


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 18 » мая 2020 г.

Рабочая программа дисциплины

«Дополнительные главы математической статистики»

Направление подготовки

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль

«Информатика и компьютерные науки»

Квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 13 апреля 2020 г.,
протокол № 4

Программа одобрена НМК
факультета ИВТ
протокол № 7 от
17 мая 2020 г.

Ярославль
2020

1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» является углубление и развитие изучения методов математической статистики применительно к решению разнообразных практических задач.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Дополнительные главы математической статистики» относится к вариативной части (дисциплина по выбору) ОП бакалавриата.

При изучении дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» необходим продвинутый уровень освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», а также дисциплин «Математический анализ», «Геометрия и алгебра», «Дифференциальные уравнения» на уровне не ниже порогового.

Полученные в рамках дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» знания необходимы для формирования общей математической культуры, а также развития умений и навыков применения математических методов в решении прикладных задач.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-1 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат и современные технологии, интерпретировать данные современных научных исследований	ПК-1.1 Способен провести оценку и обоснование решения задач профессиональной деятельности на основе знаний в области математических и естественных наук, информационных технологий	Знать: <ul style="list-style-type: none">– основные понятия, теоремы и критерии математической статистики;– особенности постановки задач математической статистики,– методы построения оценок и проверки гипотез в математической статистике, условия применимости статистических критериев. Уметь: <ul style="list-style-type: none">– строить точечные и интервальные оценки числовых показателей распределения случайных величин,– проверять статистические гипотезы согласия, однородности выборок, некоррелируемости.– строить регрессионные модели и проверять их значимость,

		<p>– интерпретировать результаты применения статистических критериев.</p> <p>Владеть навыками:</p> <p>– первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов),</p> <p>– построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов,</p> <p>– применения статистических критериев для проверки гипотез.</p>
--	--	--

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зач. ед., 144 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа		
			Контактная работа							
1	Основные понятия математической статистики	7	2		2			10		
2	Точечное и интервальное оценивание	7	2		6			10		
3	Статистические гипотезы и их проверка	7	6		12	2		10		
4	Корреляционный анализ	7	4		8	1		10		
5	Регрессионный анализ	7	3		6	2		12		
	Всего за 7 семестр		17		34	5		52	Экзамен	
	Всего		17		34	5				

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Основные понятия математической статистики

Классическая модель математической статистики. Понятие выборки. Оценка как функция выборки. Характеристики статистической оценки: состоятельность, несмещенность. Свойства оценок моментов случайной величины.

Раздел 2. Точечное и интервальное оценивание

Методы построения точечных оценок (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов). Построение доверительных интервалов (интервальных оценок) для математического ожидания нормального распределения. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, сравнение выборочной средней с гипотетическим средним генеральной совокупности.

Раздел 3. Статистические гипотезы и их проверка

Основные понятия, связанные с проверкой гипотез: статистическая гипотеза, простые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, ошибки первого и второго рода, уровень значимости. Задача о выборочном контроле. Вероятностные распределения, связанные с нормальным: χ^2 – распределение, распределение Стюдента, распределение Фишера. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ^2) для простых и сложных гипотез. Критерии согласия Колмогорова и Смирнова (основные идеи). Таблицы сопряженности признаков, проверка гипотезы о независимости. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни.

Раздел 4. Корреляционный анализ

Выборочный коэффициент корреляции. Ранговая корреляция. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Проверка гипотез о значимости коэффициента корреляции.

Раздел 5. Регрессионный анализ

Линейная регрессия, нахождение и проверка значимости параметров линейной регрессии. Многомерные регрессионные модели. Сглаживание наблюдений, нахождение параметров аппроксимирующей функции (метод наименьших квадратов). Модели авторегрессии, автокорреляционная функция, смешанные модели.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации, для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами:
 - программы Microsoft Office (OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232),
 - программы LibreOffice (свободно распространяемое ПО),
 - издательская система LaTeX;
- для подготовки расчетных работ – среда R 3.3.3 (свободно распространяемая среда статистического анализа с открытым исходным кодом);
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная:

1. Максименко, А. Н., Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с
2. Максименко, А. Н., Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с
3. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с
4. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб., М., Высшее образование; Юрайт, 2009, 479с
5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с
6. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд., М., Юрайт, 2017, 479с

б) дополнительная:

1. Дополнительная литература отсутствует

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).
2. Конспекты лекций по теории вероятностей и математической статистике (Н.В.Чернова) (<http://www.nsu.ru/mmfm/tvims/chernova/>).
3. Буре В.М., Методы прикладной статистики в R и Excel / Буре В.М., Парилина Е.М., Седаков А.А. – ЭБС «Лань» – <https://e.lanbook.com/reader/book/81558/>
4. Плотников А.Н., Элементарная теория анализа и статистическое моделирование временных рядов / Плотников А.Н. – ЭБС «Лань» – <https://e.lanbook.com/reader/book/65051/>

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Доцент кафедры дискретного анализа, к.ф.-м.н. Ю.В.Богомолов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Дополнительные главы математической статистики»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы
формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Контрольная работа №1 (Основы математической статистики)

1. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти такую функцию $g(x)$, чтобы величина $\eta = g(x)$ имела функцию распределения: а) $\{0, x < 0, \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 1, 1, x > 1\}$ б) $\{0, x < 0, 1 - e^{-2x}, x \geq 0\}$
2. Случайная величина имеет плотность распределения $f(x) = \frac{3x^2 - (x^3 - a)^2}{\sqrt{2\pi}}$. Методом максимального правдоподобия найти оценку параметра a по результатам трех наблюдений: 1, 2, 3.
3. Случайная величина имеет плотность распределения $\begin{cases} \frac{bx^b}{b^2}, & 0 \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$. Методом моментов найти оценку параметра b по результатам четырех наблюдений: 1, 2, 3, 4.
4. В ходе эксперимента получены следующие данные (x, y) («вход-выход»): (0,1), (1,3), (2,2). Предполагая, что зависимость выходных значений от входных имеет вид
а) $y = ax + b$ б) $y = ax^2 + bx$ в) $y = \frac{ax}{x+1} + b$

С помощью метода наименьших квадратов найти значения параметров a и b .
Какую из предложенных зависимостей можно считать наиболее адекватной входным данным?

Ответы и указания к решению контрольной работы №1.

- 1) а) $\frac{x^2}{2}$ б) $1 - e^{-2x}$ 2) 9 3) 1,25
- 4) а) $y = 0,5x + 1,5$ б) $y = -2x^2 + 5x$ в) $y = 1,071x + 1,4082/(x+1)$. Оценка адекватности зависимостей производится подстановкой найденных параметров в функцию ошибки.

Критерии оценивания контрольной работы №1.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены все 4 задания (без ошибок и недочетов), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 3 задания (без ошибок и недочетов) или выполнено 4 задания, но содержится не более 3 недочетов, связанных с пояснением порядка применения свойств и критериев. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 2 задания (без грубых ошибок) или 1 задание, но при этом есть верные продвижения в оставшихся задачах (например, в 1-2 заданиях правильно описан ход решения). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 1 задания и нет значимых продвижений в других.

Контрольная работа №1 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и критериев математической статистики, особенностей постановки задач математической статистики, методов построения оценок; умение строить точечные и интервальные оценки числовых показателей распределения случайных величин, строить регрессионные модели и проверять их значимость; владение навыками первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов), построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Контрольная работа №2 (Проверка статистических гипотез)

1. Имеются следующие данные по распределению заработной платы между работниками предприятия:

Зарплата (руб.)	5000– 10000	10000– 15000	15000– 25000	25000– 50000
Кол-во человек	15	18	27	15

С помощью критерия Пирсона проверьте гипотезу о том, что зарплата распределена равномерно от 5000 до 50000 руб.

2. В ходе серии экспериментов неизвестная случайная величина принимала значения на отрезке $[0; 16]$:

Отрезок	0–1	1–2	2–3	3–4
Количество значений на отрезке	7	10	10	13

С помощью критерия Пирсона проверьте гипотезу, что сл.в. имеет плотность распределения: $\frac{1}{8}xx, 0 \leq xx \leq 4, 0$, иначе.

3. Для 8 клубов Континентальной хоккейной лиги имеются данные о размере официального бюджета клуба (в сезоне 2008-2009 гг.) и количестве набранных очков по ходу регулярного чемпионата.

Клуб	Бюджет (млн.\$)	Количество очков
«Авангард» (Омская область)	50	78
«Ак Барс» (Казань)	55	122
«Атлант» (Московская область)	35	122
«Динамо» (Москва)	25	100
«Локомотив» (Ярославль)	40	111
«Металлург» (Магнитогорск)	45	104
«Салават Юлаев» (Уфа)	50	129
ХК ЦСКА (Москва)	22	106

По представленным данным найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между бюджетом клуба и количеством набранных очков. Проверить гипотезу о некоррелируемости данных показателей для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

4. Имеется 10 земельных участков, находящихся на различном расстоянии от крупного города. Расстояния от города (в километрах) для этих участков составляют 5, 10, 7, 10,

8, 15, 20, 5, 5, 20. Урожайность картофеля на этих же участках соответственно равна 10, 25, 10, 15, 15, 10, 30, 25, 10, 10.

Можно ли говорить о наличии значимой связи между урожайностью картофеля на участке и удаленностью этого участка от города?

5. На двух пробных участках леса для каждого исследованного дерева найдены значения проективного покрытия лишайников. При этом на первом участке получены такие значения: 67, 9, 65, 40, 44, 89, 17, 8, 26, 95, 46, 25 (данные по 12 деревьям). Соответственно, на втором участке получены такие значения: 26, 1, 87, 8, 6, 4, 65, 90, 76, 44, 36, 24, 23, 8, 56 (всего 15 деревьев). Выясните, есть ли существенные различия между этими двумя участками.

Ответы и указания к решению контрольной работы №2.

- 1) Гипотеза отвергается на уровне значимости 0,5 2) Гипотеза отвергается на уровне значимости 0,5 3) $r = 0,274$ – незначим для уровня значимости 0,05 4) $r = 0,208$ – незначим для уровня значимости 0,05 – нет значимой связи 5) Различия уровня признака в сравниваемых группах статистически не значимы.

Критерии оценивания контрольной работы №2.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены все 5 задания (без ошибок и недочетов), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и статистические критерии, гипотезы сформулированы, выводы проинтерпретированы. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4 задания (без грубых недочетов) или выполнено 5 задания, но содержится не 3-5 недочетов, связанных с пояснением порядка применения свойств и критериев. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания, но при этом есть верные продвижения в оставшихся задачах (например, в 1-2 заданиях правильно описан ход решения или верно указан критерий проверки гипотезы). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 заданий и нет значимых продвижений в других.

Контрольная работа №2 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и критериев математической статистики, особенностей постановки задач математической статистики, знание статистических методов и критериев проверки гипотез в математической статистике, условий применимости статистических критериев; умение проверять статистические гипотезы согласия, однородности выборок, некоррелируемости, а также интерпретировать результаты применения статистических критериев; владение навыками первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов), – применения статистических критериев для проверки гипотез. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Тестовые вопросы

(для оценки сформированности компетенции на базовом уровне)

1. При построении линейной регрессионной модели ($y = kx + b$) между двумя показателями получилось, что ошибка аппроксимации равна 0. Какие выводы можно сделать?
(а) Коэффициенты k и b равны 0.

- (б) Исходные точки (элементы исходной выборки) находятся на одной прямой.
(в) Если при этом ещё и параметр $k \neq 0$, то выборочный коэффициент корреляции равен 1 или -1 .
(г) Однозначно можно говорить, что произошла ошибка в вычислениях.

2. Может ли коэффициент ранговой корреляции Спирмена принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)

- (а) 0 (б) 7 (в) -4 (г) $\frac{1}{2}$ (д) $-\frac{1}{2}$

3. Для проверки гипотезы о некоррелируемости двух заданных признаков вычислено значение выборочного коэффициента корреляции равное 0,72. Какие из утверждений являются верными?

- (а) Этого достаточно, чтобы отвергнуть гипотезу о некоррелируемости. Между признаками существует сильная положительная связь, так как коэффициент корреляции положителен и близок к 1.
(б) Между признаками заметна (но не проверена значимость) положительная связь – большим значениям одного признака чаще соответствуют большие значения другого – так как коэффициент корреляции положителен и близок к 1.
(в) Этого достаточно, чтобы принять гипотезу о некоррелируемости. Между признаками отсутствует связь, так как коэффициент корреляции не равен 1.
(г) Вывод о значимости выборочного коэффициента корреляции можно сделать после того, как будет известен объем выборки и уровень значимости.

4. Методом максимального правдоподобия строится оценка неизвестной вероятности. Составлена функция правдоподобия, найдена точка x_0 , где её производная принимает значение 0. Какие из этих утверждений верны?

- (а) Этого мало. Нужно найти точку минимума функции правдоподобия на отрезке $[0,1]$.
(б) Это неверно. Нужно найти точку, где функция правдоподобия обращается в 0.
(в) Если функция правдоподобия дифференцируема на отрезке $[0,1]$, а единственный максимум достигается на интервале $(0,1)$, то точка x_0 – искомая.
(г) Нужно найти не точку максимума, а точку минимума функции правдоподобия.

5. Доверительный интервал (a, b) накрывает неизвестный параметр с вероятностью 0,8. Рассматривается интервал (c, d) , лежащий строго внутри интервала (a, b) . Интервал (c, d) накрывает неизвестный параметр с вероятностью

- (а) не меньше 0,8 (б) не больше 0,8 (в) обязательно равной 0,8
(г) ни один из вариантов (а)-(в) неверен.

6. Проверяется гипотеза согласия H_0 с помощью критерия χ^2 Пирсона. Вычислена сумма Пирсона, она оказалась меньше критического значения (для заданного уровня значимости и используемого количества интервалов). Какой вывод можно сделать?

- (а) Гипотеза H_0 отвергается. Экспериментальные данные не согласуются с предполагаемым законом распределения.
(б) Нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 . Если гипотезу нельзя отвергнуть по критерию χ^2 , то это не означает, что она принимается.
(в) Гипотеза H_0 принимается. Экспериментальные данные согласуются с предполагаемым законом распределения.

7. На основании выборки объема n построена точечная статистическая оценка s_n неизвестного параметра s . Эта оценка является состоятельной. Что это означает?

- (а) Оценка s_n сходится по вероятности к истинному значению параметра s при объеме выборки стремящемся к бесконечности.

(б) Математическое ожидание c_n равно c .

(в) Какую бы выборку ни взяли, c_n будет принимать одно и то же значение.

Верные ответы на тестовое задание (ключ):

1бв 2агд 3бг 4ав 5б 6б 7а

Критерии оценивания заданий:

задания №1–4: 1 балл за каждый верный ответ, –1 балл за каждый неверно указанный ответ, 0 баллов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в тестовом задании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это задание выставляется 0 баллов;

задания №5–7: 2 балла за верный ответ, 0 баллов за неверный;

Итого максимальное суммарное количество баллов: 15.

Критерии оценивания тестовой работы.

Вариант №1 (зачтено/не зачтено): оценка «зачтено» выставляется, если тестируемый набрал не менее 6 баллов, в противном случае оценка «не зачтено».

Вариант №2 (балльная оценка): оценка «отлично» (5 баллов) – тестируемый набрал 14–15 баллов, оценка «хорошо» (4 балла) – тестируемый набрал 10–13 баллов, оценка «удовлетворительно» (3 балла) – тестируемый набрал 6–9 баллов, оценка «неудовлетворительно» (2 балла) – тестируемый набрал 0–5 баллов.

1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к экзамену

1. Основные понятия математической статистики: генеральная совокупность, выборка, статистика, статистическая оценка, состоятельные и несмещённые оценки, точечные и интервальные оценки, точность оценки в смысле среднего квадратического, доверительный интервал, доверительная вероятность, статистическая гипотеза, простые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, ошибки первого и второго рода, уровень значимости.
2. Вероятностные распределения, связанные с нормальным: χ^2 – распределение, распределение Стьюдента, распределение Фишера.
3. Методы построения точечных оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия.
4. Эффективность оценок. Неравенство Рао-Крамера. Энтропия случайной величины.
5. Задача о выборочном контроле.
6. Интервальные оценки. Построение доверительных интервалов для математического ожидания нормального распределения. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, сравнение выборочной средней с гипотетическим средним генеральной совокупности.
7. Корреляционный анализ. Выборочный коэффициент корреляции. Ранговая корреляция. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Проверка гипотез о значимости коэффициента корреляции.

8. Регрессионный анализ. Линейная регрессия, нахождение и проверка значимости параметров линейной регрессии. Сглаживание наблюдений, нахождение параметров аппроксимирующей функции (метод наименьших квадратов). Автокорреляционная функция, смешанные модели.
9. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ^2) для простых и сложных гипотез. Критерии согласия Колмогорова и Смирнова (основные идеи). Таблицы сопряженности признаков, проверка гипотезы о независимости.
10. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни.
11. Основы дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ.

Темы практических заданий к экзамену

1. Построение оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия и метода моментов.
2. Проверка гипотез с использованием критерия Пирсона. Проверка гипотезы о независимости признаков (анализ таблицы сопряженности признаков).
3. Вычисление выборочного коэффициента корреляции, коэффициента ранговой корреляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости.
4. Нахождение параметров уравнения линейной или нелинейной регрессии, автокорреляционной функции, смешанных функций методом наименьших квадратов.
5. Проверка гипотез об однородности выборок с помощью критериев Вилкоксона и Манна-Уитни.

Пример экзаменационного билета

(2 теоретических вопроса и 2 задачи)

1. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ^2) для простых и сложных гипотез.
2. Ранговая корреляция. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Проверка гипотез о значимости коэффициента корреляции.
3. Два класса (11А и 11Б) написали контрольную работу по химии. Среди результатов 24 учеников 11А поровну «двоек», «троек», «четвёрок» и «пятёрок», а среди 16 учеников 11Б «троек» и «четвёрок» не получил никто, зато поровну «двоек» и «пятёрок». Выясните, есть ли существенные различия между этими двумя классами.
4. Найдите интервальную оценку математического ожидания нормального распределения с доверительной вероятностью 0,96, если получена оценка неизвестной дисперсии $S = 16$, а среднее арифметическое выборки равно 25. Объем выборки $n = 100$.

Критерии оценивания заданий экзаменационного билета

1. Сформулировать общий вид простой гипотезы согласия (0,1 балла), сформулировать общий вид и описать отличия сложной гипотезы согласия (0,1 балла), описать основную идею критерия согласия Пирсона для простой гипотезы (0,1 балла), сформулировать теорему Пирсона (0,1 балла), на её основе

подробно описать критерий согласия Пирсона для простой гипотезы (0,1 балла), объяснить возможные варианты интерпретации результатов применения критерия (0,1 балла). Сформулировать теорему Пирсона для сложной гипотезы (0,1 балла), описать критерий для сложной гипотезы (0,1 балла) и интерпретацию выводов (0,1 балла). Описать возможные ограничения при использовании критерия Пирсона (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 баллов.

2. Объяснить, в каких условиях возникает возможность использования коэффициентов ранговой корреляции, выдвинуть нулевую и альтернативную гипотезу (0,1 балла). Записать (0,1 балла) и обосновать (0,3 балла) формулу для расчета коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Рассчитать значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена для строгой прямой (0,1 балла) и строгой обратной (0,1 балла) зависимости. Сформулировать теорему Стьюдента (0,1 балла), на её основе сформулировать критерий проверки гипотезы (0,1 балла), описать порядок интерпретации результатов. Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,7 баллов.
3. Строго сформулировать нулевую и альтернативную гипотезу согласия (0,1 балла), корректно выбрать статистический критерий для её проверки (0,1 балла), воспользоваться критерием согласия (0,4 балла), сделать выводы из критерия (0,1 балла) и проинтерпретировать полученные результаты в контексте поставленной исходной задачи (0,1 балла), обсудить возможные варианты выводов и интерпретаций при изменении параметров задачи (0,2 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,7 баллов.
4. Сформулировать определение доверительного интервала и смежных понятий (0,2 балла), сформулировать необходимое следствие из теоремы Фишера (0,2 балла), воспользоваться следствием из теоремы Фишера для поставленной задачи (0,4 балла), обсудить возможные варианты выводов и интерпретаций при изменении параметров задачи (0,2 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,7 баллов.

Критерии оценивания экзамена, выставления оценки и выводов о сформированности компетенций приведены в параграфах 3.3-3.4 методических рекомендаций преподавателю (раздел 3 рабочей программы курса).

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Профессиональные компетенции						
К-2	Контрольные работы (1-2), Самостоятельная работа Задания для домашней работы по темам № 1–9 Зачет Экзамен	1 – 6	Знать: – основные понятия, теоремы и критерии математической статистики; – особенности постановки задач математической статистики, – методы построения оценок и проверки гипотез в математической статистике, условия применимости статистических критериев. Уметь: – строить точечные и интервальные оценки числовых показателей	1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация. 2. Первичная обработка результатов: построение вариационного ряда, ранжирование. Вычисление описательных характеристик (медиана, мода,	1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация. Выполнение основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их вывода. 2. Первичная обработка результатов: построение вариационного ряда, ранжирование. Вычисление описательных	1. Воспроизведение основных теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода. 2. Первичная обработка результатов: построение вариационного ряда, ранжирование. Вычисление описательных характеристик (медиана, мода, размах). Постановка задач точечного оценивания параметров распределения. Построение оценок параметров

			<p>распределения случайных величин, – проверять статистические гипотезы согласия, однородности выборок, некоррелируемости. – строить регрессионные модели и проверять их значимость, – интерпретировать результаты применения статистических критериев.</p> <p>Владеть навыками: – первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов), – построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов, – применения статистических</p>	<p>размах). Постановка задач точечного оценивания параметров распределения, построение простых оценок параметров распределений на основе выборочных средних.</p> <p>3. Владение понятиями интервальной оценки, доверительного интервала, доверительной вероятности. Построение интервальных оценок для частот в схеме Бернулли.</p> <p>4. Владение основными понятиями,</p>	<p>характеристик (медиана, мода, размах). Постановка задач точечного оценивания параметров распределения, построение оценок параметров распределений на основе выборочных средних, а также с помощью метода максимального правдоподобия, метода моментов.</p> <p>3. Владение понятиями интервальной оценки, доверительного интервала, доверительной вероятности. Построение интервальных оценок параметров на основе нормального распределения. Выполнение основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их вывода.</p>	<p>распределений на основе выборочных средних, а также с помощью метода максимального правдоподобия, метода моментов. Исследование состоятельности и несмещённости построенных оценок, сравнение различных оценок в смысле среднего квадратического. Владение понятием эффективности оценки, умение оценивать эффективность оценок в простых случаях.</p> <p>3. Владение понятиями интервальной оценки, доверительного интервала, доверительной вероятности. Построение интервальных оценок параметров случайных величин с различными законами распределения. Выполнение в полном объёме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.</p> <p>4. Владение основными понятиями, связанными с проверками статистических гипотез. Понимание математических основ различных статистических</p>
--	--	--	---	---	---	--

			критериев для проверки гипотез.	<p>связанными с проверками статистических гипотез. Постановка гипотез согласия, независимости, однородности выборок. Владение основными методами проверки данных гипотез в простом случае.</p> <p>5. Постановка основных задач корреляционного анализа. Вычисление выборочного коэффициента корреляции и коэффициента ранговой корреляции Спирмена, проверка их значимости, интерпретация результатов.</p>	<p>4. Владение основными понятиями, связанными с проверками статистических гипотез. Постановка гипотез согласия, независимости, однородности выборок. Владение методами проверки данных гипотез в простом случае. Умение давать содержательную статистическую интерпретацию результатам применения статистических критериев.</p> <p>5. Постановка основных задач корреляционного анализа. Вычисление выборочного коэффициента корреляции и коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости. Умение давать статистическую интерпретацию результатам применения критериев.</p>	<p>критериев. Постановка гипотез согласия, независимости, однородности выборок. Владение методами проверки данных гипотез. Умение давать содержательную статистическую интерпретацию результатам применения критериев, планировать дальнейшую обработку и анализ данных в зависимости от результатов работы критерия.</p> <p>5. Постановка основных задач корреляционного анализа. Владение математическими основами критериев некоррелированности. Вычисление выборочного коэффициента корреляции и коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости. Умение давать статистическую интерпретацию результатам применения критериев в зависимости от объема выборки, уровня значимости.</p> <p>6. Постановка различных задач регрессионного анализа. Оценка коэффициентов одномерных и многомерных линейных регрессионных моделей, моделей авторегрессии,</p>
--	--	--	---------------------------------	--	--	---

				<p>6. Постановка задачи одномерной линейной регрессии. Построение однофакторной линейной регрессионной модели, первичный анализ качества линейного приближения.</p>	<p>6. Постановка задач одномерной и многомерной линейной регрессии, авторегрессии. Оценка коэффициентов линейных регрессионных моделей, моделей авторегрессии. Анализ значимости коэффициентов регрессионных моделей. Постановка и решение задачи сглаживания наблюдений. Выполнение основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их вывода.</p>	<p>комбинированных моделей. Анализ значимости коэффициентов регрессионных моделей. Владение методами анализа параметров регрессионных моделей (количества факторов, порядка авторегрессии). Постановка и решение задачи сглаживания наблюдений. Выполнение в полном объеме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.</p>
--	--	--	--	---	---	--

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;

- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2 Общие рекомендации по изучению материала курса и подбору заданий

Дисциплина «Дополнительные главы математической статистики» является важным элементом формирования специалиста, способного применять современный математический аппарат при решении прикладных задач, и относится к числу дисциплин по выбору и относится к вариативной части учебного плана в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

Ожидаемо, что изучение дисциплины будет эффективным только при наличии хорошей базы, основой которой является курс теории вероятностей и математической статистики. Поэтому начальный этап освоения дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» требует актуализации знаний теории вероятностей и основ математической статистики на первых лекционных занятиях. Не будет лишним продемонстрировать классические вероятностные опыты, проиллюстрировать основные понятия и решить несколько задач.

Целесообразно подготовить для каждого занятия билеты с задачами (достаточно иметь 2-3 разных варианта). Для первого занятия можно выбрать простые задачи на первичную обработку экспериментальных данных, выдвижение «наивных» естественных гипотез. Начиная со второго занятия имеет смысл сдвигаться в сторону большей строгости, обоснованности выдвигаемых предположений. При изучении основ математической статистики следует уделить особое внимание проверке простых гипотез с использованием критерия Пирсона, а также методам построения оценок параметров распределения (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов), сопоставляя точность оценок, получаемых с помощью различных методов.

3.3 Форма проведения экзамена по курсу

Студенты и преподаватели вполне отдают себе отчет в том, что еще живо представление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий, преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо усилий. При этом студенты порой пытаются подтвердить данное представление, а преподаватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Очевидно, формат итоговой (или семестровой) аттестации накладывает определенный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной аттестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, то в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованностью студентов в работе в аудитории или дома. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении семестровой аттестации (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях, результатов промежуточной аттестации, самостоятельной работы вне аудитории, активности работы на лекциях) может поспособствовать увеличению интенсивности

работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных занятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Данные соображения были учтены при разработке формы итоговой аттестации. На экзамене студент получает билет с четырьмя заданиями – два теоретического характера и две задачи – «базовый комплект». Характер работы по ходу семестра «материализуется» в количестве дополнительных предложенных заданий: за активную работу на занятиях, высокие результаты прохождения промежуточных аттестаций (контрольных работ) количество предлагаемых студенту заданий может быть уменьшено, а при слабой работе (низкая посещаемость, слабые результаты или пропуски контрольных работ) – увеличено (возможно, на 2-3). Однако критерии не зависят от количества предложенных заданий, оценка выставляется по следующей схеме: пять минус количество заданий, справиться с которыми не удалось. Таким образом, активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации, а те, кто своим жизненным стилем избрали упомянутый в эпиграфе принцип, для успешного прохождения экзаменационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий.

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и прозрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулирует студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

3.4 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

В рамках экзамена выставление оценки и проверки уровня сформированности профессиональной компетенции ПК-2 производится в соответствии с описанными выше принципами и критериями из раздела 3.3. Оценка «отлично» (обучающийся справился со всеми предложенными экзаменационными заданиями) соответствует высокому уровню сформированности компетенции. Если обучающийся не справился лишь с одним из предложенных заданий, то делается вывод о продвинутом уровне сформированности компетенции и выставляется оценка «хорошо». Оценка «удовлетворительно» и вывод о базовом уровне сформированности компетенции соответствуют ситуации, когда экзаменуемый не справился с двумя предложенными заданиями (и остальные задания

выполнены на необходимом уровне). Если обучающийся не справился с тремя или большим количеством экзаменационных заданий, то можно сделать вывод, что компетенция сформирована на уровне ниже порогового, а за экзамен выставляется оценка «неудовлетворительно».

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы математической статистики»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс дополнительных глав математической статистики является естественным прикладным дополнением дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», что позволяет рассматривать его как один из важнейших математических курсов для специальности прикладная математика и информатика. Курс относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

В ходе изучения курса предполагается проведение пяти контрольных работ по следующим темам:

1. Основы математической статистики
2. Проверка статистических гипотез

В процессе решения контрольных работ студенты должны овладеть практическими навыками статистической обработки и анализа опытных данных, получаемых в ходе проведения экспериментальных исследований, оценки параметров распределений, постановки статистических гипотез и их проверки, проведения корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа.

Подробные сведения по данным темам Вы можете найти в книгах из приведенного ниже списка рекомендуемой литературы, где есть ссылки на соответствующие главы и параграфы.

Рекомендуемая литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Ярослав. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с
2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479с

Примеры выполнения заданий контрольных работ

Пример 1. Получена таблица частот оценок по контрольной работе у 40 учащихся класса:

Оценка	2	3	4	5
Частота	3 40	8 40	25 40	4 40

Найдите: а) выборочное среднее значение оценки; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию; г) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma\sigma\sim$; д) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma\sigma\sim\sim$.

Решение. По вычислительным формулам для значений выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения и исправленной его оценки получаем:

$$\text{а) } m\tilde{m} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 4}{40} = 3,75;$$

$$\text{б) } DD\tilde{m} = \frac{(2-3,75)^2 \cdot 3 + (3-3,75)^2 \cdot 8 + (4-3,75)^2 \cdot 25 + (5-3,75)^2 \cdot 4}{40} = 0,5375;$$

$$\text{в) } DD\sim\sim \approx 0,55;$$

$$\text{г) } \sigma\sigma\sim = \sqrt{DD\tilde{m}} \approx 0,73$$

$$\sigma\sigma\sim\sim = \sqrt{DD\sim\sim} \approx 0,74.$$

Пример 2. Пусть дисперсия нормально распределенной случайной величины x равна 0,25. По выборке объема $n=25$ найдено выборочное среднее $m \sim = 52$. Требуется найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m , если доверительная вероятность должна быть равна 0,95.

Решение. Решаем уравнение $2\Phi(t_\gamma) = 0,95$, используя таблицу значений функции Лапласа. Для t_γ получим значение 1,96. Затем находим концы доверительного интервала:

$$m \sim - t_{\gamma\gamma} \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 52 - 1,96 \frac{\frac{0,25}{\sqrt{25}}}{\frac{0,25}{\sqrt{25}}} = 52 - 0,196 = 51,804;$$

$$m \sim + t_{\gamma\gamma} \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 52 + 1,96 \frac{\frac{0,25}{\sqrt{25}}}{\frac{0,25}{\sqrt{25}}} = 52 + 0,196 = 52,196.$$

Таким образом, (51,804; 52,196) – искомый доверительный интервал с надежностью 0,95; т.е. $P(51,804 < m < 52,196) \geq 0,95$.

Пример 3. Найдите доверительный интервал для математического ожидания m нормально распределенной случайной величины, для которой по выборке объема $n = 25$ найдены выборочное среднее $m \sim = 2,4$ и исправленная выборочная дисперсия $DD \sim = 4$, если надежность должна равняться $\gamma = 0,95$.

Решение. Пользуясь таблицей (см. приложение), решаем уравнение $2S(t_\gamma) = 0,95$ и находим $t_\gamma = 2,064$. Тогда имеем:

$$m \sim - t_{\gamma\gamma} \frac{\frac{\sigma \sim}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma \sim}{\sqrt{n}}} = 2,4 - 2,064 \frac{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}} = 1,5744;$$

$$m \sim + t_{\gamma\gamma} \frac{\frac{\sigma \sim}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma \sim}{\sqrt{n}}} = 2,4 + 2,064 \frac{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}} = 3,2256.$$

Искомый доверительный интервал (1, 5744; 3,2256).

Замечание. При достаточно большом n (практически при $n > 20$) для нахождения доверительного интервала (2) число t_γ можно найти из уравнения $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$ по таблице для функции Лапласа. Это связано с тем, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения Стьюдента стремится к нормальному.

В рассмотренном выше примере ($n = 25$) при использовании таблицы $\Phi(t)$ получим доверительный интервал (1,616; 3,184).

Пример 4. В результате 100 независимых опытов событие A произошло 36 раз. Требуется найти доверительный интервал для вероятности $p = p(A)$ при заданной доверительной вероятности $\gamma = 0,8$.

Решение. По условию $n = 100$ и $k = 36$, следовательно, $\mu = 0,36$. Далее по таблице для функции Лапласа находим $t_\gamma = 1,28$. Подставляя полученные значения в формулу, имеем:

$$p \sim 1 = \frac{0,36 + \frac{1}{2 \cdot 100} \cdot 1,28^2 - 1,28 \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{100}}}{1 + \frac{1}{100} \cdot 1,28^2} \approx 0,3018;$$

$$p \sim 2 = \frac{0,36 + \frac{1}{2 \cdot 100} \cdot 1,28^2 + 1,28 \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{100}}}{1 + \frac{1}{100} \cdot 1,28^2} \approx 0,4228.$$

Таким образом, с вероятностью $\geq 0,8$ выполняется неравенство $0,3018 < p < 0,4228$.

Пример 5. Система случайных величин (x, y) задана таблицей распределения:

	y	-1	0	1
x				

0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Найдите коэффициент корреляции между x и y .

Решение. Воспользуемся формулами для вычисления коэффициента корреляции:

$$r[x, y] = \frac{M[xy] - M[x]M[y]}{\sigma[x]\sigma[y]}.$$

В данном случае

$$M[xy] = 0 \cdot (-1) \cdot 0,10 + 0 \cdot 0 \cdot 0,15 + 0 \cdot 1 \cdot 0,20 + 1 \cdot (-1) \cdot 0,15 + 1 \cdot 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 1 \cdot 0,15 = 0.$$

Для нахождения $M[x]$, $M[y]$, $\sigma[x]$ и $\sigma[y]$ составим законы распределения величин x и y в отдельности:

0	1	- закон распределения x ;
0,45	0,55	

-1	0	1	- закон распределения y ;
0,25	0,40	0,35	

Отсюда

$$M[x] = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55;$$

$$M[y] = (-1) \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0,35 = 0,1; D[x]$$

$$= M[x^2] - \overline{M[x]}^2 = 0,55 - 0,55^2 = 0,2475;$$

$$\sigma[x] = \sqrt{0,2475} \approx 0,497;$$

$$D[y] = M[y^2] - M[y]^2 = 0,6 - 0,1^2 = 0,59;$$

$$\sigma[y] = \sqrt{0,59} \approx 0,768;$$

$$r[x, y] = \frac{0 - 0,55 \cdot 0,1}{0,497 \cdot 0,768} \approx -0,144.$$

Пример 6. В результате 10 независимых опытов над системой (x, y) получены точки: (2,1; 3,0), (2,1; 2,8), (2,0; 3,0), (2,5; 2,0), (2,8; 1,8), (2,2; 2,5), (3,2; 1,5), (3,2; 1,1), (3,2; 1,0), (4,7; 1,3). Найдите выборочный коэффициент корреляции.

Решение. Для удобства вычислений составляем расчетную таблицу:

№ опыта	x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2	y_k^2
1	2,1	3,0	6,30	4,41	9,00
2	2,1	2,8	5,88	4,41	7,84
3	2,0	3,0	6,0	4,00	9,00
4	2,5	2,0	5,0	6,25	4,00
5	2,8	1,8	5,04	7,84	3,24
6	2,2	2,5	5,50	4,84	6,25
7	3,2	1,5	4,80	10,24	2,25
8	3,2	1,1	3,52	10,24	1,21
9	3,2	1,0	3,20	10,24	1,00
10	4,7	1,3	6,11	22,09	1,69
Сумма	28	20	51,635	84,56	45,48

Далее находим:

$$m_{\sim x} = 2,8; m_{\sim y} = 2,0; m_{\sim xy} = 5,135;$$

$$D_{\sim x} = m_{\sim x^2} - m_{\sim x}^2 = 8,456 - 2,8^2 = 0,616; \sigma_{\sim x} = \sqrt{0,616} \approx 0,785;$$

$$D_{\sim y} = m_{\sim y^2} - m_{\sim y}^2 = 4,548 - 2^2 = 0,548; \sigma_{\sim y} = \sqrt{0,548} \approx 0,740;$$

$$r_{\sim xy} = \frac{5,135 - 2,8 \cdot 2}{0,785 \cdot 0,740} \approx -0,8.$$

Так как модуль коэффициента корреляции близок к 1, то зависимость между x и y можно считать близкой к линейной, причем корреляция отрицательная (с возрастанием x величина y в среднем убывает).