [4]. Заметный вклад в развитие теории ЦОС внесли также и отечественные ученые [5-10].

Дисциплина «Основы теории цепей» является базовой для изучения теории и методов цифровой обработки сигналов. Здесь изучаются спектральная теория периодических и непериодических сигналов и линейная теория цепей дискретного времени. Рассматриваются способы построения цифровых цепей, частотные и временные характеристики базовых звеньев первого и второго порядков, изучаются эффекты квантования и переполнения в цифровых сигналах и цепях. Большую часть этого материала можно найти в известных монографиях Айфичера, Митры и Хайеса [11-13].

Данное издание представляет собой сборник задач по основным разделам теории ЦОС и базируется на учебном пособии Ю.А. Брюханова «Цифровые цепи и сигналы», изданном в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова в 2005 году [14]. Для упрощения работы с материалом приводятся необходимые сведения из теории, основные формулы и определения, разобранные примеры решения типовых задач. Авторы старались по возможности упростить все математические выкладки при изложении теоретического материала, ориентируясь при этом главным образом на студентов инженерных специальностей. Для эффективной работы со сборником задач рекомендуется предварительное изучение соответствующей теории цепей непрерывного времени.

Пособие состоит из четырех разделов. Определение и основные свойства сигналов и систем дискретного времени изложены в первом разделе.

Второй раздел посвящен математическому аппарату ЦОС (свертка, разностные уравнения, z -преобразование, дискретное преобразование Фурье). Прочное овладение этим материалом совершенно обязательно, поскольку он служит основой для анализа и синтеза дискретных и цифровых цепей.

В третьем разделе рассматривается теория цепей дискретного времени. Подробно анализируются частотные свойства и временные характеристики рекурсивной цепи первого порядка и нерекурсивной цепи второго порядка.

Некоторые специальные типы цифровых цепей (фильтры с линейной фазочастотной характеристикой, всепропускающие фильтры, минимально-фазовые цепи, системы с обратной связью) описываются в четвертом разделе.

Изложение материала в каждом из разделов заканчивается списком задач для самостоятельного решения.

В основу пособия положен материал лекций и практических занятий, в течение пятнадцати лет проводимых авторами для студентов физического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова, обучающихся по специальностям «Радиофизика и электроника», «Радиотехника» и направлению «Телекоммуникации». Выражаем глубокую благодарность нашему научному руководителю профессору Ю.А. Брюханову за помощь при создании курса «Основы теории цепей» и данного пособия. Мы благодарны также члену-корреспонденту РАН Ю.Б. Зубареву, профессорам А.А. Ланнэ, В.В. Витязеву, М.А. Щербакову, А.К. Бернюкову, В.П. Дворковичу, А.А. Петровскому, докторам технических наук А.В. Дворковичу, В.И. Джигану, М.К. Чобану, которые оказали значительное влияние на формирование взглядов авторов в данном научном направлении. Эти взгляды формировались также в совместной работе с нашими коллегами, среди которых особенно хочется отметить Ю. Лукашевича, А. Тараканова, И. Балусова, В. Кобелева, Б. Меньшикова, И. Апалькова, Е. Саутова, С. Бухтоярова, С. Ульдиновича, Д. Куйкина, В. Бекренева. Всем им авторы очень признательны и за совместную исследовательскую работу, и за помощь в обеспечении учебного процесса. Отдельные слова благодарности студенткам кафедры динамики электронных систем ЯрГУ Н. Павловой и А. Студеновой за активное участие в создании оригинал-макета пособия.

1. СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

1.1. Сигналы дискретного времени

Сигнал дискретного времени представляет собой пронумерованную последовательность вещественных или комплексных чисел. Следовательно, такой сигнал является функцией целочисленной переменной n , чаще всего имеющей смысл времени, и обозначается как $x(n)$. Пример графического представления сигнала дискретного времени приведен на рис. 1.1.

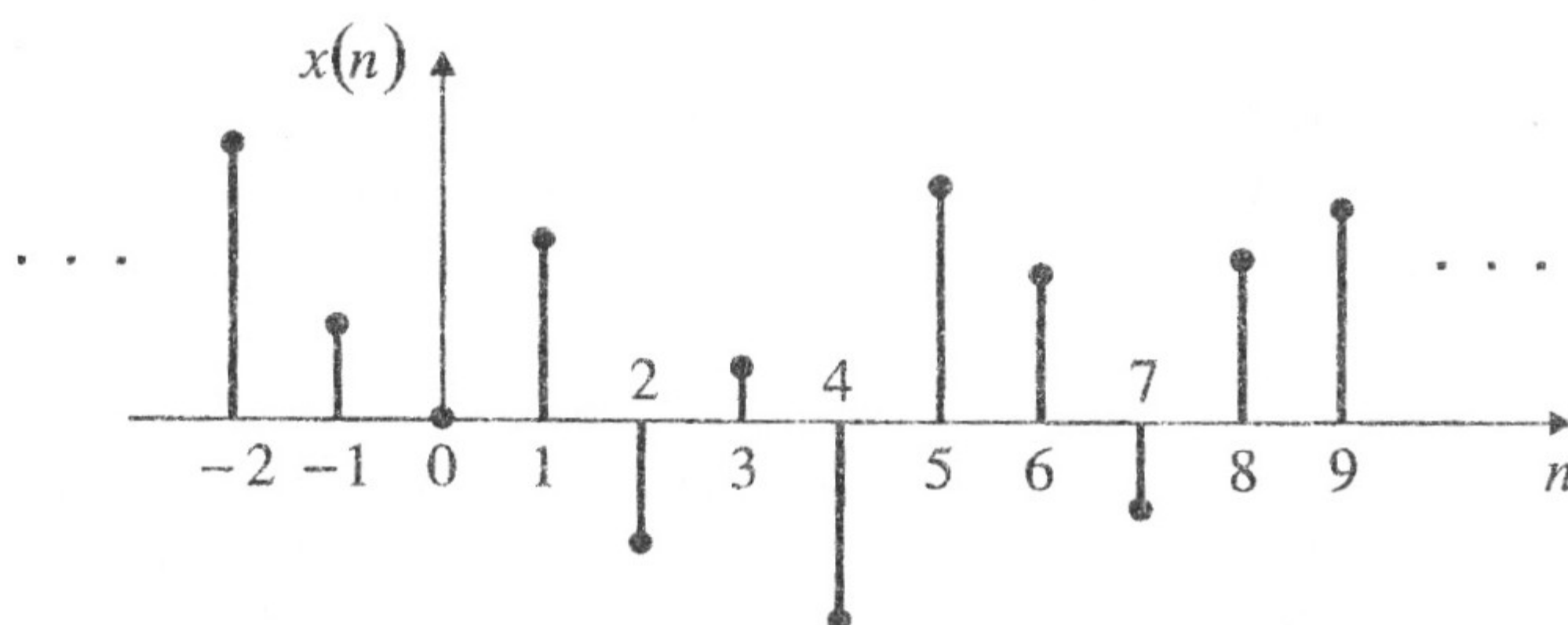


Рис. 1.1. Графическое представление сигнала дискретного времени

В некоторых ситуациях удобнее рассматривать сигнал $x(n)$ как вектор, определенный значениями от $x(0)$ до $x(N-1)$:

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)].$$

Сигналы дискретного времени наиболее часто получаются путем дискретизации сигналов непрерывного времени, например, речи, с помощью аналого-цифрового преобразования. Существуют также и сигналы, изначально определенные уже в цифровой форме, такие как курсы валют, котировки акций, статистика населения в заданном регионе, показатели солнечной активности и др.

1.1.1. Комплексные последовательности

Во многих важных приложениях, например, в области телекоммуникаций, используются сигналы, заданные в виде комплексных последовательностей. Такие сигналы могут быть выражены через действительную и мнимую части:

$$z(n) = a(n) + jb(n) = \operatorname{Re}\{z(n)\} + j \operatorname{Im}\{z(n)\}$$

или в полярных координатах с использованием понятий «амплитуда» и «фаза»:

$$z(n) = |z(n)| \exp[j \arg\{z(n)\}].$$

Амплитуда и фаза выражаются через действительную и мнимую части следующим образом:

$$|z(n)|^2 = \operatorname{Re}^2\{z(n)\} + \operatorname{Im}^2\{z(n)\},$$

$$\arg\{z(n)\} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{z(n)\}}{\operatorname{Re}\{z(n)\}}.$$

Комплексно-сопряженная для $z(n)$ последовательность обозначается, как $z^*(n)$ и получается путем изменения знака у мнимой части:

$$z^*(n) = \operatorname{Re}\{z(n)\} - j \operatorname{Im}\{z(n)\} = |z(n)| \exp[-j \arg\{z(n)\}].$$

1.1.2. Периодические и непериодические последовательности

Определение 1.1. Сигнал $x(n)$ называется **периодическим**, если существует такое положительное целое число N (период сигнала), что

$$x(n) = x(n + N), \quad \forall n.$$

Если указанное условие не выполняется при любом целом N – последовательность $x(n)$ является **непериодической**.

Если последовательность $x_1(n)$ имеет период N_1 , а последовательность $x_2(n)$ имеет период N_2 , то их сумма $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ является периодической последовательностью и имеет период:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\operatorname{НОД}(N_1, N_2)},$$

где $\operatorname{НОД}(N_1, N_2)$ – наибольший общий делитель N_1 и N_2 .

Аналогичное утверждение справедливо и для произведения двух периодических последовательностей $x(n) = x_1(n)x_2(n)$.

Пример 1.1

Сигналы $x_1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ и $x_2(n) = \cos(n^2)$ являются

непериодическими. Сигнал $x_3(n) = e^{j\pi n/8}$ является периодическим и имеет период $N = 16$.

1.1.3. Симметричные последовательности

Определение 1.2. Вещественный сигнал называется **четным**, если $\forall n: x(n) = x(-n)$, и **нечетным**, если $\forall n: x(n) = -x(-n)$.

Произвольный вещественный сигнал $x(n)$ может быть разложен на сумму своих четной и нечетной составляющих:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n),$$

где $x_e(n) = \frac{1}{2}\{x(n) + x(-n)\}$, $x_o(n) = \frac{1}{2}\{x(n) - x(-n)\}$.

Определение 1.3. Комплексный сигнал называется **сопряженно симметричным**, если $\forall n$:

$$x(n) = x^*(-n)$$

и соответственно сигнал называется **сопряженно асимметричным**, если

$$x(n) = -x^*(-n).$$

Любой комплексный сигнал может быть представлен в виде суммы сопряженно симметричной и сопряженно асимметричной составляющих.

1.1.4. Некоторые фундаментальные последовательности

а) Цифровой единичный импульс:

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Произвольный сигнал может быть выражен в виде суммы взвешенных и сдвинутых единичных импульсов следующим образом:

$$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + \\ + x(2)\delta(n-2) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

б) Единичный скачок:

$$x(n) = 1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Заметим, что единичный импульс может быть представлен как разность двух единичных скачков:

$$\delta(n) = 1(n) - 1(n-1).$$

в) Показательная последовательность

$$x(n) = a^n.$$

г) Комплексная экспонента

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(n\omega) + j \sin(n\omega).$$

1.2. Системы дискретного времени

1.2.1. Общие положения

Система дискретного времени есть оператор или отображение, трансформирующее один сигнал (вход) в другой сигнал (выход) с помощью заданного набора правил и операций. Обозначение $T[\cdot]$ используется для представления системы, преобразующей входной сигнал $x(n)$ в выходной сигнал $y(n)$, как это показано на рис. 1.2.

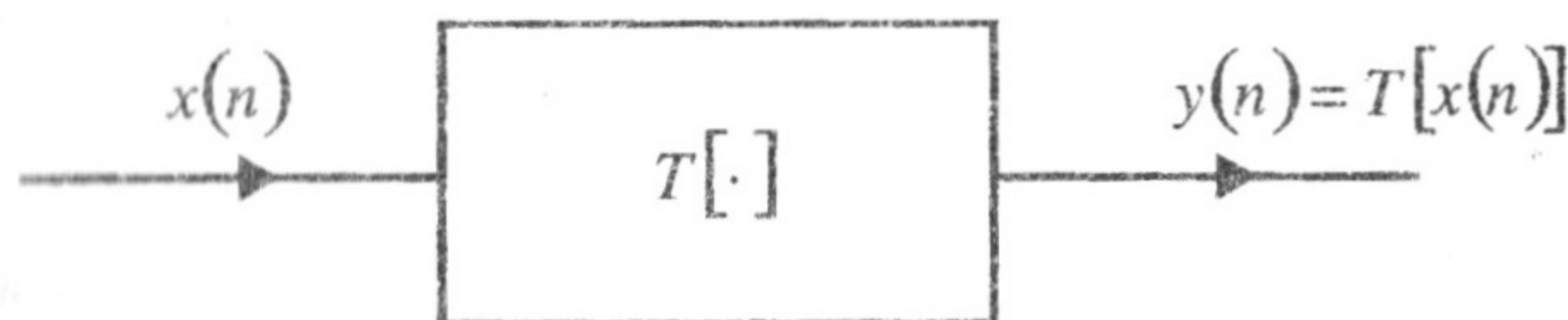


Рис. 1.2. Представление системы дискретного времени

Связь между входом и выходом системы может, например, быть выражена аналитически как

$$y(n) = x^2(n) \quad \text{или} \quad y(n) = 0.5y(n-1) + x(n).$$

Также возможно описание системы через некоторый алгоритм описывающий последовательность инструкций и операций, которые должны быть применены к входному сигналу:

$$y_1(n) = 0.5y_1(n-1) + 0.25x(n),$$

$$y_2(n) = 0.25y_2(n-1) + 0.5x(n),$$

$$y_3(n) = 0.4y_3(n-1) + 0.5x(n),$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n).$$

В некоторых случаях удобно также представлять систему в виде таблицы, которая определяет набор отображений вход-выход, представляющих практический интерес.

1.2.2. Свойства систем

Системы с памятью и без памяти

Система дискретного времени является системой без памяти, если ее выход в момент $n = n_0$ зависит только от входа при $n = n_0$.

Пример 1.2

Система $y(n) = x^2(n)$ является системой без памяти, а система $y(n) = x(n) + x(n-1)$ является системой с памятью, так как ее отклик в момент n_0 будет зависеть от входных сигналов в моменты n_0 и $n_0 - 1$.

Аддитивность

Система является аддитивной, если

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$

для произвольных сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

Гомогенность

Система является гомогенной, если

$$T[cx(n)] = cT[x(n)]$$

для любой комплексной константы c и любой входной последовательности $x(n)$.

Пример 1.3

Система $y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}$ не является аддитивной, так как выражение

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = \frac{(x_1(n) + x_2(n))^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)}$$

не эквивалентно

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}.$$

Данная система является гомогенной, так как для входного сигнала $cx(n)$ выход есть:

$$T[cx(n)] = \frac{(cx(n))^2}{cx(n-1)} = c \frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT[x(n)].$$

Пример 1.4

Система, описываемая уравнением $y(n) = x(n) + x^*(n-1)$, является аддитивной, так как

$$\begin{aligned} [x_1(n) + x_2(n)] + [x_1(n-1) + x_2(n-1)]^* &= \\ &= [x_1(n) + x_1^*(n-1)] + [x_2(n) + x_2^*(n-1)]. \end{aligned}$$

Эта система не является гомогенной, так как

$$T[cx(n)] = cx(n) + c^* x^*(n-1),$$

что не эквивалентно

$$cT[x(n)] = cx(n) + cx^*(n-1).$$

Линейность

Система, являющаяся одновременно аддитивной и гомогенной, называется линейной. Другими словами, система является линейной, если

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

для любых входных сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$ и любых комплексных констант a_1 и a_2 .

Инвариантность к сдвигу

Пусть $y(n)$ есть отклик системы на произвольный вход $x(n)$. Система будет являться инвариантной к сдвигу, если для любой задержки n_0 , отклик на $x(n - n_0)$ будет $y(n - n_0)$.

Инвариантность к сдвигу означает неизменность свойств и характеристик системы с течением времени.

Линейные инвариантные к сдвигу системы

Система, являющаяся одновременно линейной и инвариантной к сдвигу, называется линейной инвариантной к сдвигу (ЛИС) системой.

Важными, с точки зрения теоретического описания, являются понятия импульсной и переходной характеристик системы дискретного времени. Здесь нужно отметить, что изначально понятие импульсной и переходной характеристик вводится для описания ЛИС-систем.

Определение 1.4. Импульсной характеристикой системы $y(n) = h(n)$ называется ее реакция на воздействие цифрового единичного импульса $x(n) = \delta(n)$.

Определение 1.5. Переходной характеристикой системы $y(n) = g(n)$ называется ее реакция на воздействие единичного скачка $x(n) = 1(n)$.

Если $h(n)$ есть отклик ЛИС-системы на единичный импульс $\delta(n)$, то можно показать, что

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) записывается так же, как $y(n) = x(n) \otimes h(n)$, где \otimes обозначает оператор свертки.

Последовательность $h(n)$ полностью определяет все характеристики ЛИС-системы.

Каузальность

Система является каузальной (физически реализуемой), если для любых n_0 отклик системы в момент времени $n = n_0$ зависит только от отсчетов входной последовательности с номерами $n \leq n_0$.

Пример 1.5

Система, описываемая уравнением $y(n) = x(n) + x(n-1)$, является каузальной, так как выход в момент времени $n = n_0$ зависит только от входа в момент n_0 и $n_0 - 1$. Система, описываемая уравнением $y(n) = x(n) + x(n+1)$, является некаузальной, так как выход в момент времени $n = n_0$ зависит от входного отсчета в момент времени $n_0 + 1$.

Устойчивость

Линейная система называется устойчивой, если при любой ограниченной входной последовательности выходная последовательность также ограничена.

Другими словами, при выполнении условия

$$|x(n)| \leq A < \infty$$

должно выполняться условие

$$|y(n)| \leq B < \infty.$$

Системы, удовлетворяющие такому условию, называются устойчивыми в смысле ОВОВ (ограниченный вход – ограниченный выход). Необходимым и достаточным условием устойчивости цепи является следующее требование к ее импульсной характеристике:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Обратимость

Система является обратимой, если вход системы может быть однозначно определен по ее выходу. Следовательно, для такой системы различные входные воздействия должны производить различные выходы, т.е. $\forall x_1(n) \neq x_2(n)$ должно выполняться условие $y_1(n) \neq y_2(n)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Определить, являются ли сигналы периодическими. В случае положительного ответа вычислить период сигнала.

$$\text{а) } x(n) = \cos(0.125\pi n);$$

$$\text{б) } x(n) = \operatorname{Re}\{e^{jn\pi/12}\} + \operatorname{Im}\{e^{jn\pi/18}\};$$

$$\text{в) } x(n) = \sin(\pi + 0.2n);$$

$$\text{г) } x(n) = e^{j\frac{\pi}{16}n} \cos(n\pi/17);$$

$$\text{д) } x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

1.2. Определить, какие из представленных систем являются гомогенными, какие аддитивными, а какие линейными:

$$\text{а) } y(n) = \log(x(n));$$

$$\text{б) } y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1;$$

$$\text{в) } y(n) = 6x(n) + [x(n+1)x(n-1)]/x(n);$$

$$\text{г) } y(n) = x(n) \sin(n\pi/2);$$

$$\text{д) } y(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\};$$

$$\text{е) } y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)].$$

1.3. Какие из следующих систем являются каузальными?

$$\text{а) } y(n) = x^2(n)1(n);$$

$$\text{б) } y(n) = x(|n|);$$

$$\text{в) } y(n) = x(n) + x(n-3) + x(n-10);$$

$$\text{г) } y(n) = x(n) - x(n^2 - n);$$

$$\text{д) } y(n) = \prod_{k=1}^N x(n-k);$$

$$\text{е) } y(n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(n-k).$$

1.4. Определите, какие из следующих систем устойчивы:

а) $y(n) = x^2(n)$;

б) $y(n) = e^{x(n)} / x(n-1)$;

в) $y(n) = \cos(x(n))$;

г) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$;

д) $y(n) = \log(1 + |x(n)|)$;

е) $y(n) = x(n) \otimes \cos(n\pi/8)$.

1.5. Определите, какие из следующих систем обратимы:

а) $y(n) = 2x(n)$;

б) $y(n) = nx(n)$;

в) $y(n) = x(n) - x(n-1)$;

г) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$;

д) $y(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\}$.

1.6. Для каждой из систем определить, является ли она линейной или нелинейной, инвариантной к сдвигу или не инвариантной к сдвигу, устойчивой или неустойчивой, каузальной или некаузальной, обратимой или необратимой.

а) $y(n) = x(n) + x(-n)$;

б) $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$;

в) $y(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$;

г) $y(n) = \log\{x(n)\}$;

д) $y(n) = \operatorname{median}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$.

Здесь median — это медиана последовательности $x(n-1), x(n), x(n+1)$, то есть средний по значению член ряда,

получающегося при упорядочивании последовательности по возрастанию.

1.7. Рассмотрим каскадное (последовательное) соединение двух систем S_1 и S_2 , как показано на рис. 1.3.

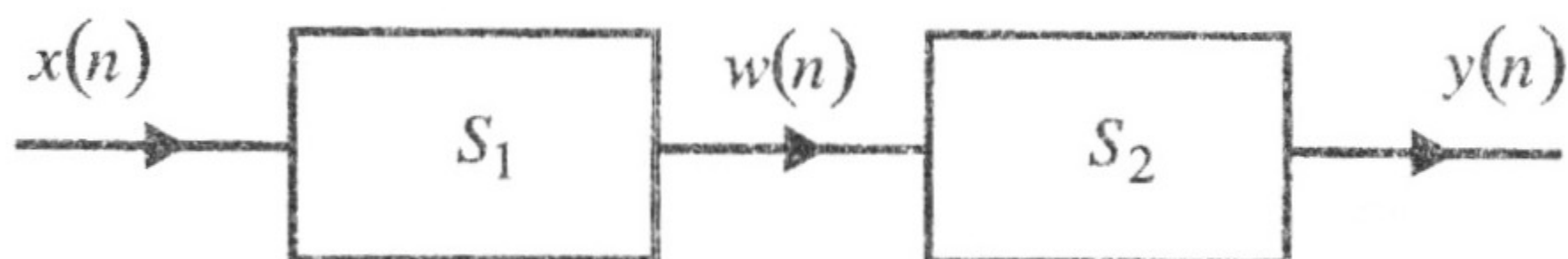


Рис. 1.3. Каскадное соединение двух систем

а) Если обе системы S_1 и S_2 линейные инвариантные к сдвигу, устойчивые и каузальные, будет ли каскадное соединение этих систем линейным инвариантным к сдвигу, устойчивым и каузальным?

б) Если обе системы S_1 и S_2 нелинейные, будет ли каскадное соединение этих систем нелинейным?

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

2.1. Свертка

Взаимосвязь между входной последовательностью ЛИС-системы $x(n)$, ее импульсной характеристикой $h(n)$ и выходом $y(n)$ определяется выражением типа «свертка»:

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (2.1)$$

Поскольку операция свертки является фундаментальной для описания ЛИС-систем, ниже будут рассмотрены ее свойства, а также подробно раскрыт механизм вычисления выражения (2.1).

2.1.1. Свойства свертки

Операция свертки является линейной и обладает набором важных свойств, таких как коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность.

Коммутативность

Свойство коммутативности означает, что порядок последовательностей, входящих в выражение (2.1), не является важным:

$$x(n) \otimes h(n) = h(n) \otimes x(n).$$

Из этого выражения следует, что система с входной последовательностью $x(n)$ и импульсной характеристикой $h(n)$ ведет себя так же, как и система с входной последовательностью $h(n)$ и импульсной характеристикой $x(n)$, что проиллюстрировано на рис. 2.1а.

Ассоциативность

Оператор свертки удовлетворяет свойству ассоциативности:

$$\{x(n) \otimes h_1(n)\} \otimes h_2(n) = x(n) \otimes \{h_1(n) \otimes h_2(n)\}.$$

Это означает, что каскадное (последовательное) соединение двух систем с импульсными характеристиками $h_1(n)$ и $h_2(n)$, как показано на рис. 2.1б, эквивалентно системе с импульсной характеристикой:

$$h_{\text{экв}}(n) = h_1(n) \otimes h_2(n).$$

Дистрибутивность

Свойство дистрибутивности формулируется следующим образом,

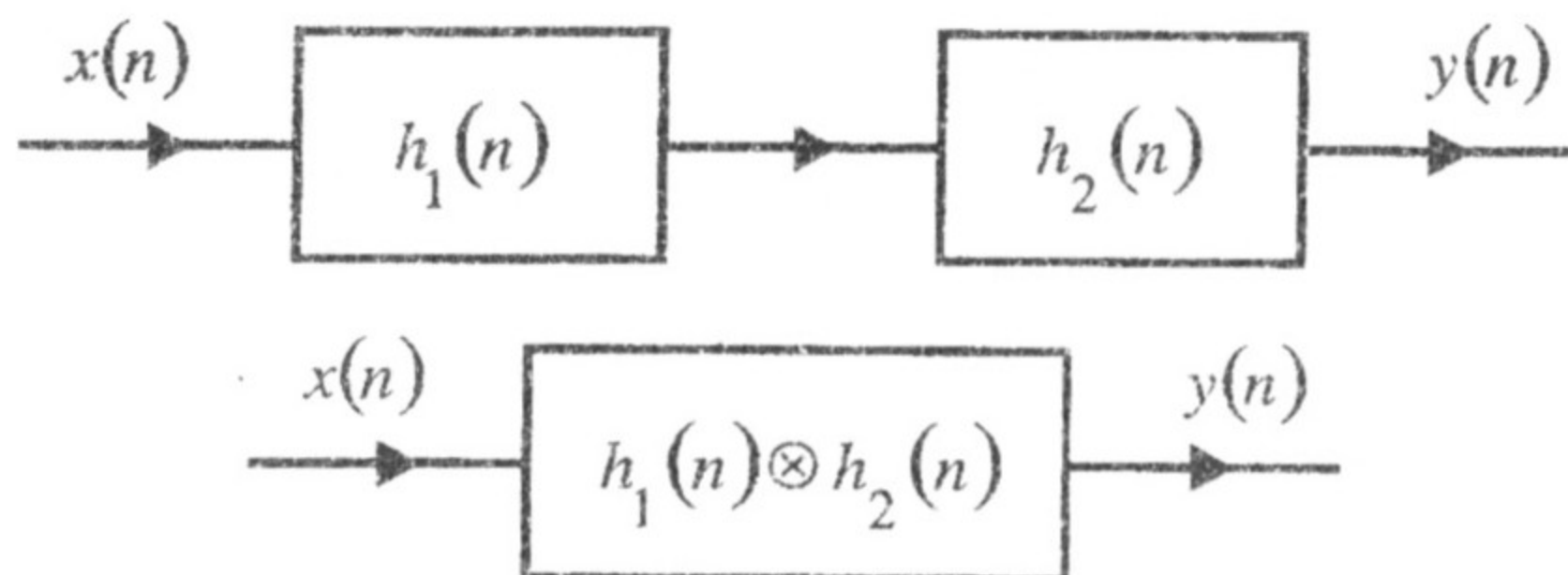
$$x(n) \otimes \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) \otimes h_1(n) + x(n) \otimes h_2(n).$$

Из этого выражения следует, что параллельное соединение двух систем с импульсными характеристиками $h_1(n)$ и $h_2(n)$, как показано на рис. 2.1в, эквивалентно системе с импульсной характеристикой:

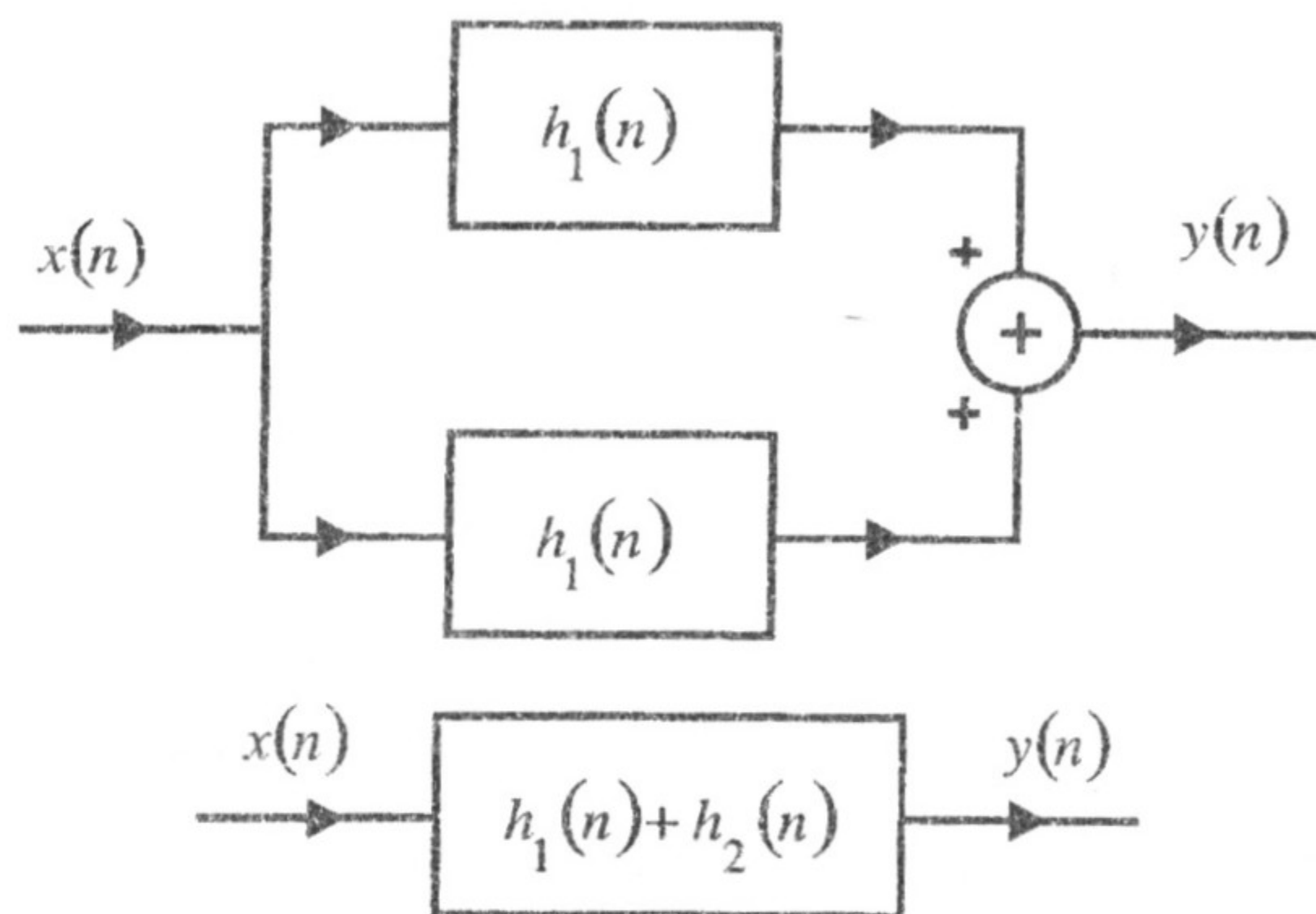
$$h_{\text{экв}}(n) = h_1(n) + h_2(n).$$



а) Свойство коммутативности



б) Свойство ассоциативности



в) Свойство дистрибутивности

Рис. 2.1. Иллюстрация свойств свертки

2.1.2. Прямое вычисление свертки

В случае, когда последовательности заданы аналитически, свертка может быть посчитана непосредственным использованием выражения (2.1). В этом случае полезно использовать выражения для суммирования конечных и бесконечных последовательностей вида α^n и $n\alpha^n$. Наиболее часто используемые из них сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Выражения для суммирования некоторых последовательностей

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$

Пример 2.1

Вычислить свертку последовательностей:

$$x(n) = a^n 1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

и

$$h(n) = 1(n).$$

Используя выражение (2.1), получаем:

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k 1(k)1(n-k).$$

Поскольку $1(k) = 0$ для $k < 0$, а $1(n-k) = 0$ для $k > n$, получаем, что при $n < 0$ все слагаемые равны 0 и $y(n) = 0$. В то же время, если $n \geq 0$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} 1(n).$$

2.1.3. Численный метод вычисления свертки

Численные методы вычисления свертки удобны, когда последовательности $x(n)$ и $h(n)$ содержат относительно небольшое количество отсчетов. В этом случае возможен, например, следующий алгоритм действий.

1. Записать отсчеты последовательностей $x(k)$ и $h(-k)$ на различных листах бумаги, как показано на рис. 2.2, совместив при этом отсчеты $x(0)$ и $h(0)$.

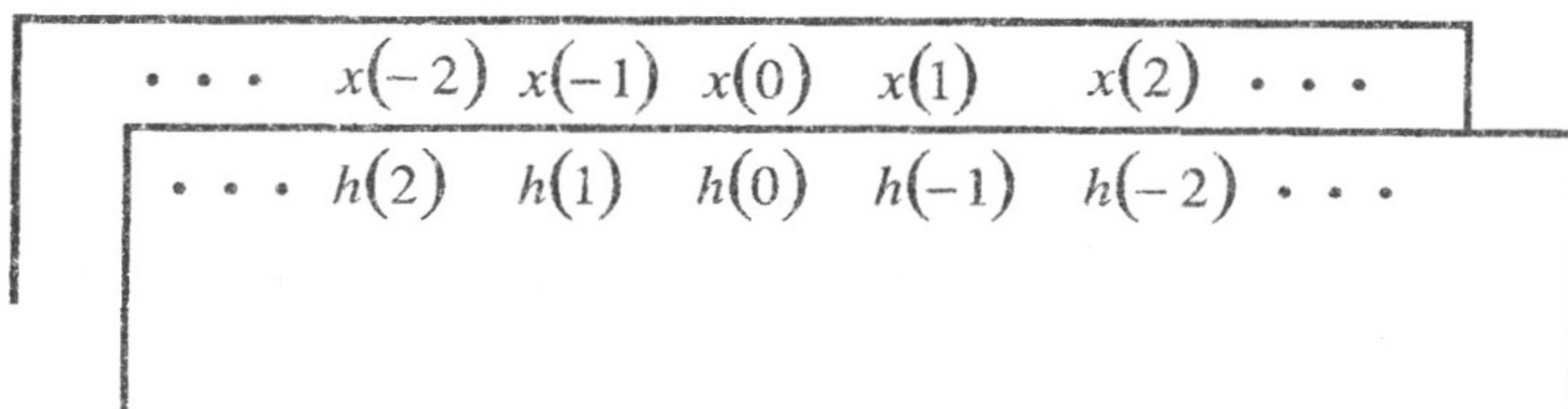


Рис. 2.2. Численный метод вычисления свертки

2. Произвести попарное перемножение чисел и просуммировать результаты. Полученное в итоге число есть $y(0)$.

3. Сдвинуть нижнюю последовательность вправо на один отсчет. Произвести аналогичные операции умножения и сложения для получения отсчета $y(1)$. Повторить действия для получения отсчетов выходной последовательности при $n > 0$.

4. Вернуться к исходному расположению последовательностей, показанному на рис. 2.2. Сдвинуть нижнюю последовательность влево на один отсчет. Произвести аналогичные операции умножения и сложения для получения отсчета $y(-1)$. Повторить действия для получения остальных отсчетов выходной последовательности при $n < 0$.

Важными для практического вычисления свертки являются следующие два свойства:

Свойство 1. Если две последовательности конечной длины имеют L_1 и L_2 отсчетов соответственно, то их свертка имеет длительность:

$$L = L_1 + L_2 - 1.$$

Свойство 2. Если ненулевые отсчеты последовательности $x(n)$ заключены в интервале $[M_x, N_x]$, а ненулевые отсчеты последовательности $h(n)$ – на интервале $[M_h, N_h]$, то ненулевые отсчеты последовательности $y(n) = x(n) \otimes h(n)$ будут сосредоточены на интервале $[M_x + M_h, N_x + N_h]$.

Пример 2.2

Вычислить свертку следующих последовательностей:

$$x(1) = x(2) = x(3) = 1;$$

$$h(-1) = 1, h(0) = 2, h(1) = 3.$$

Согласно свойству 2, получаемая последовательность $y(n)$ будет иметь пять ненулевых отсчетов при $0 \leq n \leq 4$. Вычислим их, используя описанный выше алгоритм.

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x(k)$	0	0	1	1	1	0	0
$h(-k)$	3	2	1	0	0	0	0

Записав последовательности $x(k)$ и $h(-k)$ друг под другом и совместив отсчеты $x(0)$ и $h(0)$, вычисляем $y(0) = 1$. Сдвигая последовательность $h(-k)$ вправо на один отсчет, имеем:

$x(k)$	0	0	1	1	1	0	0
$h(-k)$	0	3	2	1	0	0	0

$$y(1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Аналогично вычисляем: $y(2) = 6$, $y(3) = 5$, $y(4) = 3$.

2.2. Разностные уравнения

2.2.1. Основные определения

Свертка выражает выходной сигнал ЛИС-системы в виде линейных комбинаций входного сигнала $x(n)$. Например, система,

которая характеризуется импульсной характеристикой вида $h(n) = a^n 1(n)$, описывается выражением

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(n-k). \quad (2.2)$$

Однако, хотя выражение (2.2) и позволяет вычислить выходной сигнал $y(n)$ для произвольного входного сигнала $x(n)$, с вычислительной точки зрения такое представление не является эффективным. Во многих случаях более удобно выразить выходной сигнал в виде суммы текущего и предыдущих значений входной последовательности и предыдущих значений выходного сигнала. Так, например, рассматриваемая система может быть представлена следующим образом:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n). \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) представляет собой *линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами*. Общая форма записи данного класса разностных уравнений имеет вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k), \quad (2.4)$$

где коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ являются константами, определяющими свойства системы.

Определение 2.1. Если хотя бы один из коэффициентов $a(k)$ в уравнении (2.4) отличен от нуля, то разностное уравнение называется *рекурсивным*. В противном случае уравнение является *нерекурсивным*.

Таким образом, уравнение (2.3) является примером рекурсивного разностного уравнения первого порядка, в то время как выражение (2.2) представляет собой нерекурсивное разностное уравнение бесконечного порядка.

Разностные уравнения предоставляют метод вычисления отклика системы — $y(n)$ на произвольное входное воздействие — $x(n)$. Для решения уравнений типа (2.4) должно быть задано множество *начальных условий*. Например, для входной последовательности $x(n)$, определенной при $n \geq 0$, решение уравнения (2.4) в момент времени $n = 0$ зависит от величин $y(-1), \dots, y(-p)$. Следовательно, соответствующие начальные условия должны быть заданы до решения разностного уравнения при $n \geq 0$.

Для ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (2.4), импульсная характеристика $h(n)$ может быть найдена путем решения разностного уравнения при $x(n) = \delta(n)$. Для нерекурсивной системы все $a(k)$ равны нулю и уравнение (2.4) принимает вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k). \quad (2.5)$$

В этом случае импульсная характеристика системы принимает вид:

$$h(n) = \sum_{k=0}^q b(k)\delta(n-k). \quad (2.6)$$

Определение 2.2. Система, импульсная характеристика которой представляется выражением (2.6), называется системой с конечной импульсной характеристикой (КИХ-системой).

Определение 2.3. Система, импульсная характеристика которой имеет бесконечную длину, называется системой с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системой).

2.2.2. Метод решения разностных уравнений с использованием общего и частного решений

Общее решение линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами состоит из суммы двух частей:

$$y(n) = y_o(n) + y_q(n), \quad (2.7)$$

где $y_o(n)$ – общее решение, а $y_q(n)$ – частное решение. Общее решение – это отклик системы на начальные условия, в предположении, что входное воздействие $x(n) = 0$. Частное решение – это отклик системы на входное воздействие $x(n)$ при нулевых начальных условиях.

Общее решение определяется через решение однородного разностного уравнения вида:

$$y(n) + \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) = 0. \quad (2.8)$$

Решение ищется в виде:

$$y_q(n) = \lambda^n.$$

Подставляя его в (2.8), получаем полиномиальное уравнение

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^p a(k) \lambda^{n-k} = 0,$$

или

$$\lambda^{n-p} \{ \lambda^p + a(1) \lambda^{p-1} + a(2) \lambda^{p-2} + \dots + a(p-1) \lambda + a(p) \} = 0.$$

Полином, находящийся в скобках, называется характеристическим. Так как его степень равна p , то он имеет p корней, которые могут быть как действительными, так и комплексными. Если коэффициенты $a(k)$ являются действительными, то корни являются комплексно-сопряженными, то есть для каждого комплексного корня λ_i существует λ_i^* . Если p корней λ_i различны, то есть $\lambda_i \neq \lambda_k$ для $k \neq i$, то общее решение однородного разностного уравнения будет представлено в следующем виде:

$$y_o(n) = \sum_{k=0}^p A_k \lambda_k^n, \quad (2.9)$$

где константы A_k определяются исходя из начальных условий. Для совпадающих корней решение (2.9) может быть модифицировано следующим образом. Если λ_1 — корень кратности m характеристического полинома степени p с $(p-m)$ различными корнями, то общее решение принимает вид:

$$y_o(n) = (A_1 + A_2 n + \dots + A_m n^{m-1}) \lambda_1^n + \sum_{k=m+1}^p A_k \lambda_k^n. \quad (2.10)$$

Для поиска частного решения необходимо найти последовательность $y_q(n)$, которая соответствует разностному уравнению для заданной входной последовательности $x(n)$. Во многих случаях данная последовательность будет иметь ту же форму, что и входной сигнал.

В табл. 2.2 приведены типы частных решений для некоторых входных последовательностей. Например, если $x(n) = a^n l(n)$, то частное решение будет иметь вид $y_q(n) = C a^n l(n)$, где a не является корнем характеристического уравнения. Константа C находится в результате подстановки решения в исходное разностное уравнение.

Таблица 2.2

Частные решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами для некоторых входных последовательностей

Входная последовательность $x(n)$	Частное решение
C	C_1
Cn	$C_1n + C_2$
Ca^n	C_1a^n
$C \cos(n\omega_0)$	$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2 \sin(n\omega_0)$
$C \sin(n\omega_0)$	$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2 \sin(n\omega_0)$
$Ca^n \cos(n\omega_0)$	$C_1a^n \cos(n\omega_0) + C_2a^n \sin(n\omega_0)$
$C\delta(n)$	нет

Пример 2.3

Найти решение разностного уравнения

$$y(n) - b_1 y(n) = 1(n), \quad (2.11)$$

с начальным условием $y(-1) = 0$.

Решение будем искать в виде

$$y(n) = y_o(n) + y_q(n),$$

где $y_o(n)$ – общее, а $y_q(n)$ – частное решения.

Вначале найдем общее решение

$$y_o(n) - b_1 y_o(n) = 0. \quad (2.12)$$

Так как характеристическое уравнение для (2.12) имеет вид

$$\lambda - b_1 = 0,$$

следовательно, решение (2.12) определяется выражением

$$y_o(n) = A_1 b_1^n. \quad (2.13)$$

Найдем частное решение в виде

$$y_q(n) = C_1. \quad (2.14)$$

Для нахождения константы C_1 подставим (2.14) в (2.11), получим

$$y_q(n) = \frac{1}{1-b_1}. \quad (2.15)$$

В результате решение разностного уравнения (2.11) примет следующий вид:

$$y(n) = A_1 b_1^n + \frac{1}{1-b_1}.$$

Константа A_1 находится с использованием начального условия $y(-1) = 0$. С учетом этого окончательно получим

$$y(n) = \frac{1-b_1^{n+1}}{1-b_1} 1(n).$$

Отметим, что на практике также встречаются нелинейные разностные уравнения и уравнения с переменными коэффициентами. Так, например, система, которая вычисляет среднее значение сигнала $x(n)$ на интервале $[0, n]$, определяется следующим выражением:

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k), \quad n \geq 0.$$

Она может быть представлена разностным уравнением с переменными коэффициентами:

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + x(n), \quad n \geq 0.$$

Хотя решение нелинейных разностных уравнений и разностных уравнений с переменными коэффициентами является достаточно сложной задачей, такие уравнения имеют важное практическое значение и находят широкое применение в современных задачах обработки дискретных сигналов.

2.3. Z-преобразование

Z-преобразование – полезный инструмент для анализа дискретных сигналов и систем, которое является дискретным аналогом преобразования Лапласа, применяемого в непрерывном случае.

Z-преобразование может быть использовано для решения разностных уравнений с постоянными коэффициентами, нахождения отклика ЛИС-системы на входное воздействие, синтеза линейных цифровых фильтров.

Определение 2.4. Z-преобразование последовательности $x(n)$, заданной при всех n , определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (2.16)$$

где z — комплексная переменная.

Таблица 2.3

Z-преобразование некоторых последовательностей

Последовательность	Z-преобразование	Область сходимости
$\delta(n)$	1	все z
$\alpha^n l(n)$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n l(-n-1)$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
$n\alpha^n l(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$-n\alpha^n l(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
$\cos(n\omega_0)l(n)$	$\frac{1 - \cos(n\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(n\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(n\omega_0)l(n)$	$\frac{\sin(n\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(n\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z < 1$

Комплексная функция (2.16) определена лишь для тех значений z , при которых соответствующий степенной ряд сходится. Z-преобразование некоторых последовательностей приведено в табл. 2.3.

Пример 2.4

Найти z -преобразование последовательности $x(n) = \alpha^n 1(n)$.
Используя определение z -преобразования, получим:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

Здесь $X(z)$ сходится при $|z| > |\alpha|$.

2.3.1. Свойства z -преобразования

Z-преобразование обладает важными свойствами, которые могут быть полезны при анализе дискретных сигналов. Некоторые из этих свойств перечислены ниже.

Линейность

Z-преобразование линейно. Это означает, что если $X_1(z)$ и $X_2(z)$ являются z -преобразованиями последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$, то при любых действительных a и b z -преобразование последовательности $ax_1(n) + bx_2(n)$ равно $aX_1(z) + bX_2(z)$.

Задержка

Если последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование $X(z)$, то z -преобразование последовательности $x(n - n_0)$ при любых n_0 равно $z^{-n_0} X(z)$. Это свойство z -преобразования особенно полезно при переходе от представления линейной системы разностным уравнением к представлению ее z -преобразованием и наоборот.

Свертка последовательностей

Если последовательности $x(n)$ и $y(n)$ связаны зависимостью

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = h(n) \otimes x(n),$$

то

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad (2.17)$$

где $X(z)$, $H(z)$ и $Y(z)$ являются соответственно z -преобразованиями последовательностей $x(n)$, $h(n)$ и $y(n)$. Таким образом, операция свертки последовательностей приводит к перемножению их z -преобразований.

Нетрудно заметить, что $H(z)$ можно выразить из соотношения (2.17) в виде

$$H(z) = Y(z)/X(z).$$

Равенство (2.17) важно как практическое средство, позволяющее без вычисления свертки найти выходную последовательность системы по ее импульсной характеристике и входной последовательности.

Пример 2.5

Рассмотрим две последовательности $x(n) = \alpha^n 1(n)$ и $h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$. z -преобразование последовательности $x(n)$ имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|,$$

а z -преобразование последовательности $h(n)$

$$H(z) = 1 - \alpha z^{-1}, \quad 0 < |z|.$$

Тогда z -преобразование свертки двух последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ имеет вид

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} (1 - \alpha z^{-1}) = 1.$$

Область сходимости $Y(z)$ – вся z -плоскость.

Инверсия времени

Если последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование $X(z)$ с областью сходимости $\alpha < |z| < \beta$, то инвертированная по времени последовательность $x(-n)$ имеет z -преобразование $X(z^{-1})$ с областью сходимости $1/\beta < |z| < 1/\alpha$.

Сопряжение

Если последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование $X(z)$, то комплексно сопряженная к ней последовательность $x^*(n)$ имеет z -преобразование $X^*(z^*)$.

Дифференцирование

Если последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование $X(z)$, то z -преобразование последовательности $nx(n)$ равно $-z \frac{dX(z)}{dz}$.

Последовательное применение этого свойства позволяет вычислить z -преобразование последовательности $n^k x(n)$ для целочисленных k .

Пример 2.6

Найти z -преобразование последовательности $x(n) = n\alpha^n 1(n)$.

Согласно примеру 2.4 z -преобразование последовательности $\alpha^n 1(n)$ равно $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$. Тогда согласно свойству инверсии времени z -

преобразование последовательности $\alpha^n 1(-n)$ равно $\frac{1}{1 - \alpha^{-1} z}$, $|z| < |\alpha|$.

Окончательно, используя свойство дифференцирования, получим, что z -преобразование последовательности $x(n)$ имеет вид:

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - \alpha^{-1} z} \right) = -\frac{\alpha^{-1} z}{(1 - \alpha^{-1} z)^2}, \quad |z| < |\alpha|.$$

2.3.2. Обратное z -преобразование

Важно уметь перейти не только от последовательности к ее z -преобразованию, но и обратно от z -преобразования к последовательности. Способ обратного перехода называется обратным z -преобразованием. Ниже рассмотрены три основных способа вычисления обратного z -преобразования.

Метод разложения на элементарные дроби

Для z -преобразования, которое является рациональной функцией переменной z

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}} = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (2.18)$$

простым и эффективным подходом вычисления обратного z -преобразования является метод разложения на элементарные дроби. Предположив, что $p > q$ и корни знаменателя (полюсы) выражения (2.18) являются простыми, то есть $\alpha_i \neq \alpha_k$ при $i \neq k$, можно записать следующее выражение для $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad (2.19)$$

где A_k — некоторые постоянные, которые могут быть найдены путем умножения обеих частей выражения (2.19) на $(1 - \alpha_k z^{-1})$ при $z = \alpha_k$, то есть

$$A_k = \left[(1 - \alpha_k z^{-1}) X(z) \right]_{z=\alpha_k}.$$

Если $p \leq q$, разложение на элементарные дроби должно включать полином порядка $p - q$, записанный относительно z^{-1} . Коэффициенты этого полинома могут быть найдены путем деления числителя $X(z)$ на его знаменатель. Для случая кратных полюсов выражение (2.19) должно быть модифицировано. Например, если $X(z)$ имеет полюс второго порядка $z = \alpha_k$, то разложение на элементарные дроби должно включать следующие слагаемые:

$$\frac{B_1}{1 - \alpha_k z^{-1}} + \frac{B_2}{(1 - \alpha_k z^{-1})^2},$$

где B_1 и B_2 определяются следующим образом:

$$B_1 = \alpha_k \left[\frac{d}{dz} (1 - \alpha_k z^{-1})^2 X(z) \right]_{z=\alpha_k},$$

$$B_2 = \left[(1 - \alpha_k z^{-1})^2 X(z) \right]_{z=\alpha_k}.$$

Метод степенных рядов

Если дано z -преобразование $X(z)$ последовательности $x(n)$, определенной для всех $n \geq 0$, его можно разложить в бесконечный ряд относительно z^{-1} или z путем деления в столбик:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

В этом методе числитель и знаменатель функции $X(z)$ вначале выражаются либо через уменьшающийся показатель степени z , либо через увеличивающийся показатель степени z^{-1} , а затем путем деления в столбик находится частное.

Интегрирование по контуру

В этом методе обратное z -преобразование находится путем вычисления контурного интеграла

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (2.20)$$

где C – контур интегрирования, охватывающий все полюсы функции $X(z)$. Для рациональных многочленов контурный интеграл из выражения (2.20) находится с помощью фундаментального результата теории комплексных переменных, называемого *теоремой Коши о вычетах (теоремой вычетов)*:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz =$$

$$= \text{сумма вычетов } X(z) z^{n-1} \text{ во всех полюсах внутри } C.$$

Если $X(z)$ является рациональной функцией переменной z и $z = \alpha_k$ полюс кратности m , то вычет функции $X(z) z^{n-1}$ в полюсе

$z = \alpha_k$ может быть вычислен с использованием следующего выражения:

$$\text{res}[X(z)z^{n-1}, z = \alpha_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - \alpha_k)^m X(z) z^{n-1} \right]_{z=\alpha_k}.$$

2.3.3. Решение разностных уравнений с использованием одностороннего z -преобразования

Определение 2.8. Z -преобразование последовательности $x(n)$, заданной при $n \geq 0$, определяемое с использованием следующего выражения:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (2.21)$$

где z — комплексная переменная, называется **односторонним z -преобразованием**.

Разностные уравнения обычно определены при $n \geq 0$ и имеют набор начальных условий. Поэтому нетрудно понять, каким образом можно использовать одностороннее z -преобразование для решения таких уравнений.

Общая схема решения разностных уравнений с использованием одностороннего z -преобразования может быть представлена так:

1. Вычисляем одностороннее z -преобразование, от левой и правой части, рассматриваемого разностного уравнения.

2. Используя соотношение, полученное на этапе 1, выражаем z -образ выходной последовательности через z -образ входной последовательности и начальные условия, накладываемые на входную и выходную последовательности чисел.

3. Вычисляем обратное z -преобразование, от левой и правой части выражения, полученного на этапе 2, с использованием наиболее подходящего метода.

Пример 2.7

Рассмотрим разностное уравнение первого порядка

$$y(n) = x(n) - by(n-1)$$

с начальным условием $y(-1) = K$. Пусть $x(n) = e^{j\omega n}$. Чтобы найти одностороннее z -преобразование $y(n)$, умножим обе части уравнения на z^{-n} и просуммируем от 0 до ∞ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - b \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n}.$$

Воспользуемся свойством, связанным с задержкой последовательности. Имеем

$$Y(z) = X(z) - bz^{-1}Y(z) - by(-1),$$

$$Y(z) = \frac{X(z) - by(-1)}{1 + bz^{-1}}.$$

Поскольку

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega}z^{-1}},$$

то

$$Y(z) = \frac{-bK}{1 + bz^{-1}} + \frac{1}{(1 - e^{j\omega}z^{-1})(1 + bz^{-1})}.$$

Вычислим обратное z -преобразование:

$$y(n) = \left(K - \frac{1}{b + e^{j\omega}}\right)(-b)^{n+1} + \frac{e^{j\omega(n+1)}}{b + e^{j\omega}}.$$

2.4. Дискретное преобразование Фурье

2.4.1. Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье

Представление периодической последовательности $x_p(n)$ в виде ряда Фурье содержит N комплексных экспонент и имеет вид:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (2.22)$$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) носит название дискретного преобразования Фурье (ДПФ), а (2.22) – обратного ДПФ.

4.4.3. Свойства дискретного преобразования Фурье

Линейность

Если $x_p(n)$ и $y_p(n)$ – периодические последовательности (с периодом в N отсчетов каждая), а $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ – их ДПФ, то при любых действительных a и b ДПФ последовательности $ax_p(n) + by_p(n)$ равно $aX_p(k) + bY_p(k)$. Это положение справедливо и для последовательности конечной длины.

Сдвиг

Если последовательность $x_p(n)$ периодическая с периодом в N отсчетов, а ее ДПФ равно $X_p(k)$, то ДПФ периодической последовательности вида $x_p(n - n_0)$ будет равно $X_p(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}$.

Симметрия

Если периодическая последовательность $x_p(n)$ с периодом в N отсчетов является действительной, то ее ДПФ $X_p(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\operatorname{Re}[X_p(k)] = \operatorname{Re}[X_p(N - k)], \quad \operatorname{Im}[X_p(k)] = -\operatorname{Im}[X_p(N - k)], \quad (2.24)$$

$$|X_p(k)| = |X_p(N - k)|, \quad \arg[X_p(k)] = -\arg[X_p(N - k)]. \quad (2.25)$$

Следовательно, имеет место симметрия спектра относительно $N/2$. Используя условие симметрии, последовательность $x_p(n)$ можно представить в виде конечной суммы

$$\begin{aligned} x_p(n) = & \frac{1}{N} X_p(0) + \frac{2}{N} |X_p(1)| \cos\left[\frac{2\pi}{N}n + \arg X_p(1)\right] + \\ & + \frac{2}{N} |X_p(2)| \cos\left[\frac{4\pi}{N}n + \arg X_p(2)\right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{N} |X_p(N/2)| \cos\left[\pi n + \arg X_p(N/2)\right]. \end{aligned}$$

Аналогичные равенства справедливы и для конечной действительной последовательности $x(n)$, имеющей N -точечное ДПФ $X(k)$. Если ввести дополнительное условие симметрии последовательности $x_p(n)$, то есть считать, что $x_p(n) = x_p(N-n)$, то окажется, что $X_p(k)$ может быть только действительной.

Поскольку чаще всего приходится иметь дело с действительными последовательностями, то, вычислив одно ДПФ, можно получить ДПФ двух последовательностей, используя свойства симметрии (2.24), (2.25). Рассмотрим действительные периодические последовательности $x_p(n)$ и $y_p(n)$ с периодами в N отсчетов и N -точечными ДПФ $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ соответственно. Введем комплексную последовательность $z_p(n)$ вида

$$z_p(n) = x_p(n) + jy_p(n).$$

ДПФ последовательности $z_p(n)$ имеет вид:

$$Z_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_p(n) + jy_p(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

$$Z_p(k) = X_p(k) + jY_p(k).$$

Выделяя действительную и мнимую части последнего равенства, получим

$$\operatorname{Re}[Z_p(k)] = \operatorname{Re}[X_p(k)] - \operatorname{Im}[Y_p(k)],$$

$$\operatorname{Re}[Z_p(k)] = \operatorname{Im}[X_p(k)] + \operatorname{Re}[Y_p(k)].$$

Действительные части $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ симметричны, а мнимые — антисимметричны, поэтому их легко разделить, используя операции сложения и вычитания

$$\operatorname{Re}[X_p(k)] = \frac{\operatorname{Re}[Z_p(k)] + \operatorname{Re}[Z_p(N-k)]}{2},$$

$$\operatorname{Im}[X_p(k)] = \frac{\operatorname{Im}[Z_p(k)] - \operatorname{Im}[Z_p(N-k)]}{2},$$

$$\operatorname{Re}[Y_p(k)] = \frac{\operatorname{Im}[Z_p(k)] + \operatorname{Im}[Z_p(N-k)]}{2},$$

$$\operatorname{Im}[Y_p(k)] = \frac{-\operatorname{Re}[Z_p(k)] + \operatorname{Re}[Z_p(N-k)]}{2}.$$

Итак, вычисляя одно N -точечное ДПФ $Z_p(k)$, удастся преобразовать сразу две действительные последовательности $x_p(n)$ и $y_p(n)$ длиной по N отсчетов. Если эти последовательности являются чётными и симметричными, то число операций, необходимых для получения ДПФ, можно сократить ещё больше.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Первое ненулевое значение последовательности конечной длины $x(n)$ в точке $n = -6$ равно $x(-6) = 3$, а последнее ненулевое значение в точке $n = 24$ равно $x(24) = -4$. Чему равен индекс n первого ненулевого значения свертки

$$y(n) = x(n) \otimes x(n)$$

и каково это значение? Что вы можете сказать о последнем ненулевом значении?

2. Получите аналитическое выражение для свертки последовательности $x(n)$ с последовательностью $h(n)$, если

$$x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-6} 1(n),$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n 1(n-3).$$

3. Пусть $h(n) = a^n 1(n)$ и $x(n) = b^n 1(n)$. Найдите свертку $y(n) = x(n) \otimes h(n)$, если $a \neq b$.

4. Импульсная характеристика ЛИС-системы равна

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n 1(n).$$

Найдите выход системы, если на её вход подать комплексную экспоненту $x(n) = \exp(jn\pi/4)$.

2.5. Вычислить свертку двух последовательностей конечной длины:

а) $x(n) = 0.5n[1(n) - 1(n-6)],$

$$h(n) = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)[1(n+3) - 1(n-4)];$$

б) $x(n) = \delta(n-2) - 2\delta(n-4) + 3\delta(n-6),$

$$h(n) = 2\delta(n+3) + \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3).$$

2.6. Система записана с помощью разностного уравнения

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0.5x(n) + 0.5(n-1).$$

Найдите отклик этой системы на вход

$$x(n) = (0.5)^n 1(n),$$

при начальных условиях $y(-1) = 0.75$ и $y(-2) = 0.25$.

2.7. Рекурсивная система второго порядка описывается разностным уравнением

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) - x(n-1).$$

а) Найдите импульсную характеристику $h(n)$ системы.

б) Найдите отклик системы на вход $x(n) = 1(n) - 1(n-10)$ при нулевых начальных условиях.

в) Найдите отклик системы на вход $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n)$ при нулевых начальных условиях.

2.8. Система описывается разностным уравнением

$$y(n) = ny(n-1) + x(n).$$

Найдите импульсную характеристику $h(n)$ системы.

2.9. Система описывается разностным уравнением

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n-1).$$

Найдите переходную характеристику $g(n)$ системы.

2.10. Система описывается разностным уравнением

$$y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4x(n).$$

Найдите выход системы, если входное воздействие равно $x(n) = 2 \cdot 1(n) - 3n \cdot 1(n)$, а начальные условия $y(-1) = 2$ и $y(-2) = 1$.

2.11. Система описывается разностным уравнением

$$y(n) - y(n-1) + 0.25y(n-2) = x(n) - 0.25x(n-1).$$

а) Найдите импульсную характеристику $h(n)$ системы.

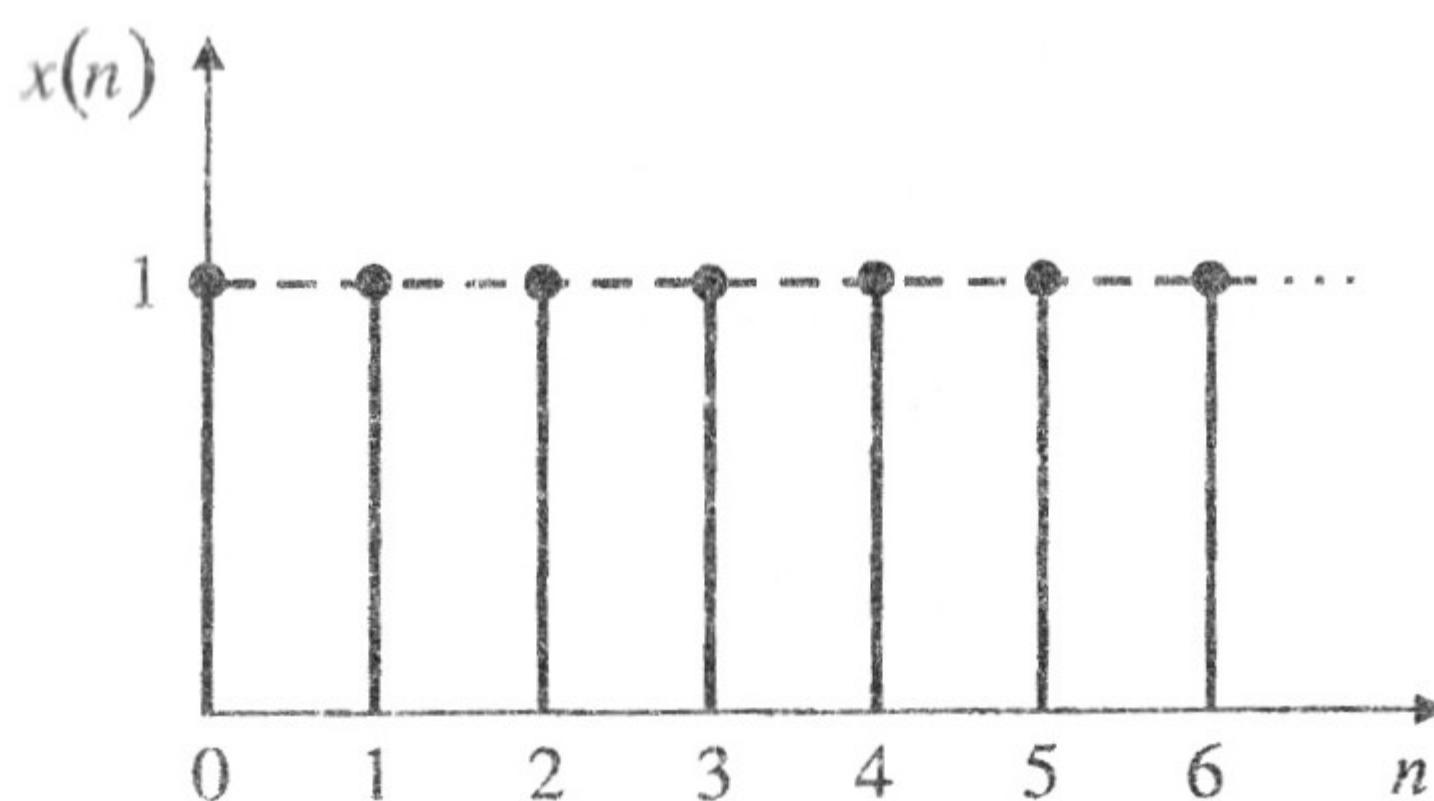
б) Найдите отклик системы на $x(n) = (0.25)^n 1(n)$, при нулевых начальных условиях.

2.12. Каждая вторая частица α в реакторе распадается на восемь частиц β , а каждая частица β – на одну α и две β . Схематически:

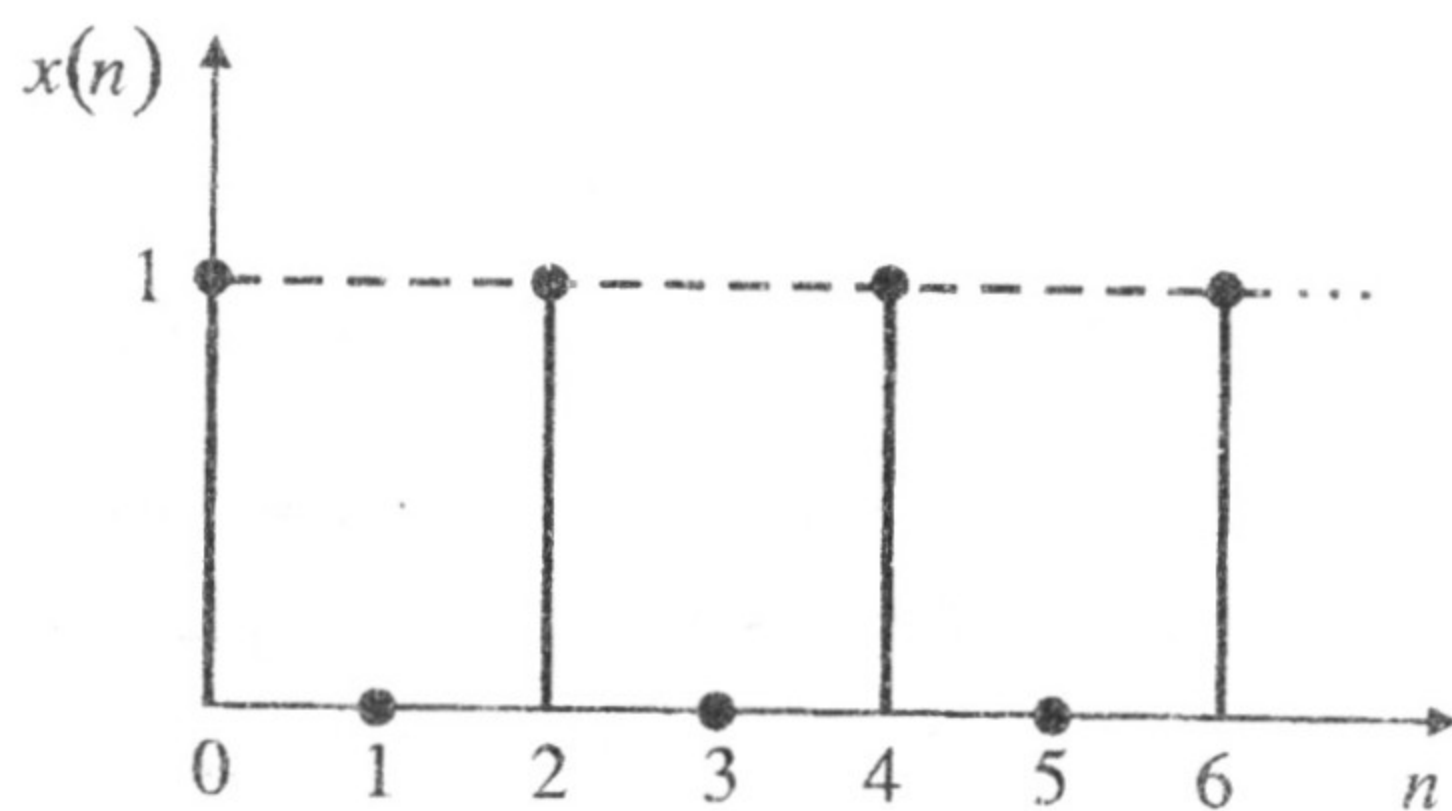
$$\alpha \rightarrow 8\beta, \quad \beta \rightarrow \alpha + 2\beta.$$

Известно, что в момент времени $n = 0$ в реакторе есть одна α частица. Найдите выражение для общего числа частиц в реакторе в дискретный момент времени n .

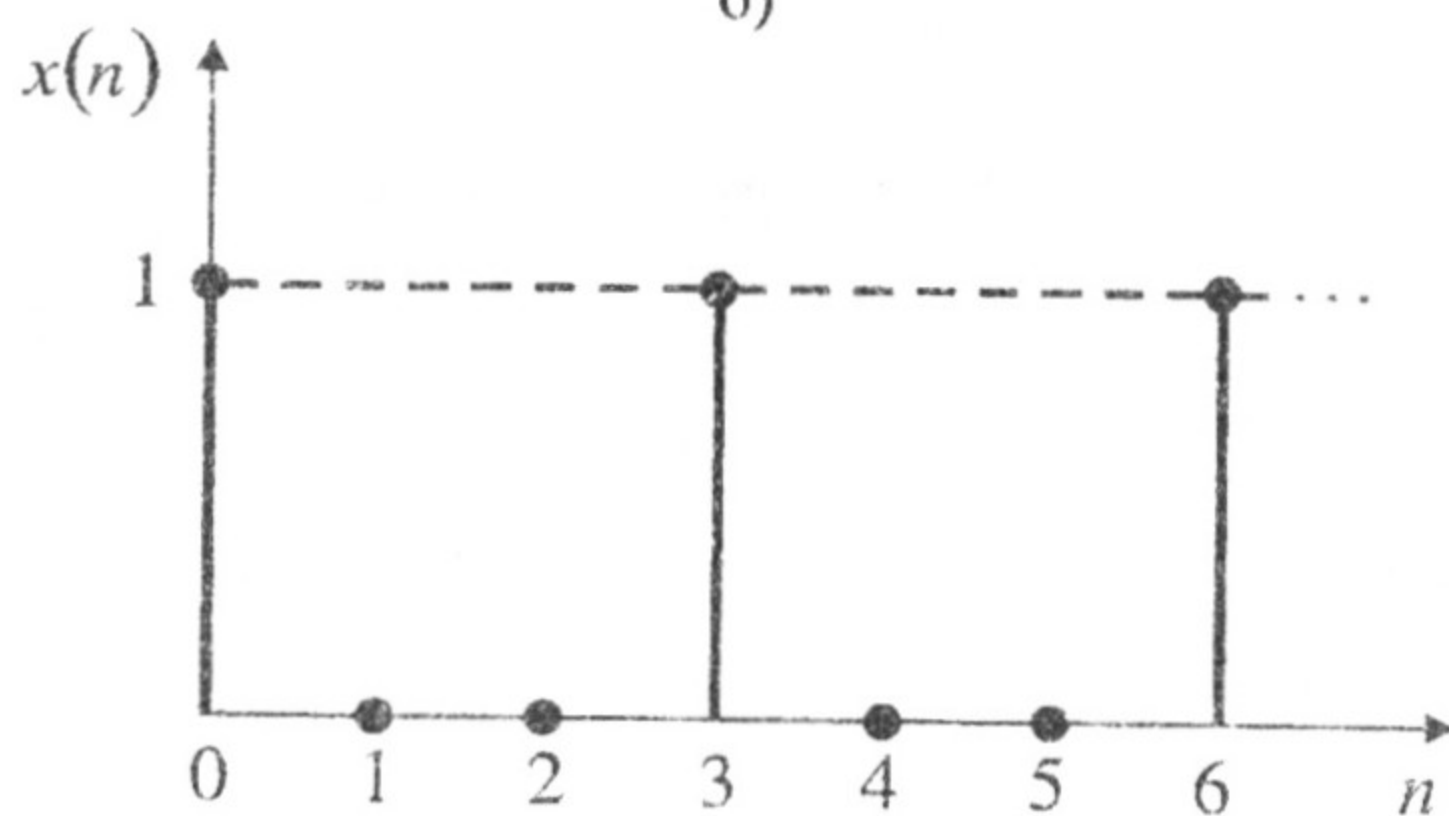
2.13. Даны три бесконечные последовательности, представленные на рис. 2.3. Как связаны между собой их z -преобразования?



а)



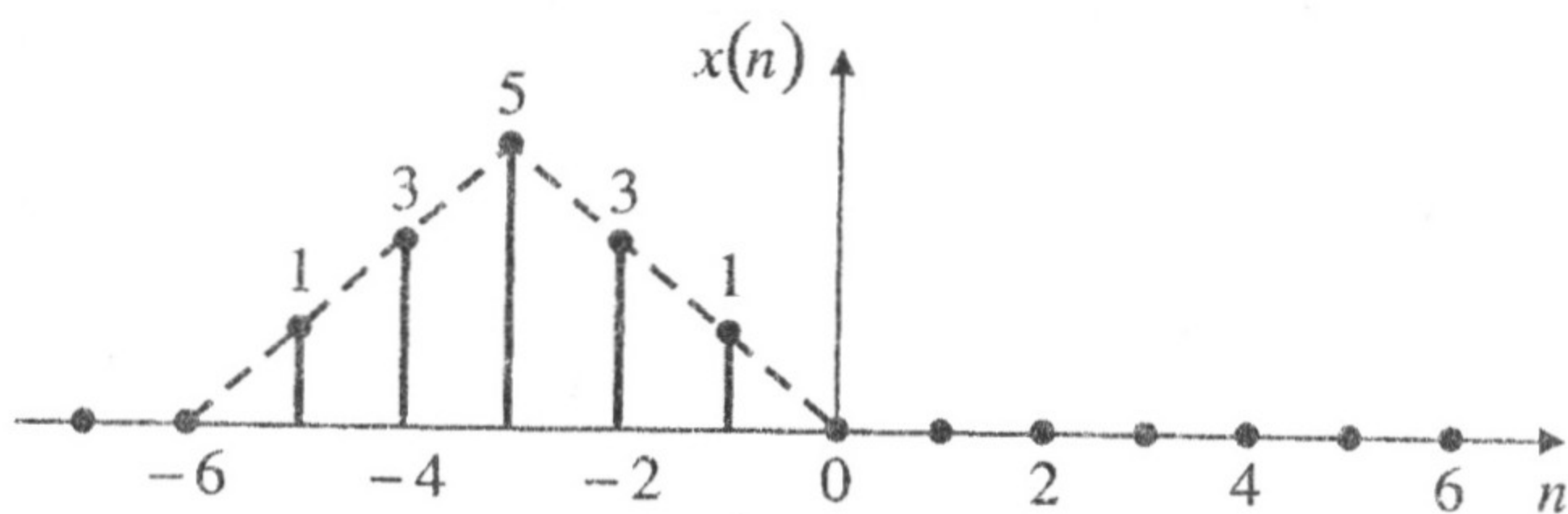
б)



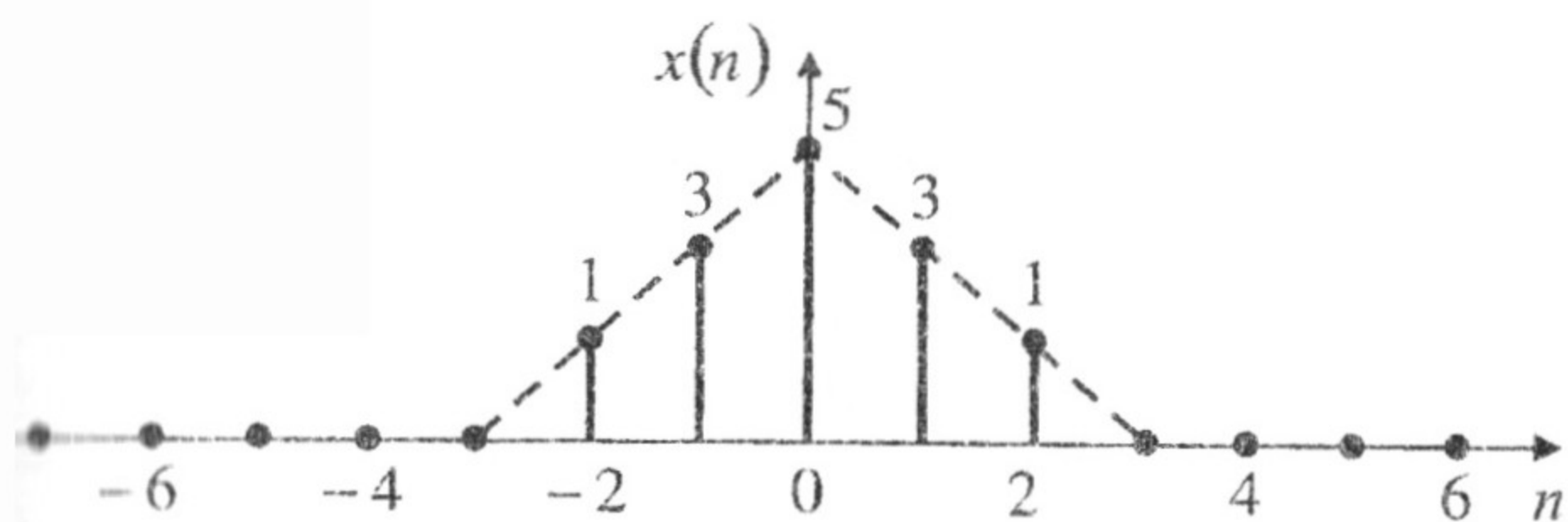
в)

Рис. 2.3. Дискретные последовательности в задаче 2.13

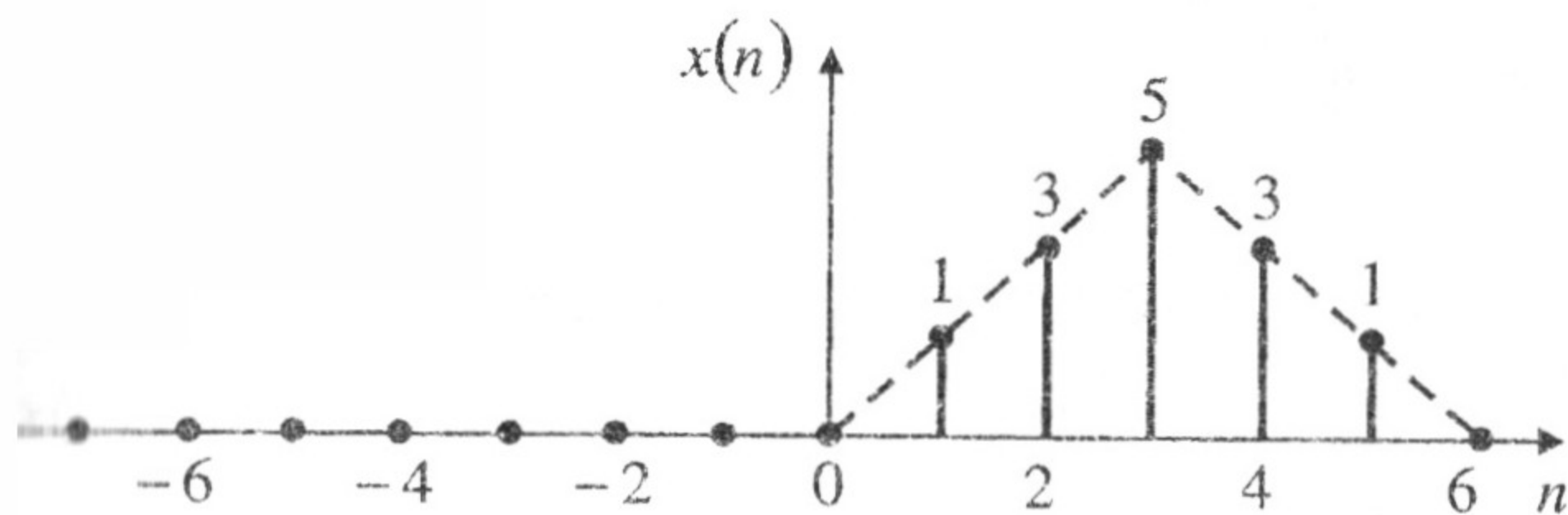
2.14. Найдите z -преобразование и область сходимости всех последовательностей дискретного времени, приведенных на рис. 2.4.



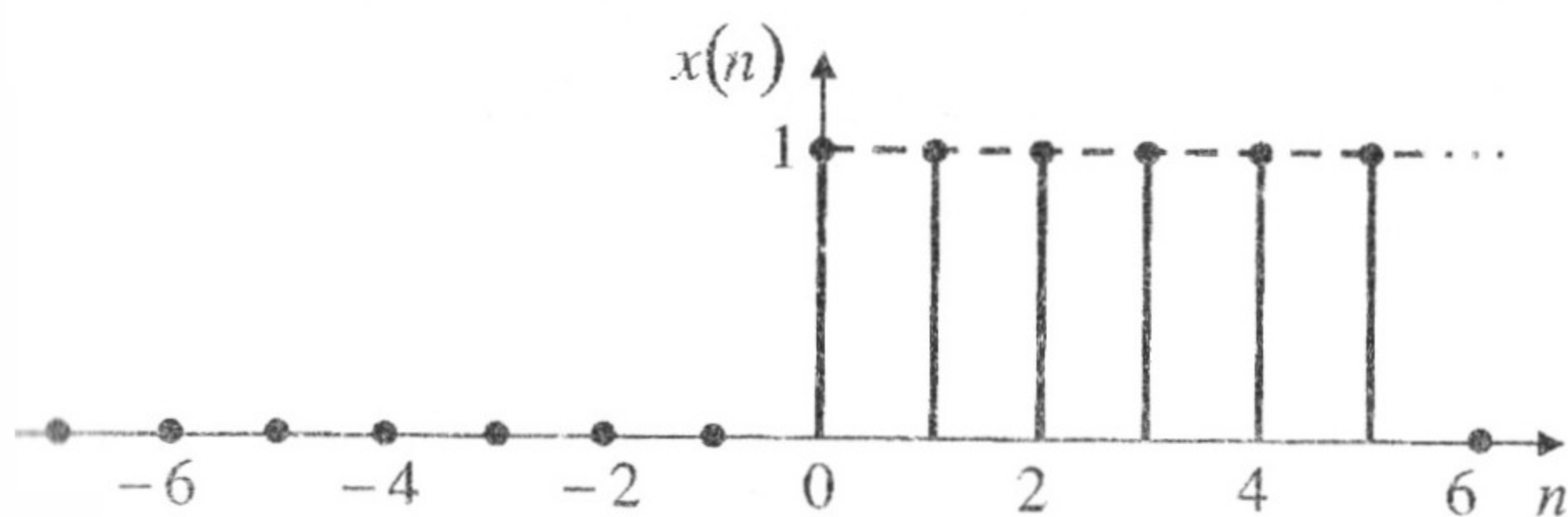
а)



б)



в)



г)

рис. 2.4. Дискретные последовательности в задаче 2.14

2.15. Найдите z-преобразование следующих последовательностей:

а) $x(n] = 2^n l(n) + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n l(n);$

б) $x(n] = \cos(n\omega_0) l(n);$

в) $x(n] = \left(\frac{1}{3} \right)^n l(-n);$

$$\text{г) } x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n+2) + (3)^n 1(-n-1);$$

$$\text{д) } x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos(n\omega_0) 1(n);$$

$$\text{е) } x(n) = \alpha^{|n|};$$

$$\text{ж) } x(n) = |n| \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

2.16. Используя z -преобразование, вычислить свертку следующих последовательностей:

$$\text{а) } h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & 0 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2);$$

$$\text{б) } h(n) = (0.5)^n 1(n),$$

$$x(n) = 3^n 1(-n).$$

2.17. Пусть $y(n)$ — последовательность, полученная из $x(n)$ следующим образом:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n kx(k).$$

а) Показать, что $y(n)$ удовлетворяет разностному уравнению с переменными коэффициентами вида:

$$y(n) - y(n-1) = nx(n).$$

б) Показать, что

$$Y(z) = \frac{-z^2}{z-1} \frac{dX(z)}{dz},$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ — это z -преобразования последовательностей $x(n)$ и $y(n)$ соответственно.

в) Используя выражение, представленное в пункте б), определить z-преобразование последовательности

$$y(n) = \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

2.18. Используя свойство дифференцирования, определить z-преобразование следующих последовательностей

а) $x(n) = 1(n);$

б) $x(n) = n \cdot 1(n);$

в) $x(n) = n^2 1(n);$

г) $x(n) = a^n 1(n);$

д) $x(n) = n a^n 1(n);$

е) $x(n) = n^2 a^n 1(n);$

ж) $x(n) = (a^n + n) \cdot 1(n), \quad |a| > 1.$

з) $x(n) = n \left(\frac{1}{2} \right)^n 1(n-2);$

и) $x(n) = \frac{1}{n} (-2)^{-n} 1(-n-1).$

2.19. Найдите одностороннее z-преобразование следующих функций:

а) $x(n) = \left(\frac{1}{3} \right)^n 1(n+3);$

б) $x(n) = \delta(n-5) + \delta(n) + 2^{n-1} 1(-n).$

2.20. Пусть $X(z)$ – одностороннее z-преобразование для $x(n)$.

а) Найдите одностороннее z-преобразование для $y(n) = x(n-1);$

б) Найдите одностороннее z-преобразование для $y(n) = x(n+3).$

2.21. Найти обратное z-преобразование:

$$\text{a) } X(z) = 4 + 3(z^2 + z^{-2}), \quad 0 < |z| < \infty;$$

$$\text{б) } X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, \quad |z| > 2;$$

$$\text{г) } X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-2})}, \quad |z| > 1;$$

$$\text{д) } X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \quad |z| > \frac{1}{2};$$

$$\text{е) } X(z) = \frac{1}{(1 - 0.4z^{-1})^2}, \quad |z| > 0.4;$$

$$\text{ж) } X(z) = \frac{1}{1 - 0.2z^{-2}}, \quad |z| > 0.2;$$

$$\text{з) } X(z) = \log(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

2.22. Дан следующий z -образ причинной ЛИС-системы, то есть ЛИС-системы, импульсная характеристика которой отлична от нуля при $n \geq 0$:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2}}.$$

Найдите обратное z -преобразование, разложив $X(z)$ в степенной ряд путем деления в столбик.

2.23. Функция $X(z)$ содержит простые полюсы первого порядка. Найдите ее обратное z -преобразование, воспользовавшись методом разложения на элементарные дроби.

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.357z^{-2}}.$$

2.24. Функция $X(z)$ имеет комплексно-сопряженные полюсы первого порядка. Воспользовавшись методом разложения на элементарные дроби, найдите сигнал дискретного времени $x(n)$ по его z -образу.

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2}}.$$

2.25. Функция $X(z)$ содержит полюс второго порядка. Воспользовавшись методом разложения на элементарные дроби, найдите дискретную во времени последовательность $x(n)$ со следующим z -образом:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 1)^2}.$$

2.26. С помощью метода вычетов найдите сигнал дискретного времени, соответствующий следующему z -образу:

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0.75)(z + 0.5)}.$$

2.27. Если полюсы функции $X(z)$ – комплексно-сопряженные, найдите с помощью метода вычетов обратное z -преобразование по данному z -образу:

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - z + 0.3561}.$$

2.28. Функция $X(z)$ содержит полюс второго порядка. Найдите с помощью метода вычетов последовательность дискретного времени $x(n)$ по следующему z -образу:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 1)^2}.$$

2.29. Найдите значение $x(0)$ для последовательности, имеющей z -преобразование

$$X(z) = \frac{z + 3 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-2}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

2.30. Рассмотрим систему, описываемую разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1).$$

Используя z -преобразование, найдите отклик системы при подаче на вход сигнала

$$x(n) = (0.5)^n 1(n).$$

Начальные условия равны $y(-1) = 0.75$ и $y(-2) = 0.25$.

2.31. Цифровой фильтр описывается разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n).$$

Начальные условия равны $y(-1) = -1$ и $y(-2) = 1$.

Определите отклик фильтра на $x(n) = \delta(n)$ для всех $n \geq 0$ и сравните его со случаем нулевых начальных условий.

2.32. Обобщённая последовательность Фибоначчи является последовательностью $x(n)$, которая удовлетворяет разностному уравнению

$$x(n+2) = x(n) + x(n+1), \quad n \geq 0.$$

Классическая последовательность Фибоначчи получается, когда начальные условия имеют вид:

$$x(0) = 0 \quad \text{и} \quad x(1) = 1.$$

а) Определить аналитическое выражение для $x(n)$ с использованием z -преобразования.

б) Показать, что отношение $x(n)/x(n+1)$ стремится к $2/(1+\sqrt{5})$ при $n \rightarrow \infty$ (золотое сечение).

в) Показать, что последовательность Фибоначчи обладает следующими свойствами:

$$x^2(n) + x^2(n+1) = x(2n+1),$$

$$x^2(n+2) - x^2(n+1) = x(n)x(n+3).$$

2.33. Найдите решения следующих линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

а) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$, если $x(n) = 1(n)$ и $y(-1) = \frac{1}{4}$;

б) $y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 2 \cdot 1(n)$, если $y(-1) = 2$ и $y(-2) = 1$;

в) $y(n) + y(n-2) = \delta(n)$, если $y(-1) = 1$ и $y(-2) = 0$.

2.34. Рассмотрим следующее разностное уравнение

$$y(n) + y(n-2) = x(n) + x(n-1).$$

Если $x(n) = 10 \cdot 1(n)$ и $y(-2) = -10$, $y(-1) = 0$, найдите выходную последовательность $y(n)$ для $n \geq 0$.

2.35. Дано разностное уравнение, описывающее рекурсивную цепь первого порядка

$$y(n) = x(n) + b_1 y(n-1), \quad x(n) = A = \text{const.}$$

Найдите решение уравнения и проанализируйте его поведение при $n \rightarrow \infty$, если $|b_1| < 1$.

2.36. Для последовательности $[2, 1+i, 0, 1-i]$ выполнить обратное дискретное преобразование Фурье.

2.37. Для последовательности $[1, 0, 0, 1]$ выполнить дискретное преобразование Фурье.

2.38. Пусть последовательность $[1, 0, 0, 1]$ представляет собой оцифрованные элементы выборки, взятые из сигнала напряжения, дискретизированного с интервалом дискретизации 125 мкс.

Найдите и постройте амплитудный и фазовый спектры этой последовательности данных.

2.39. Вычислите N -точечное ДПФ каждой из следующих последовательностей:

а) $x(n) = \delta(n)$;

б) $x(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$;

в) $x(n) = \alpha^n$, $0 \leq n < N$;

г) $x(n) = 1(n) - 1(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$.

2.40. Найдите 10-точечное обратное ДПФ последовательности:

$$X(k) = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k \leq 9. \end{cases}$$

2.41. Найдите N -точечное ДПФ последовательности

$$x(n) = \cos(n\omega_0), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Сравните значения коэффициентов ДПФ $X(k)$, когда $\omega_0 = 2\pi k_0/N$, с теми, когда $\omega_0 \neq 2\pi k_0/N$. Объясните различия.

2.42. Найдите N -точечное ДПФ последовательности

$$x(n) = 4 + \cos^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

2.43. Рассмотрим последовательность конечной длины

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5).$$

а) Найдите 10-точечное ДПФ последовательности $x(n)$.

б) Найдите последовательность, которая имеет ДПФ вида

$$Y(k) = e^{j2k\frac{2\pi}{10}} X(k),$$

где $X(k)$ – 10-точечное ДПФ последовательности $x(n)$.

в) Найдите 10-точечную последовательность $y(n)$, которая имеет ДПФ вида:

$$Y(k) = X(k)W(k),$$

где $X(k)$ – 10-точечное ДПФ последовательности $x(n)$, а $W(k)$ – 10-точечное ДПФ последовательности вида:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2.44. Рассмотрим последовательность

$$x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3).$$

Пусть $X(k)$ – 6-точечное ДПФ последовательности $x(n)$.

а) Найдите последовательность конечной длины $y(n)$, которая имеет 6-точечное ДПФ:

$$Y(k) = W_6^{4k} X(k).$$

б) Найдите последовательность конечной длины $w(n)$, которая имеет 6-точечное ДПФ, равное реальной части $X(k)$:

$$W(k) = \operatorname{Re}\{X(k)\}.$$

в) Найдите последовательность конечной длины, которая имеет 3-точечное ДПФ:

$$Q(k) = X(2k), \quad k = 0, 1, 2.$$

2.45. Пусть $x(n)$ – последовательность вида

$$x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3).$$

Вычисляем 5-точечное ДПФ последовательности $x(n)$ и возводим получившуюся последовательность в квадрат:

$$Y(k) = X^2(k).$$

Затем вычисляем обратное ДПФ и получаем последовательность $y(n)$. Найдите последовательность $y(n)$.

3. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

3.1. Описание систем дискретного времени с помощью полюсов и нулей

В большинстве случаев передаточную функцию системы $H(z)$ можно выразить через ее нули и полюса. Рассмотрим, например, фильтр порядка N

$$H(z) = \frac{D(z)}{N(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}, \quad (3.1)$$

где a_k и b_k – коэффициенты фильтра.

Если функция $H(z)$ имеет полюсы в точках $z = p_1, p_2, \dots, p_N$ и нули в точках $z = z_1, z_2, \dots, z_N$, то $H(z)$ можно разложить на множители и представить в виде

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}, \quad (3.2)$$

где z_i – i -й нуль, p_i – i -й полюс, а K – коэффициент усиления. **Полюсы** z -преобразования $H(z)$ – это значения z , в которых функция $H(z)$ равна бесконечности. Значения z , в которых $H(z)$ равна нулю, называются **нулями**. Полюсы и нули функции $H(z)$ могут быть действительными и комплексными. Если они комплексные, они идут комплексно-сопряженными парами, чтобы коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ были действительными. Из уравнения (3.2) видно, что если известны положения полюсов и нулей функции $H(z)$, то саму функцию $H(z)$ можно легко восстановить с точностью до константы.

Информацию о передаточной функции системы можно наглядно изобразить в виде диаграммы нулей и полюсов (рис. 3.1). Здесь крестиком обозначены положения полюсов, а кружком – положения нулей. На рис. 3.1 полюсы находятся в точках $z = 0.5 \pm 0.5j$ и $z = 0.75$, единственный нуль – в точке $z = -1$. Важной особенностью диаграммы нулей и полюсов является нанесенная на нее единичная окружность, т.е. окружность, которая задается уравнением $|z| = 1$.

Нуль-полосная диаграмма раскрывает свойства системы дискретного времени. Например, из положения полюсов и нулей можно получить частотную характеристику системы, а также решить вопрос об области ее устойчивости. *Для устойчивых систем все полюсы должны лежать внутри единичной окружности (или совпадать с нулями на единичной окружности).*

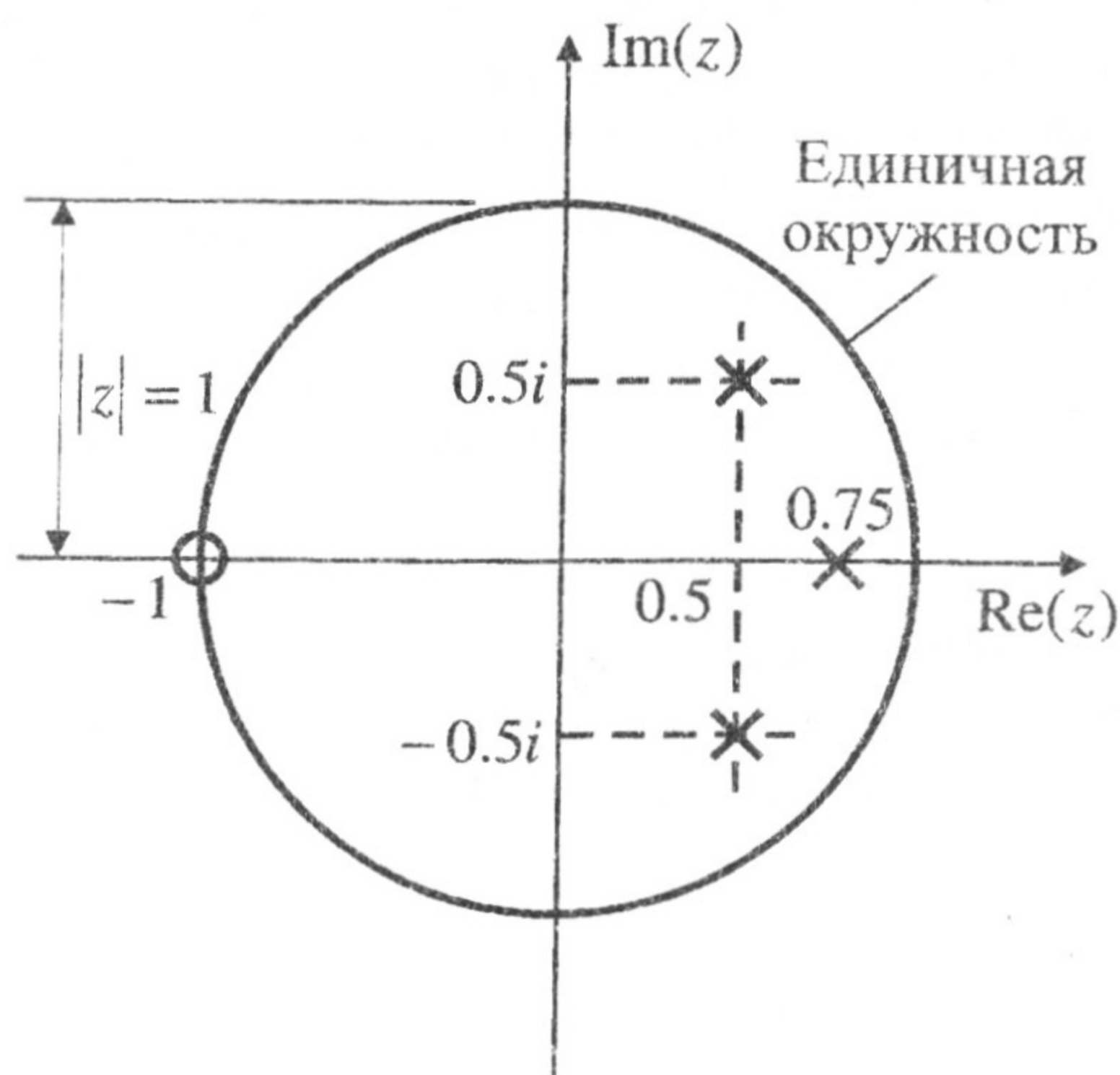


Рис. 3.1. Нуль-полосная диаграмма

Часто z -преобразование нельзя представить в факторизованном виде (3.2), его можно записать только как отношение многочленов, как в уравнении (3.1). В таких случаях для описания $H(z)$ через нули и полюса необходимо найти корни многочлена знаменателя $D(z)$ и многочлена числителя $N(z)$.

Определение корней многочленов $D(z)$ и $N(z)$ высоких порядков — задача не из легких. На практике это делают на ЭВМ с помощью численных методов, например, с помощью алгоритмов Ньютона и/или Бэйстоу. Необходимость поиска полюсов и нулей особенно часто возникает в связи с проектированием цифровых фильтров и анализом их устойчивости.

3.2. Единицы измерения частоты, используемые в системах дискретного времени

Системы и сигналы непрерывного времени, как правило, описываются с помощью преобразования Лапласа. Следовательно, частотная характеристика системы непрерывного времени традиционно описывается путем подстановки $s = j\omega$ в передаточную функцию системы $H(s)$, где s – комплексная переменная Лапласа. В цифровой обработке сигналов мы имеем дело с системами и сигналами дискретного времени. В этом случае частотную характеристику ищут путем подстановки $z = e^{j\omega T}$ и последующего вычисления функции z -преобразования $H(z)$ на отрезке $0 \leq \omega \leq \omega_\delta / 2$. Здесь стоит остановиться на ключевом моменте систем дискретного времени – зависимости эффективного интервала частот от частоты дискретизации ω_δ .

Таблица 3.1

Единицы частоты, которые используются в системах дискретного времени, и их связь с точками на единичной окружности. $F_\delta = 1/T$ – частота дискретизации в Гц; T – период дискретизации; $\omega_\delta = 2\pi/T$ – частота дискретизации в рад/с

f (Гц)	Ω (рад/с)	ωT (рад)	$z = e^{j\omega T}$
0	0	0	1
$F_\delta/8$	$\omega_\delta/8$	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$F_\delta/4$	$\omega_\delta/4$	$\pi/2$	i
$3F_\delta/8$	$3\omega_\delta/8$	$3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$F_\delta/2$	$\omega_\delta/2$	π	-1
$5F_\delta/8$	$5\omega_\delta/8$	$5\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$3F_\delta/4$	$3\omega_\delta/4$	$3\pi/2$	$-i$
$7F_\delta/8$	$7\omega_\delta/8$	$7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
F_δ	ω_δ	2π	1

В табл. 3.1 показано, как изменяются ωT и z при изменении ω от 0 до ω_∂ .

Можно показать, что если угол ωT пробегает значения от 0 до 2π , то значение z изменяется от 1 до i и обратно до 1. Эту информацию в графическом виде можно найти на рис. 3.2. Из рис. 3.2 видно, что частотная характеристика системы дискретного времени циклическа: если пройти полный круг один или несколько раз, то значения z будут просто повторяться.

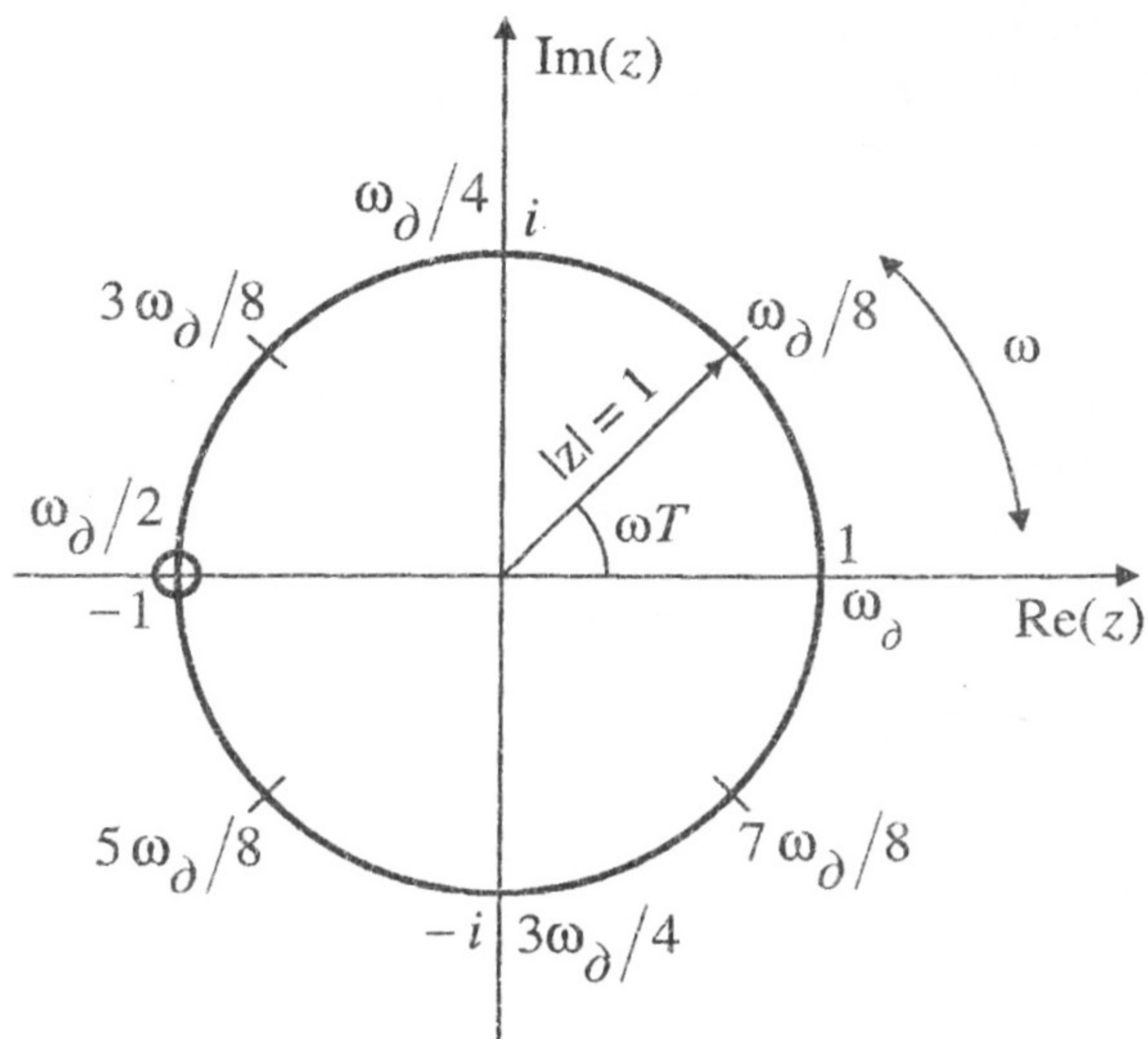


Рис. 3.2. Единичная окружность z -плоскости, на которой показаны критические точки частоты

Следовательно, представляющие интерес частотные интервалы можно выразить одним из шести следующих эквивалентных способов:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \omega \leq \omega_\partial / 2 \text{ (рад/с)} \\ 0 \leq \omega \leq \pi / T \text{ (рад/с)} \\ 0 \leq \omega \leq \pi \text{ (рад)} \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq f &\leq F_d / 2 \text{ (Гц)} \\ 0 \leq f &\leq 1/2T \text{ (Гц)} \\ 0 \leq f &\leq 1/2 \text{ (нормированный)} \end{aligned} \right\}.$$

Пример 3.1

Дано описание частотной характеристики полосового фильтра дискретного времени в виде:

- 1) полоса пропускания 6-10 кГц,
- 2) полосы подавления 0-4 кГц и 12-16 кГц,
- 3) частота дискретизации 32 кГц.

- а) Выразите спецификацию через нормированную частоту.
- б) Переведите спецификацию из стандартных единиц (Гц) в рад/с.
- в) Переведите спецификацию из рад/с в нормированную частоту.

а) Граничные частоты, которые измеряются в Гц, можно записать в нормированном виде, просто разделив каждую из них на частоту дискретизации. Таким образом, спецификация в нормированном виде будет выглядеть так:

- 1) полоса пропускания 0.1875 - 0.3125,
- 2) полосы подавления 0 - 0.125 и 0.375 - 0.5,
- 3) частота дискретизации 1.

б) Поскольку $\omega = 2\pi f$, для того, чтобы перейти к рад/с, каждая граничная частота просто умножается на 2π . Теперь спецификация частотной характеристики будет следующей:

- 1) полоса пропускания 12000π - 20000π рад/с,
- 2) полосы подавления 0 - 8000π и 24000 - 32000π рад/с,
- 3) частота дискретизации 64000π рад/с.

в) Граничные частоты из б) можно записать в нормированном виде, разделив каждую из них на 32 кГц (частоту дискретизации), например,

$$12000\pi \rightarrow \frac{12000\pi}{32000} = \frac{3\pi}{8}.$$

Таким образом, спецификация приводится к виду:

- 1) полоса пропускания $3\pi/8$ - $5\pi/8$ рад,
- 2) полосы подавления 0 - 4π и $3\pi/4$ - π рад,
- 3) частота дискретизации 2π рад.

Далее при описании цифровых цепей рассматривается нормированная частота, т.е. величина ωT .

3.3. Частотные свойства цифровой цепи

Рассмотрим класс входных последовательностей

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной цепи с импульсной характеристикой $h(n)$, то на выходе появится последовательность

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} = x(n) H(e^{j\omega}).$$

Таким образом, для выбранного класса входных последовательностей отклик совпадает с входной последовательностью в точности до комплексного множителя $H(e^{j\omega})$, который выражается через импульсную характеристику следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (3.3)$$

Поскольку последовательность вида $e^{j\omega n}$ функционально эквивалентна дискретизированной синусоиде с частотой ω , то множитель $H(e^{j\omega})$ называют *частотной характеристикой цепи*, так как он представляет коэффициент передачи цепи для каждого значения ω . Модуль $H(e^{j\omega})$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а аргумент — *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ) цепи.

Нетрудно заметить, что частотная характеристика является периодической функцией ω , причем ее период равен 2π . Эта периодичность связана со спецификой дискретизированного колебания: входная последовательность с частотой $(\omega + 2m\pi)$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) не отличается от входной последовательности с частотой ω , т.е.

$$\hat{x}(n) = e^{j(\omega + 2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π . Обычно для этой цели используют интервал $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Другим важным свойством частотной характеристики является то, что для действительных $h(n)$ (как обычно и бывает на практике) модуль $H(e^{j\omega})$ симметричен, а аргумент асимметричен относительно $\omega = \pi$ на интервале $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Аналогично действительная часть $H(e^{j\omega})$ симметрична, а мнимая – асимметрична на том же интервале. Поэтому при действительных импульсных характеристиках интервал частот, на котором задают частотную характеристику, обычно сокращают до $0 \leq \omega \leq \pi$.

3.4. Анализ рекурсивной цепи первого порядка

Структурная схема цепи изображена на рис. 3.3. Рассматриваемая цепь описывается разностным уравнением:

$$y(n] = x(n] + b_1 y(n-1]. \quad (3.4)$$

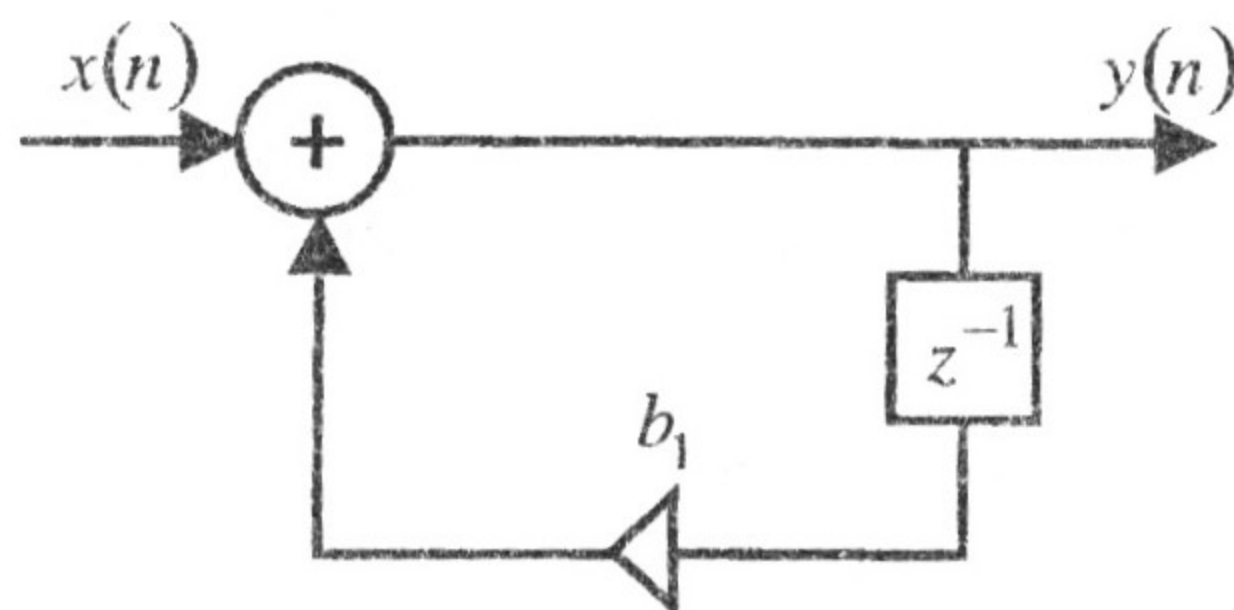


Рис. 3.3. Рекурсивная цепь первого порядка

Применив одностороннее z -преобразование к обеим частям уравнения (3.4), полагая $y(-1) = 0$, получим

$$Y(z) = X(z) + b_1 z^{-1} Y(z).$$

Передаточная функция цепи выражается зависимостью:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - b_1}. \quad (3.5)$$

3.4.1. Частотные свойства

С помощью замены $z = e^{j\omega}$ в (3.5) и используя формулу Эйлера $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$, получим выражение для частотной характеристики:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - b_1} = \frac{1}{1 - b_1 \cos(\omega) + j b_1 \sin(\omega)}.$$

Последнее выражение используется для геометрической интерпретации частотных свойств цифровой цепи. В этом случае возможен, например, следующий алгоритм действий:

1. Изобразить на z -плоскости единичную окружность, нули и полюса. В данном случае передаточная функция имеет один полюс $p_1 = b_1$ и один нуль $z_1 = 0$. Цепь устойчива при $|b_1| < 1$.

На рис. 3.4 представлена нуль-полюсная диаграмма цепи для двух значений b_1 : параметр $b_1 > 0$ – рис. 3.4а, параметр $b_1 < 0$ – рис. 3.4б.

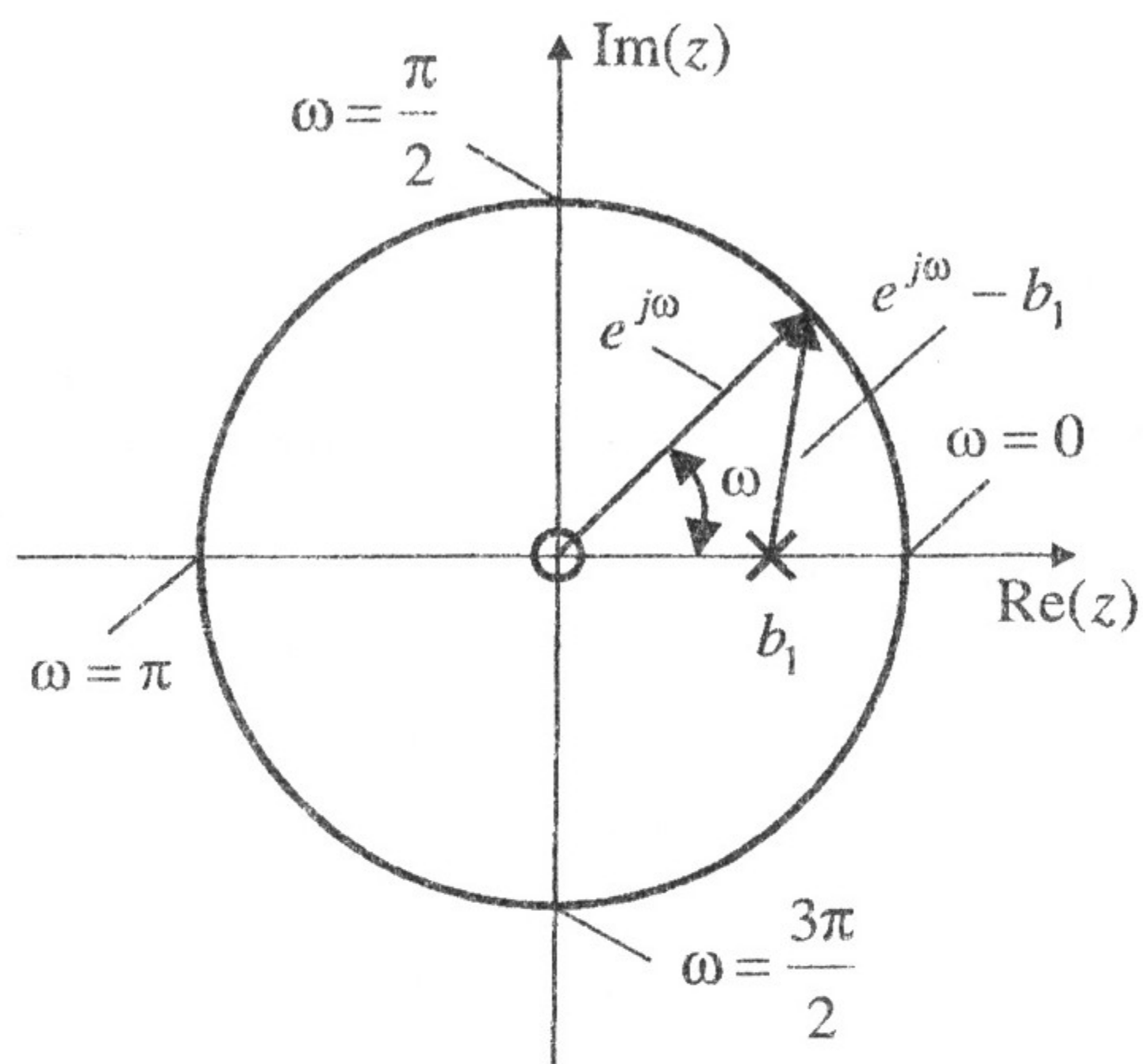
2. Для оценки свойств цепи на частоте ω следует нанести на z -плоскости векторы, проведенные из всех нулей и полюсов в точку $z = e^{j\omega}$ на единичной окружности. Для случая рекурсивной цепи первого порядка таких векторов будет два: первый проведен из точки $z_1 = 0$, второй из точки $p_1 = b_1$. На рис. 3.4а, для случая $b_1 > 0$ эти векторы обозначены через $e^{j\omega}$ и $e^{j\omega} - b_1$, а на рис. 3.4б, для случая $b_1 < 0$, через $e^{j\omega}$ и $e^{j\omega} + b_1$ соответственно.

3. Вращать точку $z = e^{j\omega}$ против часовой стрелки от точки $z = 1$ ($\omega = 0$) до точки $z = -1$ ($\omega = \pi$).

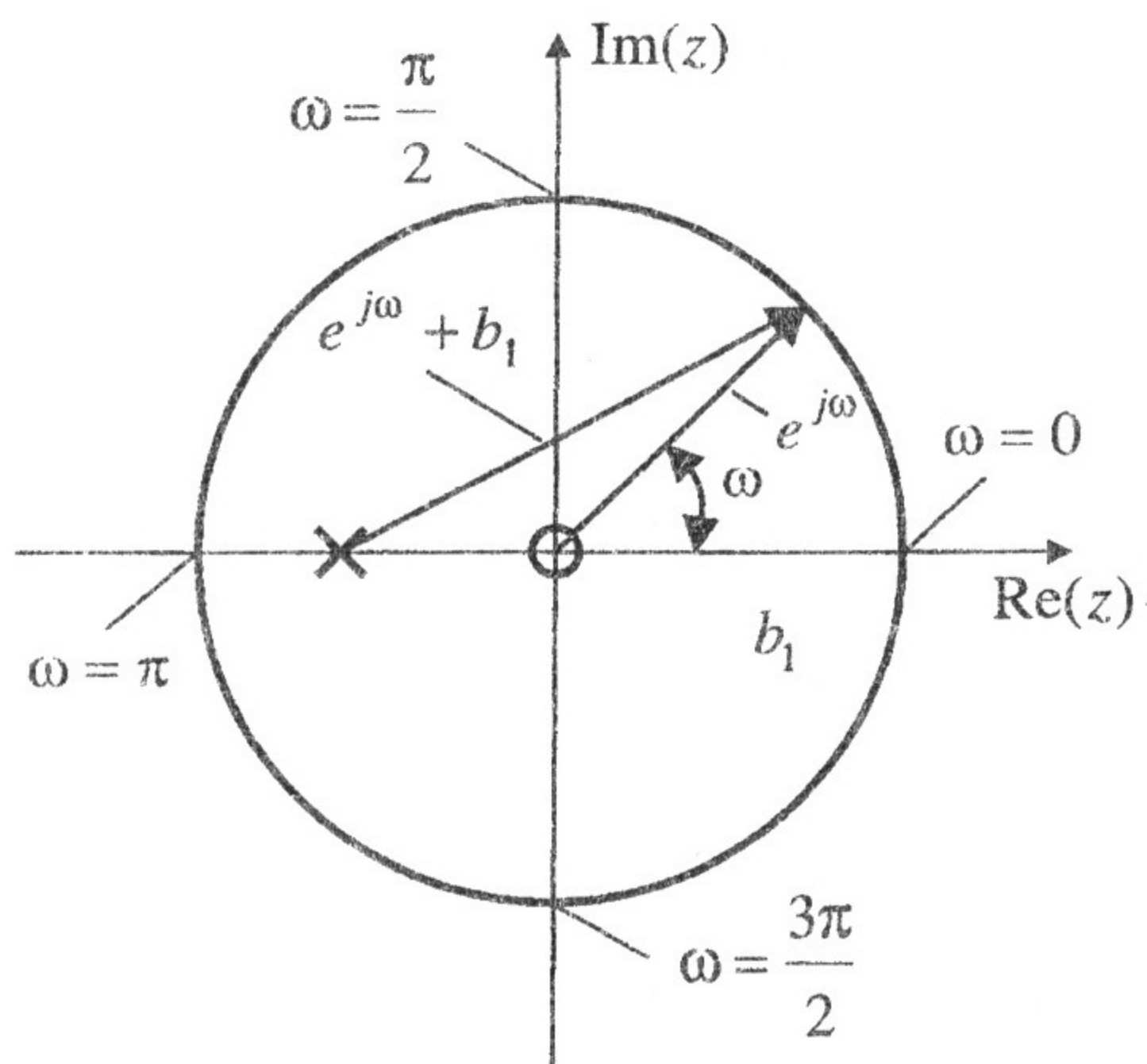
4. По величине векторов, проведенных в точку $z = e^{j\omega}$, определить модуль частотной характеристики – АЧХ, а по углам аргумент частотной характеристики – ФЧХ. Нужно отметить, что при $b_1 > 0$ и перемещении точки $z = e^{j\omega}$ против часовой стрелки от $z = 1$ до $z = -1$ модуль вектора $e^{j\omega} - b_1$ будет расти. В свою очередь, отношение вида

$$\frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega} - b_1|},$$

то есть АЧХ, будет убывать. Поэтому рекурсивная цепь первого порядка в случае $b_1 > 0$ является фильтром нижних частот (ФНЧ). Рассуждая аналогично для случая $b_1 < 0$, получим цепь фильтра верхних частот (ФВЧ).



a)



б)

Рис. 3.4. Нуль-полусные диаграммы рекурсивной цепи первого порядка

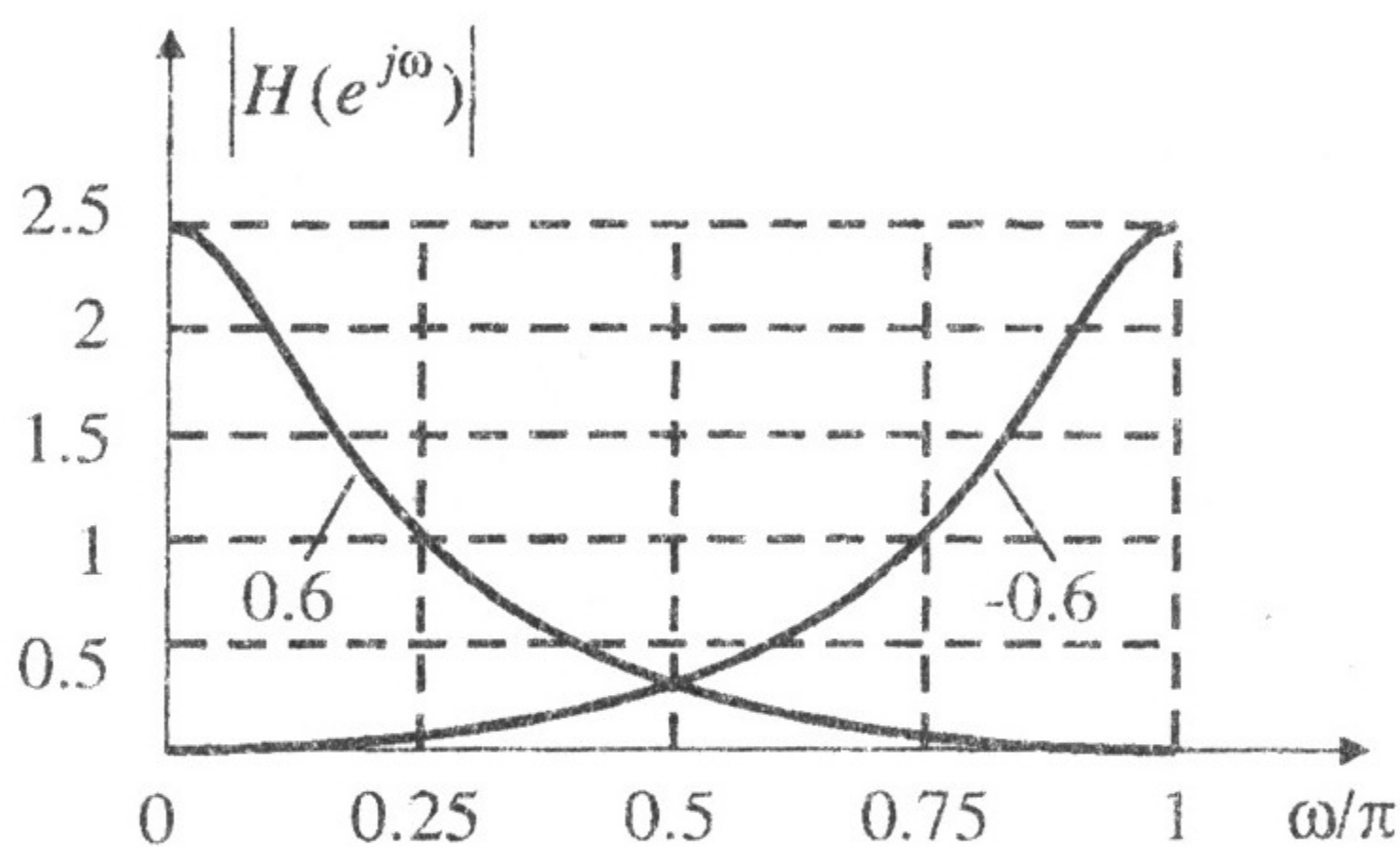
Математически АЧХ рекурсивной цепи первого порядка можно определить в виде

$$H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos(\omega)}},$$

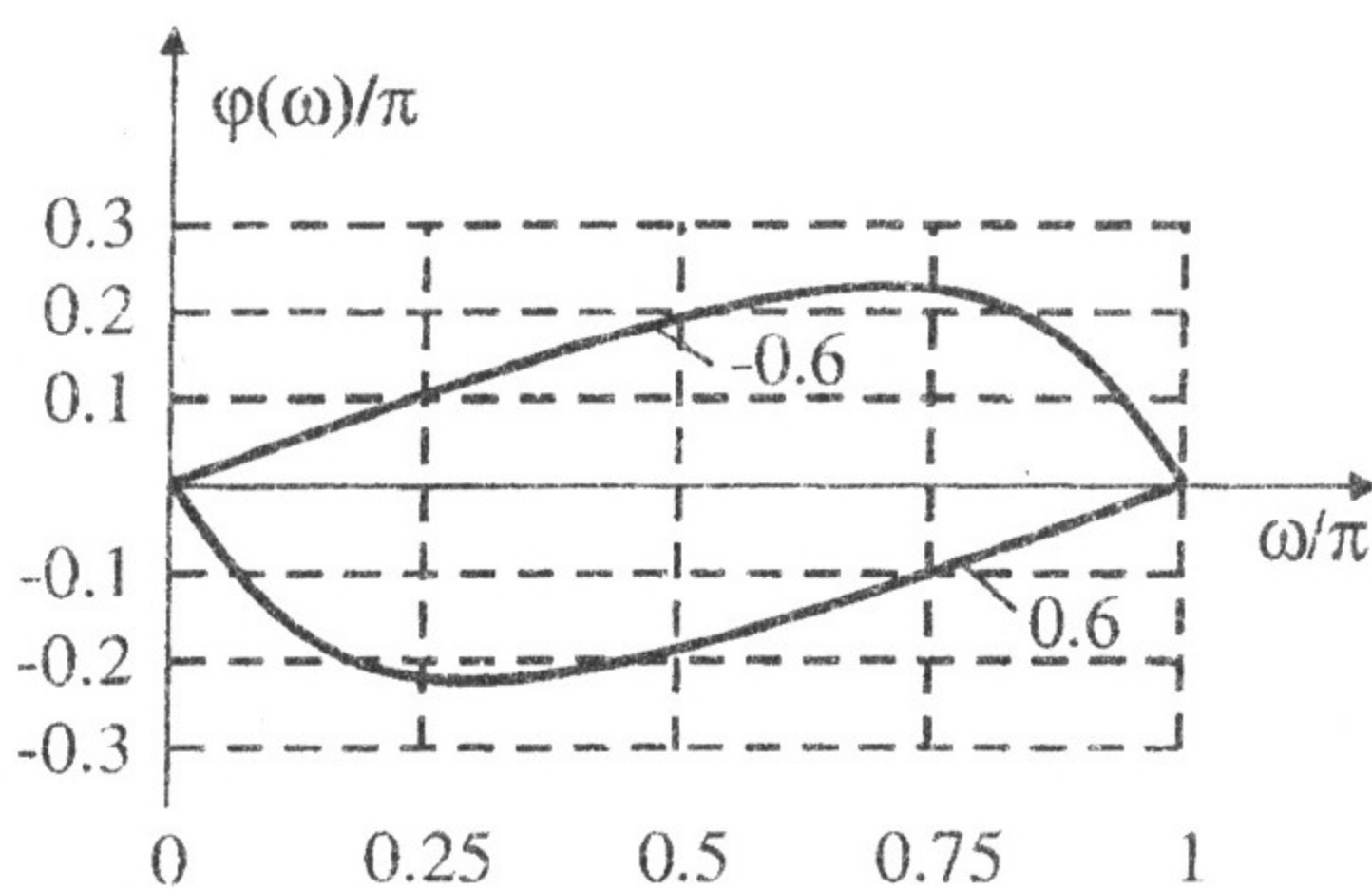
а ФЧХ с использованием выражения

$$\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) = \arctg\left(\frac{-b_1 \sin(\omega)}{1 - b_1 \cos(\omega)}\right).$$

На рис. 3.5а и рис. 3.5б приведены соответственно графики АЧХ и ФЧХ для $b_1 \in \{-0.6; 0.6\}$.



а)



б)

Рис. 3.5. Характеристики рекурсивных фильтров первого порядка: а) АЧХ; б) ФЧХ

Выражение для нормированной АЧХ в рассматриваемой цепи имеет вид

$$\frac{H(\omega)}{H_{\max}} = \frac{1 - |b_1|}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos(\omega)}}.$$

Здесь H_{\max} — максимальное значение АЧХ рассматриваемой рекурсивной цепи первого порядка.

Частота среза ω_c , определяемая на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимального значения АЧХ, равна

$$\omega_c = \arccos\left(\frac{4|b_1| - b_1^2 - 1}{2b_1}\right).$$

График зависимости $\omega_c(b_1)$ изображен на рис. 3.6. В рекурсивной цепи ω_c пробегает все значения от 0 до π для каждого типа фильтров.

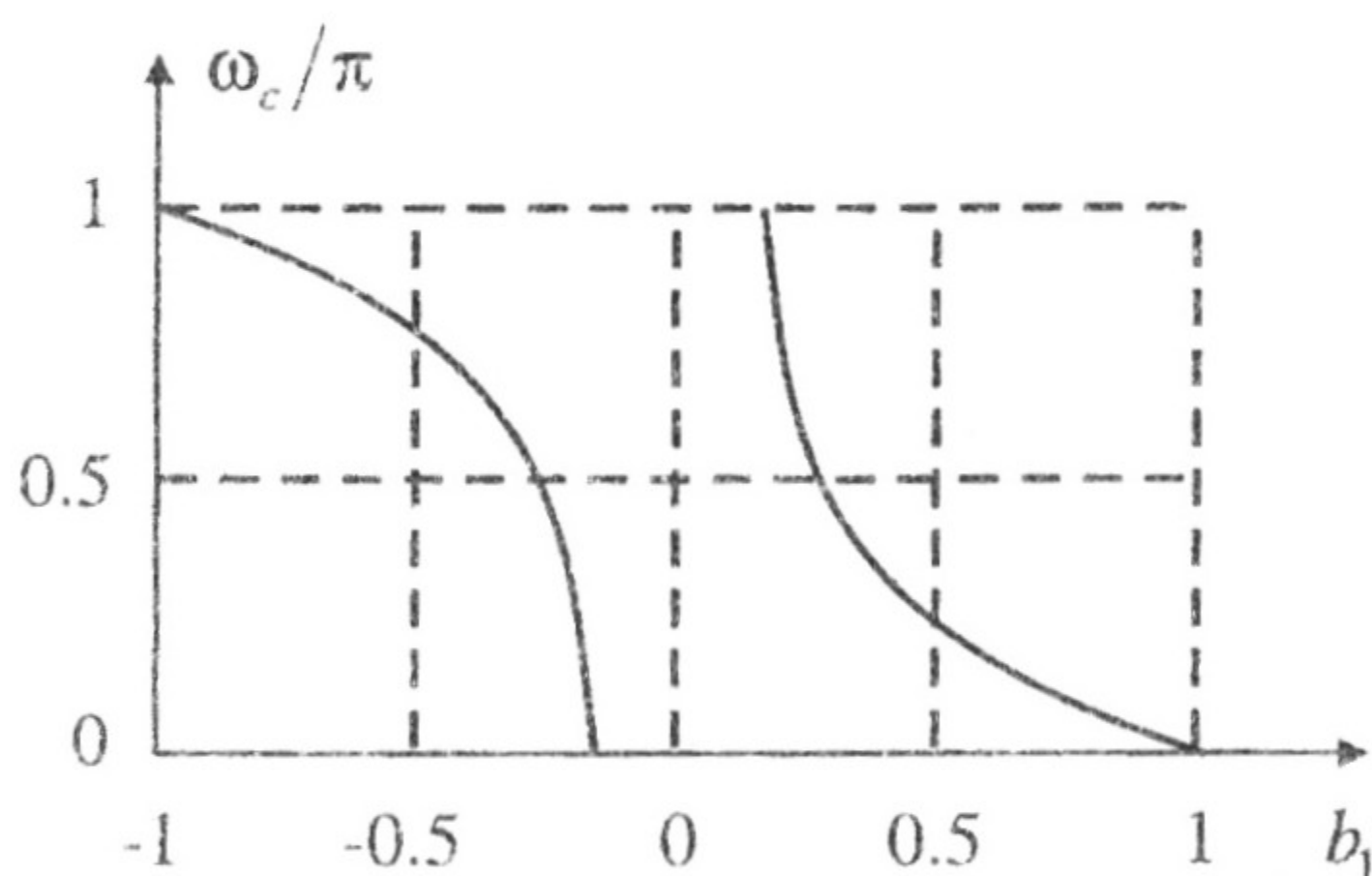


Рис. 3.6. График зависимости частоты среза от параметра фильтра

3.4.2. Временные характеристики

Импульсная характеристика

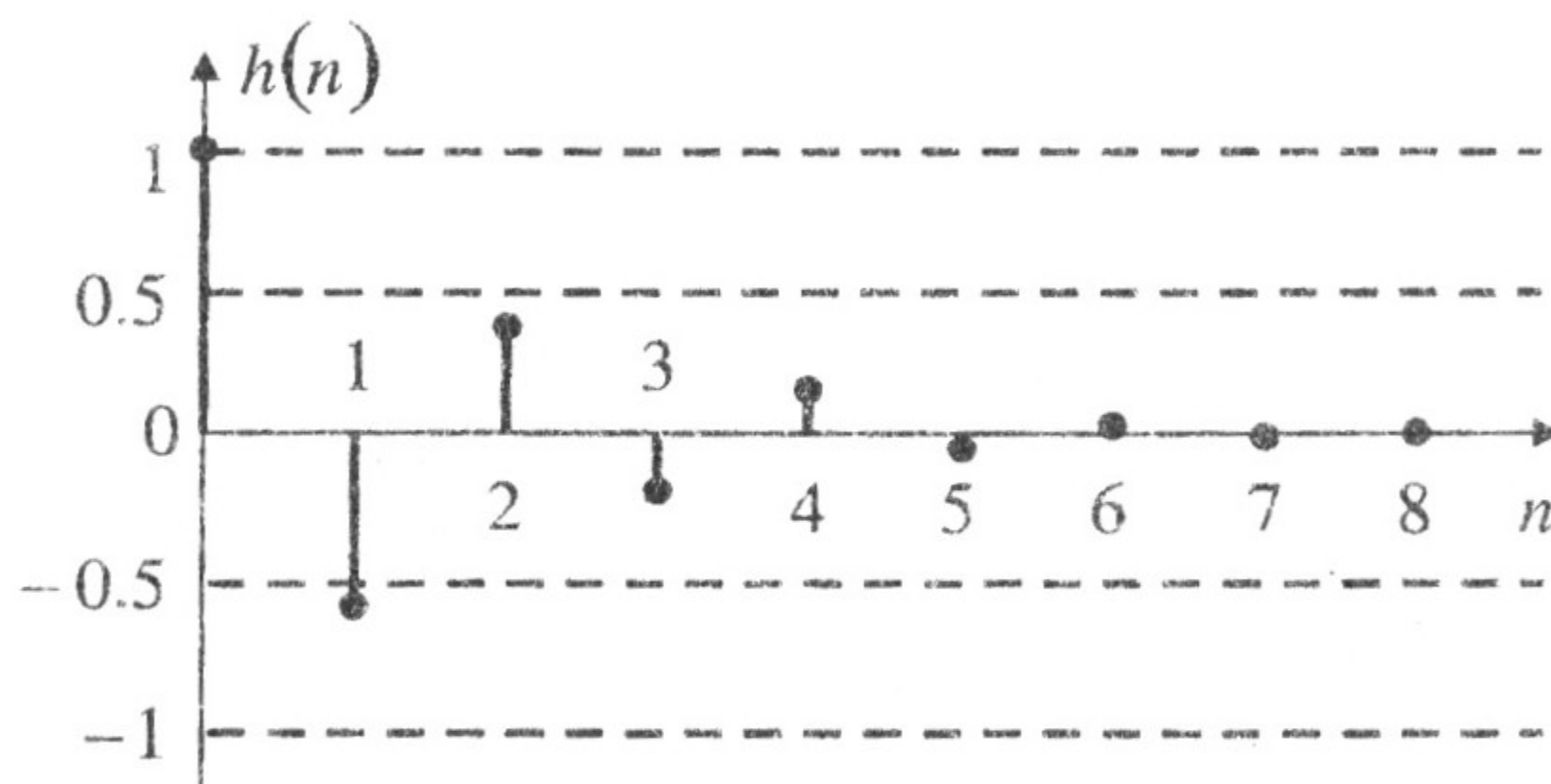
Импульсную характеристику цепи определим как обратное z -преобразование передаточной функции, то есть

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \sum_i \operatorname{res} H(z) z^{n-1} \Big|_{p_i} =$$

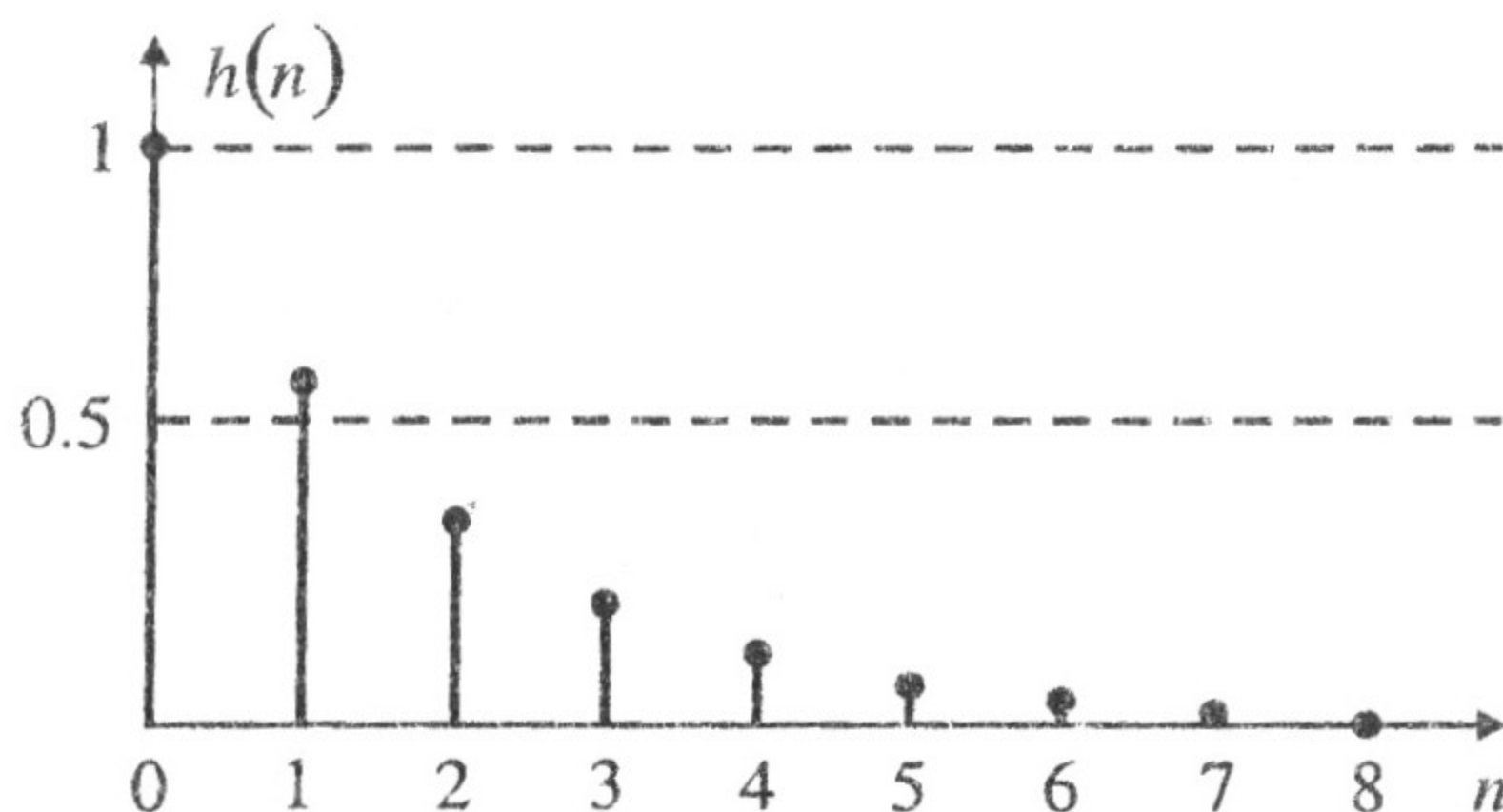
$$= \operatorname{res} \frac{z^{n-1}}{1 - b_1 z^{-1}} \Big|_{p_1=b_1} = \operatorname{res} \frac{z^{n-1}}{z - b_1} \Big|_{p_1=b_1} = b_1^n 1(n).$$

Графики функции $h(n)$ для параметра $b_1 = -0.6$ и $b_1 = 0.6$ показаны на рис. 3.7а и рис. 3.7б соответственно.

Импульсная характеристика рекурсивной цепи теоретически существует до $n = \infty$. На практике под длительностью импульсной характеристики n_u понимается величина $n + 1$, при которой $|h(n)| \leq 0.1$.



а)



б)

Рис. 3.7. Импульсные характеристики рекурсивной цепи первого порядка

Переходная характеристика

Выражение для переходной характеристики получим через решение разностного уравнения вида

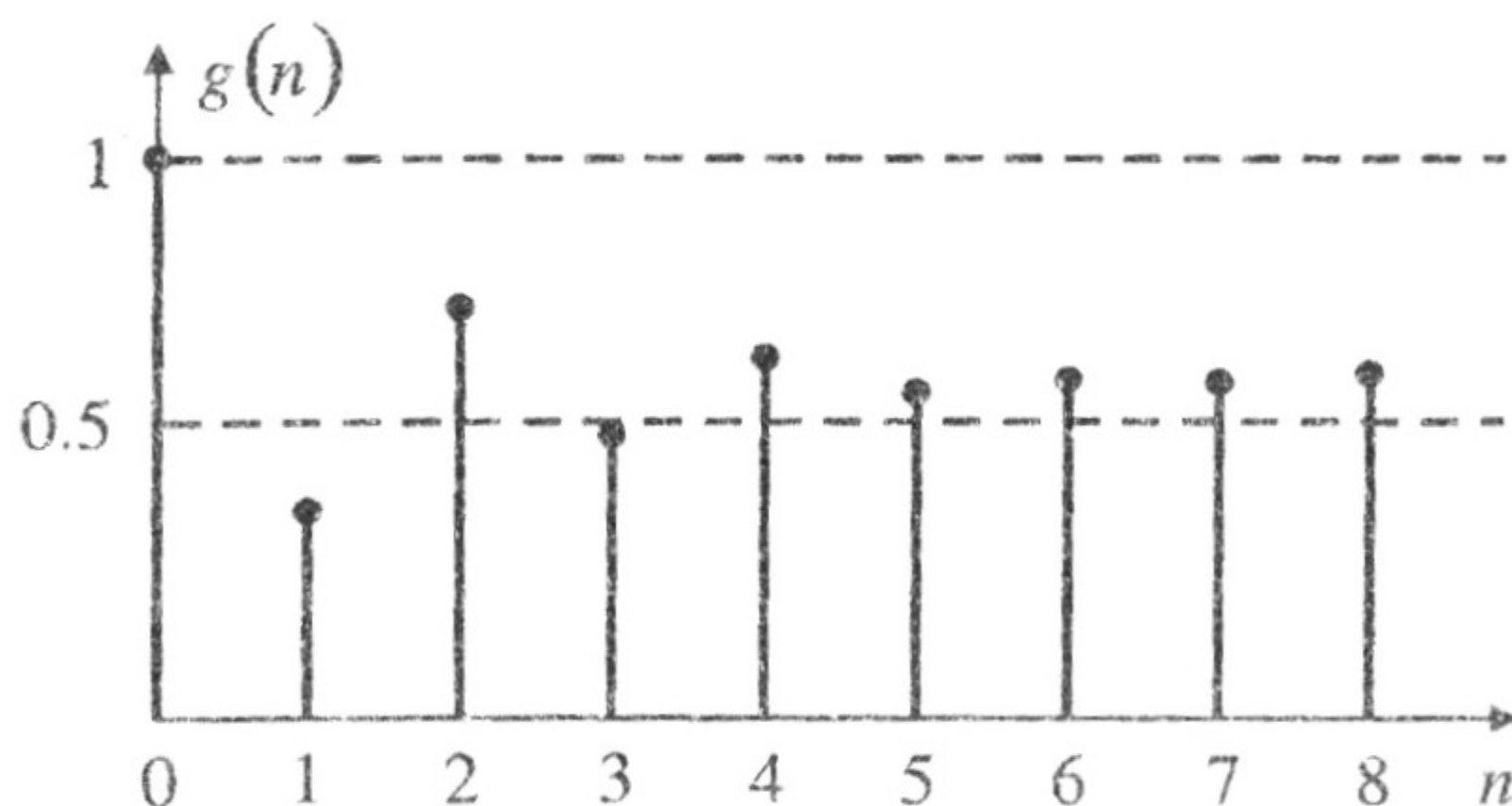
$$g(n) - b_1 g(n-1) = 1(n), \quad (3.6)$$

с начальным условием $g(-1) = 0$.

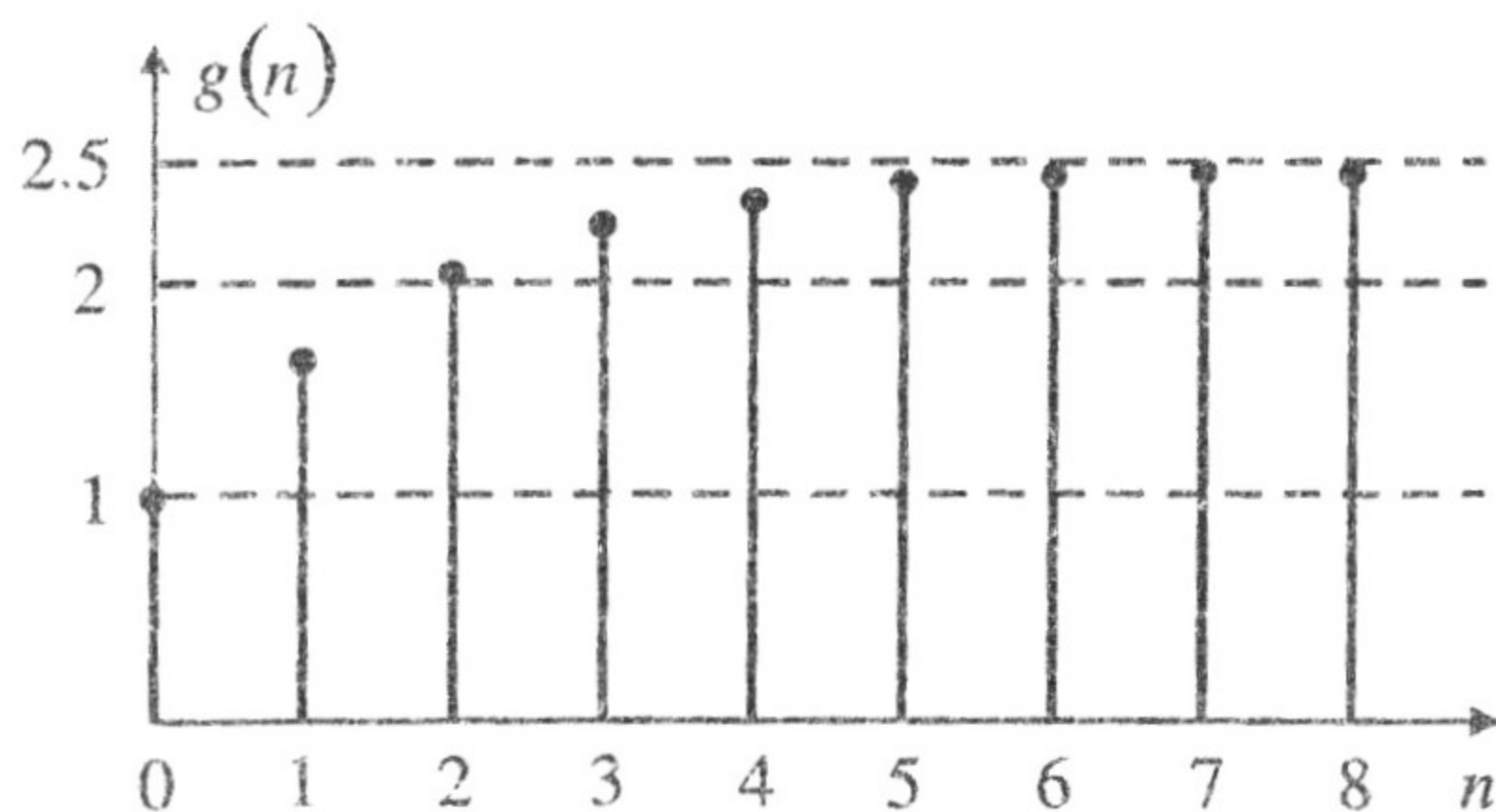
Используя пример 2.3, получим

$$g(n) = \frac{1 - b_1^{n+1}}{1 - b_1} 1(n).$$

Покажем на рис. 3.8а и рис. 3.8б графики переходной характеристики рекурсивной цепи первого порядка для параметра $b_1 = -0.6$ и $b_1 = 0.6$ соответственно.



а)



б)

Рис. 3.8. Переходные характеристики рекурсивной цепи первого порядка

Под длительностью переходной характеристики понимается величина $n_n + 1$, при которой функция $g(n)$ попадает в интервал значений $g_{уст} \pm 0.1g_{уст}$. Здесь $g_{уст}$ – установившееся значение переходной характеристики.

3.5. Анализ нерекурсивной цепи второго порядка

Структурная схема цепи изображена на рис. 3.9. Рассматриваемая цепь описывается разностным уравнением:

$$y(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2). \quad (3.7)$$

Рассматриваемая цепь, как и любая нерекурсивная, устойчива при любых значениях коэффициентов a_1, a_2 .

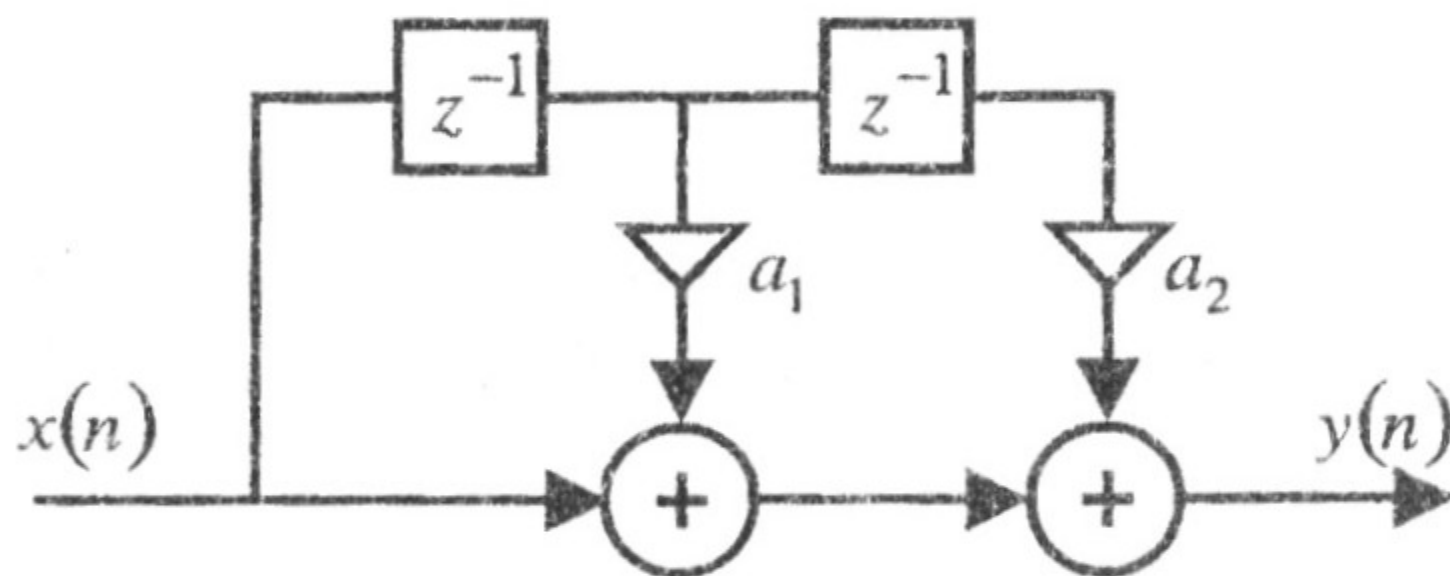


Рис. 3.9. Нерекурсивная цепь второго порядка

Выполнив одностороннее z -преобразование обеих частей уравнения (3.7) и положив начальные условия $x(-1) = 0$ и $x(-2) = 0$, получим

$$Y(z) = X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z).$$

Передаточная функция цепи выражается зависимостью:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2}. \quad (3.8)$$

Эта функция имеет двукратный полюс в начале координат и два нуля в точках

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

3.5.1. Частотные свойства

В зависимости от соотношения между величинами коэффициентов a_1 и a_2 возможны четыре варианта:

Вариант 1. $0 < a_2 < \frac{a_1^2}{4}$, $a_1 > 0$.

Нули передаточной функции вещественные, отрицательные, разные. Диаграмма нулей и полюсов показана на рис. 3.10а. Рассматриваемая цепь является ФНЧ.

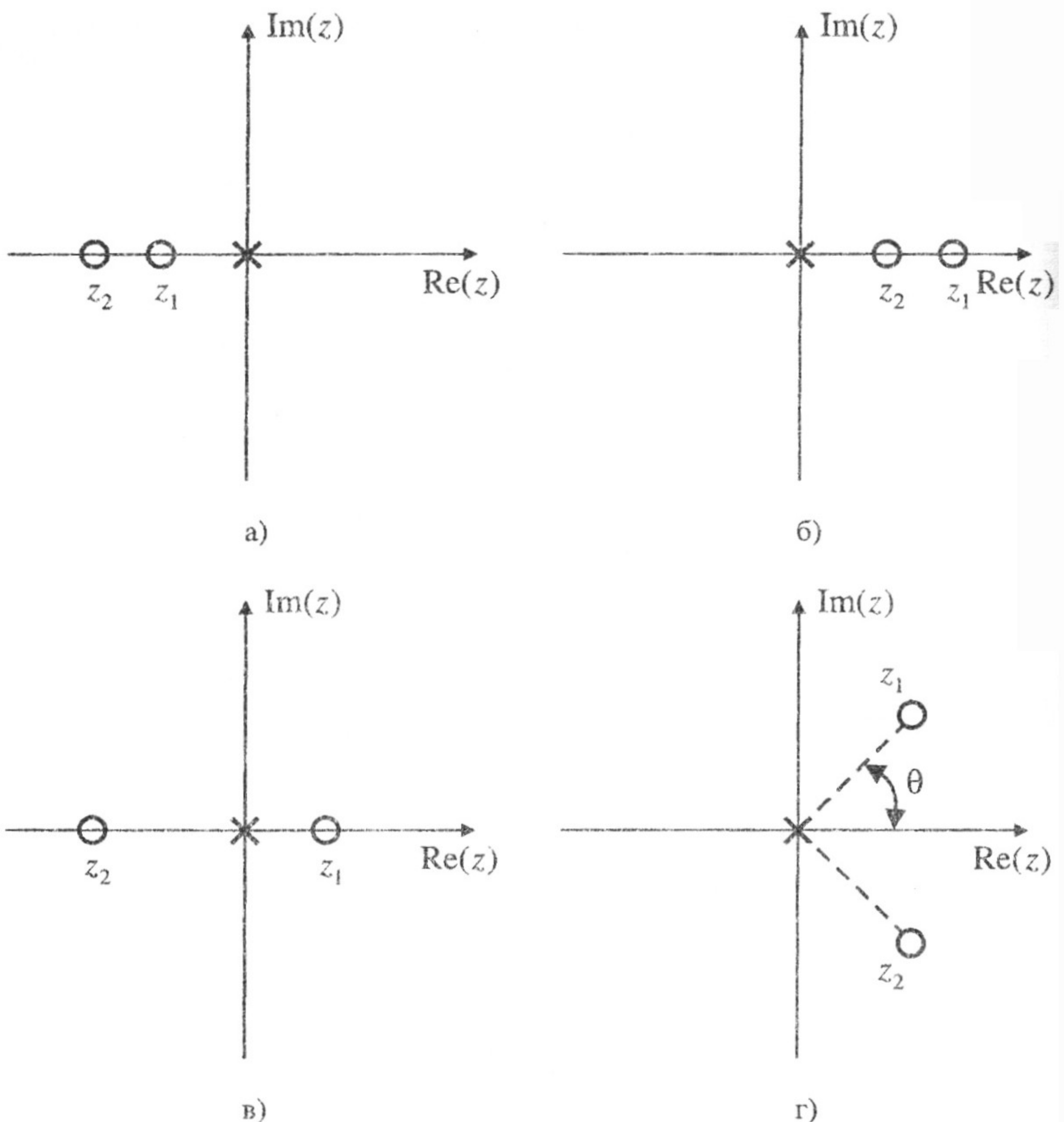


Рис. 3.10. Нуль-полюсные диаграммы нерекурсивной цепи второго порядка

Вариант 2. $0 < a_2 < \frac{a_1^2}{4}$, $a_1 < 0$.

Нули передаточной функции вещественные, положительные, разные. Диаграмма нулей и полюсов показана на рис. 3.10б. Рассматриваемая цепь является ФВЧ.

Вариант 3. $a_2 < 0$, a_1 – произвольное.

Нули передаточной функции вещественные, с разными знаками. Диаграмма нулей и полюсов для $a_1 > 0$ приведена на рис. 3.10в. Цепь является полосовым фильтром (ПФ).

Вариант 4. $a_2 > \frac{a_1^2}{4}$, a_1 – произвольное.

Нули передаточной функции комплексно-сопряженные

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

Диаграмма нулей и полюсов изображена на рис. 3.10г. Цепь является режекторным фильтром (РФ).

Покажем на рис. 3.11 разбиение плоскости параметров цепи (a_1, a_2) , соответствующее рассмотренным четырем вариантам.



Рис. 3.11. Разбиение плоскости параметров нерекурсивной цепи второго порядка

Заменяя в (3.8) $z = e^{j\omega}$, получим выражение для частотной характеристики нерекурсивной цепи второго порядка

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} = \\ &= 1 + a_1 \cos(\omega) - ja_1 \sin(\omega) + a_2 \cos(2\omega) - ja_2 \sin(2\omega). \end{aligned}$$

АЧХ характеризуется зависимостью

$$H(\omega) = \sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2 + 2a_1(1 + a_2)\cos(\omega) + 4a_2 \cos^2(\omega)}, \quad (3.9)$$

а ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(- \frac{a_1 \sin(\omega) + a_2 \sin(2\omega)}{1 + a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega)} \right). \quad (3.10)$$

АЧХ и ФЧХ нерекурсивной цепи второго порядка периодичны с периодом $\omega = 2\pi$. Относительно точки $\omega = \pi$, АЧХ является симметричной функцией, а ФЧХ – асимметричной функцией.

Заменой в (3.9) $\cos(\omega) = b$, $4a_2 = A$, $2a_1(1 + a_2) = B$, $a_1^2 + (1 - a_2)^2 = C$ выражение АЧХ преобразуется к виду:

$$H(b) = \sqrt{Ab^2 + Bb + C}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим каждый тип фильтра более подробно.

Фильтры нижних и верхних частот

Покажем АЧХ фильтров нижних (рис. 3.12а) и верхних (рис. 3.12б) частот и ФЧХ фильтров нижних (рис. 3.13а) и верхних (рис. 3.13б) частот, вычисленных с использованием выражений (3.9), (3.10) для трех сочетаний параметров цепи.

Нормированная АЧХ выражается зависимостью

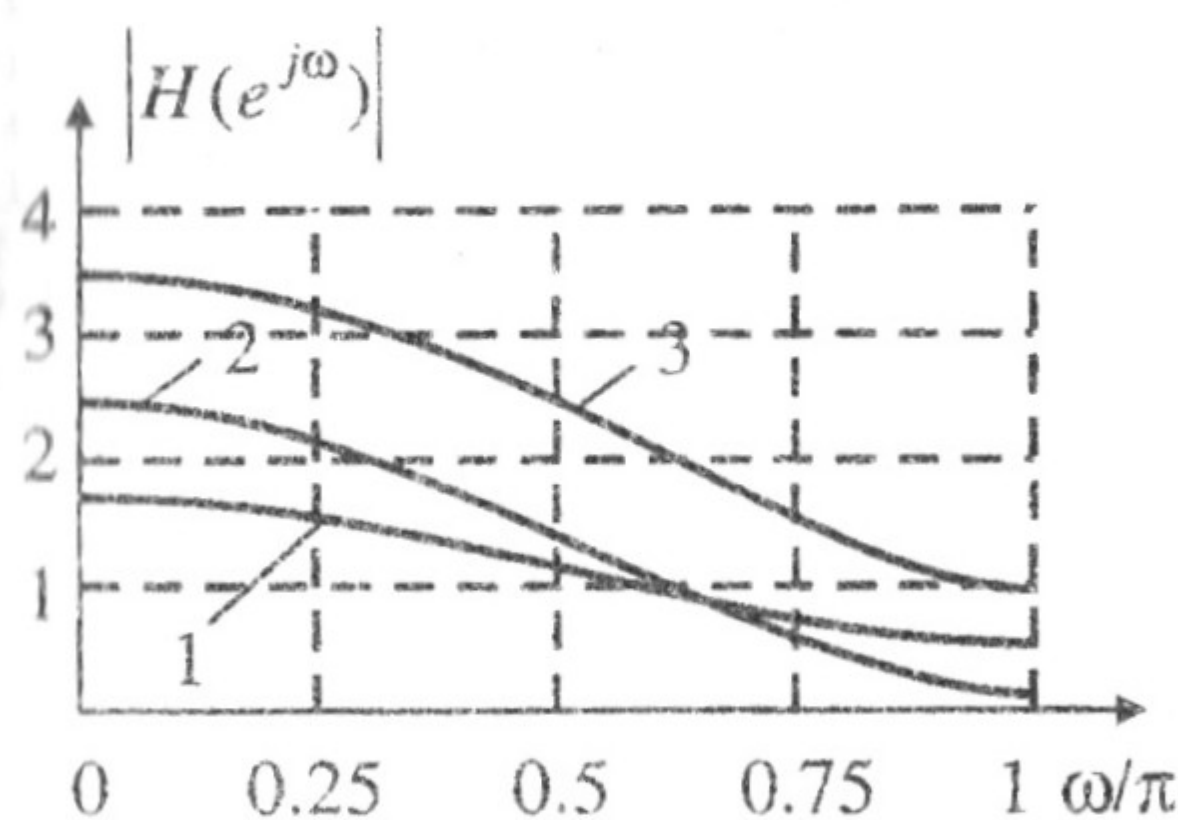
$$\frac{H(b)}{H_{\max}} = \sqrt{\frac{Ab^2 + Bb + C}{A + |B| + C}}.$$

Воспользовавшись соотношением

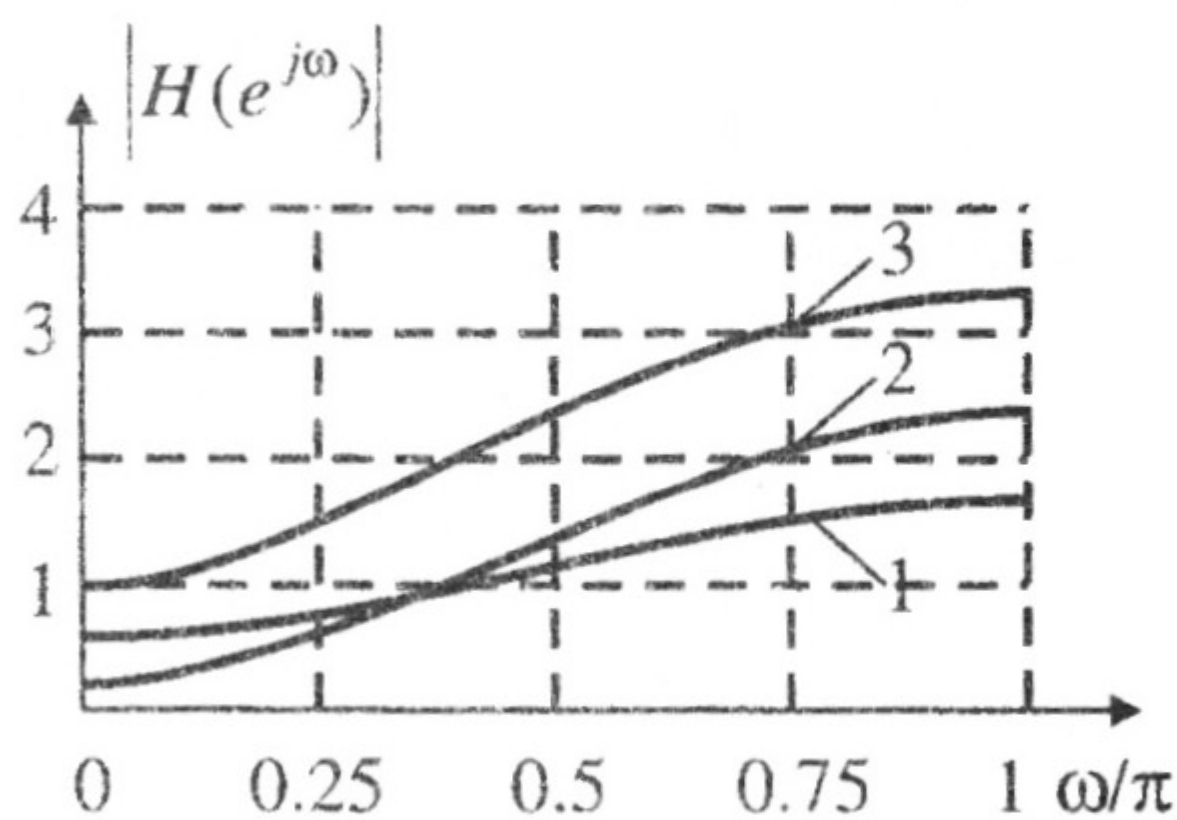
$$\frac{Ab^2 + Bb + C}{(A + |B| + C)^2} = \frac{1}{2},$$

получим выражение для частоты среза

$$\omega_c = \arccos \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 2A[2C - (A + |B| + C)^2]}}{2A} \right).$$



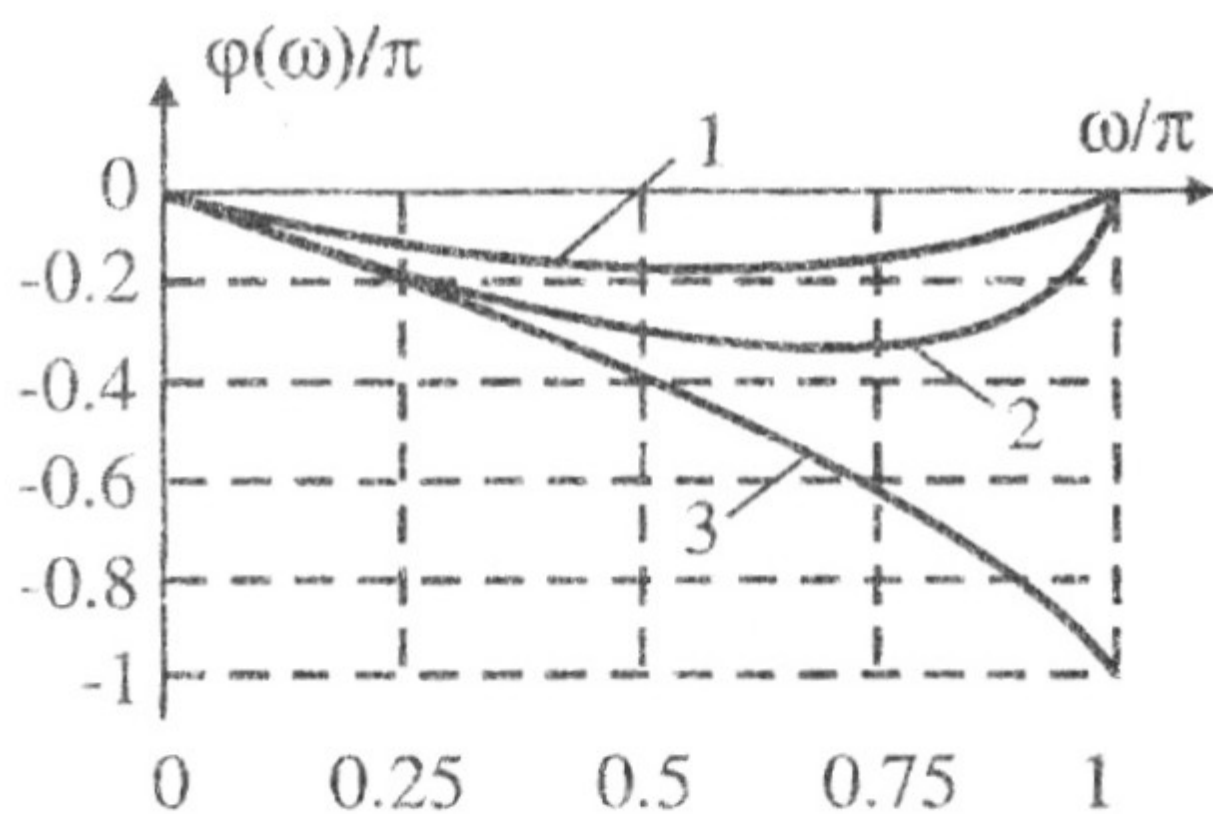
а)



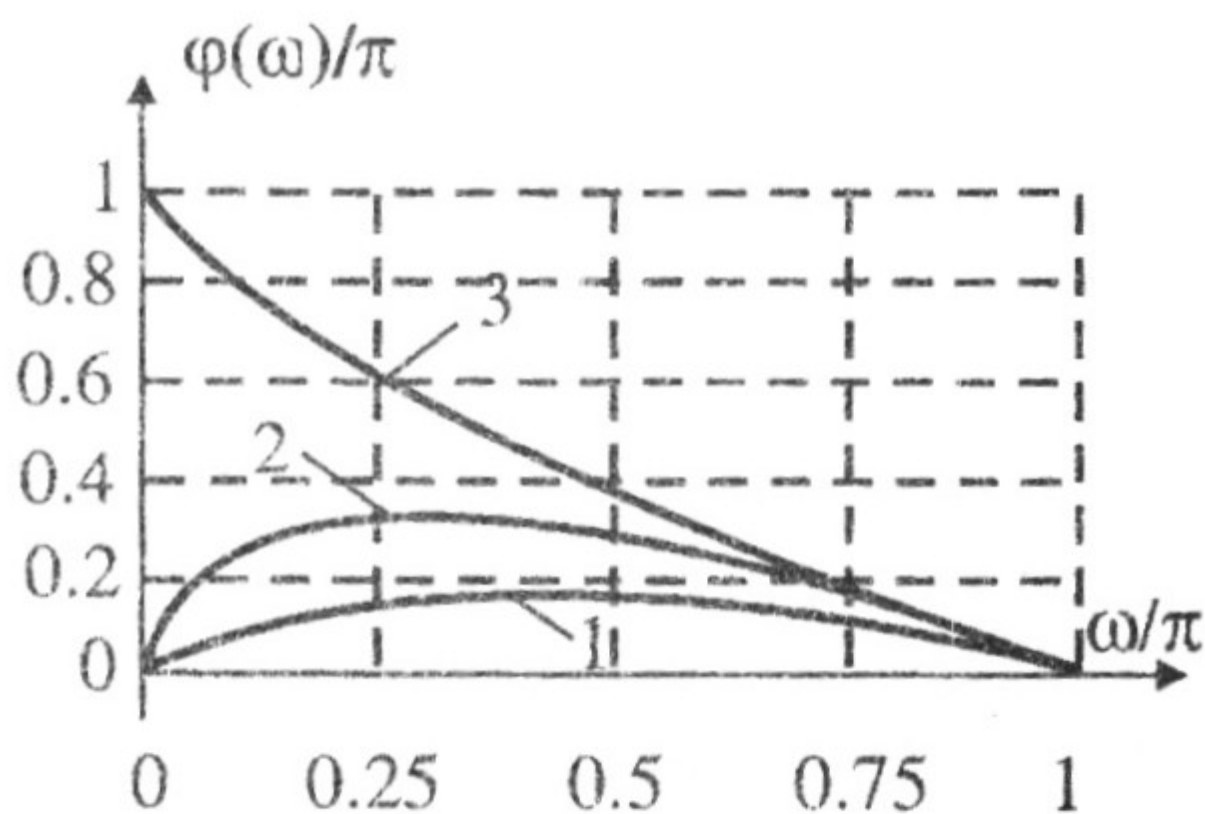
б)

Рис. 3.12. Амплитудно-частотные характеристики фильтров:

- а) ФНЧ (1: $a_1=0.5$, $a_2=0.05$; 2: $a_1=1$, $a_2=0.2$; 3: $a_1=2$, $a_2=0.08$);
 б) ФВЧ (1: $a_1=-0.5$, $a_2=0.05$; 2: $a_1=-1$, $a_2=0.2$; 3: $a_1=-2$, $a_2=0.08$)



а)



б)

Рис. 3.13. Фазочастотные характеристики фильтров:

- а) ФНЧ (1: $a_1=0.5$, $a_2=0.05$; 2: $a_1=1$, $a_2=0.2$; 3: $a_1=2$, $a_2=0.08$);
 б) ФВЧ (1: $a_1=-0.5$, $a_2=0.05$; 2: $a_1=-1$, $a_2=0.2$; 3: $a_1=-2$, $a_2=0.08$)

Полосовой и режекторный фильтры

Покажем АЧХ и ФЧХ для трех сочетаний параметров (a_1, a_2) полосового фильтра на рис. 3.14а и рис. 3.14б и режекторного фильтра на рис. 3.15а и рис. 3.15б соответственно.

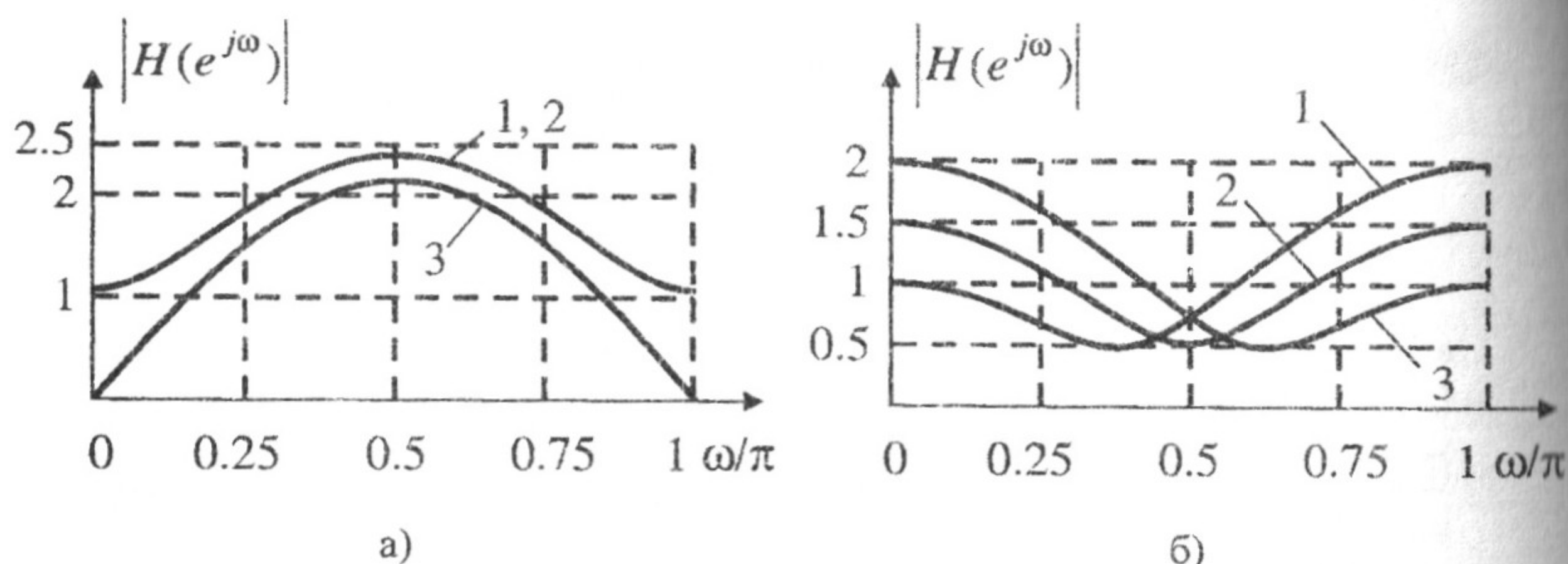


Рис. 3.14. Амплитудно-частотные характеристики фильтров:
 а) ПФ (1: $a_1=-1, a_2=-1$; 2: $a_1=1, a_2=-1$; 3: $a_1=0, a_2=-1$);
 б) РФ (1: $a_1=-0.5, a_2=0.5$; 2: $a_1=0, a_2=0.5$; 3: $a_1=0.5, a_2=0.5$)

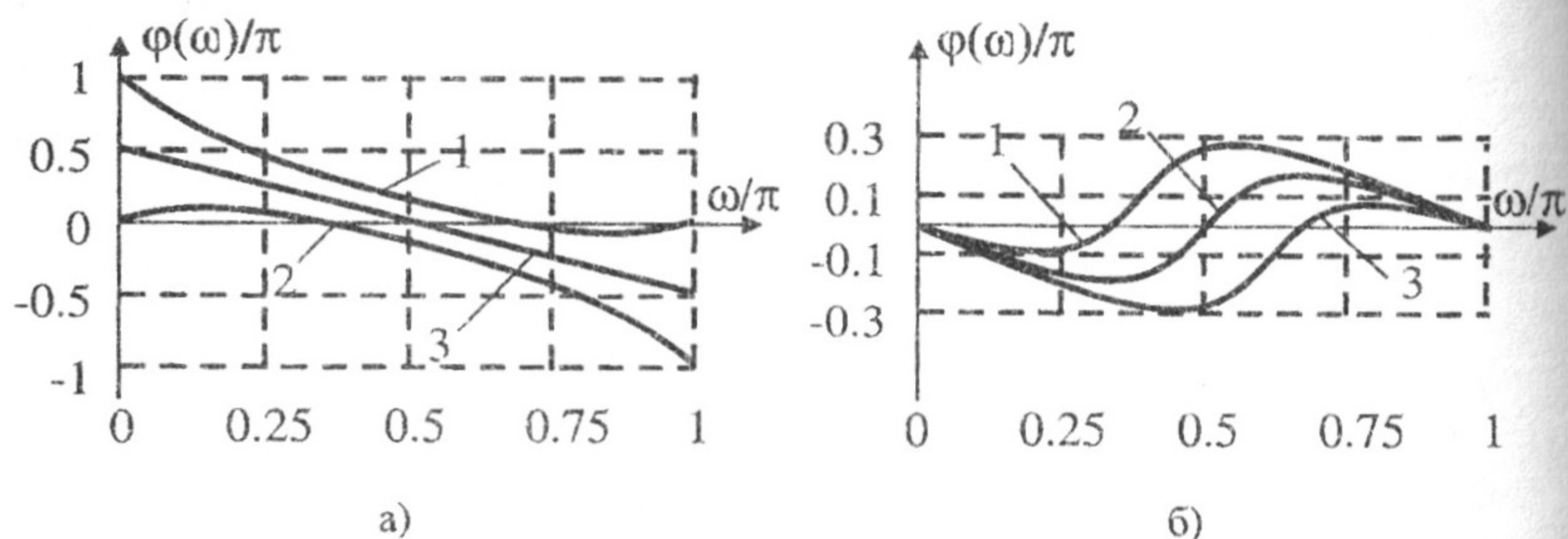


Рис. 3.15. Фазочастотные характеристики фильтров:
 а) ПФ (1: $a_1=-1, a_2=-1$; 2: $a_1=1, a_2=-1$; 3: $a_1=0, a_2=-1$);
 б) РФ (1: $a_1=-0.5, a_2=0.5$; 2: $a_1=0, a_2=0.5$; 3: $a_1=0.5, a_2=0.5$)

Получаемая из (3.11) функция

$$H^2(b) = Ab^2 + Bb + C$$

является квадратным трехчленом, который приводится к параболе

$$H^2(b) = A \left(b + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A}$$

с координатами вершины $M(\alpha, \beta) = M \left(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A} \right)$.

При $a_2 > 0$ (режекторный фильтр) ветви параболы направлены вверх, а при $a_2 < 0$ (полосовой фильтр) – вниз. Это означает, что резонансная частота полосового и режекторного фильтров выражается зависимостью

$$\omega_p = \arccos(b_p) = \arccos\left(-\frac{B}{2A}\right) = \arccos\left(-\frac{a_1(1+a_2)}{4a_2}\right).$$

Покажем на рис. 3.16 графики зависимости $\omega_p(a_1)$ для режекторного ($a_2 = 1$) и полосового ($a_2 = -0.5$) фильтров.

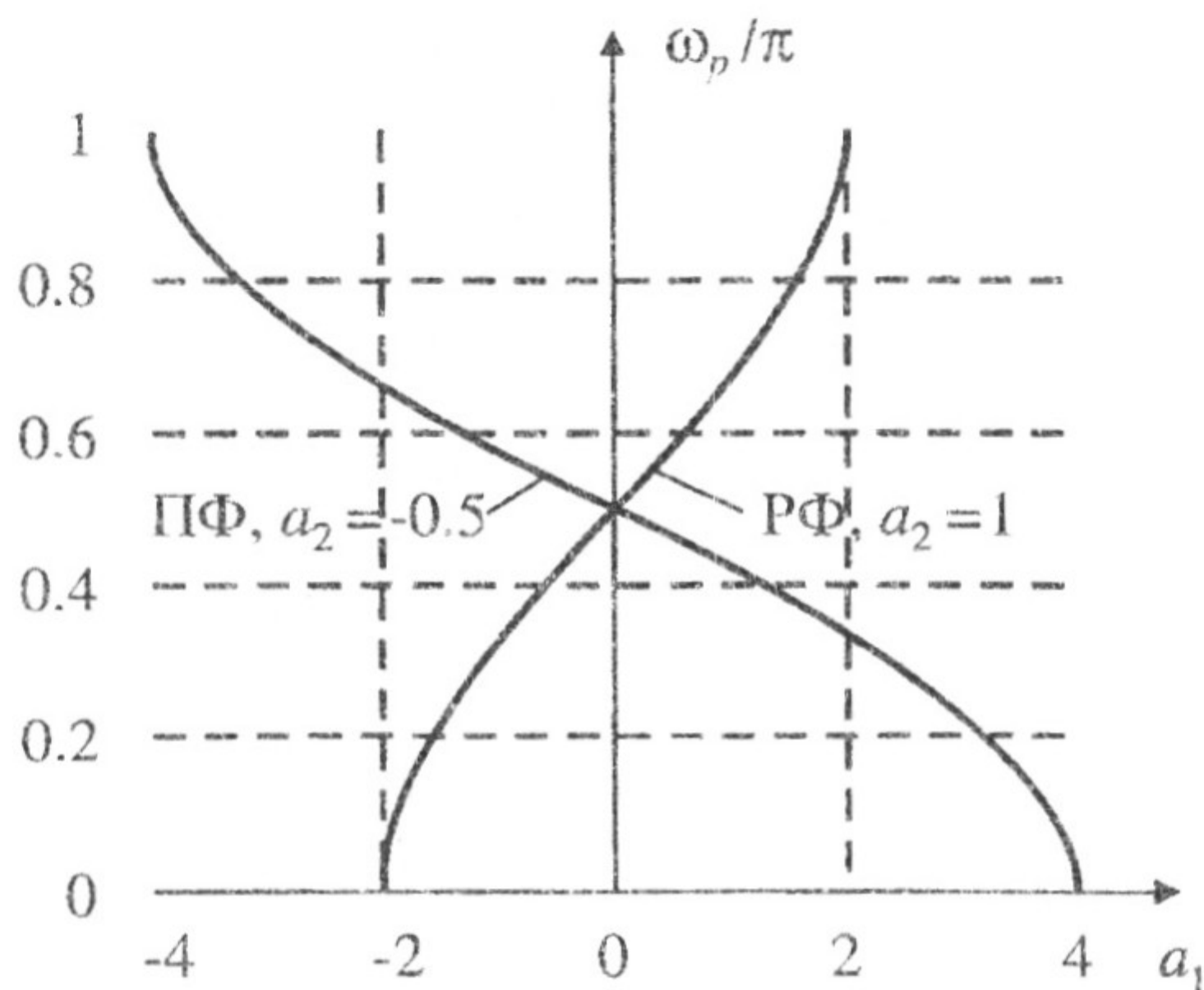


Рис. 3.16. Графики зависимостей резонансной частоты от параметров фильтров

Резонансное значение квадрата АЧХ равно

$$H^2(b_p) = \beta = \frac{4AC - B^2}{4A} = C - \frac{B^2}{4A^2} A = C - b_p^2 A.$$

Нормированная АЧХ выражается зависимостью

$$\frac{H(b)}{H(b_p)} = \sqrt{\frac{Ab^2 + Bb + C}{\beta}}.$$

Резонансные свойства полосового и режекторного фильтров принято оценивать с помощью добротности, вычисляемой по формуле:

$$Q = \frac{\omega_p}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\arccos(b_p)}{\arccos(b_2) - \arccos(b_1)}.$$

Здесь величины $\omega_{1,2}$, $b_{1,2}$ соответствуют границам полосы:

1) пропускания в полосовом фильтре по уровню $1/\sqrt{2}$ от максимального уровня АЧХ;

2) подавления (задерживания) в режекторном фильтре по уровню $\sqrt{2}$ от минимального уровня АЧХ.

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{Ab_{1,2}^2 + Bb_{1,2} + C}{\beta} = \frac{1}{2},$$

получим для полосового фильтра

$$b_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{2}}}{2A}.$$

Из соотношения

$$\frac{Ab_{1,2}^2 + Bb_{1,2} + C}{\beta} = 2,$$

для режекторного фильтра получим

$$b_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{4AC - B^2}}{2A}.$$

Заметим, что в режекторном фильтре при $a_2 = 1$ понятие добротности не существует, так как при этом $H(b_p) = 0$. Покажем на рис. 3.17 график зависимости $Q(a_2)$ для режекторного фильтра.

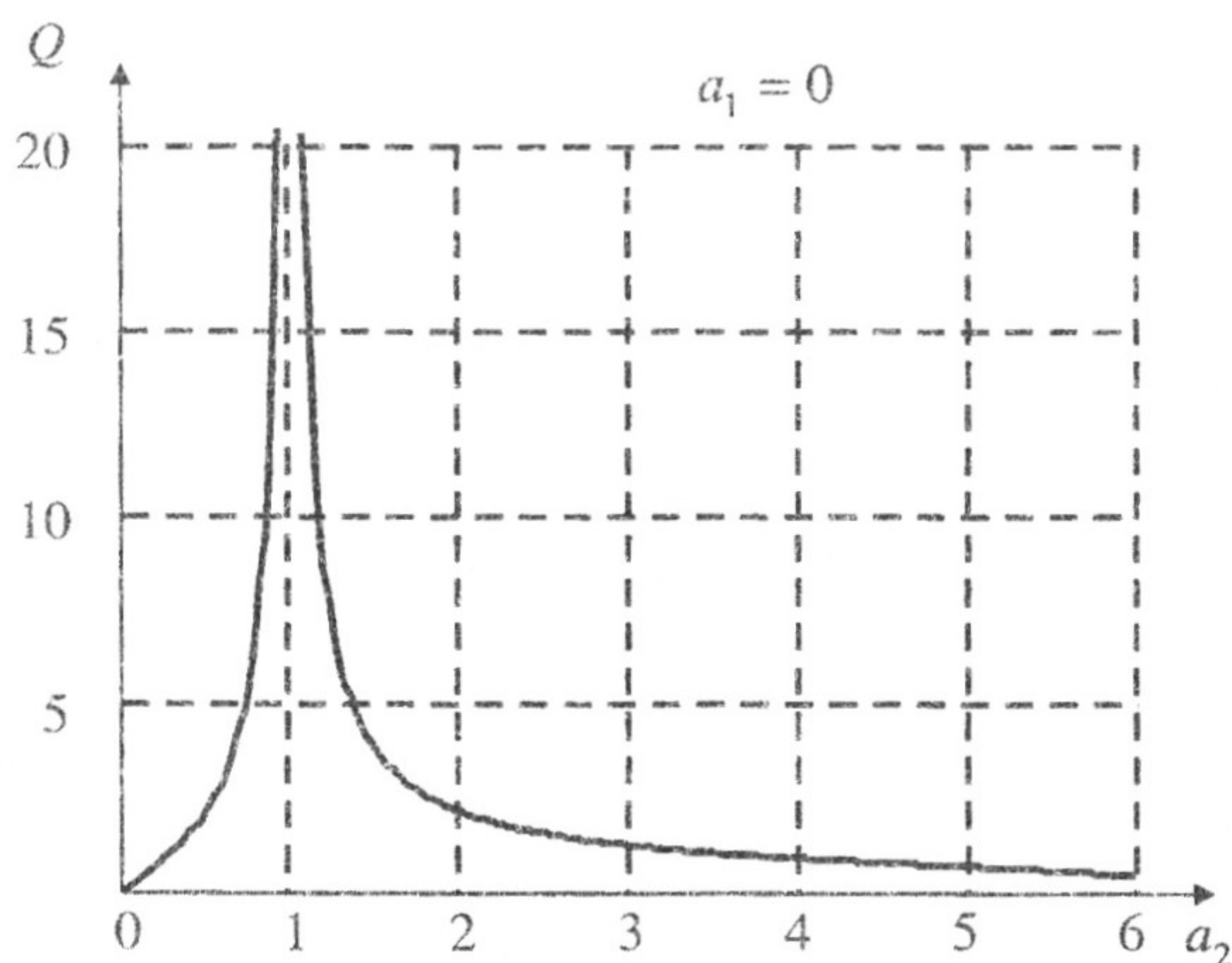


Рис. 3.17. График зависимости добротности от параметров режекторного фильтра

3.5.2. Временные характеристики

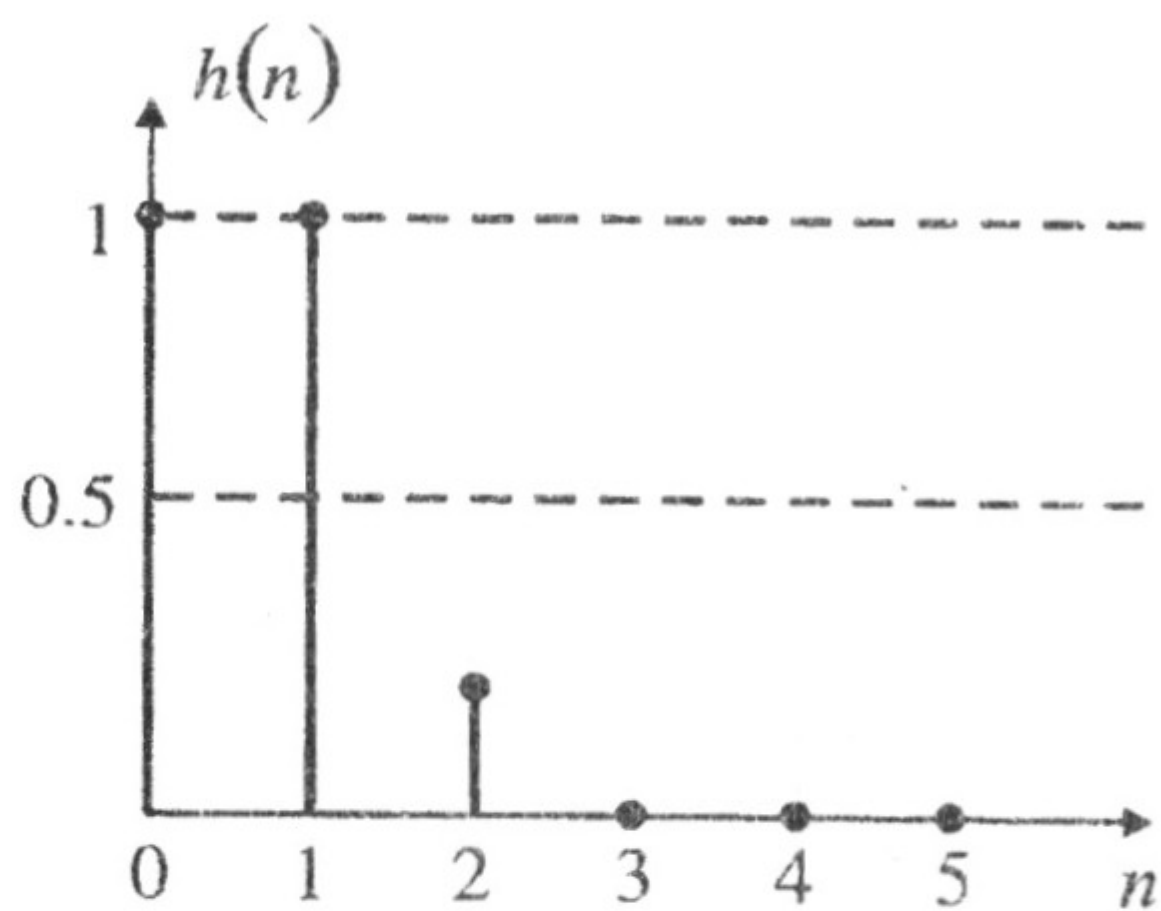
Выражения для импульсной и переходной характеристик получаются прямой подстановкой входного воздействия в разностное уравнение (3.7).

Импульсная характеристика

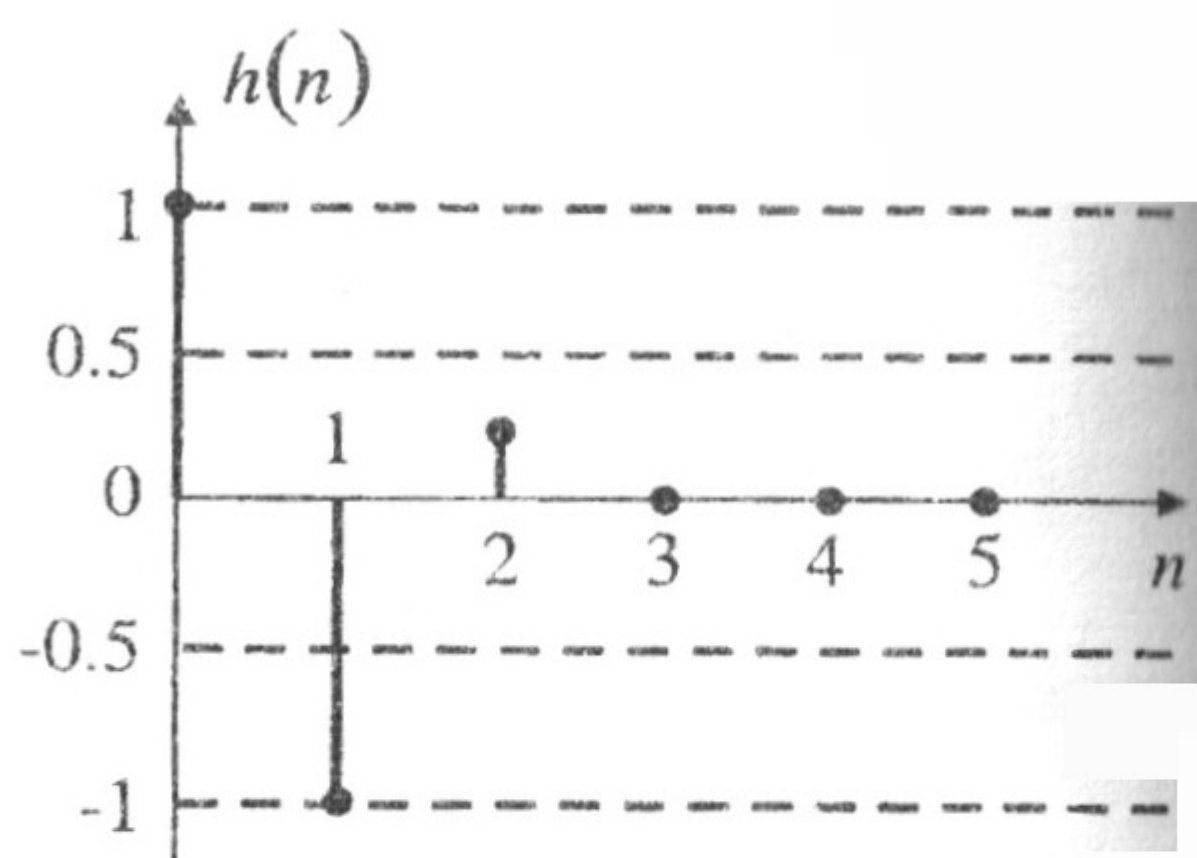
Импульсная характеристика определяется зависимостью

$$h(n) = \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2).$$

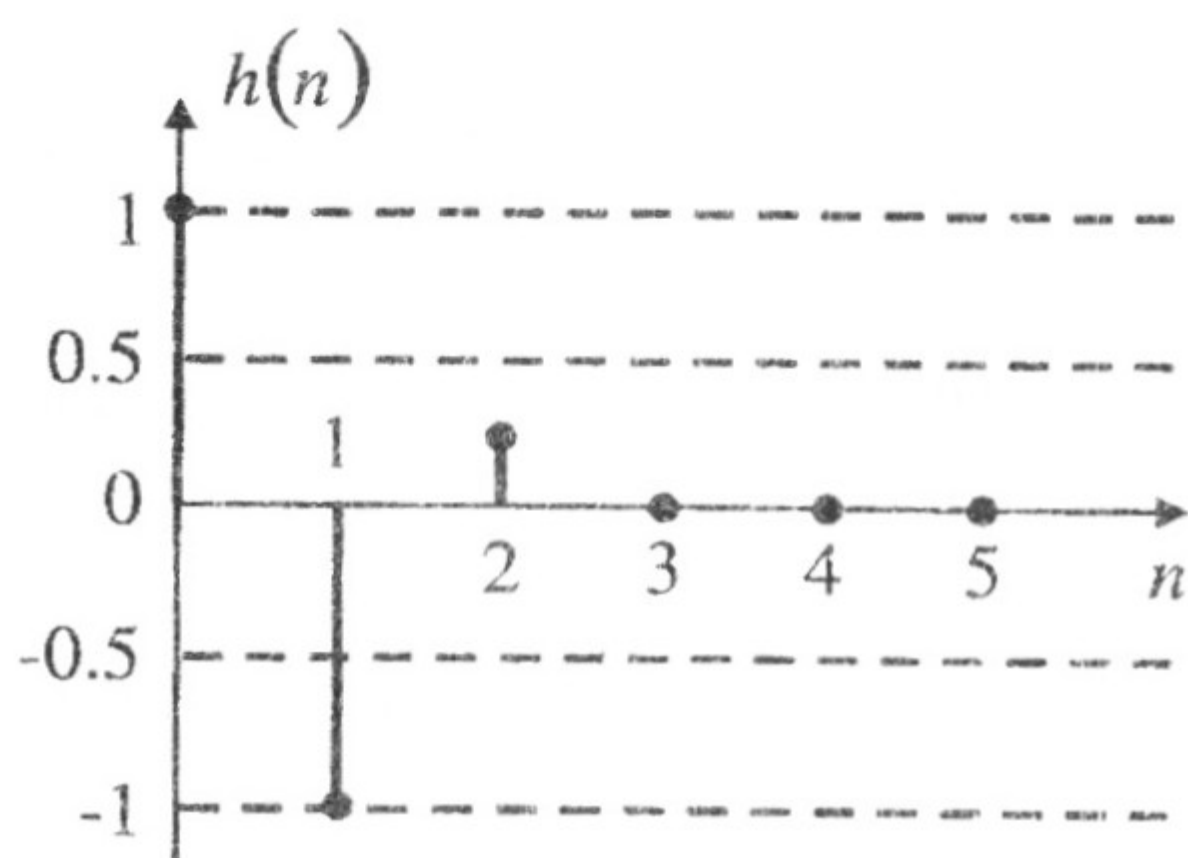
На рис. 3.18а, б, в, г приведены графики импульсной характеристики соответственно ФНЧ с параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = 0.2$, ФВЧ с параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = -0.2$, ПФ с параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, РФ с параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.



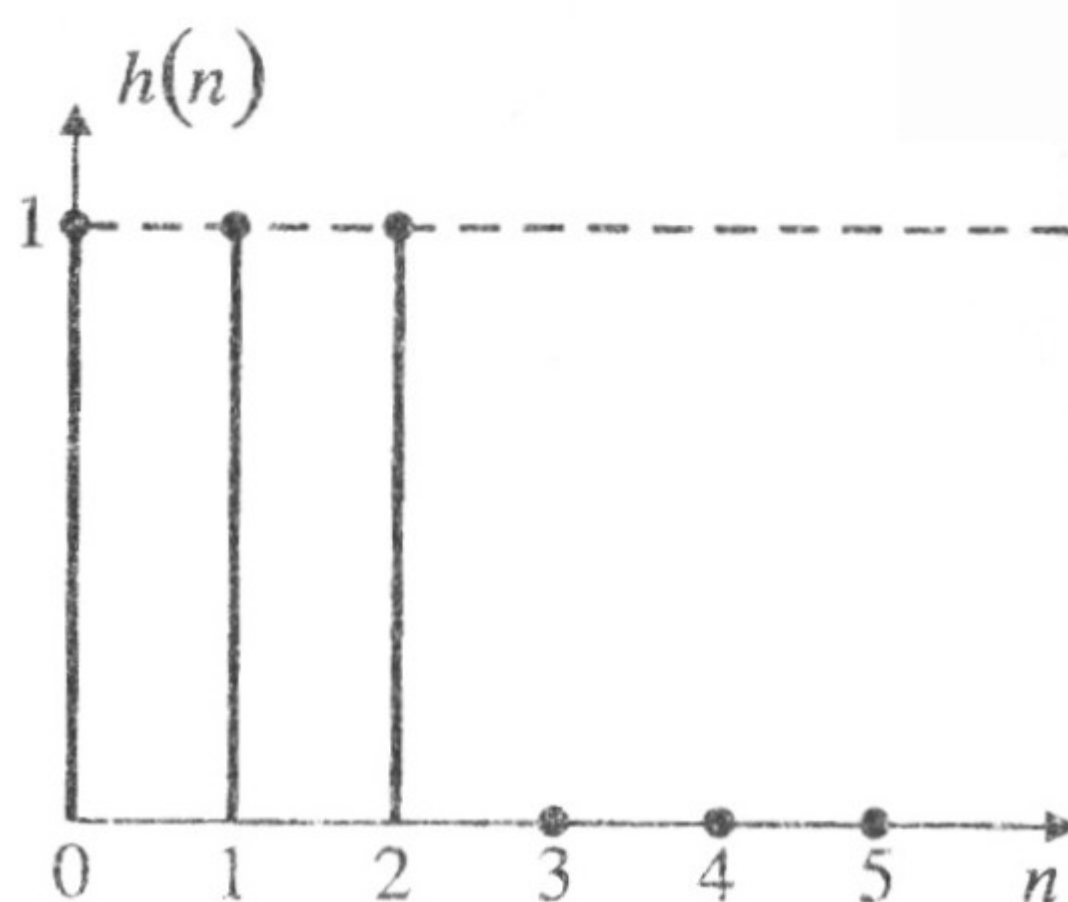
а)



б)



в)



г)

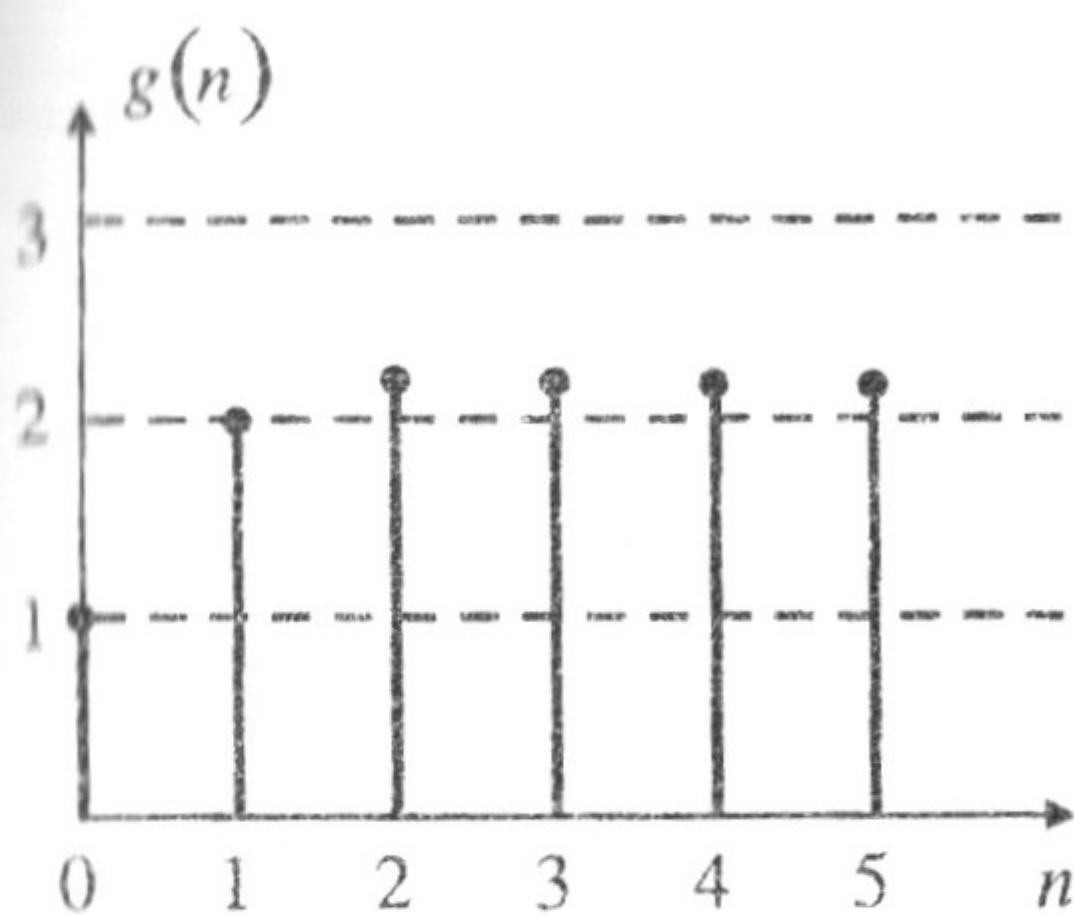
Рис. 3.18. Импульсные характеристики нерекурсивной цепи второго порядка

Переходная характеристика

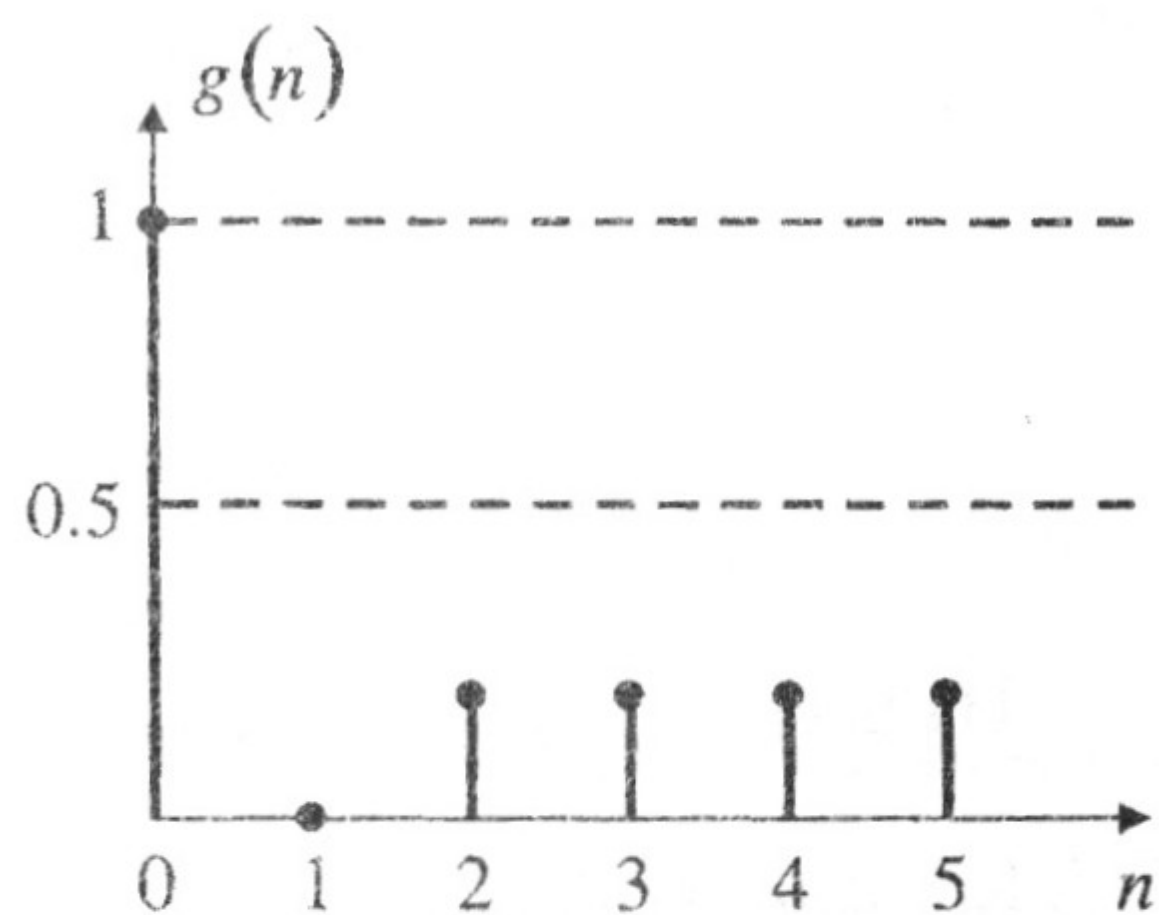
Переходная характеристика равна

$$g(n) = l(n) + a_1 l(n-1) + a_2 l(n-2).$$

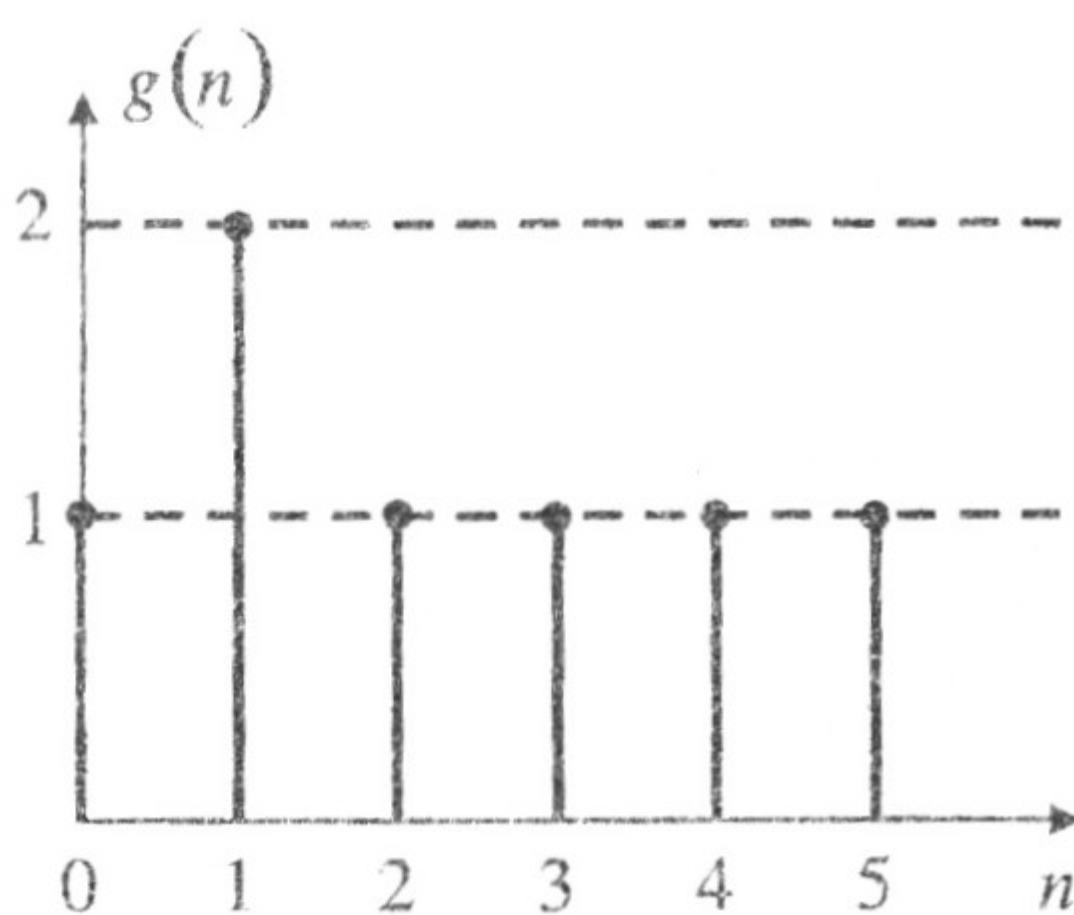
На рис. 3.19а, б, в, г приведены графики переходной характеристики соответственно ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ с вышеуказанными параметрами.



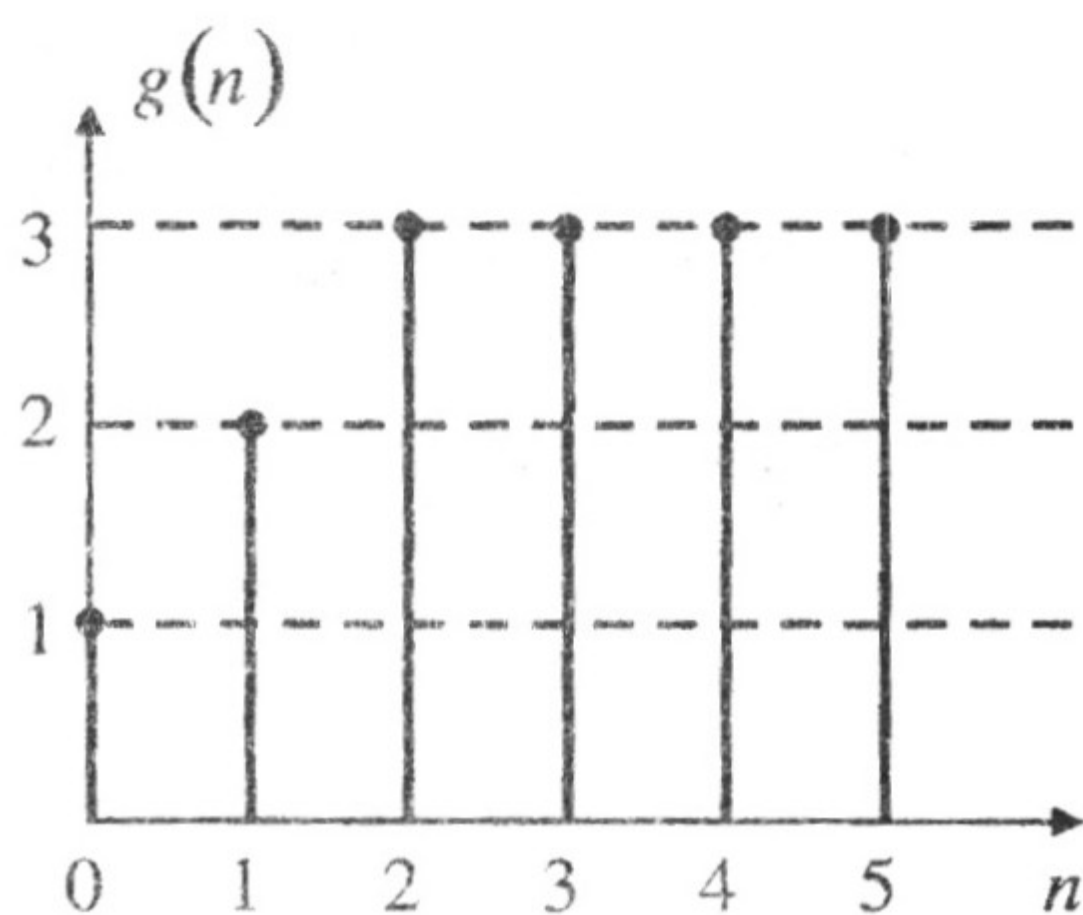
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.19. Переходные характеристики нерекурсивной цепи второго порядка

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Вход ЛИС-системы задается выражением

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n) + 2^n 1(-n-1),$$

а её выход равен

$$y(n) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n) - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n 1(n).$$

Проверить систему на устойчивость. Определить передаточную функцию $H(z)$.

3.2. Если вход ЛИС-системы равен

$$x(n) = 2 \cdot 1(n),$$

то её выход

$$y(n) = \left[4 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 3 \left(-\frac{3}{4} \right)^n \right] \cdot 1(n).$$

Найдите отклик системы на единичный импульс.

3.3. Каузальная ЛИС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) = \frac{1}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) + x(n) - x(n-1).$$

Вычислить передаточную функцию $H(z)$ и импульсную характеристику $h(n)$.

3.4. Каузальная ЛИС-система имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}.$$

Найти z -преобразование входной последовательности $x(n)$, при которой выходная последовательность имеет вид

$$y(n) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n 1(n) - \frac{4}{3} (2)^n 1(-n-1).$$

3.5. Результатом синтеза фильтра с использованием ЭВМ является фильтр второго порядка с передаточной функцией вида

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.33z^{-2}}.$$

Показать, что данный фильтр является неустойчивым, и найти каузальный устойчивый фильтр, который имеет ту же амплитудно-частотную характеристику, что и синтезированный фильтр.

3.6. Пусть $H(z)$ – устойчивый каузальный фильтр с передаточной функцией вида

$$H(z) = A \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}.$$

а) Построить нуль-полосную диаграмму по заданной передаточной функции и, используя геометрические соображения, показать, что, если $r \approx 1$, система является узкополосным режекторным фильтром (фильтр-пробка).

б) На какой частоте $|H(e^{j\omega})|$ достигает своего максимального значения?

3.7. Сигнал $y(n)$ представляет совокупность трех сигналов: $x(n)$ и двух его задержек на n_d и $2n_d$ отсчетов соответственно, то есть

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n - n_d) + \frac{1}{4}x(n - 2n_d).$$

Найти реализуемый фильтр, который будет преобразовывать сигнал $y(n)$ в $x(n)$.

3.8. Входная последовательность для каузальной ЛИС-системы имеет вид

$$x(n) = 1(-n - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n).$$

z-преобразование выходной последовательности данной системы представлено следующим выражением:

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})}.$$

Найти передаточную функцию $H(z)$ данной системы.

3.9. Каузальный, линейный инвариантный к сдвигу фильтр имеет передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2 \left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)}.$$

Определить, является ли данный фильтр устойчивым?

3.10. Дана передаточная функция фильтра второго порядка

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1} + 0.3z^{-2}}.$$

При каких значениях параметра a фильтр будет устойчивым?

3.11. Цифровой фильтр задан передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}.$$

Найти реакцию фильтра на входное воздействие $x(n) = (-1)^n$

3.12. Известна переходная характеристика цифрового фильтра

$$g(n) = 1 - b^{n+1}.$$

Определить его передаточную функцию.

3.13. Цифровой фильтр нижних частот задан передаточной функцией

$$H(z) = 1 + z^{-1}.$$

Определить реакцию фильтра на входное воздействие $x(n) = 0.9^n$.

3.14. Цифровой фильтр верхних частот задан передаточной функцией

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Определить выходной эффект при действии на входе последовательностей:

а) $x(n) = n$;

б) $x(n) = n^2$, где n – целое число и $n \geq 1$.

3.15. Цифровой фильтр задан передаточной функцией

$$H(z) = 1.4 \cdot \frac{1 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.7z^{-2}}.$$

С использованием выражения для $H(z)$ составлено разностное уравнение

$$y(n) = 1.4[x(n) + 0.6x(n-1) - 0.4x(n-2)] - 0.8y(n-1) + 0.7y(n-2).$$

Найти ошибки, которые содержит эта запись.

3.16. Рассматривается БИХ-фильтр первого порядка, импульсная характеристика которого $h(n) = b^n$. Определить отклик этого фильтра на входную последовательность $x(n) = b^n$.

3.17. Цифровой фильтр задан передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.85z^{-1} + 0.7225z^{-2}}.$$

Изобразить нуль-полюсную диаграмму и примерный вид графика АЧХ.

3.18. Цифровой фильтр задан передаточной функцией

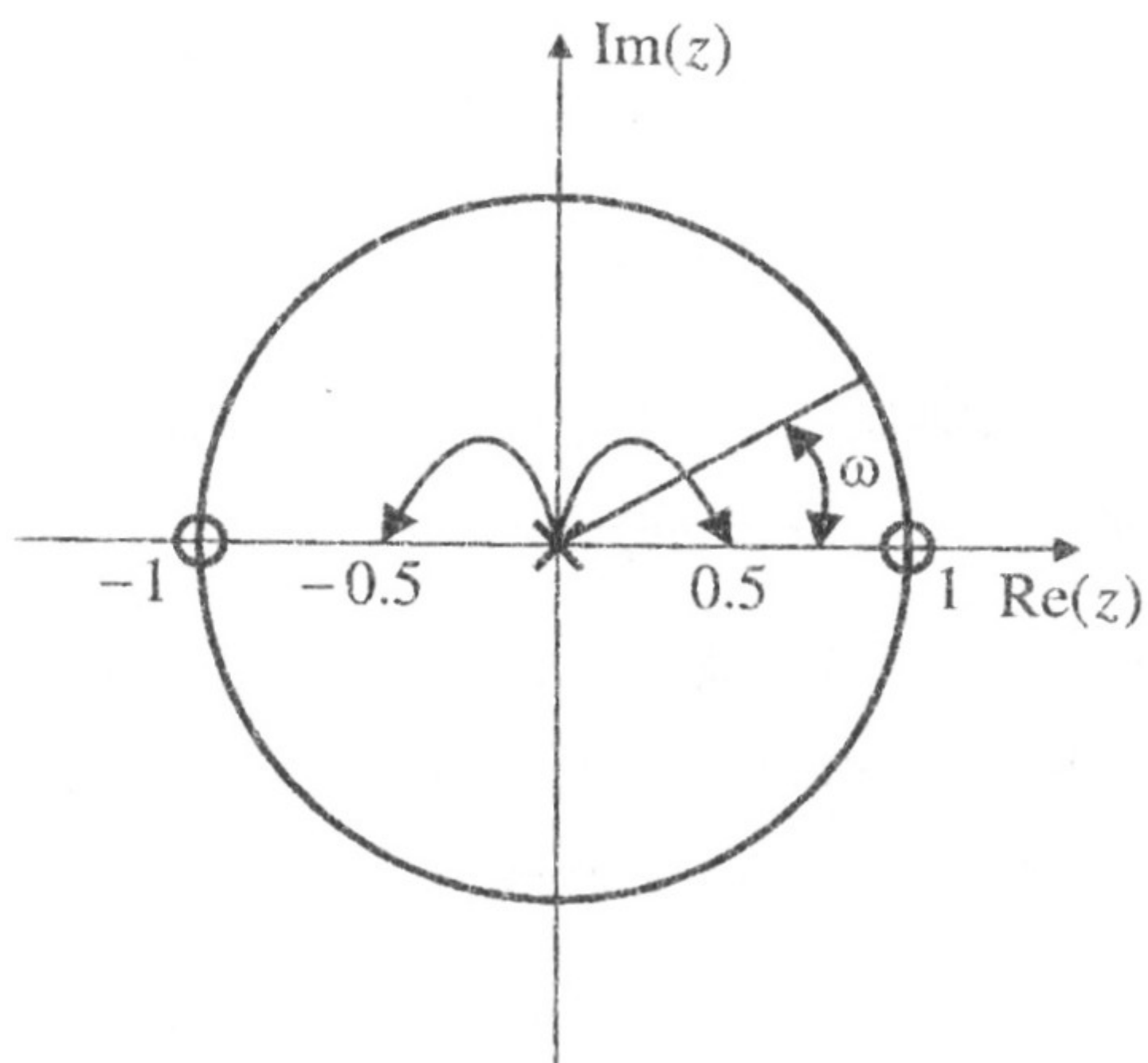
$$H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0.81z^{-1}}.$$

Изобразить примерный вид графика АЧХ этого фильтра.

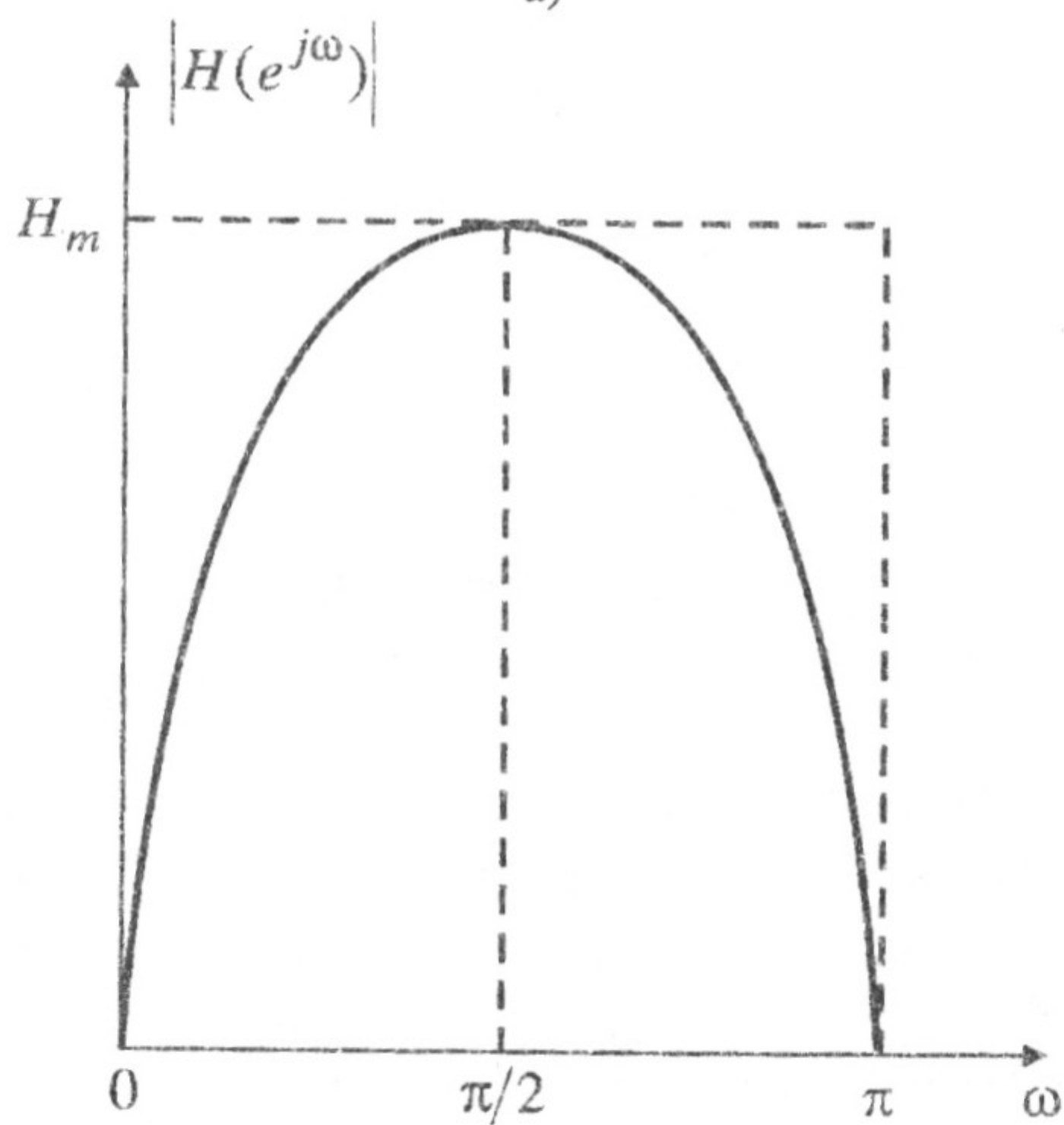
3.19. На рис. 3.20 изображены нуль-полюсная диаграмма и амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра. Диаграмма содержит два нуля с координатами -1 и 1 и два полюса в начале координат (в центре круга). Определить, увеличится или уменьшится значение H_m , если полюсы из центра круга сместить в точки $z_{1,2} = \pm 0.5$.

3.20. К какому типу фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ) относится цифровой фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.966z^{-1} + 0.25z^{-2}}.$$



а)



б)

Рис. 3.20. Характеристики к задаче 3.19:
а) нуль-полусная диаграмма цифрового фильтра;
б) амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра

3.21. Цифровой фильтр задан передаточной функцией

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2},$$

где $\alpha_2 = 1$. Как влияет коэффициент α_1 на ФЧХ этого фильтра?

3.22. Два цифровых КИХ-фильтра имеют различные передаточные функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$:

$$H_1(z) = 0.5(1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}),$$

$$H_2(z) = 0.4(1 - 2.1z^{-1} + 1.12z^{-2}).$$

Однако их амплитудно-частотные характеристики совершенно одинаковы, как это показано на рис. 3.21, где совпадающие амплитудно-частотные характеристики обозначены как $|H_{1,2}(e^{j\omega})|$.

Как это объяснить?

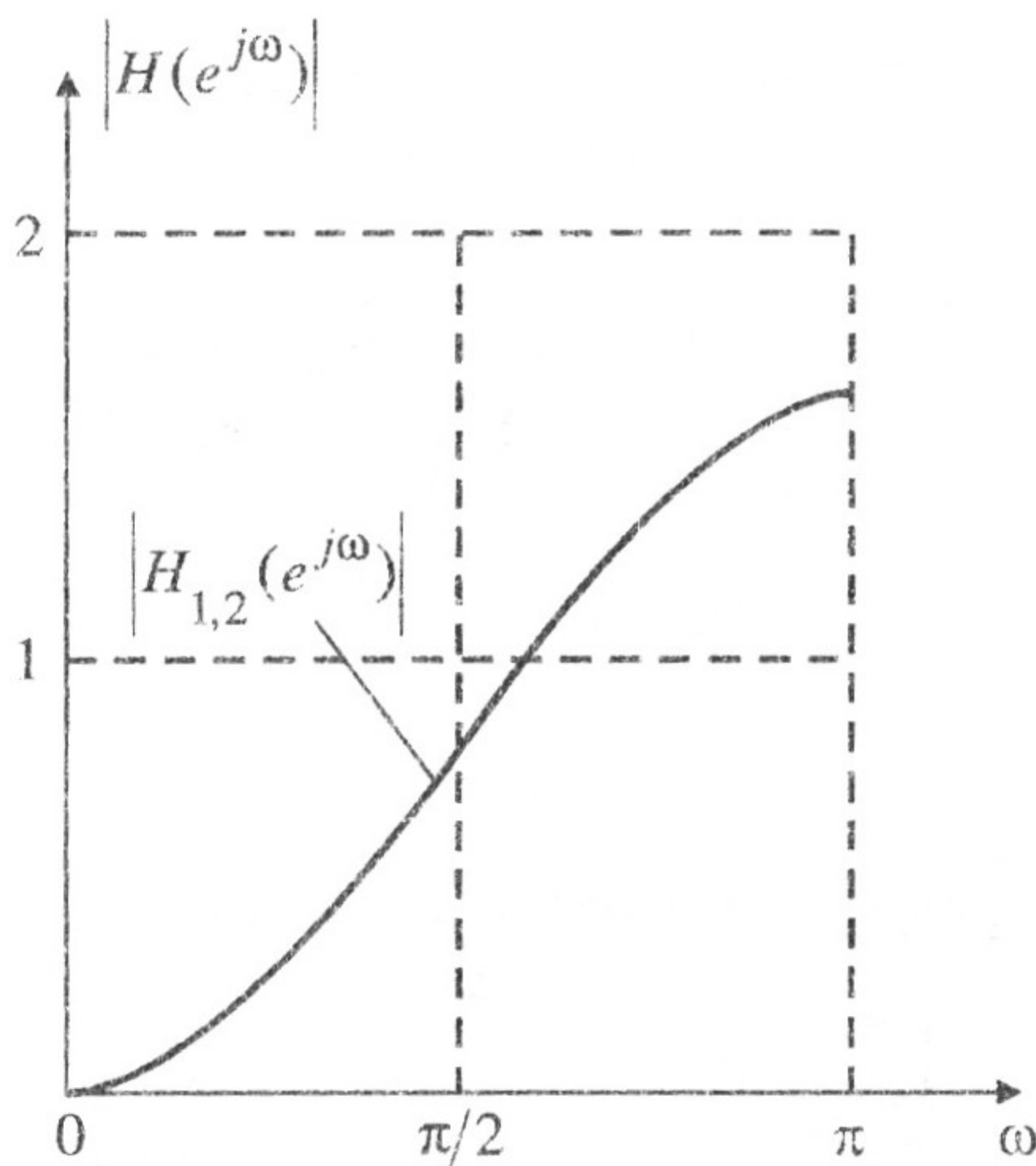


Рис. 3.21. Совпадающие амплитудно-частотные характеристики фильтров

3.23. Составить структурную схему цифрового фильтра с передаточной функцией:

$$H(z) = \frac{5.76}{1 - 1.79z^{-1} + 0.801z^{-2}}.$$

3.24. Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой 1-го порядка задан передаточной функцией:

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}.$$

Определить переходную характеристику этого цифрового фильтра.

3.25. Используя формулы обратного z -преобразования, определить импульсную характеристику БИХ-фильтра второго порядка, передаточная функция которого имеет два некрратных полюса:

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

3.26. Составить выражения для передаточных функций цифровых фильтров, структурные схемы которых показаны на рис. 3.22.

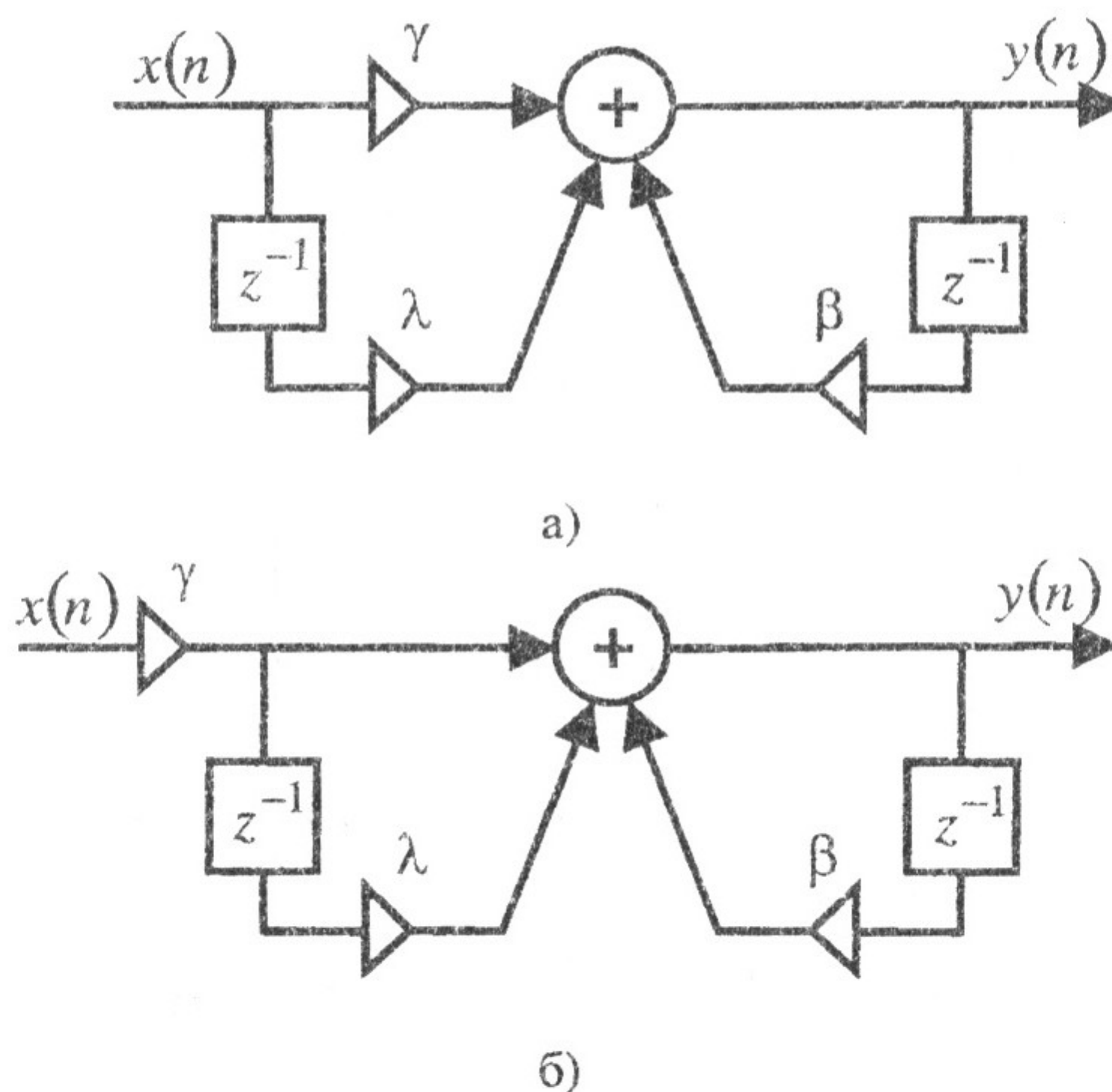


Рис. 3.22. Структурные схемы к задаче 3.26

3.27. Передаточная функция системы дискретного времени имеет полюсы в точках $z = 0.5$, $z = 0.1 \pm 0.2i$ и нули в точках $z = -1$ и $z = 1$.

а) Изобразите диаграмму нулей и полюсов для этой системы.

- б) Выведите из диаграммы нулей и полюсов передаточную функцию $H(z)$ системы.
- в) Запишите разностное уравнение.
- г) Изобразите схему реализации в виде структурной схемы.

3.28. Дана спецификация частотной характеристики полосового фильтра дискретного времени в нормированном виде:

- 1) Полоса пропускания: $0.4\pi - 0.6\pi$.
- 2) Полосы подавления: $0 - 0.3\pi$ и $0.7\pi - \pi$.
- 3) Интервал дискретизации $T = 100$ мкс.
- а) Выразите эту спецификацию в рад/с (денормируйте ее).
- б) Переведите спецификацию из рад/с в стандартные единицы – герцы.
- в) Переведите спецификацию из герц в нормированный вид.
- г) Изобразите частотные характеристики для всех трёх случаев на интервале от 0 до частоты дискретизации.

3.29. Требуется фильтр нижних частот со следующей спецификацией:

- 1) Частота среза 1 кГц.
- 2) Частота дискретизации 10 кГц.
- а) Определите и изобразите подходящую диаграмму нулей и полюсов для этого фильтра.
- б) Найдите передаточную функцию фильтра по его диаграмме нулей и полюсов.
- в) Определите амплитудную и фазовую характеристику при частоте 1, 2.5 и 5 кГц.
- г) Изобразите амплитудно-частотную характеристику.

3.30. Передаточная функция некоторой системы определяется как

$$H(z) = \frac{(1 - 1.094621z^{-1} - z^{-2})(1 - 0.350754z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 1.340228z^{-1} + 0.796831z^{-2})(1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2})}.$$

- а) Найдите полюсы и нули и изобразите диаграмму нулей и полюсов.
- б) Определите, устойчива система или нет, и обоснуйте свой ответ.

3.31. Выразите следующую передаточную функцию через ее полюсы и нули и постройте диаграмму нулей и полюсов:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 1.75z^{-1} + 1.25z^{-2} - 0.357z^{-3}}.$$

3.32. Найдите передаточную функцию $H(z)$ фильтра дискретного времени, диаграмма нулей и полюсов которого показана на рис. 3.23.

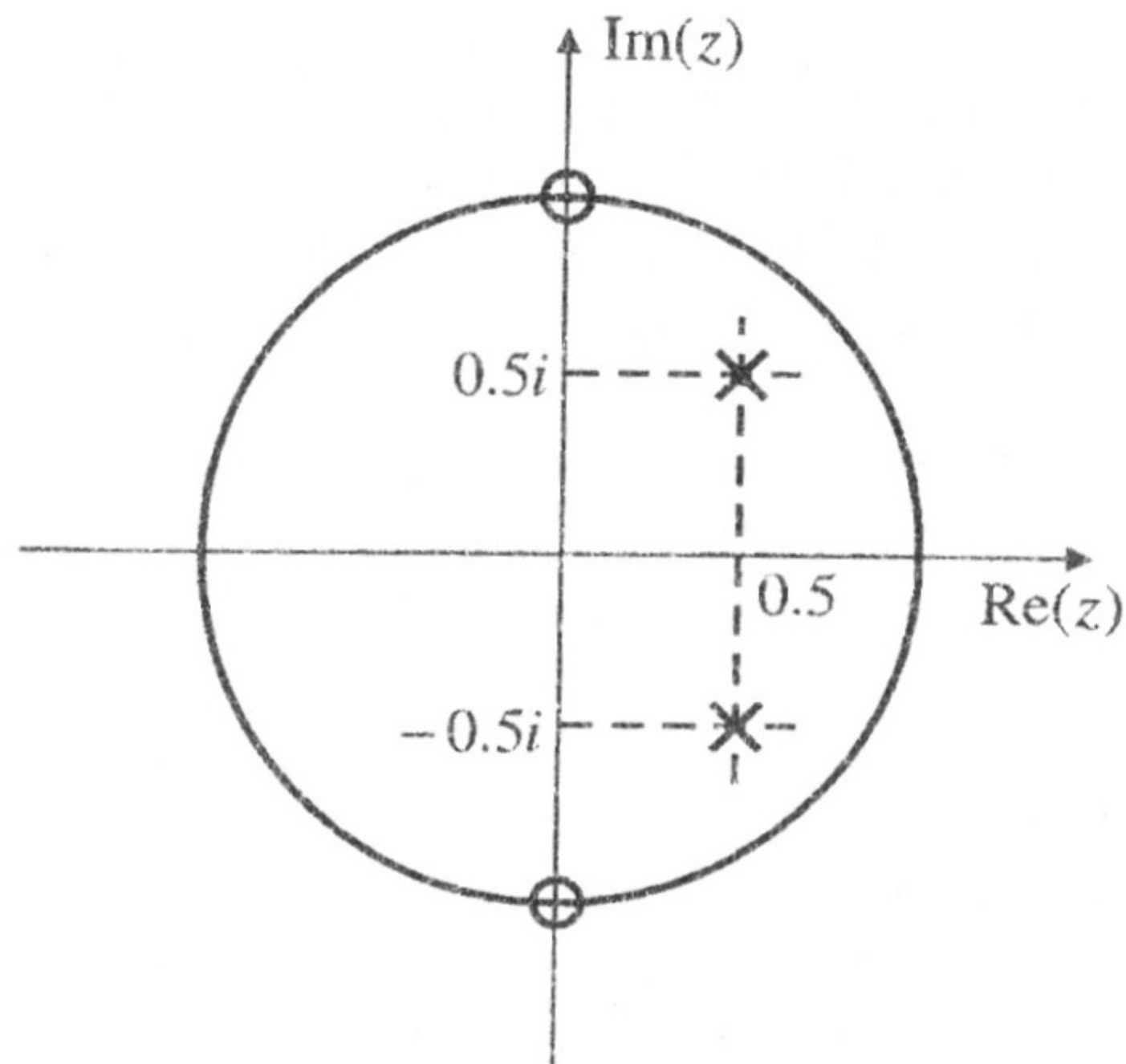


Рис. 3.23. Диаграмма нулей и полюсов

4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

4.1. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Определение 4.1. *Линейная инвариантная к сдвигу система является системой с линейной ФЧХ, если ее частотная характеристика имеет вид*

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega}, \quad (4.1)$$

где α – вещественная константа.

Системы с линейной ФЧХ имеют постоянную групповую задержку

$$\tau(\omega) = \alpha.$$

Пример 4.1

Рассмотрим КИХ-фильтр с импульсной характеристикой вида

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Его частотная характеристика равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Согласно условию (4.1) данный фильтр является системой с линейной ФЧХ, где $\alpha = N/2$.

В общем случае, для того, чтобы КИХ-фильтр с длиной импульсной характеристики в $N+1$ отсчетов характеризовался линейной ФЧХ, достаточным является условие симметрии импульсной характеристики:

$$h(n) = h(N - n).$$

Также достаточным является и условие антисимметрии импульсной характеристики:

$$h(n) = -h(N - n).$$

Фильтры с линейной ФЧХ могут быть классифицированы на 4 типа в зависимости от симметрии или антисимметрии импульсной

характеристики $h(n)$, а также четности или нечетности N . Каждый из этих типов имеет собственные ограничения на расположение нулей передаточной функции $H(z)$, которая в свою очередь накладывает ограничения на характер частотной характеристики. Рассмотрим их более подробно.

4.1.1. Фильтры типа I – симметричная импульсная характеристика, N – четное

Центр симметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$, выражаемой целым числом, как проиллюстрировано на рис. 4.1а. Частотная характеристика фильтра типа I с линейной ФЧХ выражается следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=0}^{N/2} a(k) \cos(k\omega),$$

где $a(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, $a(0) = h\left(\frac{N}{2}\right)$.

4.1.2. Фильтры типа II – симметричная импульсная характеристика, N – нечетное

Центр симметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$, при этом α не является целым числом, как показано на рис. 4.1б. Частотная характеристика фильтра типа II с линейной ФЧХ может быть представлена в виде

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} b(k) \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

где $b(k) = 2h\left(\frac{N+1}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{(N+1)}{2}$.

4.1.3. Фильтры типа III – антисимметричная импульсная характеристика, N – четное

Центр антисимметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$, выражаемой целым числом, как показано на рис. 4.1в. Частотная характеристика фильтра типа III с линейной ФЧХ может быть представлена в виде

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jN\omega/2} \sum_{k=1}^{N/2} c(k) \sin(k\omega),$$

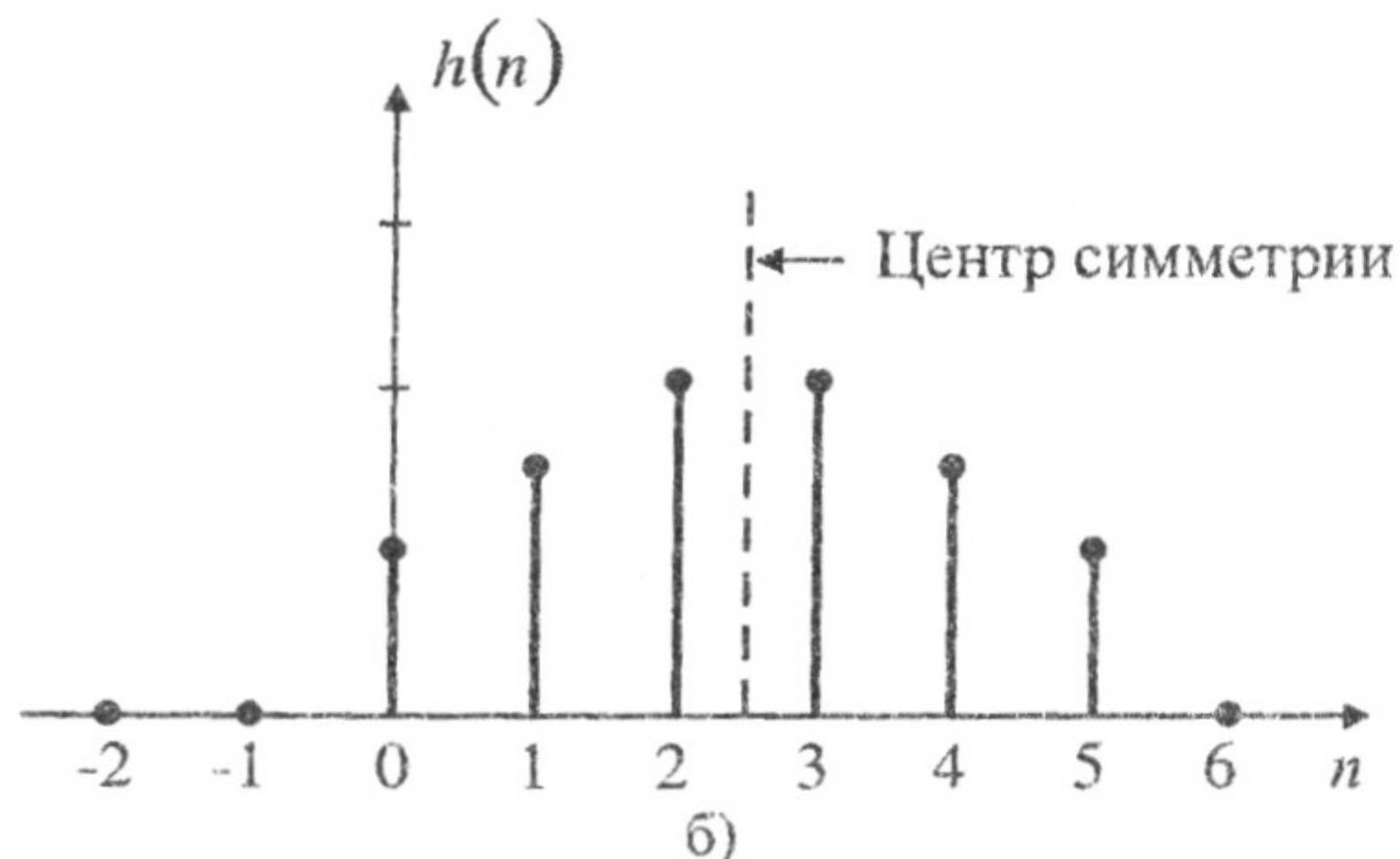
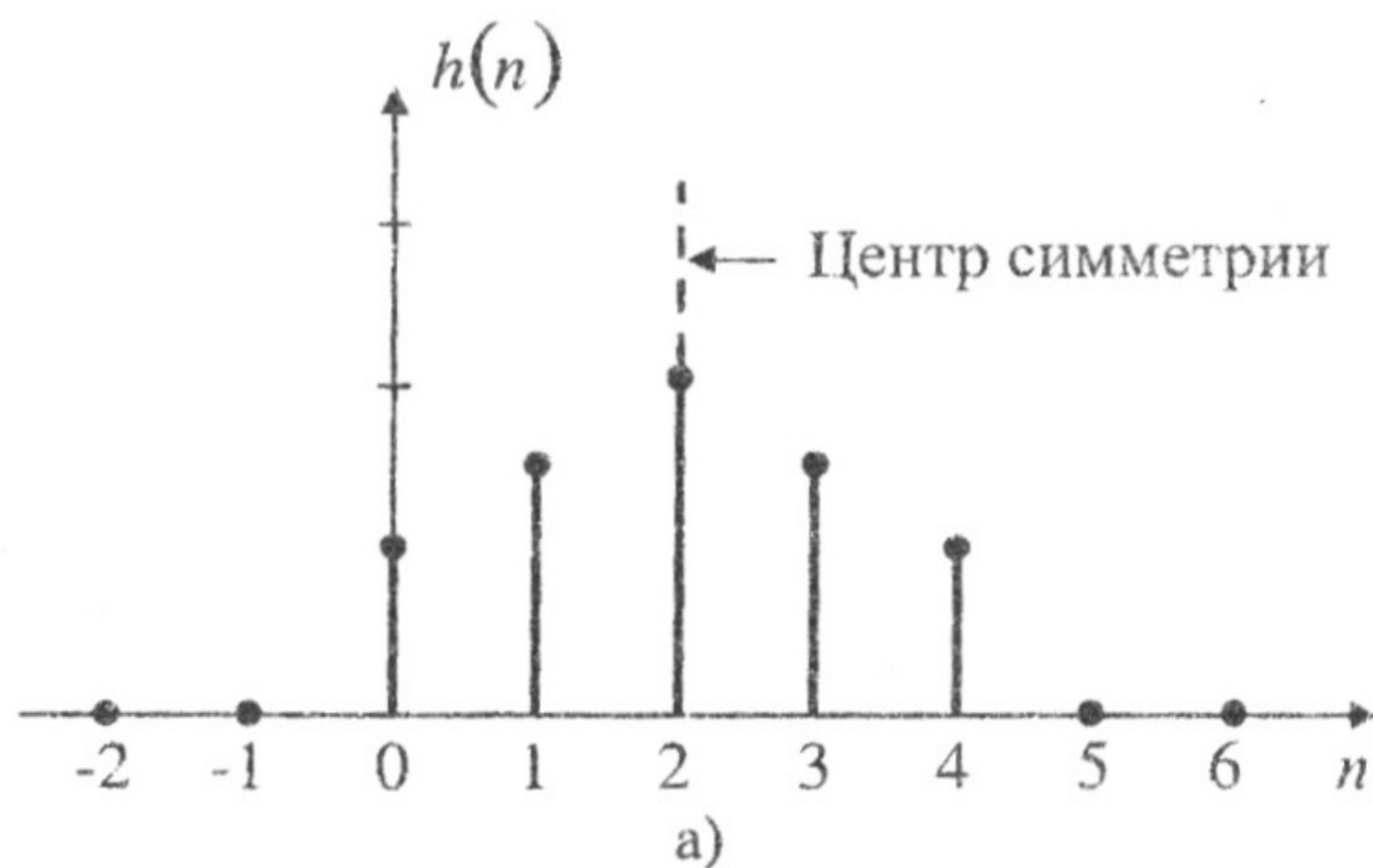
где $c(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$.

4.1.4. Фильтры типа IV – антисимметричная импульсная характеристика, N – нечетное

Центр антисимметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$, при этом α не является целым числом, как показано на рис. 4.1г. Частотная характеристика фильтра типа IV с линейной ФЧХ может быть представлена в виде

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jN\omega/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} d(k) \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

где $d(k) = 2h\left(\frac{N+1}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{(N+1)}{2}$.



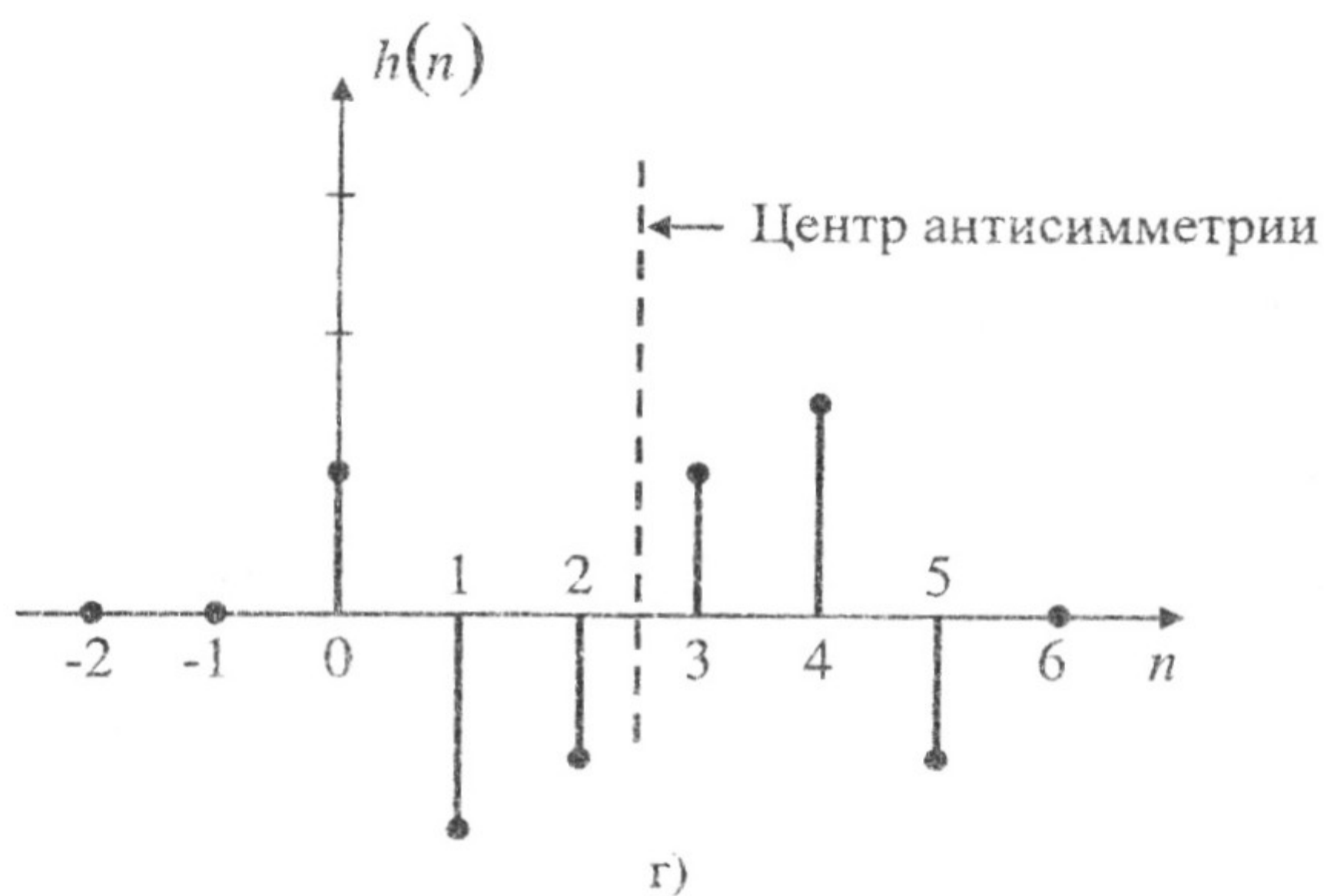
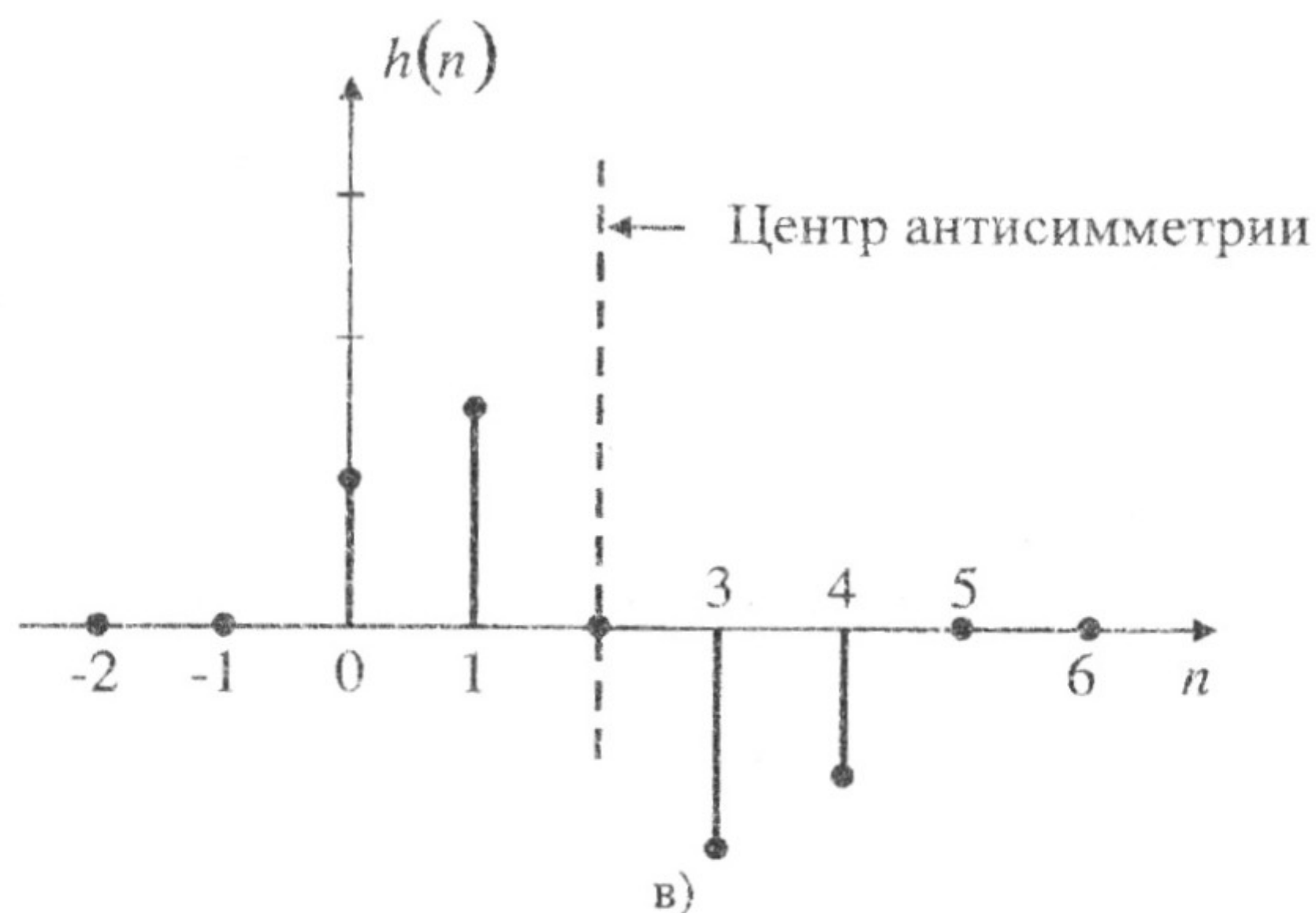


Рис. 4.1. Виды импульсных характеристик КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

4.1.5. Расположение нулей КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Свойства симметрии импульсной характеристики накладывают ограничения на передаточную функцию $H(z)$. Для фильтров типов I и II, где $h(n) = h(N - n)$, следует

$$H(z) = z^{-N} H(z^{-1}).$$

Аналогично для фильтров типов III и IV, где $h(n) = -h(N - n)$, следует

$$H(z) = -z^{-N} H(z^{-1}).$$

В обоих случаях, если $H(z) = 0$ при $z = z_0$, то при $z = 1/z_0$ также выполняется условие $H(z) = 0$. Следовательно, нули $H(z)$ симметричны относительно вещественной оси на нуль-поллюсной диаграмме. Кроме того, поскольку $h(n)$ предполагается вещественной, нули являются комплексно-сопряженными.

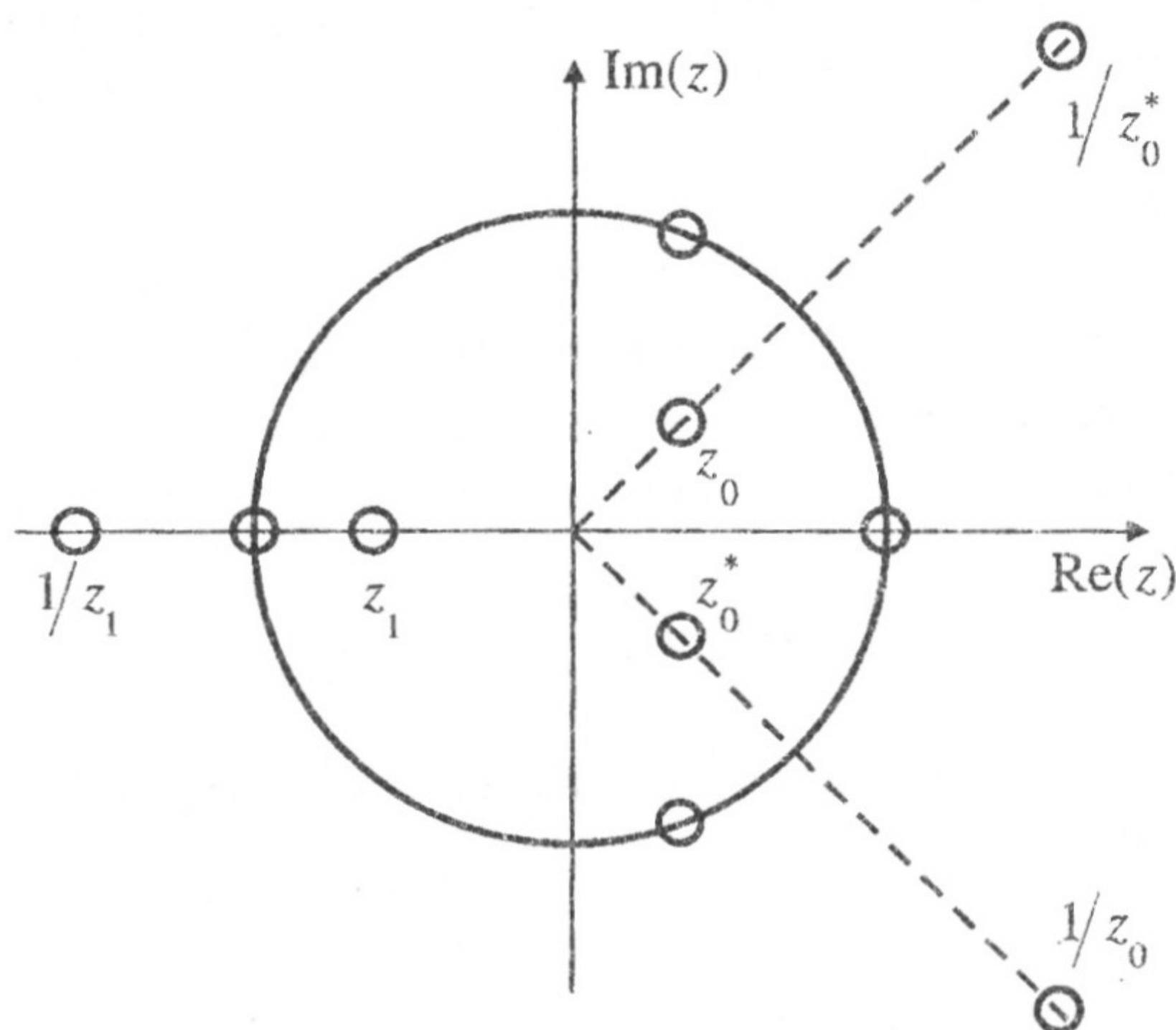


Рис. 4.2. Ограничения на нули передаточной функции КИХ-фильтра с линейной ФЧХ и вещественной импульсной характеристикой (фильтры типов III и IV должны иметь нуль при $z = 1$, в то время как фильтры типов II и III должны иметь нуль при $z = -1$)

Таким образом, получаем следующие ограничения на нули КИХ-фильтров с линейной ФЧХ. Во-первых, передаточная функция $H(z)$ должна иметь один или более нулей при $z = \pm 1$. Во-вторых, $H(z)$ может иметь комплексно-сопряженные нули на единичной окружности при $z = e^{\pm j\omega_k}$ или нули на вещественной оси при $z = \alpha$ и $z = 1/\alpha$. Наконец, $H(z)$ может иметь группы из четырех нулей в виде комплексно-сопряженных пар при $z = r_k e^{\pm j\omega_k}$ и $z = \frac{1}{r_k} e^{\pm j\omega_k}$. Эти

ограничения проиллюстрированы на рис. 4.2.

Случаи $z = 1$ и $z = -1$ заслуживают особого внимания. Вычисляя передаточную функцию при $z = -1$ для фильтра типа II, получаем

$$H(-1) = (-1)^N H(-1).$$

В силу того, что N – нечетное число, последнее выражение эквивалентно следующему условию:

$$H(-1) = -H(-1),$$

которое может быть выполнено, только если $H(-1) = 0$. Следовательно, фильтр с линейной ФЧХ типа II должен иметь нуль при $z = -1$. Аналогично, вычисляя $H(z)$ при $z = -1$ для фильтра типа III, получаем

$$H(-1) = -(-1)^N H(-1).$$

В данном случае N – четное число, $H(z)$ должно иметь нуль при $z = -1$. Поскольку передаточная функция, вычисленная при $z = -1$, совпадает с частотной характеристикой при $\omega = \pi$, для фильтров типов II и III получаем

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0.$$

Для фильтров III и IV типов, вычисляя передаточную функцию при $z = 1$, получаем равенство

$$H(1) = -H(1),$$

которое может быть выполнено, только если $H(z) = 0$ при $z = 1$. Следовательно, фильтры типов III и IV должны иметь нули при $z = 1$, что означает выполнение следующего условия:

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0.$$

Существование нулей при $z = \pm 1$ приводит к ограничениям на использование фильтров с линейной ФЧХ. Так, например, поскольку фильтр типа II всегда имеет нуль при $z = -1$ он не может выступать в роли ФВЧ. Фильтр типа IV не может выступать в роли ФНЧ, из-за присутствия нуля при $z = 1$. Фильтр типа III, имеющий нули одновременно при $z = -1$ и $z = 1$, не может являться ФНЧ, ФВЧ и режекторным фильтром. Фильтр типа I не имеет подобного рода ограничений и поэтому, наиболее распространен на практике.

4.2. Все пропускающие фильтры

4.2.1. Основные определения

Определение 4.2. БИХ-фильтр с постоянной во всем частотном диапазоне АЧХ называется все пропускающим:

$$|H(e^{j\omega})| = 1.$$

Данное условие ограничивает расположение нулей и полюсов передаточной функции, которые появляются в виде комплексно-сопряженных пар:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}}. \quad (4.2)$$

Таким образом, если передаточная функция имеет полюс при $z = a_k$, то она должна иметь нуль при $z = 1/a_k^*$. Если импульсная характеристика фильтра является вещественной, то комплексные корни в выражении (4.2) появляются в виде комплексно-сопряженных пар, при этом передаточная функция может быть записана в виде множителей второго порядка:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{d_k - c_k z^{-1} + z^{-2}}{1 - c_k z^{-1} + d_k z^{-2}},$$

где коэффициенты b_k , c_k и d_k – вещественные.

Если все пропускающий фильтр с передаточной функцией $H(z)$ является устойчивым, то полюса $H(z)$ лежат внутри единичной окружности, то есть $|a_k| < 1$. На рис. 4.3 показано типичное расположение нулей и полюсов все пропускающего фильтра на нуль-полюсной диаграмме.

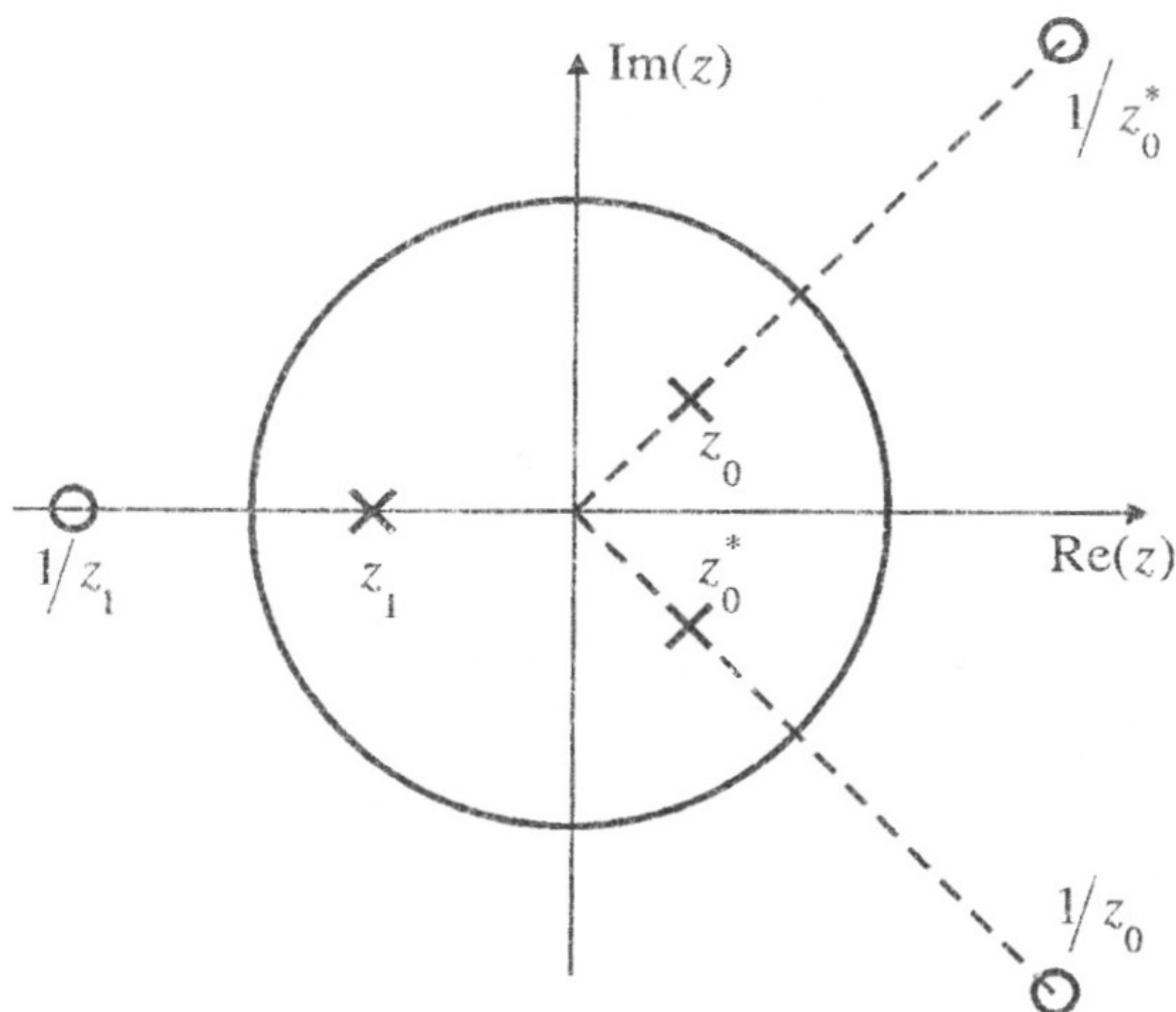


Рис. 4.3. Расположение нулей и полюсов всепропускающего фильтра

4.2.2. Свойства всепропускающих фильтров

1. Устойчивый всепропускающий фильтр имеет неотрицательную групповую задержку для всех значений ω . Это следует из того факта, что для всепропускающего фильтра первого порядка

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}},$$

где $a = re^{j\theta}$, групповая задержка определяется следующим образом:

$$\tau(\omega) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}.$$

Следовательно, при $0 \leq r < 1$ получаем $\tau(\omega) > 0$. Так как, в общем случае, групповая задержка всепропускающего фильтра является суперпозицией указанной выше формы, то она является неотрицательной величиной.

2. Произвольный цифровой фильтр может быть соединен каскадно с всепропускающим фильтром без изменения его АЧХ (рис. 4.4). Данный прием используется для выравнивания групповой задержки при компенсации фазовых нелинейностей.

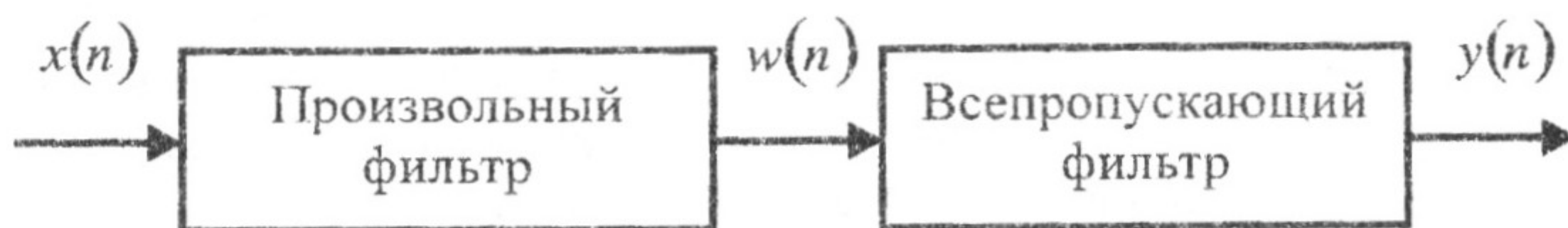


Рис. 4.4. Каскадное включение произвольного и все пропускающего фильтров

В этом случае происходит отображение нулей исходного фильтра относительно единичной окружности, что не приводит к изменению модуля частотной характеристики. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 4.2

Дан фильтр с передаточной функцией

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Последовательно с ним включаем все пропускающий фильтр

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} - 0.2}{1 - 0.2z^{-1}}.$$

Полная передаточная функция системы, получаемая перемножением исходных передаточных функций, будет иметь вид

$$H_3(z) = \frac{z^{-1} - 0.2}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Произошло отображение нуля исходной передаточной функции из точки $z = 0.2$ в точку $z = 5$. Легко убедиться, что АЧХ фильтров с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_3(z)$ совпадают.

4.3. Минимально-фазовые системы

Устойчивая ЛИС-система с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}$$

характеризуется расположением всех полюсов внутри единичной окружности, $|a_k| < 1$. В некоторых приложениях необходимо синтезировать такую систему, для которой обратная к ней система с передаточной функцией $G(z) = 1/H(z)$ также является устойчивой. Это требует расположения всех нулей $H(z)$ внутри единичной окружности, $|b_k| < 1$.

Определение 4.3. Система, для которой вещественная передаточная функция характеризуется расположением нулей и полюсов внутри единичной окружности, называется минимально-фазовой.

Минимально-фазовая система однозначно определяется по своей АЧХ — $|H(e^{j\omega})|$. Процедура нахождения передаточной функции $H(z)$ по АЧХ — $|H(e^{j\omega})|$ в данном случае выглядит следующим образом:

1. Используя $|H(e^{j\omega})|$, находим $|H(e^{j\omega})|^2$, являющуюся функцией $\cos(k\omega)$.

2. Заменяя $\cos(k\omega)$ на $\frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$, находим

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}).$$

3. Итоговая минимально-фазовая система формируется из полюсов и нулей $G(z)$, которые лежат внутри единичной окружности.

Пример 4.3

Пусть $H(z)$ описывает минимально-фазовую систему, для которой

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(\omega).$$

Выражая $\cos(\omega)$ через комплексные экспоненты,

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}e^{j\omega} - \frac{1}{4}e^{-j\omega},$$

и заменяя $e^{j\omega}$ на z и $e^{-j\omega}$ на z^{-1} , получаем

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}) = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z^{-1} = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z\right).$$

Таким образом, имеем следующую передаточную характеристику минимально-фазовой системы:

$$H(z) = 1 - \frac{1}{4} z^{-1}.$$

Передаточная функция произвольной устойчивой системы может всегда быть представлена в виде произведения передаточных функций минимально-фазовой системы и всепропускающего фильтра:

$$H(z) = H_{\text{мин}}(z) \cdot H_{\text{всепроепуск}}(z). \quad (4.3)$$

Пример 4.4

Для передаточной функции

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

минимально-фазовая составляющая равна

$$H_{\text{мин}}(z) = \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})},$$

а передаточная функция всепропускающего фильтра в этом случае

$$H_{\text{всепроепуск}}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2}.$$

Для всех систем с заданной АЧХ минимально-фазовые системы имеют минимальную групповую задержку. Это свойство следует из выражения (4.3). Предположим, что $H_{\text{мин}}(z)$ характеризует минимально-фазовую систему, а $H(z)$ – другую систему с той же АЧХ. Групповая задержка для $H(z)$ может быть записана в виде

$$\tau(\omega) = \tau_{\text{мин}}(\omega) + \tau_{\text{всепроепуск}}(\omega),$$

где $\tau_{\text{всепроепуск}}(\omega)$ – групповая задержка соответствующего всепропускающего фильтра. Поскольку $\tau_{\text{всепроепуск}}(\omega) > 0$, групповая задержка $H(z)$ будет больше, чем для минимально-фазовой системы $H_{\text{мин}}(z)$.

4.4. Системы с обратной связью

Системы с обратной связью используются во многих практических приложениях, таких как стабилизация неустойчивых систем, компенсация неидеальностей элементов, следящие системы, синтез обратных систем. Общая структура системы дискретного времени с обратной связью показана на рис. 4.5.

На рис. 4.5 $H(z)$ является передаточной функцией *основного элемента системы (цепи без обратной связи)*, а $G(z)$ – передаточной функцией *элемента обратной связи (цепи обратной связи)*.

Передаточная функция $Q(z)$, связывающая входной и выходной сигналы $x(n)$ и $y(n)$ соответственно, называется передаточной функцией *системы с обратной связью*.

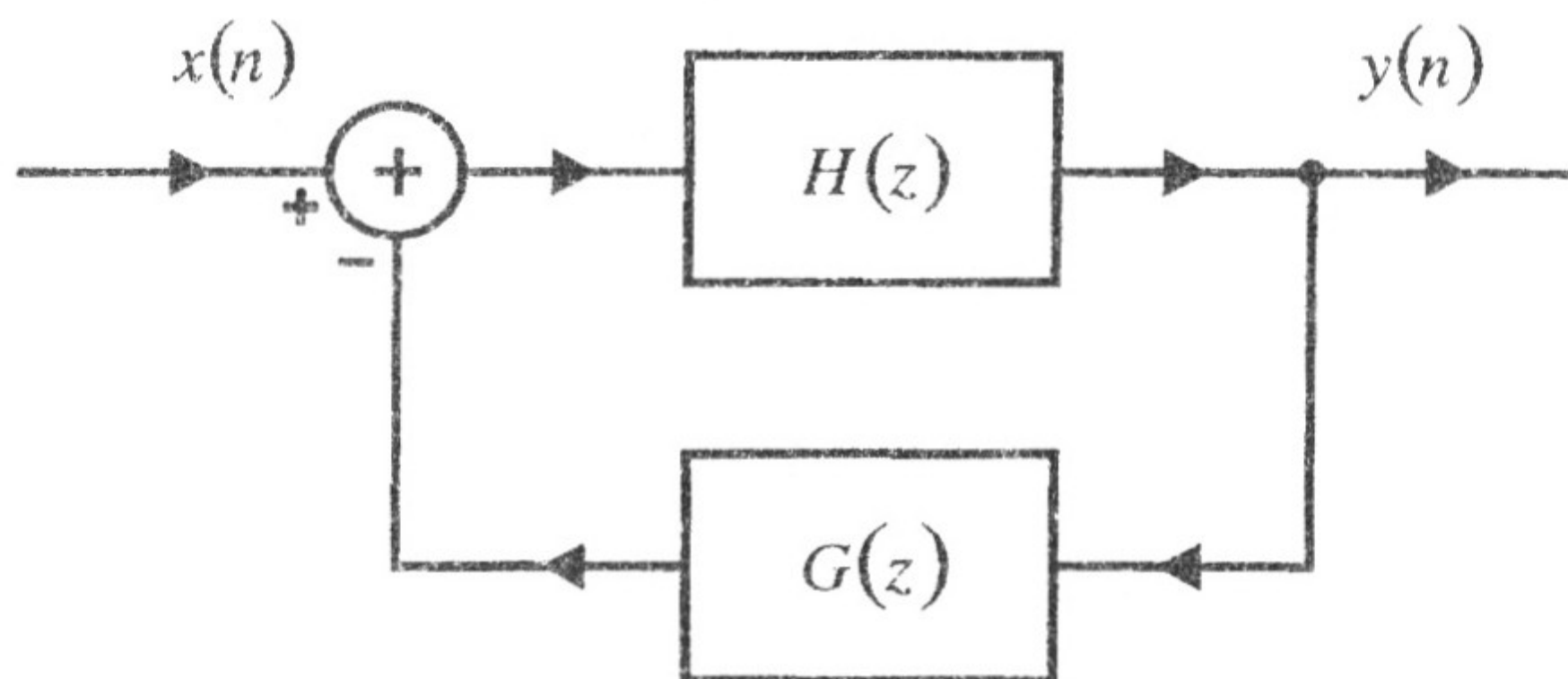


Рис. 4.5. Структурная схема системы с обратной связью

Поскольку

$$Y(z) = H(z)[X(z) - G(z)Y(z)],$$

передаточная функция системы с обратной связью имеет вид

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)}.$$

Если $H(z)$ и $G(z)$ – рациональные функции переменной z , то

$$H(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}, \quad G(z) = \frac{N_2(z)}{D_2(z)},$$

и передаточная функция системы с обратной связью может быть представлена в виде

$$Q(z) = \frac{N_1(z)D_2(z)}{D_2(z)D_1(z) + N_2(z)N_1(z)}.$$

Следовательно, полюса $Q(z)$ определяются корнями уравнения

$$D_2(z)D_1(z) + N_2(z)N_1(z) = 0,$$

при этом полюса могут располагаться произвольным образом на z -плоскости.

Пример 4.5

Дана неустойчивая система с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.2z^{-1}},$$

интегрированная в систему с обратной связью с $G(z) = K$.

Передаточная функция системы с обратной связью

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + KH(z)} = \frac{1}{(1 - 1.2z^{-1}) + K} = \frac{1}{(1 + K) - 1.2z^{-1}}$$

имеет полюс при $z = 1.2/(1 + K)$. Следовательно, эта система будет устойчива для всех $K > 0.2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Дана связь между входной и выходной последовательностями КИХ-фильтра:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k).$$

Найти коэффициенты $b(k)$ фильтра наименьшего порядка, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Фильтр имеет линейную ФЧХ.

2. Полностью подавляет синусоиду с частотой $\omega_0 = \pi/3$.

3. АЧХ строго равна 1 при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$.

4.2. КИХ-фильтр с линейной ФЧХ имеет импульсную характеристику, которая является действительной, и $h(n) = 0$ при $n < 0$ и $n > 7$.

Если $h(0) = 1$ и передаточная функция равна нулю при $z = 0.4e^{j\pi/3}$ и при $z = 3$, чему будет равна $H(z)$?

4.3. Дана передаточная функция КИХ-фильтра:

$$H(z) = (1 + 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2})^2.$$

Найти передаточную функцию фильтра с линейной ФЧХ, который имеет ту же АЧХ, что и рассматриваемый фильтр.

4.4. КИХ-фильтр с линейной ФЧХ обладает следующими свойствами:

1. $h(n)$ – действительная импульсная характеристика, $h(n) = 0$ при $n < 0$ и при $n > 5$

2.
$$\sum_{n=0}^5 (-1)^n h(n) = 0.$$

3. $H(z) = 0$ в точке $z = 0.7e^{j\pi/4}$.

4.
$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 4\pi.$$

Найдите $H(z)$.

4.5. КИХ-фильтр с действительной импульсной характеристикой имеет групповую задержку

$$\tau(\omega) = 2.$$

Найдите импульсную характеристику $h(n)$, если передаточная функция имеет ноль в точке $z = 0.5j$ и $H(z)|_{z=1} = 1$.

4.6. Передаточная функция КИХ-фильтра имеет вид

$$H(z) = 1 + 0.2z^{-4} - 0.5z^{-2} + 0.8z^{-4} + 0.4z^{-4}.$$

Найти другой каузальный КИХ-фильтр с $h(n) = 0$ при $n > 4$, который имеет ту же АЧХ, что и фильтр с передаточной функцией $H(z)$.

4.7. Каузальный, устойчивый, всепропускающий фильтр имеет действительную импульсную характеристику. Передаточная

функция имеет три полюса, один из которых находится в точке $z = 0.8$. Найти функцию $H(z)$, если она имеет ноль в точке $z = 2e^{j\pi/4}$.

4.8. Рассмотрим ЛИС-систему с передаточной функцией вида

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < 1.$$

- а) Найти разностное уравнение, описывающее эту систему.
- б) Показать, что такая система является всепропускающей (т.е. системой, для которой АЧХ является постоянной).
- в) $H(z)$ соединяется каскадно с передаточной функцией $G(z)$ такой, что итоговая система имеет передаточную функцию равную единице. Полагая, что система с передаточной функцией $G(z)$ является устойчивой, найдите ее импульсную характеристику $g(n)$.

4.9. Передаточная функция каузального КИХ-фильтра имеет вид

$$H(z) = (1 - 0.3z^{-1} + 0.9z^{-2})(1 - 0.5z^{-1}).$$

Найти три других каузальных КИХ-фильтра с $h(0) > 1$, которые имеют АЧХ такую же, что и рассматриваемая система.

4.10. Допустим, что $H(z)$ и $G(z)$ являются рациональными и являются минимально-фазовыми. Какие из следующих фильтров имеют минимальную фазу?

- а) $H(z)G(z)$.
- б) $H(z) + G(z)$.
- в) $H^{-1}(z)$.
- г) $H(z)/G(z)$.
- д) $z^{-1}H(z)$.

4.11. Найти систему с минимальной фазой, которая имеет амплитудно-частотную характеристику вида

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{4}{(1 + a^2) - 2a \cos(\omega)}, \quad |a| < 1.$$

4.12. Неминимально-фазовая каузальная последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование вида

$$X(z) = \frac{\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{5}{3}z^{-1}\right)}{(1 - z^{-1})^2\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

Для каких значений константы α последовательность $y(n) = \alpha^n x(n)$ является минимально-фазовой?

4.13. Каузальная ЛИС-система дискретного времени имеет передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{(1 - 0.7z^{-1})(1 - j2z^{-1})(1 + j2z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}.$$

а) Найти разложение на множители для функции $H(z)$ в виде

$$H(z) = H_{\text{мин}}(z) \cdot H_{\text{всепропуск}}(z),$$

где $H_{\text{мин}}(z)$ – фильтр с минимальной фазой, а $H_{\text{всепропуск}}(z)$ – всепропускающий фильтр.

б) Найти разложение на множители для функции $H(z)$ в виде

$$H(z) = H_{\text{мин}}(z) \cdot H_{\text{лф}}(z),$$

где $H_{\text{мин}}(z)$ – фильтр с минимальной фазой, а $H_{\text{лф}}(z)$ – система с линейной фазой.

4.14. ЛИС-система имеет передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-2})(1 + 0.4z^{-1})}{1 - 0.85z^{-1}}.$$

Найдите разложение на множители для функции $H(z)$ в виде

$$H(z) = H_{\text{мин}}(z) \cdot H_{\text{всепропуск}}(z)$$

где $H_{\text{мин}}(z)$ – фильтр с минимальной фазой, а $H_{\text{всепропуск}}(z)$ – всепропускающий фильтр.

4.15. Каузальная ЛИС-система имеет передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{(3 + z^{-1})(2 - 3z^{-1})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Найти разложение на множители для функции $H(z)$ в виде

$$H(z) = H_{\text{мин}}(z) \cdot H_{\text{лф}}(z),$$

где $H_{\text{мин}}(z)$ – фильтр с минимальной фазой, а $H_{\text{лф}}(z)$ – система с линейной фазой.

4.16. Предположим, что есть неустойчивая цепь второго порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 1.44z^{-2}},$$

которую необходимо сделать устойчивой с помощью цепи обратной связи, показанной на рис. 4.6. Найдите передаточную функцию $Q(z)$ цепи с обратной связью и величину коэффициента обратной связи K , при котором система на рис. 4.6 будет устойчивой.

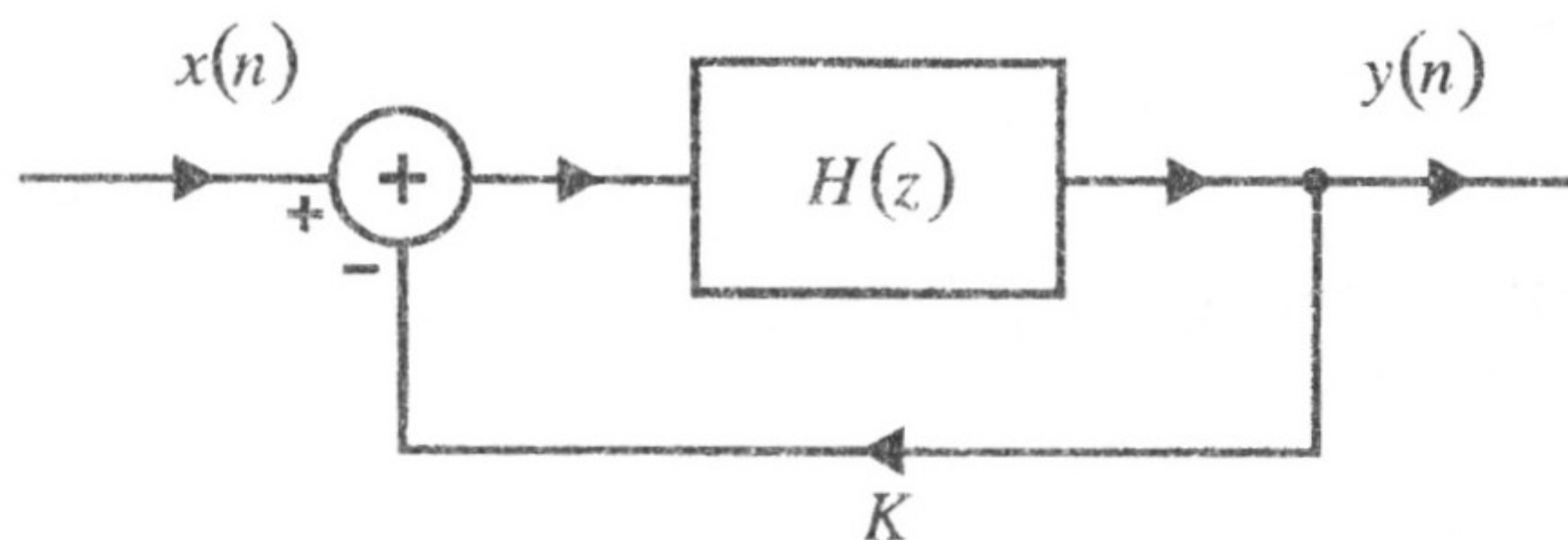


Рис. 4.6. Система с обратной связью

4.17. Пусть цепь с передаточной функцией $H(z)$ является неустойчивой:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} - 3z^{-2}}.$$

а) Используя цепь обратной связи с передаточной функцией вида

$$G(z) = Kz^{-1},$$

определите величину коэффициента K , при котором цепь станет устойчивой.

б) Повторите задачу из пункта а), используя передаточную функцию цепи обратной связи вида

$$G(z) = Kz^{-2}.$$

4.18. Пусть $H(z)$ – передаточная функция цепи без обратной связи

$$H(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 1.1z^{-1}}.$$

Найдите передаточную функцию цепи обратной связи, представленной в виде

$$G(z) = \frac{1 + cz^{-1}}{1 + dz^{-1}},$$

которая поместит полюс второго порядка цепи с обратной связью $Q(z)$ в точку $z = 1$.

4.19. Цепь обратной связи, имеющая вид $G(z) = K$, используется для обеспечения устойчивости системы с передаточной функцией вида

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1} + 1.6z^{-2}}.$$

Определить, для каких значений K система с обратной связью будет устойчивой?

4.20. Для системы с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 + 1.2z^{-1} + 1.5z^{-2}}$$

найти цепь обратной связи вида

$$G(z) = 1 + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2},$$

которая будет перемещать полюсы $H(z)$ в точки $z = 0.5$ и $z = -0.5$.

4.21. Найти передаточную функцию системы с обратной связью, если передаточная функция системы без обратной связи $H(z)$ и цепи обратной связи $G(z)$ имеют вид:

$$\text{а) } H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad G(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1};$$

$$\text{б) } H(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1}, \quad G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сигналы и системы дискретного времени

1.1. а) Да, $N = 16$.

б) Да, $N = 72$.

в) Нет.

г) Да, $N = 544$.

д) Да, $N = 120$.

1.2

задание	гомогенная	аддитивная	линейная
а)	-	-	-
б)	-	-	-
в)	+	-	-
г)	+	+	+
д)	-	+	-
е)	-	+	-

1.3. а) Да.

1.4. а) Да.

1.5. а) Да.

б) Нет.

б) Нет.

б) Нет.

в) Да.

в) Да.

в) Нет.

г) Нет.

г) Нет.

г) Да.

д) Да.

д) Да.

д) Нет.

е) Нет.

е) Нет.

1.6

задание	линейность	инвариантность к сдвигу	устойчивость	каузальность	обратимость
а)	+	-	+	-	-
б)	+	-	-	-	+
в)	+	+	+	-	+
г)	-	+	+	+	+
д)	-	+	+	-	-

1.7. а) Да, будет линейным инвариантным к сдвигу, устойчивым и каузальным.

б) Не обязательно, так как вторая нелинейная система может снимать нелинейность первой. Например, $w(n) = S_1(x(n)) = e^{x(n)}$, $y(n) = S_2(w(n)) = \log(w(n))$, обе системы нелинейные, а каскадное соединение – линейная система.

2. Математический аппарат цифровой обработки сигналов

2.1. Индекс первого ненулевого значения $n = -12$, $y(-12) = 9$. Индекс последнего ненулевого значения $n = 48$, $y(48) = 16$.

$$2.2. y(n) = 2 \cdot 6^6 \left(\frac{1}{3} \right)^n \left[1 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right], \quad n \geq 3.$$

$$2.3. y(n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} 1(n). \quad 2.4. y(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4}} e^{jn\pi/4}.$$

2.5. а) Свертка последовательностей начинается с индекса $n = -2$, $y(n) = \{1, 2, 2, 2, 3, -2, -3, 2, 2, -4, -5\}$.

б) Свертка последовательностей начинается с индекса $n = -1$, $y(n) = \{2, 0, -4, 1, 6, 0, 1, -1, -2, 6, 3\}$.

$$2.6. y(n) = (0.5)^{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right).$$

$$2.7. а) h(n) = \left[-2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] 1(n).$$

$$б) y(n) = \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] 1(n) - \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-10} - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-10} \right] 1(n-10).$$

$$\text{в) } y(n) = \left[-2n \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] 1(n).$$

$$2.8. \ h(n) = n! 1(n). \quad 2.9. \ g(n) = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} \right) (3)^n - 2(2)^n \right] 1(n).$$

$$2.10. \ y(n) = \left[\frac{32}{3} (4^n - 1) - 4n + 12(2)^n \right] 1(n).$$

$$2.11. \text{ а) } h(n) = \left[\frac{1}{2} n + 1 \right] \left(\frac{1}{2} \right)^n 1(n). \quad \text{б) } y(n) = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n 1(n).$$

$$2.12. \ y(n) = \frac{1}{3} [5(4)^n + (-2)^{n+1}], \quad n \geq 0.$$

2.13. z-преобразование последовательности из рис. 2.3а имеет вид

$$X(z) = \frac{z}{z-1}. \text{ Заменяя переменную } z \text{ на } z^2 \text{ в последнем}$$

выражении, получим z-преобразование последовательности из рис. 2.3б. Аналогично, заменив в том же выражении z на z^3 , получим z-преобразование последовательности из рис. 2.3в.

2.14. Последовательность на рис. 2.4а:

$X(z) = z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 3z^2 + z$. Область сходимости — вся z-плоскость, кроме точки $z = \infty$.

Последовательность на рис. 2.4б:

$X(z) = z^2 + 3z + 5 + 3z^{-1} + z^{-2}$. Область сходимости — вся z-плоскость, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$.

Последовательность на рис. 2.4в:

$X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5}$. Область сходимости — вся z-плоскость, кроме точки $z = 0$.

Последовательность на рис. 2.4г:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \text{ Область сходимости } |z| > 1.$$

$$2.15. \text{ а) } X(z) = \frac{4 - \frac{13}{2}z^{-1}}{\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 2.$$

$$\text{б) } X(z) = \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1.$$

$$\text{в) } X(z) = \frac{1}{1 - 3z}, \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

$$\text{г) } X(z) = \frac{4z^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 3.$$

$$\text{д) } X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}\cos(\omega_0)z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

$$\text{е) } X(z) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

$$\text{ж) } X(z) = \frac{\frac{5}{8}z + \frac{5}{8}z^{-1} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

$$2.16. \text{ а) } y(n) = \delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1) + \frac{19}{4}\delta(n-2) + \frac{9}{4}\delta(n-3) + \delta(n-4).$$

$$\text{б) } y(n) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n) + \frac{6}{5}3^n 1(-n-1).$$

$$2.17. \text{ в) } Y(z) = \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1.$$

$$2.18. \text{ а) } X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

$$\text{б) } X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| > 1.$$

$$\text{в) } X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-3}}{(1 - z^{-1})^4}, \quad |z| > 1.$$

$$\text{г) } X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

$$\text{д) } X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

$$\text{е) } X(z) = \frac{az^{-1} - a^3z^{-3}}{(1 - az^{-1})^4}, \quad |z| > |a|.$$

$$\text{ж) } X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

$$3) X(z) = \frac{1}{2}z^{-2} \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

$$\text{и) } X(z) = \log\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

$$2.19. \text{ a) } X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}. \quad \text{б) } X(z) = 1.5 + z^{-5}.$$

$$2.20. \text{ a) } y(n) = X(z)z^{-1} + x(-1).$$

$$\text{б) } y(n) = [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2}]z^3.$$

$$2.21. \text{ a) } x(0) = 4, \quad x(2) = x(-2) = 3.$$

$$\text{б) } x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n 1(n).$$

$$\text{в) } x(n) = 2(-2)^n 1(n) - (-1)^n 1(n).$$

$$\text{г) } x(n) = \frac{1}{4} [(-1)^n + 1 + 2(n+1)] 1(n).$$

$$\text{д) } x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1(n) + 3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1(n).$$

$$\text{е) } x(n) = (n+1)(0.4)^n 1(n).$$

$$\text{ж) } x(n) = \begin{cases} (0.2)^{n/2}, & n - \text{четное}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\text{з) } x(n) = n^{-1} 2^{-n} 1(-n-1).$$

$$2.22. X(z) = 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5756z^{-3} + \dots$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 3.6439, \quad x(3) = 2.5756 \dots$$

$$2.23. x(n) = \frac{4}{5} [(0.75)^n - (-0.5)^n] \quad n > 0.$$

$$2.24. x(n) = 2.8082 \cdot \delta(n) + 12.1213 (0.5967)^n \times \\ \times \cos(33.08n - 98.58^\circ), \quad n \geq 0.$$

$$2.25. x(n) = 2[(n-1) + (0.5)^n], \quad n \geq 0.$$

$$2.26. x(n) = \frac{4}{5}[(0.75)^n - (-0.5)^n].$$

$$2.27. x(n) = 2.8082 \cdot \delta(n) + 12.1213 (0.5967)^n \times \\ \times \cos(33.08n - 98.58^\circ), \quad n \geq 0.$$

$$2.28. x(n) = 2[(n-1) + (0.5)^n], \quad n \geq 0. \quad 2.29. x(0) = \frac{13}{4}.$$

$$2.30. y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1(n) + \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right) \right] 1(n).$$

2.31. Ненулевые начальные условия:

$$y(n) = \left[-\frac{5}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] 1(n).$$

Нулевые начальные условия:

$$h(n) = \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] 1(n).$$

$$2.32. a) x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] 1(n).$$

$$2.33. a) y(n) = \left[2 - \frac{7}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] 1(n).$$

$$б) y(n) = \left[2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(n+1) \frac{\pi}{3} \right] 1(n).$$

$$\text{в) } y(n) = \left[\cos \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{\pi n}{2} \right] 1(n).$$

$$2.34. \quad y(n) = 10 + 10\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n \geq 0.$$

$$2.35. \quad y(n) = C \cdot (b_1)^n + \frac{A}{1-b_1}, \quad C = \text{const.}$$

$$\text{Если } n \rightarrow \infty, \text{ то } y(n) = \frac{A}{1-b_1}.$$

$$2.36. \quad x(n) = [1, 0, 0, 1]. \quad 2.37. \quad X(k) = [2, 1+i, 0, 1-i].$$

2.38. Амплитудный спектр:

$$|X(k\Omega)| = [2, 1+i, 0, 1-i].$$

Фазовый спектр:

$$\varphi(k\Omega) = [0, 45^\circ, \text{фаза не определена}, -45^\circ].$$

$$\text{Здесь } \Omega = \frac{2\pi}{NT} = 12.57 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right), \quad T - \text{интервал дискретизации,}$$

N – число отсчетов последовательности $x(n)$.

$$2.39. \text{ а) } X(k) = 1.$$

$$\text{б) } X(k) = W_N^{n_0 k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

$$\text{в) } X(k) = \frac{1 - (\alpha W_N^k)^N}{1 - \alpha W_N^k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

$$\text{г) } X(k) = e^{-\frac{j2\pi k}{N} \left(\frac{n_0-1}{2} \right)} \frac{\sin(n_0 \pi k / N)}{\sin(\pi k / N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$2.40. \quad x(n) = \frac{1}{5} + \delta(n).$$

$$2.41. X(k) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\left(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0\right)}.$$

$$\text{Если } \omega_0 = \frac{2\pi k_0}{N}, \text{ то } X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = k_0, k = N - k_0, \\ 0, & k \neq k_0, k \neq N - k_0. \end{cases}$$

$$\text{Если } \omega_0 \neq \frac{2\pi k_0}{N}, \text{ то}$$

$$X(k) = \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)} \frac{\sin\left(\pi k - \frac{N\omega_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\omega_0}{2}\right)} + \\ + \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0\right)} \frac{\sin\left(\pi k + \frac{N\omega_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N} + \frac{\omega_0}{2}\right)}.$$

$$2.42. X(k) = \begin{cases} \frac{9}{2}N, & k = 0, \\ \frac{1}{4}N, & k = 2, k = N - 2, \\ 0, & k \neq 0, k \neq 2, k \neq N - 2. \end{cases}$$

$$2.43. \text{ а) } X(k) = 1 + 2(-1)^k.$$

$$\text{б) } y(n) = 2\delta(n-3) + \delta(n-8).$$

$$\text{в) } y(n) = [3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2].$$

$$2.44. \text{ а) } y(n) = 4\delta(n-4) + 3\delta(n-5) + 2\delta(n) + \delta(n-1).$$

$$\text{б) } w(n) = [4, \frac{3}{2}, 1, 1, 1, \frac{3}{2}].$$

$$в) q(n) = 5\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2).$$

$$2.45. y(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4).$$

3. Анализ дискретных систем первого и второго порядков

$$3.1. \text{ Система устойчива, } H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}.$$

$$3.2. h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] 1(n-1).$$

$$3.3. H(z) = \frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)},$$

$$h(n) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n 1(n) + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n 1(n).$$

$$3.4. X(z) = \frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-2z^{-1}} + \frac{\frac{4}{15}}{1+z^{-1}},$$

$$x(n) = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n 1(n) - \frac{2}{3} \cdot 2^n 1(-n-1) - \frac{4}{15}(-1)^n 1(-n-1).$$

$$3.5. H'(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1.33-2z^{-1}+z^{-2}}.$$

3.6. б) $H(z)$ достигает максимального значения при $\omega=0$, если

$$\frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi \text{ и при } \omega = \pi, \text{ если } 0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}.$$

$$3.7. G(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-n_d} + \frac{1}{4}z^{-2n_d}}.$$

$$3.8. H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

3.9. Фильтр является устойчивым.

$$3.10. |a| < 1.3.$$

$$3.11. y(n) = \frac{b^{n+1} - (-1)^{n+1}}{1 + b}. \quad 3.12. H(z) = \frac{1 - b}{1 - bz^{-1}}.$$

$$3.13. y(n) = 0.9^n + 0.9^{n-1}, \text{ где } n \geq 1.$$

$$3.14. \text{ а) } y(n) = 1. \quad \text{ б) } y(n) = 2n - 1, \quad n \geq 1.$$

3.15. Правильное выражение имеет следующий вид:

$$y(n) = 1.4[x(n) + 0.6x(n-1) - 0.4x(n-2)] + 0.8y(n-1) - 0.7y(n-2).$$

$$3.16. y(n) = (n+1)b^n.$$

$$3.19. H_m \text{ уменьшится.}$$

$$3.20. \text{ Тип фильтра ФНЧ.}$$

3.21. Импульсная характеристика рассматриваемого фильтра является симметричной. Для КИХ-фильтра с симметричной импульсной характеристикой вне зависимости от значений отсчетов (то есть параметра α_1 , в задаче) ФЧХ всегда линейная.

$$3.24. g(n) = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

3.25. $h(n) = a \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2}$, где z_1 и z_2 являются корнями уравнения $z^2 - b_1 z - b_2 = 0$.

3.26. а) $H(z) = \frac{\gamma + \lambda z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}$, б) $H(z) = \frac{\gamma(1 + \lambda z^{-1})}{1 - \beta z^{-1}}$.

3.27. б) $H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - (0.1 + 0.2i)z^{-1})(1 - (0.1 - 0.2i)z^{-1})}$.

в) $y(n) = x(n) - x(n-2) + 0.7y(n-1) - 0.15y(n-2) + 0.025y(n-3)$.

- 3.28. а) 1. полоса пропускания $4000\pi - 6000\pi$ рад/с,
2. полосы подавления $0 - 3000\pi$ и $7000 - 10000\pi$ рад/с,
3. частота дискретизации 20000π рад/с.

- б) 1. полоса пропускания $2 - 3$ кГц,
2. полосы подавления $0 - 1.5$ и $3.5 - 5$ кГц,
3. частота дискретизации 10 кГц.

- в) 1. полоса пропускания $0.2 - 0.3$,
2. полосы подавления $0 - 0.15$ и $0.35 - 0.5$,
3. частота дискретизации 1 .

3.30. а) Нули передаточной функции:

$$z_1 = 1.687288, z_2 = -0.592667,$$

$$z_3 = 0.175377 + 0.984501 \cdot i, z_4 = 0.175377 - 0.984501 \cdot i.$$

Полюсы передаточной функции:

$$p_1 = 0.670114 + 0.589727 \cdot i, p_2 = 0.670114 - 0.589727 \cdot i,$$

$$p_3 = 1, p_4 = 0.5.$$

б) Система неустойчива.

3.31. $H(z) = \frac{(z-2)(z+1)z}{(z-0.5+0.5i)(z-0.5-0.5i)(z-0.75)}$.

$$3.32. H(z) = \frac{K(1+z^{-2})}{1-z^{-1}-0.5z^{-2}}, \text{ где } K - \text{ произвольная постоянная.}$$

4. Специальные типы цифровых фильтров

$$4.1. H(z) = \frac{1}{3}(1+z^{-2}+z^{-4}).$$

$$4.2. H(z) = \frac{1}{0.16}(1-0.4z^{-1}+0.16z^{-2}) \times \\ \times (0.16-0.4z^{-1}+z^{-2})(1-3z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right).$$

$$4.3. G(z) = (1+0.2z^{-1}+0.8z^{-2})(0.8+0.2z^{-1}+z^{-2}).$$

$$4.4. H(z) = \frac{2}{0.49}(1-0.7\sqrt{2}z^{-1}+0.49z^{-2}) \times \\ \times (0.49-0.7\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1}).$$

$$4.5. h(n) = \frac{4}{25} \left[\delta(n) + \frac{17}{4} \delta(n-2) + \delta(n-4) \right].$$

$$4.6. H(z) = 0.4 + 0.8z^{-1} - 0.5z^{-2} + 0.2z^{-3} + z^{-4}.$$

$$4.7. H(z) = \frac{z^{-1}-0.8}{1-0.8z^{-1}} \cdot \frac{z^{-2}-\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}.$$

$$4.8. \text{ а) } y(n) = ay(n-1) + x(n-1) - a^* x(n).$$

$$\text{ б) } g(n) = (a^*)^{-n-1} l(-n-1) - a(a^*)^{-n-1} l(-n).$$

$$4.9. H_1(z) = (1-0.3z^{-1}+0.9z^{-2})(0.5-z^{-1}).$$

$$H_2(z) = (0.9 - 0.3z^{-1} + z^{-2})(1 - 0.5z^{-1}).$$

$$H_3(z) = (0.9 - 0.3z^{-1} + z^{-2})(0.5 - z^{-1}).$$

4.10. а) Имеет.

б) Не обязательно. Например, в случае когда $H(z) = \frac{A}{1 - 0.5z^{-1}}$,

$G(z) = \frac{B}{1 - 0.75z^{-1}}$, сумма $H(z) + G(z)$ может иметь нуль

расположенный вне единичной окружности. Последнее утверждение зависит от значений коэффициентов A и B .

в) Имеет.

г) Имеет.

д) Не имеет.

$$4.11. H(z) = \frac{2}{1 - az^{-1}}. \quad 4.12. |\alpha| < \frac{3}{5}.$$

$$4.13. а) H_{мин}(z) = \frac{1 - 0.7z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})} \left(1 - \frac{1}{2}jz^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}jz^{-1}\right),$$

$$H_{всепропуск}(z) = \frac{(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}jz^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}jz^{-1}\right)}.$$

$$б) H_{мин}(z) = \frac{1 - 0.7z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}jz^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}jz^{-1}\right)},$$

$$H_{лф}(z) = \left(1 - \frac{1}{2}jz^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}jz^{-1}\right) (1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1}).$$

$$4.14. H(z) = \frac{(1 + 0.4z^{-1})(z^{-2} - 2)}{1 - 0.85z^{-1}} \cdot \frac{1 - 2z^{-2}}{z^{-2} - 2}.$$

$$4.15. H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(2z^{-1} - 3)} \cdot (2z^{-1} - 3)(2 - 3z^{-1}).$$

$$4.16. Q(z) = \frac{\frac{1}{1+K}}{1 - \frac{1}{1+K}z^{-1} + \frac{1.44}{1+K}z^{-2}}, \quad K > 0.44.$$

4.17. а) Система неустойчива для всех K .

б) $3.5 < K < 4$.

$$4.18. G(z) = \frac{1 - 8.7z^{-1}}{1 + 3.4z^{-1}}.$$

$$4.19. K > 0.6. \quad 4.20. g(1) = -1.2, \quad g(2) = -2.$$

$$4.21. \text{ а) } Q(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}. \quad \text{ б) } Q(z) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубарев Ю.Б., Витязев В.В., Дворкович В.П. Цифровая обработка сигналов – информатика реального времени // Цифровая обработка сигналов. – 1999. – № 1.
2. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. Радио, 1973.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979.
5. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982.
6. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. – М.: Радио и связь, 1990.
7. Карташкин А.С. Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи: Учеб. пособие. – М.: Радио и связь, 1995.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2005.
9. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. – 2-е изд. испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
10. Васильев В.П., Муро Э.Л., Смольский С.М. Основы теории и расчета цифровых фильтров. – М.: Академия, 2007.
11. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.
12. Mitra S. Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach, Second Edition. – McGraw-Hill, 2001.
13. Hayes M. Schaum's Outline of Digital Signal Processing. – McGraw-Hill, 1998.
14. Брюханов Ю.А. Цифровые цепи и сигналы: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – Ярославль: ЯрГУ, 2005.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ.....	6
1.1. Сигналы дискретного времени.....	6
1.1.1. Комплексные последовательности	6
1.1.2. Периодические и непериодические последовательности	7
1.1.3. Симметричные последовательности	8
1.1.4. Некоторые фундаментальные последовательности	8
1.2. Системы дискретного времени	9
1.2.1. Общие положения.....	9
1.2.2. Свойства систем.....	10
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	13
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.....	17
2.1. Свертка.....	17
2.1.1. Свойства свертки	17
2.1.2. Прямое вычисление свертки	19
2.1.3. Численный метод вычисления свертки	20
2.2. Разностные уравнения	21
2.2.1. Основные определения.....	21
2.2.2. Метод решения разностных уравнений с использованием общего и частного решений.....	23
2.3. Z-преобразование	26
2.3.1. Свойства z-преобразования.....	28
2.3.2. Обратное z-преобразование	30
2.3.3. Решение разностных уравнений с использованием одностороннего z-преобразования	33
2.4. Дискретное преобразование Фурье.....	34
2.4.1. Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье	34
2.4.2. Свойства дискретного преобразования Фурье	35
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	37
3. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ.....	50
3.1. Описание систем дискретного времени с помощью полюсов и нулей.....	50

3.2. Единицы измерения частоты, используемые в системах дискретного времени.....	52
3.3. Частотные свойства цифровой цепи	55
3.4. Анализ рекурсивной цепи первого порядка.....	56
3.4.1. Частотные свойства	57
3.4.2. Временные характеристики	60
3.5. Анализ нерекурсивной цепи второго порядка	63
3.5.1. Частотные свойства	64
3.5.2. Временные характеристики	71
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	73
4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	83
4.1. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ.....	83
4.1.1. Фильтры типа I – симметричная импульсная характеристика, N – четное	84
4.1.2. Фильтры типа II – симметричная импульсная характеристика, N – нечетное	84
4.1.3. Фильтры типа III – антисимметричная импульсная характеристика, N – четное	84
4.1.4. Фильтры типа IV – антисимметричная импульсная характеристика, N – нечетное	85
4.1.5. Расположение нулей КИХ-фильтров с линейной ФЧХ	86
4.2. Все пропускающие фильтры	89
4.2.1. Основные определения.....	89
4.2.2. Свойства все пропускающих фильтров.....	90
4.3. Минимально-фазовые системы.....	91
4.4. Системы с обратной связью	94
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	95
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	102
ЛИТЕРАТУРА	117

Учебное издание

Хрящев Владимир Вячеславович
Приоров Андрей Леонидович
Волохов Владимир Андреевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Сборник задач

Редактор, корректор А.А. Аладьева

Подписано в печать 29.04.08. Формат 60х84/16. Бумага тип.
Усл. печ. л. 5,65. Уч.-изд. л. 5,68
Тираж 200 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛРИД № 06151 от 26.10.2001 г.
Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37. Тел. (4852) 73-35-03.

Хрящев Владимир Вячеславович

К.т.н., доцент. Автор более 20 публикаций в области цифровой обработки сигналов и изображений. Участник академических программ университета г. Ювяскюля (Финляндия) в 2002-2007 гг. Лучший ученый ЯрГУ им. П.Г. Демидова в области естественных наук 2006 года. Основные научные интересы: нелинейная цифровая фильтрация, оценка качества изображений, распознавание лиц, методы оптимизации.



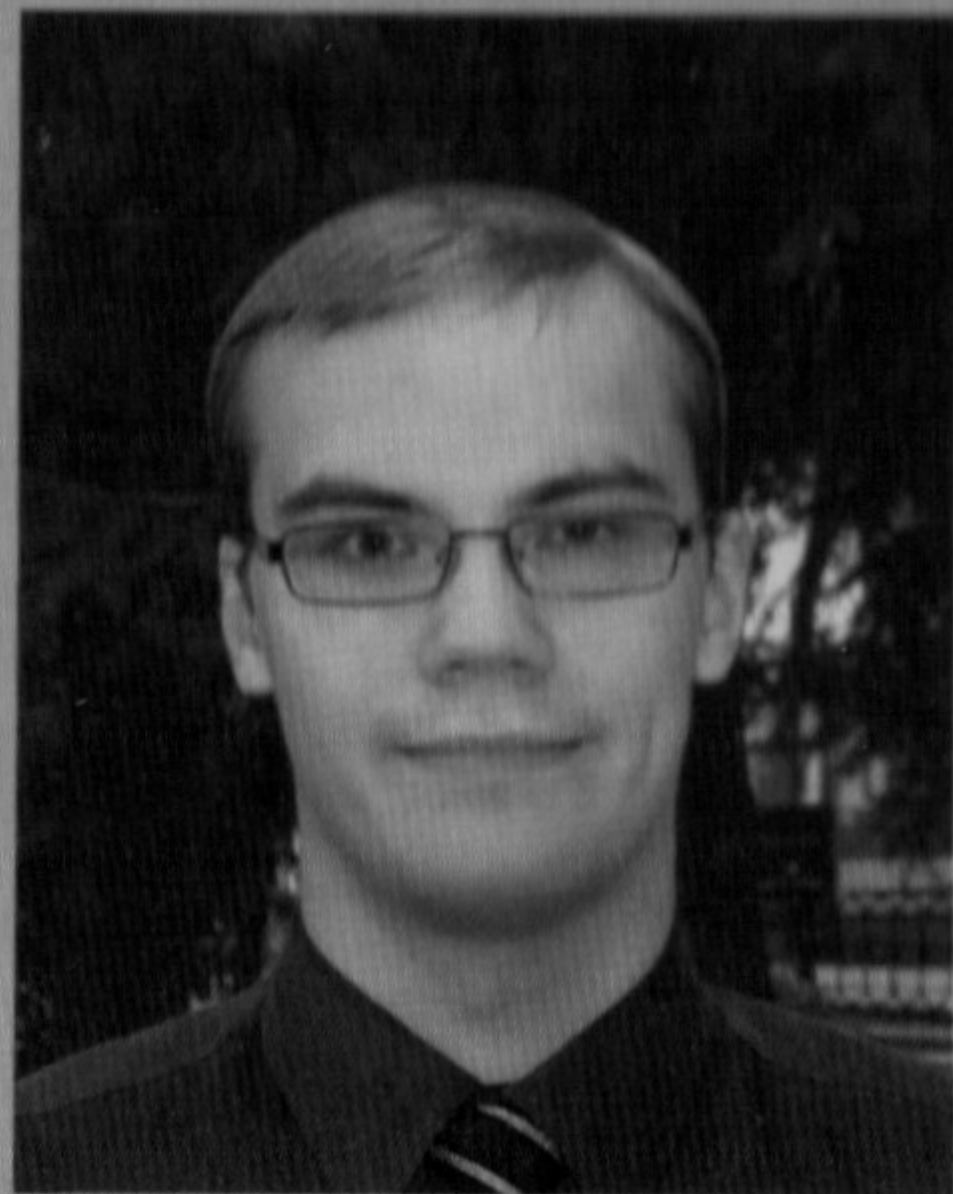
Приоров Андрей Леонидович

Руководитель лаборатории "Цифровые цепи и сигналы". Автор более 50 научных работ и 9 учебных пособий. Научные интересы: распознавание образов, цифровая обработка сигналов и изображений с помощью вейвлетов, передача мультимедийной информации по телекоммуникационным сетям.



Волохов Владимир Андреевич

Аспирант ЯрГУ им. П.Г. Демидова. Неоднократный победитель конкурсов студентов и молодых ученых Российского уровня, президентский стипендиат 2006 г. Награжден медалью Рособразования РФ за лучшую студенческую работу в 2007 г. Основные научные интересы: сжатие статических и динамических изображений, нелинейная цифровая фильтрация в вейвлет-области.



Лаборатория «Цифровые цепи и сигналы»

Исследования в области цифровой обработки сигналов и изображений:

- Обработка звука в телекоммуникационных системах
- Анализ и синтез систем цифровой обработки изображений
- Оптимизация алгоритмов сжатия видео информации
- Распознавание образов
- Беспроводные технологии передачи данных
- Цифровое телевидение



Наши координаты: 150000, Ярославль, ул. Советская, д. 14, комната 309, (4852) 797775, e-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

<http://www.piclab.ru/>