

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра математического анализа

М. В. Невский

МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2019

УДК 51:37  
ББК В14я73+В15я73  
Н40

Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2019 года

Рецензент  
кафедра математического анализа  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Невский, Михаил Викторович.**

Н40 Материалы по дисциплине «Алгебра и геометрия» : учебно-методическое пособие / М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2019. — 52 с.

Учебно-методическое пособие содержит материалы для изучения дисциплины «Алгебра и геометрия»: общую характеристику дисциплины, требования к уровню овладения предметом, программу дисциплины, список литературы, описание тем для самостоятельного изучения, упражнения к лекциям и др., а также рекомендации автора первокурсникам.

Предназначено для студентов 1 курса математического факультета, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика».

УДК 51:37  
ББК В14я73+В15я73

© ЯрГУ, 2019

# Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>4</b>
<b>2. Программа дисциплины</b>	<b>6</b>
<b>3. Список рекомендуемой литературы</b>	<b>10</b>
<b>4. Требования к практическим навыкам студентов. Тематика основных задач</b>	<b>11</b>
<b>5. Темы для самостоятельного изучения</b>	<b>13</b>
5.1. Комплексные числа . . . . .	13
5.2. Многочлены . . . . .	14
<b>6. Вопросы к экзаменам</b>	<b>15</b>
<b>7. Упражнения к лекциям. Часть 1</b>	<b>18</b>
7.1. Системы линейных уравнений. Матрицы . . . . .	18
7.2. Векторная алгебра . . . . .	21
7.3. Преобразования координат. Уравнения линий и поверхностей . . . . .	23
7.4. Линейные образы на плоскости и в пространстве . . . . .	24
7.5. Линии и поверхности второго порядка . . . . .	26
7.6. Множества и отображения. Понятие о группе, кольце и поле . . . . .	27
7.7. Комплексные числа . . . . .	28
7.8. Многочлены . . . . .	32
7.9. Определители. Обратная матрица . . . . .	33
<b>8. Упражнения к лекциям. Часть 2</b>	<b>35</b>
8.1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость . . . . .	35
8.2. Базис, размерность, подпространства и ранг . . . . .	37
8.3. Линейные операторы . . . . .	40
8.4. Евклидовы пространства . . . . .	42
8.5. Билинейные и квадратичные формы . . . . .	45
8.6. Линейные операторы в евклидовых пространствах . . . . .	47
<b>9. Первокурсникам о самостоятельной работе</b>	<b>49</b>

# 1. Введение

Дисциплина «Алгебра и геометрия» является одной из базовых математических дисциплин, изучаемых студентами направления «Прикладная математика и информатика» на математическом факультете Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Этот курс преподаётся в течение первых двух семестров обучения. Структура дисциплины предполагает чтение лекций и проведение практических занятий. В конце каждого семестра студенты сдают экзамен. Кроме того, в первом и втором семестрах каждый студент должен сдать коллоквиум или выполнить письменную работу, включающую избранные теоретические вопросы и задачи.

Для формирования практических навыков студенту необходимо решить предложенные преподавателем задачи по основным темам и определённым образом отчитаться по этой работе. Задачи решаются в аудитории (на практических занятиях) и в рамках самостоятельной работы (домашние задания). Необходимо также выполнить ряд контрольных работ и индивидуальных заданий.

На экзамене студент должен продемонстрировать общее владение теоретическим и практическим материалом дисциплины, понимание терминологии и результатов, логику и ясность мышления, а также умение решать основные задачи. В ответе, который претендует на хорошую или отличную оценку, должны быть продемонстрированы математические доказательства. Определения и теоремы следует иллюстрировать с помощью примеров. При оценке работы студента учитывается его активность на лекциях (в том числе выполнение упражнений, предлагаемых лектором), а также посещаемость студентом практических занятий и активность на этих занятиях.

Программа дисциплины «Алгебра и геометрия» является очень насыщенной. Обилие новых для студента понятий и фактов составляет основную трудность при изучении курса. Кроме того, некоторые вопросы выносятся на самостоятельное изучение. Для успешной работы требуется определённое методическое обеспечение дисциплины. К настоящему времени преподавателями математического факультета подготовлен целый ряд учебных пособий и методических указаний по содержанию вопросов дисциплины. Настоящее учебно-методическое пособие относится к дисциплине в целом. Его цель состоит в том, чтобы помочь студенту как с содержательной, конкретной стороны пред-

мета, так и с методической стороны. Читатель найдёт в нём описание требований к уровню его подготовки по предмету, основные темы дисциплины, программы экзаменов первого и второго семестров, описание основных задач, рекомендуемую литературу, описание тем для самостоятельного изучения. Кроме того, в пособии даются примерные упражнения ко всем основным разделам дисциплины, которые озаглавлены как упражнения к лекциям.

Сделаем здесь несколько замечаний о нашем предмете и его преподавании.

Дисциплина «Алгебра и геометрия» играет важную роль в формировании мировоззрения, математической идеологии студента, в его общематематическом и даже общекультурном развитии. Это связано с обилием изучаемых объектов, понятий, фактов и той роли, которые эти элементы играют в математике и развитии человеческой цивилизации. «Алгебра и геометрия» — один из немногих курсов, в котором предметно (то есть в связи с определёнными существенными результатами) должны быть упомянуты великие математики Аполлоний, Архимед, Евклид, Диофант, Безу, Виет, Горнер, Тейлор, Декарт, Ферма, Ньютон, Лейбниц, Де Муавр, Руффини, Абель, Крамер, Д'Аламбер, Лагранж, Лаплас, Вандермонд, Эйлер, Гаусс, Лежандр, Коши, Грассман, Якоби, Гамильтон, Кэли, Сильвестр, Кронекер, Риман, Чебышёв, Фробениус, Вейерштрасс, Жордан, Грам, Гильберт, Шмидт, Пеано и др. По мнению автора, исторический и персональный подходы не только повышают увлекательность лекций и учебных пособий, но и служат демонстрацией единства математики, ее наднациональной сути и той глубоко гуманистической миссии, которая проявляется в достижениях ее творцов. Эта гуманитарная составляющая математики находит свое проявление в преподавании «Алгебры и геометрии».

При изучении дисциплины каждому студенту следует прочесть хотя бы одну-две книги по предмету, то есть научиться самостоятельно анализировать математический текст. Студент должен привыкнуть к употреблению таких элементов математически структурированного текста, как *Определение*, *Теорема*, *Доказательство*, *Лемма*, *Следствие*, *Замечание*, *Пример*, *Алгоритм*, *Упражнение* и др. Лучшим студентам могут быть предложены для ознакомления отдельные фрагменты монографий или статей, дополняющих основной материал (например, приложения, алгоритмы и т. д.).

Изучение дисциплины «Алгебра и геометрия» осуществляется в рамках направления бакалавриата «Прикладная математика и информатика», то есть предназначено для образования будущего математика-прикладника. Эта дисциплина отражает неразрывную связь фундаментальной и прикладной математики, предполагает условность такого деления. Многие абстрактные математические результаты явились необходимым фундаментом прикладных исследований (конические сечения Аполлония и законы Кеплера; применение Гауссом исключения неизвестных для реализации метода наименьших квадратов с целью определения орбит небесных тел; интерполяционные многочлены Лагранжа как один из первых аппаратов прикладной теории приближения; применение конечных алгебраических систем в задачах цифровой обработки сигналов, например изображений, теории кодирования, математической криптографии и др.).

Автор настоящего пособия является лектором по алгебре и геометрии на математическом факультете Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова с 1987 года. Он надеется, что содержащиеся в этой брошюре сведения и рекомендации помогут первокурсникам в начале их обучения на математическом факультете университета.

## 2. Программа дисциплины

В программу дисциплины «Алгебра и геометрия» входят разделы, изучаемые на лекциях и практических занятиях, а также в ходе самостоятельной работы студентов. Дадим описание этих разделов по семестрам.

### Первый семестр

**Введение.** Предмет и метод дисциплины «Алгебра и геометрия». Краткие исторические сведения. «Алгебра и геометрия» для математика-прикладника.

**Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса.** Общий вид системы линейных уравнений. Классификация систем по множеству решений. Элементарные преобразования систем и их матриц. Ступенчатые и специальные ступенчатые матрицы. Анализ системы уравнений, имеющей ступенчатый вид. Решение систем

методом Гаусса. Трудоёмкость метода Гаусса. Понятие о других методах решения линейных систем. Вычислительные особенности решения линейных систем.

**Матрицы и действия с ними.** Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Действия с  $n$ -мерными векторами. Пространство матриц  $M_{m,n}$ . Простейшие операции над матрицами. Умножение матриц и его свойства. Обратная матрица.

**Векторная алгебра и системы координат.** Понятие геометрического вектора. Коллинеарность и компланарность. Пространство  $V_n$ . Линейная зависимость векторов из  $V_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , и  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Свойства линейной зависимости. Решение задачи о линейной зависимости в  $\mathbb{R}^n$ . Базис  $V_n$ . Характеризация базисов  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ . Размерность. Координаты вектора. Действия в координатах. Изоморфизм  $V_n$  и  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Аффинная и декартова системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Полярная система координат на плоскости. Другие системы координат. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства. Геометрический смысл декартовых координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства. Вычисление площадей и объёмов с помощью определителей 2—3 порядка.

**Уравнения линий и поверхностей.** Преобразования аффинных координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Преобразования декартовых координат. Поворот и перенос. Различные виды уравнений линии и поверхности. Алгебраические линии и поверхности.

**Линейные образы на плоскости и в пространстве.** Различные виды уравнений прямой на плоскости: векторное, каноническое, параметрические, общее. Неполные уравнения. Уравнение в отрезках. Уравнение с угловым коэффициентом. Переход от одних уравнений к другим. Угол между двумя прямыми. Параллельность и перпендикулярность двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Основные типы задач. Уравнение плоскости в векторной форме. Параметрические и общее уравнения. Неполные уравнения плоскости, уравнение в отрезках. Переход от одних уравнений к другим. Расстояние от точки до плоскости. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей. Системы линейных неравенств. Выпуклые множества.

**Линии и поверхности второго порядка.** Происхождение. Конические сечения. Исторические сведения. Определения, канонические уравнения, характеристики и свойства эллипса, гиперболы, параболы. Директрисы линий второго порядка, их свойство. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду при помощи поворота и переноса декартовой системы координат. Простейшие уравнения второго порядка и их геометрические образы. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей. Центральные поверхности. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Конус и цилиндры второго порядка. Канонические уравнения и основные свойства. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

**Понятие о группе, кольце, поле.** Бинарная операция, алгебраическая система. Полугруппа и группа. Аддитивные и мультипликативные группы. Примеры. Кольцо и поле, их разновидности. Примеры. Конечные алгебраические системы. Кольцо и поле вычетов. Другие конечные поля.

**Комплексные числа и действия с ними.** Определение и характеристики комплексных чисел. Действия в алгебраической и тригонометрической формах. Совокупность комплексных чисел как поле. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Корни из 1, их свойства.

## **Второй семестр**

**Многочлены.** Многочлены над полем  $\mathbb{R}$  и над полем  $\mathbb{C}$ . Совокупность многочленов как кольцо. Делимость. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых. Корни многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры. Локализация корней. Интерполяция многочленами. Формулы Лагранжа и Ньютона.

**Определители.** Перестановки и инверсии. Определитель порядка  $n$ . Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса. Разложение по строке (столбцу), теорема Лапласа. Определитель произведения двух матриц. Приложение определителей к решению систем линейных уравнений. Критерий определённости, правило Крамера. Определитель Вандермонда и задача интерполяции многочленами. Обратная матрица и её вычисление. Обратимость и невырожденность матриц.



**Линейные пространства, подпространства и ранг.** Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Базис, размерность, координаты. Изоморфизм линейных пространств. Подпространства. Линейная оболочка. Ранг и база системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Определение ранга матрицы как ранга системы столбцов. Теорема о ранге (о базисном миноре). Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера–Капелли. Определение размерности и базиса подпространства  $\mathbb{R}^n$ , задаваемого системой линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

**Линейные операторы.** Определение и примеры линейных операторов в основных пространствах. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Ядро и образ, дефект и ранг оператора. Определение ранга и дефекта по матрице оператора. Обратимость и невырожденность. Изменение матрицы оператора при изменении базиса. Подобные матрицы. Инвариантные подпространства оператора. Определение, свойства и вычисление собственных значений и собственных векторов. Характеристический многочлен оператора. Собственные подпространства. Диагонализуемые операторы. Каноническая форма матрицы линейного оператора в комплексном линейном пространстве (жорданова нормальная форма матрицы).

**Билинейные и квадратичные формы.** Основные определения. Матрица билинейной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методами Лагранжа и Якоби. Положительная определённость квадратичной формы, критерий Сильвестра. Закон инерции квадратичных форм. Индексы инерции, ранг и сигнатура квадратичной формы.

**Евклидовы пространства.** Определение и примеры. Определитель Грама. Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского и его частные виды. Ортогонализация Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству. Расстояние от точки до подпространства. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряжённый оператор. Симметричные операторы и их свойства. Диагонализуемость симметричного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с использованием свойств симметричного оператора (метод собственных значений). Ор-

тогональные операторы и их свойства. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора.

### 3. Список рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М. : Физматлит, 2004. 224 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М. : Физматлит, 2005. 280 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М. : Физматлит, 2000. 272 с.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра. М. : Физматлит, 2001. 272 с.
5. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб. : Лань, 2009. 512 с.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М. : Добросвет, МЦНМО, 1971. 320 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб. : Лань, 2013. 432 с.
8. Невский М. В. Лекции по алгебре. Ярославль : ЯрГУ, 2002. 265 с.
9. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб. : Лань, 2010. 480 с.
10. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. М. : Наука, 1987. 352 с.
11. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука, 1976. 384 с.

#### Дополнительная литература

12. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М. ; СПб. : Лань, 2009. 416 с.
13. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М. : Физматлит, 2005. 240 с.
14. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика. М. : Мир, 1999. 720 с.
15. Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями. М. : Мир, 1994. 544 с.
16. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. М. : Мир, 1980. 454 с.

17. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
18. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. СПб. : Лань, 2006. 320 с.
19. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. СПб. : Лань, 2008. 298 с.
20. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб. : Лань, 2003. 336 с.
21. Невский М. В. Приведение к главным осям методом собственных значений. Ярославль : ЯрГУ, 1997. 21 с.
22. Невский М. В. Линейные операторы в конечномерных пространствах. Основные понятия. Ярославль : ЯрГУ, 1985. 29 с.
23. Невский М. В. Комплексные числа и действия с ними. Ярославль : ЯрГУ, 1988. 23 с.
24. Невский М. В. Комплексные числа. Задачи. Ярославль : ЯрГУ, 1988. 24 с.
25. Невский М. В., Иродова И. П. Задачи по теме «Линейные операторы в конечномерных пространствах». Ярославль : ЯрГУ, 1997. 20 с.
26. Невский М. В. Упражнения по дисциплине «Теория функций комплексного переменного». Ярославль : ЯрГУ, 2008. 60 с.

## 4. Требования к практическим навыкам студентов. Тематика основных задач

Для успешной сдачи экзамена студент должен уметь решать задачи, которые соответствуют программе дисциплины, приведённой в пункте 2. Однако представляется полезным дополнительно выделить тематику основных задач.

В **первом семестре** студент прежде всего должен освоить метод Гаусса решения систем линейных уравнений; к этой процедуре сводятся многие задачи курса. Требуется, далее, освоить операции с матрицами, и в частности, умножение матриц.

По темам векторной алгебры нужно уметь решать задачи на линейную зависимость и независимость векторов; на основные действия с векторами, в том числе в координатах; на вычисление проекций вектора на ось и на плоскость; на скалярное, векторное и смешанное произведения. В частности, надо уметь определять ориентацию пар и троек векторов, находить площади параллелограммов и объёмы паралле-

лепипедов, натянутых на векторы, по их координатам. Уметь решать задачи, связанные с делением отрезка в данном отношении.

Студент должен уметь составить равенства, связывающие координаты одной и той же точки в двух декартовых системах координат на плоскости (предполагается, что одна из них получается из другой с помощью последовательных поворота и параллельного переноса).

По темам «Прямая на плоскости», «Плоскость и прямая в пространстве» прежде всего надо освоить все виды уравнений прямой и плоскости, знать геометрический смысл коэффициентов уравнений, уметь их составлять, переходить от одних уравнений к другим. Отметим также основные задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, задачи на вычисление проекций, расстояний и нахождение уравнений перпендикуляров. Следует обратить внимание на возможность решения этих задач с помощью компьютера.

По теме «Линии второго порядка» надо научиться составлять и использовать канонические и близкие к ним уравнения эллипса, гиперболы и параболы, определять характеристики этих линий. К дополнительным вопросам относятся задачи, связанные с классификацией линий второго порядка, а также выбором канонической системы координат с помощью последовательных поворота и переноса исходной системы координат.

Во **втором семестре** метод Гаусса надо уметь применять для вычисления определителей, нахождения ранга матрицы и ранга системы векторов, вычисления обратной матрицы.

Из задач второго семестра отметим задачи на нахождение базиса и размерности конкретного подпространства линейного пространства, в частности линейной оболочки данных векторов или подпространства решений однородной системы линейных уравнений. Нужно уметь решать задачи на определение размерностей и базисов суммы и пересечения двух подпространств.

Для данного линейного оператора требуется уметь находить его матрицу в данном базисе, знать соответствие между действиями с операторами и их матрицами. Знать, что изменение матрицы при изменении базиса описывается преобразованием подобия. Требуется определять базисы и размерности ядра и образа оператора, находить собственные значения и собственные векторы, алгебраические и геометрические кратности собственных значений, решать вопрос о диагонализруемости оператора.

Надо знать, что такое билинейные и квадратичные формы, как они записываются в координатах, как меняются их матрицы при изменении базиса. Нужно уметь приводить квадратичную форму к каноническому виду и отвечать на вопрос о её положительной определённости (или принадлежности к другим классам знаковой определённости). Знать, что такое индексы инерции, ранг и сигнатура квадратичной формы и уметь находить эти характеристики.

По теме «Евклидовы пространства» требуется освоить процесс ортогонализации, уметь находить ортонормированный базис данного подпространства в  $\mathbb{R}^n$  и решать задачи в соответствующих координатах. Уметь находить базис ортогонального дополнения к подпространству в  $\mathbb{R}^n$ , задавать ортогональное дополнение к подпространству как в виде множества решений системы линейных однородных уравнений, так и в виде линейной оболочки данных векторов. Для данного вектора требуется уметь находить его ортогональную проекцию на данное подпространство и ортогональную составляющую, а также вычислять расстояние до этого подпространства. Для заданной в евклидовом пространстве квадратичной формы нужно уметь находить ортонормированный базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.

## 5. Темы для самостоятельного изучения

В этом пункте даётся описание двух разделов дисциплины «Алгебра и геометрия», которые обычно предлагаются студентам для самостоятельного изучения. Тема «Комплексные числа» изучается в первом семестре, а тема «Многочлены» — во втором.

### 5.1. Комплексные числа

#### Содержание

Определение комплексных чисел. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Действительная и мнимая части комплексного числа. Переход к алгебраической форме комплексного числа. Действия в алгебраической форме, их свойства. Совокупность комплексных чисел как поле. Сопряжённое число. Свойство операции сопряжения. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль

и аргумент. Свойства модуля. Тригонометрическая форма комплексного числа, связь с алгебраической формой. Умножение, деление, возведение в степень в тригонометрической форме. Извлечение корня натуральной степени в тригонометрической форме. Корни из 1 натуральной степени, их свойства.

### **Литература**

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М. : Физматлит, 2000. 272 с.
2. Невский М. В. Лекции по алгебре. Ярославль : ЯрГУ, 2002. 265 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб. : Лань, 2013. 432 с.
4. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. М. : Наука, 1987. 352 с.

### **Упражнения**

Уметь решать следующие упражнения из сборника [4]: 6.1.1–6.1.11, 6.2.1–6.2.8, 6.2.10–6.2.12, 6.3.1–6.3.4, 6.3.6–6.3.8, 6.4.1–6.4.3 (а, б, в).

### **Формы контроля**

Коллоквиум или письменная работа, включающая теоретические вопросы и упражнения.

## **5.2. Многочлены**

### **Содержание**

Многочлены над полем  $\mathbb{R}$  и над полем  $\mathbb{C}$ , действия с ними. Совокупность многочленов как кольцо. Делимость многочленов. Свойства делимости. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов. Существование, единственность, свойства. Алгоритм Евклида и его обоснование. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении в произведение неприводимых. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{C}$ . Корень многочлена. Теорема Безу. Кратные корни и дифференцирование. Формулировка основной теоремы алгебры. Локализация корней. Правило знаков Декарта, определение числа корней в данном интервале. Постановка задачи интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Интерполяционная формула Лагранжа. Интерполяция по методу Ньютона.

## Литература

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М. : Физматлит, 2000. 272 с.
2. Невский М. В. Лекции по алгебре. Ярославль : ЯрГУ, 2002. 265 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб. : Лань, 2013. 432 с.
4. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. М. : Наука, 1987. 352 с.

## Упражнения

Уметь решать следующие упражнения из сборника [4]: 7.1.1–7.1.8, 7.2.3, 7.2.4, 7.5.1, 7.6.1–7.6.3.

## Формы контроля

Коллоквиум или письменная работа, включающая теоретические вопросы и задачи.

## 6. Вопросы к экзаменам

Приведём списки вопросов к устным экзаменам по дисциплине «Алгебра и геометрия», которые проводились на математическом факультете ЯрГУ для студентов бакалавриата по направлению «Прикладная математика и информатика».

### Вопросы к экзамену по итогам первого семестра

1. Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Пространство матриц  $M_{m,n}$ . Простейшие операции с матрицами и их свойства.
2. Умножение матриц и его свойства.
3. Пространство  $\mathbb{V}_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Линейная зависимость векторов из  $\mathbb{V}_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , и  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Свойства линейной зависимости.
4. Связь линейной зависимости в  $\mathbb{V}_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , с коллинеарностью и компланарностью. Решение задачи о линейной зависимости в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Базис и координаты в  $\mathbb{V}_n$ . Характеризация базисов в  $\mathbb{V}_1$ ,  $\mathbb{V}_2$ ,  $\mathbb{V}_3$ . Размерность.
6. Аффинная и декартова (прямоугольная) системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Вычисление длин и расстояний в декартовых координатах. Полярная система координат на плоскости.

7. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства. Геометрический смысл декартовых координат.
8. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Ортонормированный базис. Вычисление скалярного произведения, длин векторов и углов между ними в декартовых координатах.
9. Определение и свойства векторного произведения.
10. Определение, геометрический смысл и свойства смешанного произведения.
11. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве. Преобразование декартовых координат на плоскости. Сдвиг и поворот.
12. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Операции с комплексными числами, их свойства. Переход к алгебраической форме. Сопряжённое комплексное число, свойства сопряжения. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент.
13. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
14. Различные виды уравнений линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве. Алгебраические и трансцендентные линии (поверхности).
15. Различные виды уравнений прямой на плоскости: векторное, каноническое, параметрические, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках. Расстояние от точки до прямой.
16. Различные виды уравнений плоскости: в векторной форме, параметрические, общее, в отрезках. Расстояние от точки до плоскости.
17. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов уравнений. Переход от одних уравнений к другим.
18. Общее уравнение линии второго порядка. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства эллипса.
19. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства гиперболы.
20. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства параболы.
21. Общее уравнение поверхности второго порядка. Эллипсоид. Каноническое уравнение и свойства.
22. Гиперboloиды. Канонические уравнения и свойства.



23. Параболоиды. Канонические уравнения и свойства.
24. Конус и цилиндры второго порядка. Канонические уравнения и свойства.
25. Группа, кольцо, поле. Основные определения и примеры.
26. Кольцо и поле вычетов.

### **Вопросы к экзамену по итогам второго семестра**

1. Определитель порядка  $n$ . Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.
2. Правило Крамера.
3. Разложение определителя по строке (столбцу).
4. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления  $\mathbf{A}^{-1}$ .
5. Многочлены и действия с ними. Теорема о делении с остатком.
6. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.
7. Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{C}$ .
8. Корень многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры.
9. Задача интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.
10. Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость, их свойства.
11. Лемма о двух системах векторов. Базис, размерность, координаты. Понятие о бесконечномерных пространствах.
12. Действия с векторами в координатах. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфизме. Примеры изоморфных пространств.
13. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств.
14. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Методы вычисления ранга матрицы.
15. Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора, её применение для нахождения координат образа вектора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.

16. Действия с линейными операторами. Матрицы соответствующих операторов.

17. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте. Определение ранга и дефекта по матрице оператора.

18. Обратный оператор, его линейность. Обратимость и невырожденность. Другие критерии невырожденности оператора.

19. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, независимость от базиса. Вычисление собственных значений и собственных векторов.

20. Определение и примеры евклидовых пространств. Линейная независимость ортогональной системы.

21. Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского.

22. Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Преимущества ортонормированного базиса. Ортогонализация Грама–Шмидта.

23. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства, его свойства. Две задачи о вычислении ортогонального дополнения в  $\mathbb{R}^n$ .

24. Расстояние в евклидовом пространстве. Расстояние от точки до подпространства.

25. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

## 7. Упражнения к лекциям. Часть 1

### 7.1. Системы линейных уравнений. Матрицы

1.1. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — действительная функция  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условиям

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n),$$

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$$

для всех  $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{R}$ . Докажите, что существуют числа  $d_i$ , такие что  $f(x_1, \dots, x_n) = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$ .

а)  $n = 1$ ; б)  $n = 2$ ; в)  $n \in \mathbb{N}$  — произвольное.

1.2. Покажите, что элементарные преобразования системы линейных уравнений переводят её в эквивалентную систему.

1.3. Решите систему линейных уравнений в зависимости от параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

а)

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda,$$

$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2;$$

б)

$$x_1 + \dots + x_n = \lambda x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

1.4. Найдите многочлен  $f(x)$  наименьшей степени по данной таблице значений:

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 41 & 7 & 1 & -1 & 1 \end{array}.$$

1.5. Реализуйте на компьютере алгоритм метода Гаусса решения системы линейных уравнений.

1.6. Докажите, что для любой матрицы  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$  существуют единственная симметричная матрица  $\mathbf{B}$  ( $b_{ij} = b_{ji}$ ) и единственная кососимметричная матрица  $\mathbf{C}$  ( $c_{ij} = -c_{ji}$ ), такие что  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ . Найдите формулы, выражающие матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  (или их элементы) через матрицу  $\mathbf{A}$  (или элементы этой матрицы).

а)  $n = 2$ ; б)  $n = 3$ ; в)  $n \in \mathbb{N}$  — произвольное.

1.7. Верно ли, что если  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — симметричные матрицы, то матрица  $\mathbf{AB}$  также является симметричной?

1.8. Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R})$ . Вычислим последовательно

$$\alpha_1 := (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}), \quad \alpha_2 := (a_{21} + a_{22})b_{11},$$

$$\alpha_3 := a_{11}(b_{12} - b_{22}), \quad \alpha_4 := a_{22}(b_{21} - b_{11}),$$

$$\alpha_5 := (a_{11} + a_{12})b_{22}, \quad \alpha_6 := (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12}),$$

$$\alpha_7 := (a_{12} - a_{21})(b_{21} + b_{22}).$$

Пусть  $\mathbf{C} = (c_{ij})$ , где

$$c_{11} := \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7, \quad c_{12} := \alpha_3 + \alpha_5,$$

$$c_{21} := \alpha_2 + \alpha_4, \quad c_{22} := \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_6.$$

Проверьте, что  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ . (*Алгоритм Штрассена* умножения матриц порядка 2. Обратите внимание на то, что общее число операций умножения по этому методу равно 7.)

1.9. Докажите, что пять способов вычисления произведения матриц  $\mathbf{X} = \mathbf{ABCD}$  дают одинаковый результат. Вычислите  $\mathbf{X}$ , если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.10. Пусть существует произведение  $n$  матриц

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2(\dots(\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_n)\dots)).$$

Докажите, что тогда существует и равно  $\mathbf{B}$  любое другое произведение матриц  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ , которое сводится к умножению пар сомножителей; порядок следования матриц при этом не нарушается. Иначе говоря, докажите, что произведение  $\mathbf{B}$  не зависит от способа расстановки скобок в правой части равенства.

1.11. Обозначим через  $c_k$  число способов вычисления произведения  $n = k + 1$  сомножителей при различной расстановке скобок (см. упр. 1.10). Покажите, что

$$c_k = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}$$

(числа Каталана).

1.12. Покажите, что  $c_k$  из упр. 1.11 одновременно есть число способов триангуляции (т.е. разбиений на треугольники) правильного  $(k+2)$ -угольника с помощью непересекающихся диагоналей. Происхождение последовательности  $\{c_k\}$  связано именно с этой задачей, впервые рассмотренной Л. Эйлером.

1.13. Следом  $\text{tr}(\mathbf{X})$  квадратной матрицы  $\mathbf{X}$  называется сумма элементов главной диагонали. Иначе говоря, для  $\mathbf{X} \in M_n$  по определению

$$\text{tr}(\mathbf{X}) := \sum_{i=1}^n x_{ii}.$$

Докажите, что если произведения  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{BA}$  существуют, то выполняется равенство  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ . Оно имеет место даже тогда, когда  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{BA}$  имеют различные порядки.

1.14. Существуют ли матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , для которых справедливо равенство  $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ?

1.15. Пусть  $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k$  — многочлен с действительными коэффициентами от переменного  $t$ ,  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица порядка  $n$ . Определим матрицу  $f(\mathbf{A})$  равенством

$$f(\mathbf{A}) := a_0 \mathbf{E} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_k \mathbf{A}^k$$

(многочлен от матрицы). Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R})$ ,

$$p(t) := |\mathbf{A} - t\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{vmatrix}$$

— так называемый *характеристический многочлен* матрицы  $\mathbf{A}$ .

а) Проверьте, что  $p(t) = t^2 - \text{tr}(\mathbf{A}) \cdot t + |\mathbf{A}|$ .

б) Докажите, что для матрицы  $\mathbf{A}$  многочлен  $p(t)$  является аннулирующим, т. е. выполняется матричное равенство  $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ .

## 7.2. Векторная алгебра

2.1. В плоскости треугольника  $ABC$  найдите точку  $M$ , такую что выполняется равенство  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Является ли эта точка единственной?

2.2. Даны два вектора  $\vec{a}, \vec{n} \in \mathbb{V}_3$ . Найдите вектор  $\vec{b}$ , являющийся ортогональной проекцией вектора  $\vec{a}$  на плоскость с нормальным вектором  $\vec{n}$ .

2.3. Исследуйте следующую задачу. Даны векторы  $\vec{a}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$  в некотором базисе  $\mathbb{V}_3$ . Если  $\vec{a}_2$  не коллинеарен  $\vec{a}_3$ , требуется найти проекцию вектора  $\vec{a}_1$  на плоскость векторов  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$  при направлении проектирования, параллельном  $\vec{a}_4$ .

2.4. Покажите, что для любых  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$  и любых  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  векторы  $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$  компланарны.

2.5. Почему при переходе от трёхмерных векторов к наборам их координат в некотором базисе линейно независимой системе из  $\mathbb{V}_3$

соответствует линейно независимая система из  $\mathbb{R}^3$ , а линейно зависимой системе — линейно зависимая?

2.6. При каком  $\lambda \in \mathbb{R}$  система векторов из  $\mathbb{R}^4$

$$(1, 2, 3, 4), \quad (-1, 0, -1, 1), \quad (2, 7, 1, 3), \quad (2, 9, 3, \lambda)$$

является линейно зависимой?

2.7. Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Покажите, что выполняется равенство

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}.$$

2.8. Обозначим через  $V$  объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$ . Докажите равенство

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

*Указание.* Перейдите к координатам векторов в ортонормированном базисе. Воспользуйтесь равенством  $V' = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$  для ориентированного объёма параллелепипеда, формулами для вычисления скалярного и смешанного произведения в декартовых координатах и свойствами определителя  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ ,  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ .

2.9. Покажите, что смешанное произведение  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  в аффинных координатах выражается формулой

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3.$$

По строкам определителя записаны координаты векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  в соответствующем базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

2.10. Какие свойства определителя третьего порядка вытекают из свойств смешанного произведения векторов?

2.11. Пусть  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ ,  $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ ,  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Найдите длины векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и попарные углы между ними.

2.12. Пусть  $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ . Докажите, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны.

2.13. Покажите, что операция векторного умножения векторов из  $\mathbb{V}_3$  не является ассоциативной.

### 7.3. Преобразования координат. Уравнения линий и поверхностей

3.1. Покажите, что аффинные координаты точки на прямой в двух различных системах связаны равенством  $x = cx' + a$ ,  $c \neq 0$ . Выясните смысл чисел  $c$  и  $a$ .

3.2. Найдите матрицу перехода от базиса  $\{\vec{e}_i\}$  к базису  $\{\vec{f}_i\}$ , если в некотором базисе а)  $\vec{e}_1 = \{1, 1\}$ ,  $\vec{e}_2 = \{1, 0\}$ ,  $\vec{f}_1 = \{2, 1\}$ ,  $\vec{f}_2 = \{0, -1\}$ ; б)  $\vec{e}_1 = \{1, 1, 2\}$ ,  $\vec{e}_2 = \{-1, 2, 0\}$ ,  $\vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ ,  $\vec{f}_1 = \{-1, 2, 0\}$ ,  $\vec{f}_2 = \{1, 4, 4\}$ ,  $\vec{f}_3 = \{0, 1, 1\}$ .

3.3. Почему матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной?

3.4. Пусть  $Oxy$  — исходная декартова система координат на плоскости. Начало новой декартовой системы координат  $O'x'y'$  находится в точке  $O'(2, 3)$ , направление оси  $O'x'$  задаётся вектором  $\vec{s} = \{1, 2\}$ , направление оси  $O'y'$  задаётся вектором  $\vec{s} = \{-2, 1\}$ .

а) Найдите новые координаты точек  $M_1(0, 1)$ ,  $M_2(1, 0)$ ,  $M_3(-2, 1)$ ,  $M_4(3, 3)$ .

б) Запишите в новых координатах уравнения линий  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $x - y + 1 = 0$ ,  $y = x^2$ ,  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ .

3.5. Напишите формулы преобразования декартовых координат, если начало новой системы координат находится в точке  $O'(-4, 2)$ , угол  $\varphi$  между направлениями осей  $Ox$  и  $O'x'$  равен  $\frac{2\pi}{3}$  и системы координат а) одинаково ориентированы; б) противоположно ориентированы.

3.6. Зафиксируем  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Выясните геометрический смысл преобразования точек плоскости при изменении их декартовых координат по правилу

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Имеется в виду, что точка  $(x_2, y_2)$  есть образ точки  $(x_1, y_1)$ . Рассмотрите случаи: а)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , б)  $\varphi = \pi$ , в)  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — любое.

3.7. Зафиксируем точки  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  плоскости, для которых

$$\frac{\text{dist}(A, M)}{\text{dist}(B, M)} = \sqrt{2}.$$

3.8. Даны различные точки плоскости  $A$ ,  $B$  и число  $k > 0$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  этой плоскости, для которых

$$\frac{\text{dist}(A, M)}{\text{dist}(B, M)} = k.$$

3.9. Является ли каждое из соответствий «линия — уравнение линии», «поверхность — уравнение поверхности» биективным? Приведите примеры.

3.10. Укажите связь цилиндрических и декартовых координат в пространстве.

3.11. Укажите связь сферических и декартовых координат в пространстве.

## 7.4. Линейные образы на плоскости и в пространстве

В упражнениях этого пункта, если это не оговорено специально, система координат является декартовой.

4.1. Дан треугольник  $ABC$ . Напишите каноническое и общее уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведённых из вершины  $C$ .

а)  $A(4, 4)$ ,  $B(-6, -1)$ ,  $C(-2, -4)$ ; б)  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ .

4.2. Найдите ортогональную проекцию точки  $M(-5, 6)$  на прямую  $7x - 13y - 105 = 0$ . Как найти проекцию точки  $M(x_0, y_0)$  на прямую  $Ax + By + C = 0$ ?

4.3. Напишите уравнение биссектрисы того угла между прямыми  $7x + y = 0$ ,  $x - y = 8$ , в котором находится точка  $N(-1, 3)$ .

4.4. Когда три прямые  $A_i x + B_i y + C_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на плоскости образуют треугольник?



4.5. Напишите уравнение биссектрисы тупого угла между прямой  $x - 2y - 5 = 0$ ,  $y - 4z + 14 = 0$  и её ортогональной проекцией на плоскость  $x + y + 1 = 0$ .

4.6. Определите взаимное расположение прямой

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

и плоскости  $Oxy$ . Система координат а) декартова, б) аффинная.

4.7. Разработайте и реализуйте на компьютере алгоритм вычисления ортогональной проекции данной точки пространства на данную плоскость и данную прямую.

4.8. Найдите центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью  $-3x + 2y + z + 4 = 0$ .

4.9. Для каждой из двух прямых в пространстве известна точка прямой  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  и направляющий вектор  $\vec{l}_i\{a_i, b_i, c_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Разработайте и реализуйте на компьютере алгоритм, определяющий взаимное расположение этих прямых. Система координат аффинная.

4.10. При каком необходимом и достаточном условии точка  $M(x_0, y_0, z_0)$  лежит между параллельными плоскостями  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $Ax + By + Cz + E = 0$ ?

4.11. Найдите необходимое и достаточное условие того, что точка  $M(x_0, y_0, z_0)$  лежит внутри тетраэдра, образованного плоскостями  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

4.12. Напишите уравнение общего перпендикуляра к двум данным прямым.

а)  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}, \quad \frac{x}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7};$

б)  $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1};$

в)  $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}, \quad \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$

4.13. Найдите расстояние между диагональю куба и непересекающей её диагональю грани, если ребро куба имеет длину 1.

4.14. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если длина ребра тетраэдра равна 1.

4.15. Найдите объём правильного тетраэдра, вписанного в куб с единичным ребром.

## 7.5. Линии и поверхности второго порядка

5.1. Докажите, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот одно и то же для всех точек гиперболы.

5.2. Чему равен эксцентриситет эллипса, если стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы?

5.3. Разберите доказательство оптического свойства эллипса по учебнику: Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Аналитическая геометрия*. М. : Наука, гл. 6.

5.4. Докажите оптические свойства гиперболы и параболы.

5.5. Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из фокуса гиперболы на её асимптоту, лежит на директрисе, соответствующей этому фокусу.

5.6. Фокусы эллипса и гиперболы имеют координаты  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ . Напишите уравнения этих линий, если большая полуось эллипса равна 2, а асимптоты гиперболы параллельны осям координат.

5.7. Фокус линии второго порядка находится в точке  $F(3, 0)$ , соответствующая директриса имеет уравнение  $x = 12$ , линия проходит через точку  $A(7, 3)$ . Напишите уравнение этой линии.

5.8. При каком необходимом и достаточном условии прямая  $Ax + By + C = 0$  а) касается эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , б) пересекает эллипс, в) не имеет с эллипсом общих точек?

5.9. Определите тип линии второго порядка с уравнением

$$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$$

в зависимости от параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

5.10. Докажите, что ортогональная проекция окружности на плоскость есть эллипс.

5.11. Докажите, что параллельная проекция окружности на плоскость есть эллипс.

5.12. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Чему равна наибольшая площадь эллипса, вписанного в треугольник, и наименьшая площадь эллипса, описанного около треугольника? (*Эллипсы Штейнера*.)

5.13. Составьте уравнения прямолинейных образующих поверхности

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

проходящих через точку  $Q(4, 3, 2)$ .

5.14. Сформулируйте определения поверхностей вращения второго порядка как геометрических мест точек по аналогии с определениями эллипса, гиперболы и параболы.

5.15. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных прямых в пространстве.

5.16. Докажите, что если  $v$  и  $u$ ,  $v \leq u$ , — полуоси эллипса, получающегося в сечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad 0 < c < b < a,$$

плоскостью, проходящей через его центр, то  $c \leq v \leq b \leq u \leq a$ .

5.17. Прямая  $x = 1 + 2t, y = -3 + 3t, z = t$  вращается вокруг оси  $Oz$ . Составьте уравнения поверхности вращения.

5.18. Исследуйте с помощью метода собственных значений линии второго порядка:

а)  $xy = 1$ , б)  $5x^2 + 12xy = 1$ , в)  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ ,

г)  $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$ , д)  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$ .

Определите тип линии, найдите каноническое уравнение, укажите каноническую систему координат и связь координат в двух системах. Найдите координаты фокусов и уравнения директрис в исходной системе  $Oxy$ . Сделайте эскиз.

5.19. Исследуйте с помощью метода сечений и метода собственных значений поверхности второго порядка: а)  $z = xy$ , б)  $z^2 = xy$ .

## 7.6. Множества и отображения. Понятие о группе, кольце и поле

6.1. Пусть  $A = \{a, b, c\}, B = \{u, v\} \subset \mathbb{R}, C = [0, 1)$ . Опишите и изобразите множества  $A \times B, A^2, A \times C, A \times B \times C, A \times C^2$ .

6.2. Приведите пример отображения  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , которое а) является сюръекцией, но не является инъекцией; б) является инъекцией, но не является сюръекцией; в) является инъекцией.

6.3. Для каких  $\alpha \in \mathbb{R}$  существует функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , отличная от константы, такая что  $f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)$  ?

6.4. Пусть  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  есть оператор умножения вектор-столбца  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  на матрицу  $\mathbf{A} \in M_2$ . Существует ли обратное отображение, если а)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ?

6.5. Докажите, что любая группа порядка 3 является коммутативной.

6.6. Докажите, что пересечение любого числа подгрупп является подгруппой.

6.7. Найдите класс смежности  $xA$  в вариантах, представленных в таблице 1.

6.8. Приведите пример полугруппы с единицей, которая не является группой.

6.9. Приведите пример полугруппы без единицы.

6.10. Приведите пример а) коммутативного кольца, б) некоммутативного кольца, обладающего делителями нуля.

6.11. Почему любое поле не обладает делителями нуля?

6.12. Почему не существует конечного поля порядка 20? Приведите пример поля порядка 19.

6.13. Рассмотрим множество  $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$  из четырёх элементов с двумя бинарными операциями — сложением (+) и умножением ( $\times$ ), действие которых определяется таблицей 2. Проверьте, что алгебраическая система  $(F; +, \times)$  является полем (поле Галуа  $GF(4)$ .)

## 7.7. Комплексные числа

7.1. Вычислите, используя алгебраическую форму комплексного числа:

$$\text{а) } \left| (2 + i)(3 - i)^2 + (2 + 3i)(3 + 4i) \right|, \quad \text{б) } \operatorname{Re} \frac{(3 - i)(1 - 4i)}{2 - i},$$

Таблица 1

	Группа $G$	Подгруппа $A$	Элемент $x \in G$
1.	$(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$	$\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$	$-3$
2.	$(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$	$\{1, -1\}$	$-3$
3.	$(\mathbb{Z}; +)$	$2\mathbb{Z}$	$-3$
4.	$(\widetilde{M}_2; \cdot)$	$\{\mathbf{A} :  \mathbf{A}  = 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
5.	$(\widetilde{M}_2; \cdot)$	$\{\lambda \mathbf{E} : \lambda \neq 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
6.	Биекции $\varphi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$	$\{\varphi : \varphi(1) = 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 2

+	0	1	$\alpha$	$\beta$		$\times$	0	1	$\alpha$	$\beta$
0	0	1	$\alpha$	$\beta$		0	0	0	0	0
1	1	0	$\beta$	$\alpha$		1	0	1	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	0	1		$\alpha$	0	$\alpha$	$\beta$	1
$\beta$	$\beta$	$\alpha$	1	0		$\beta$	0	$\beta$	1	$\alpha$

$$\text{в)} \quad \left| \frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} \right|, \quad \text{г)} \quad \operatorname{Re} \frac{1-i}{2-i} - \operatorname{Im} \frac{2+i}{1+3i}.$$

7.2. Решите уравнение относительно неизвестного  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\text{а)} \quad iz - 3\bar{z} = -5 + 7i, \quad \text{б)} \quad \operatorname{Re} z - \frac{z}{|z|} = 2,$$

$$\text{в)} \quad |z - 8i|^2 + 2\bar{z} = 3 - 12i, \quad \text{г)} \quad z^2 + \bar{z} = 2\operatorname{Re} \frac{1+i}{1-i}.$$

7.3. Найдите все значения квадратного корня, проводя вычисления в алгебраической форме: а)  $\sqrt{2i}$ , б)  $\sqrt{-15+8i}$ .

7.4. Докажите неравенства, используя свойства модуля комплексного числа:

$$\text{а)} \quad |(1+i)z - iz^2| < 3, \text{ если } |z| < 1;$$

$$\text{б)} \quad 1 \leq |z^2 + 5| \leq 9, \text{ если } |z| \leq 2;$$

$$\text{в)} \quad \left| \frac{i}{z - 6 + 8i} \right| \geq \frac{1}{12}, \text{ если } |z| < 2;$$

$$\text{г)} \quad \left| \frac{1 - 3z^2\bar{z}}{2+i} \right| < 12, \text{ если } |z| \leq 2.$$

7.5. Дайте геометрическую интерпретацию равенства  $(1+i)^2 = 2i$ .

7.6. Вычислите, применяя тригонометрическую форму комплексного числа:

$$\text{а)} \quad \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{1-i} \right)^{30}, \quad \text{б)} \quad \left( \frac{2+2i}{\sqrt{3}-i} \right)^{10},$$

$$\text{в)} \quad \sqrt[6]{\frac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}}, \quad \text{г)} \quad \sqrt[10]{\frac{i^5}{(-1+i)^3}}.$$

7.7. Пусть  $n \geq 2$ ,  $w^n = 1$ . Чему равна сумма  $1 + w + \dots + w^{n-1}$ ?

7.8. Докажите, что если  $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$  и  $n \in \mathbb{N}$ , то  $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\alpha$ .

7.9. Докажите, что совокупность матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю  $\mathbb{C}$ .

7.10. Рассмотрим определитель

$$\Delta := \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & a \\ z_2 & \overline{z_2} & b \\ z_3 & \overline{z_3} & c \end{vmatrix},$$

где  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Докажите, что  $\operatorname{Re} \Delta = 0$ .

7.11. Изобразите на комплексной плоскости множество точек  $z \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющих указанной системе соотношений:

$$\text{а) } 1 \leq |z + 3 - 4i| \leq 2, \quad 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{б) } 2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \geq 0, \quad |z - 1| \leq 2;$$

$$\text{в) } |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1, \quad |z - i| \leq 1;$$

$$\text{г) } 4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8.$$

7.12. Задайте с помощью соотношений на  $z \in \mathbb{C}$  множества: а) внешность круга с центром  $z_0 = -1 + 2i$  и радиусом  $r = 5$  (с границей); б) правый полукруг (без границы) из круга с центром  $z_0 = 2 - i$  и радиусом  $r = 2$ ; в) концентрическое кольцо с центром  $z_0 = -i$ , внутренним радиусом  $r = 1$  и внешним радиусом  $R = 4$  (без границы).

7.13. Изобразите на комплексной плоскости множество точек

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7.14. Применяя геометрический подход, докажите для  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  неравенство

$$|z_1 - z_2| \leq \left| |z_1| - |z_2| \right| + \min\{|z_1|, |z_2|\} \cdot |\arg z_1 - \arg z_2|.$$

7.15. Точка  $z$  движется по линии  $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$  в направлении против часовой стрелки. Определите траекторию и направление движения точки  $w = \frac{1}{z}$ .

## 7.8. Многочлены

8.1. При каком условии многочлен  $x^3 + px + q$  делится на многочлен вида  $x^2 + mx - 1$ ?

8.2. Пусть  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ . Пользуясь схемой Горнера, вычислите значение  $f(4)$ .

8.3. Разложите многочлен  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$  по степеням  $x + 1$ .

8.4. Пользуясь схемой Горнера, разложите на простейшие дроби рациональную функцию

$$r(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x + 1)^5}.$$

8.5. Определите наибольший общий делитель многочленов

а)  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ ,  $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ;

б)  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ ,  $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ .

8.6. Докажите, что многочлен  $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$  не имеет кратных корней.

8.7. Найдите условие, при котором многочлен  $x^4 - ax^3 + b$  имеет двойной корень.

8.8. Докажите для многочлена  $f(x)$  степени  $\leq n$  тождество

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

8.9. Выделите из приведённого списка многочлены, а) неприводимые над полем  $\mathbb{R}$ ; б) неприводимые над полем  $\mathbb{C}$  :

$$x^2, \quad -x + 1, \quad x^3 + 2x + x - 2, \quad x^2 + x + 1,$$

$$x^2 + 2x + 1, \quad 2x + 4, \quad 1, \quad x^4 + 1.$$

8.10. Способом неопределённых коэффициентов подберите многочлены  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$ , для которых

$$(x^4 - 4x^3 + 1)M_2(x) + (x^3 - 3x^2 + 1)M_1(x) = 1.$$



8.11. Постройте многочлен наименьшей степени  $f(x)$  по таблице

$x$		-2	-1	0	1	2
$f(x)$		41	7	1	-1	1

а) с применением интерполяционной формулы Лагранжа, б) по методу Ньютона.

8.12. Выведите интерполяционную формулу Лагранжа посредством решения системы уравнений  $f(x_i) = b_i$ .

8.13. Пользуясь правилом знаков Декарта, найдите число корней многочлена  $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$  в интервале  $(-1, 3)$ .

8.14. Найдите многочлен  $f(x)$  третьей степени, удовлетворяющий условиям

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1; \quad \int_0^1 x^k f(x) dx = 0, \quad k = 1, 3, 5.$$

## 7.9. Определители. Обратная матрица

9.1. Дополните произведение элементов  $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$  определителя седьмого порядка так, чтобы получить член этого определителя, входящий в него со знаком минус.

9.2. Числа 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 делятся нацело на 17. Основываясь на свойствах определителя, докажите, что число

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

также делится на 17.

9.3. Вычислите с помощью теоремы Лапласа определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

9.4. Докажите, что определитель кососимметричной матрицы нечёт-ного порядка равен нулю.

9.5. Найдите максимальное значение определителя третьего поряд-ка, каждый элемент которого равен 0 или 1.

9.6. Получите формулу для определителя матрицы, состоящей из дифференцируемых функций.

9.7. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix} \neq 0.$$

9.8. Найдите определитель матрицы  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  с элементами  $a_{ij} = \min(i, j)$ .

9.9. Вычислите определитель порядка  $n$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

9.10. Пусть  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{B}_0 := \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_k$  состоит из алгебраических дополнений к элементам  $\mathbf{B}_{k-1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Известно, что  $|\mathbf{A}| = \Delta$ . Чему равен предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{B}_k|$ ?

9.11. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите  $\mathbf{A}^{-1}$  двумя способами: а) методом Гаусса, б) с применением явной формулы для обратной матрицы.

9.12. Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{R})$  и  $\mathbf{A}$  — обратимая матрица. Докажите, что матрицы  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  и  $\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  одновременно являются обратимыми или необратимыми.

9.13. Матрица  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$  состоит из элементов  $a_{ij} = 1$ . Докажите равенство

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} - \frac{1}{n-1} \mathbf{A}.$$

9.14. Получите формулу для  $\mathbf{A}^{-1}$  с помощью правила Крамера.

## 8. Упражнения к лекциям. Часть 2

### 8.1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость

1.1. Проверьте, что каждое из перечисленных ниже множеств со стандартными операциями сложения элементов и умножения на действительное число образует линейное пространство.

$$\mathbb{V}_n, \quad n = 1, 2, 3; \quad \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad P_n := \mathbb{R}_n[t], \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad P := \mathbb{R}[t];$$

$$M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad M_n(\mathbb{R}), \quad SM_n(\mathbb{R}), \quad \text{diag}_n(\mathbb{R}), \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$B[a, b], \quad C[a, b], \quad C^1[a, b], \quad C^k[a, b], \quad C^\infty[a, b]; \quad b, \quad c, \quad c_0.$$

1.2. Определим в  $\mathbb{R}^2$  операции сложения и умножения на действительное число по правилам:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, x_2).$$

Будет ли  $\mathbb{R}^2$  с такими операциями линейным пространством?

1.3. Будем считать, что векторы из  $\mathbb{V}_n$  имеют общим началом фиксированную точку прямой, плоскости или пространства. Рассмотрим совокупность  $L \subset \mathbb{V}_n$  тех векторов, концы которых принадлежат данному множеству  $A$ . При каких  $A$  совокупность  $L$  является линейным пространством относительно обычных операций с векторами, если а)  $n = 1$ , б)  $n = 2$ , в)  $n = 3$ ?

1.4. Пусть  $L = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ . Введите на  $L$  две операции:  $x \oplus y$ ,  $\lambda \otimes x$  (здесь  $x, y \in L$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), относительно которых  $L$  будет линейным пространством. Имеет ли место изоморфизм  $L \simeq \mathbb{R}$ ?

1.5. Докажите следствия из аксиом линейного пространства:

$$\text{а) } \alpha x = 0 \iff \alpha = 0 \text{ или } x = 0;$$

$$\text{б) } (-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x); \quad \text{в) } \alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y.$$

1.6. Докажите, что коммутативность сложения следует из других аксиом линейного пространства.

1.7. Почему линейные пространства  $\mathbb{V}_n$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_n[t]$ ,  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  являются конечномерными? Покажите, что пространство  $\mathbb{R}[t]$  бесконечномерно.

1.8. Покажите, что каждое из функциональных пространств из упр. 1.1 бесконечномерно.

1.9. Покажите, что каждое из пространств последовательностей из упр. 1.1 бесконечномерно.

1.10. В указанном линейном пространстве  $L$  решите вопрос о линейной зависимости данной системы векторов:

$$\text{а) } L = \mathbb{R}^4, \quad a_1 = (5, 2, -3, 1), \quad a_2 = (4, 1, -2, 3), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2), \\ a_4 = (\mu, 4, -1, 2), \quad \mu \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } L = \mathbb{R}_3[t], \quad f_1(t) = 1 - t^2, \quad f_2(t) = 1 + t^3, \quad f_3(t) = t - t^3, \\ f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3;$$

$$\text{в) } L = M_2(\mathbb{R}), \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.11. Докажите линейную независимость следующих функций на отрезке  $[0, 2\pi]$ :

$$\text{а) } 1, \cos t, \sin t;$$

$$\text{б) } 1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt;$$

$$\text{в) } \sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt;$$

$$\text{г) } 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt.$$

1.12. Докажите линейную независимость следующих функций, заданных на всей прямой:

$$\text{а) } e^{\alpha t}, e^{\beta t}; \quad \alpha \neq \beta;$$

$$\text{б) } e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}; \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j.$$

1.13. Докажите линейную независимость функций  $t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_k}$  в области  $t > 0$ . Здесь  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$ .

1.14. Реализуйте на компьютере решение задачи об установлении линейной зависимости данной системы векторов из  $\mathbb{R}^n$ .

## 8.2. Базис, размерность, подпространства и ранг

2.1. Рассмотрим классическую интерполяционную формулу Лагранжа (J. L. Lagrange, 1795)

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x), \quad l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (1)$$

для решения задачи полиномиальной интерполяции

$$p(x_i) = f_i \quad (i = 0, \dots, n), \quad \deg p \leq n,$$

с действительными попарно различными узлами  $x_i$  и значениями  $f_i$ . Докажите, что многочлены  $l_i(x)$  образуют базис линейного пространства  $P_n = \mathbb{R}_n[x]$ . Поэтому (1) сводится к тому, что  $p(x) = \{f_0, \dots, f_n\}$  в базисе  $l_0(x), \dots, l_n(x)$ .

2.2. Пусть  $f \in C[0, 1]$ . Многочлен из  $P_n$

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

называется *многочленом Бернштейна* функции  $f$ . С. Н. Бернштейн (1912) показал, что последовательность многочленов  $B_n f$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $[0, 1]$  сходится к функции  $f$ , т. е. выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |B_n f(x) - f(x)| = 0.$$

а) Докажите, что для любого натурального  $n$  система многочленов

$$\{x^k (1-x)^{n-k}\}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (2)$$

образует базис линейного пространства  $P_n$ . Таким образом, каждый многочлен  $p \in P_n$  является многочленом Бернштейна некоторой функции  $f$ .

б) Напишите матрицу перехода от канонического базиса  $P_n$  к базису (2) для  $n = 2$ ;  $n = 3$ ; произвольного  $n \in \mathbb{N}$ .

2.3. Используя компьютер, сравните результаты приближения выбранной функции  $f \in C[0, 1]$  с помощью многочлена Бернштейна и с помощью интерполяционного многочлена по равномерной сетке узлов. Степень взять равной  $n = 1, 2, 3, 5, 10$ . Под точностью приближения функции  $f$  многочленом  $p$  в пространстве  $C[0, 1]$  по определению понимается величина

$$\|f - p\|_{C[0,1]} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)|.$$

2.4. Обозначим через  $P_k(\mathbb{R}^n)$  линейное пространство многочленов общей степени  $\leq k$  от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

а) Непосредственным подсчётом числа базисных функций найдите  $\dim P_k(\mathbb{R}^2)$ .

б) Докажите, что  $\dim P_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$ . Весьма интересно заметить, что влияние размерности основного пространства  $n$  и степени многочленов  $k$  на рост размерности  $P_k(\mathbb{R}^n)$  одинаково.

2.5. Найдите базис и размерность подпространства  $M$  линейного пространства  $L$  в следующих ситуациях.

а)  $L = \mathbb{R}^5$ ,  $M$  задаётся системой уравнений:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0.$$

б)  $L = \mathbb{R}^5$ ,  $M$  состоит из векторов  $x$ , таких что  $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$ ,  $i = 3, 4, 5$ .

в)  $L = \mathbb{R}^5$ ,  $M$  есть линейная оболочка векторов:

$$a_1 = (1, -1, 1, -1, 0), \quad a_2 = (2, 0, 0, 1, 3), \quad a_3 = (1, 1, -1, 2, 3), \\ a_4 = (3, 1, -1, 3, 6), \quad a_5 = (1, 7, 2, -1, 5).$$

г)  $L = M_2(\mathbb{R})$ ,  $M$  состоит из матриц  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , таких что  $a_{11} + 3a_{22} = 2a_{12} - a_{21} = 0$ .

д)  $L = \mathbb{R}_4[t]$ ,  $M$  состоит из многочленов  $f(t)$ , для которых выполняются равенства  $2f(0) + 3f(1) = f(-1) = 0$ .

е)  $L = M_n(\mathbb{R})$ ,  $M = SM_n(\mathbb{R})$  — совокупность действительных симметричных матриц порядка  $n$ .

ж)  $L = M_n(\mathbb{R})$ ,  $M = T_n(\mathbb{R})$  — совокупность действительных кососимметричных матриц порядка  $n$ .

2.6. Пусть  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  — фиксированные точки разбиения отрезка  $[0, 1]$  на (полу)промежутки  $I_1 := [t_0, t_1)$ ,  $I_2 := [t_1, t_2)$ ,  $\dots$ ,  $I_{n-1} := [t_{n-2}, t_{n-1})$ ,  $I_n := [t_{n-1}, t_n]$ . Обозначим совокупность  $\{I_j\}$  через  $\pi$ . Зафиксируем  $k$ . Пусть  $P_k(\pi)$  есть совокупность функций  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , каждая из которых на любом интервале  $I_j$  есть некоторый многочлен степени  $\leq k$  (*кусочно-полиномиальная функция степени  $k$ , подчинённая разбиению  $\pi$* ). Докажите, что  $P_k(\pi)$  — конечномерное линейное подпространство пространства  $B[0, 1]$ . Найдите его базис и размерность.

2.7. Пусть  $I_1 = [0, \frac{1}{2})$ ,  $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ ;  $\pi := \{I_1, I_2\}$ .

а) Обозначим через  $S^1(\pi)$  совокупность непрерывных функций из  $P_1(\pi)$ , т. е. ломаных с одним узлом  $t_1 = \frac{1}{2}$ :

$$S^1(\pi) := C[0, 1] \cap P_1(\pi).$$

Найдите базис и размерность линейного пространства  $S^1(\pi)$ .

б) Пусть

$$S^2(\pi) := C^1[0, 1] \cap P_2(\pi) \quad (3)$$

(*квадратичные сплайны с одним узлом*). Найдите базис и размерность линейного пространства  $S^2(\pi)$ .

2.8. Пусть разбиение  $\pi$  состоит из  $n$  (полу)промежутков  $I_j$  (см. упр. 2.6). Найдите размерность пространства квадратичных сплайнов  $S^2(\pi)$ , определяемого равенством (3).

2.9. Вычислите ранг матрицы методом окаймления миноров и методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.10. Реализуйте на компьютере методы вычисления ранга матрицы.

2.11. Найдите ранг матрицы в зависимости от действительных параметров.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

2.12. Докажите, что если  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$  и  $\operatorname{rg}(\mathbf{B}) = n$ , то  $\operatorname{rg}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rg}(\mathbf{A})$ .

2.13. Найдите базисы и размерности подпространств  $L_1, L_2, L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$ , если  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^4$ ,  $L_1 = \operatorname{lin}(a, b, c)$ ,  $L_2 = \operatorname{lin}(f, g, h)$ , где  $a = (1, -1, 1, -1)$ ,  $b = (2, 0, 3, 1)$ ,  $c = (0, 2, 1, 3)$ ,  $f = (1, 1, 2, 2)$ ,  $g = (-3, 1, 0, 4)$ ,  $h = (0, 2, 3, 5)$ . Является ли сумма  $L_1 + L_2$  прямой?

2.14. а) Докажите, что  $M_n = SM_n \oplus T_n$  (см. упр. 2.5).

б) Найдите разложение по подпространствам  $SM_n$  и  $T_n$  матрицы  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  с элементами  $a_{ij} = 1$  при  $i \leq j$  и  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ .

2.15. Приведите пример трёх подпространств  $L_1, L_2, L_3$  линейного пространства  $L$ , таких что  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$ , но сумма этих подпространств не является прямой. Сравните с теоремой о прямой сумме двух подпространств.

2.16. Сформулируйте и докажите теорему о прямой сумме  $k$  подпространств одного линейного пространства для  $k \geq 2$ , обобщающую вариант этого утверждения для двух подпространств.

2.17. Пусть  $L_1$  — линейное подпространство пространства  $C[0, 1]$ , состоящее из функций  $x(t)$ , таких что

$$\int_0^1 x(t) dt = 0.$$

а) Покажите, что  $L_1$  бесконечномерно.

б) Укажите подпространство  $L_2 \subset C[0, 1]$ , для которого выполняется равенство  $C[0, 1] = L_1 \oplus L_2$ .

2.18. Решите предыдущую задачу для линейного подпространства  $L_1 := \{x \in C[0, 1] : x(1) = 0\}$ .

### 8.3. Линейные операторы

3.1. Почему оператор  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определяемый равенством  $A(x) := (x_1 + 3x_2, |x_1| + 2x_2)$ , не является линейным?

3.2. Для оператора  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , действующего в соответствии с равенством  $A(x) := (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ , решите следующие задачи.



а) Найдите матрицу оператора в базисе  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (-2, 1, 0)$ ,  $f_3 = (1, 0, 1)$ .

б) Постройте базисы ядра и образа, найдите дефект и ранг.

в) Найдите собственные векторы и собственные значения.

г) Выясните, является ли прямой сумма его собственных подпространств.

д) Сделайте вывод о диагонализируемости оператора. В случае положительного ответа укажите диагональную матрицу и канонический базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид.

3.3. Разработайте и реализуйте на компьютере методы решения задач из пунктов а), б), в) упр. 3.2.

3.4. Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — ненулевые векторы пространства  $L$ . Предположим, что существует линейный оператор  $A : L \rightarrow L$ , такой что  $A(y_1) = y_1$ ;  $A(y_k) = y_k + y_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ . Докажите, что векторы  $y_1, \dots, y_n$  линейно независимы.

3.5. Найдите образ оператора дифференцирования  $D$  в ситуациях:  
а)  $D : \mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathbb{R}_n[t]$ , б)  $D : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ .

3.6. Докажите, что для матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$  имеет место неравенство  $\text{rg}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rg}(\mathbf{A}) + \text{rg}(\mathbf{B})$ . Используйте связь между матрицами и операторами.

3.7. Почему подобные матрицы имеют а) равные определители, б) равные ранги, в) одинаковые характеристические многочлены?

3.8. Докажите, что для невырожденности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы этот оператор не имел нулевого собственного значения.

3.9. Докажите, что если оператор  $A$  обратим, то операторы  $A$  и  $A^{-1}$  имеют одни и те же собственные векторы.

3.10. Пусть  $x$  — собственный вектор линейного оператора  $A$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ . Докажите, что  $x$  будет собственным вектором и для операторов  $A^2$ ;  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;  $f(A)$ , где  $f$  — многочлен. Найдите собственные значения для  $x$  и этих операторов.

3.11. Верно ли, что если  $x$  — собственный вектор для оператора  $f(A)$ ,  $f$  — ненулевой многочлен, то  $x$  — собственный вектор и для оператора  $A$ ?

3.12. Пусть  $A, B$  — линейные операторы, действующие в некотором линейном пространстве.

а) Докажите, что операторы  $AB$  и  $BA$  имеют одно и то же множество собственных значений.

б) Верно ли, что операторы  $AB$  и  $BA$  имеют один и тот же характеристический многочлен?

3.13. Найдите жорданову нормальную форму матрицы оператора, если в исходном базисе матрица  $\mathbf{A}$  этого оператора имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используйте формулу

$$N = \operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{k-1} - 2\operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^k + \operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{k+1}.$$

Здесь  $N$  — число жордановых клеток порядка  $k$ , соответствующих собственному значению  $\lambda_i$ . По определению полагаем  $\mathbf{B}^0 = \mathbf{E}$ .

3.14. Реализуйте на компьютере метод нахождения жордановой нормальной формы матрицы оператора без определения канонического базиса.

## 8.4. Евклидовы пространства

4.1. Пусть  $h(t) = 1$ . Найдите  $f, g \in \mathbb{R}_2[t]$ , для которых

$$\deg f = 1, \quad \deg g = 2, \quad (f, g) = (f, h) = (g, h) = 0.$$

В качестве скалярного произведения в  $\mathbb{R}_2[t]$  возьмите

$$\text{а) } (f, g)_1 := a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2, \\ \text{если } f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2;$$

$$\text{б) } (f, g)_2 := \int_0^1 f(s)g(s) ds;$$

$$в) (f, g)_3 := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

4.2. Пусть  $\{\chi_k\}$  — система многочленов со старшим коэффициентом 1, попарно ортогональных относительно скалярного произведения  $(f, g)_2$  (см. упр. 4.1 б)); считаем, что  $\deg \chi_k = k$  (многочлены Лежандра, ассоциированные с отрезком  $[0, 1]$ ).

а) Найдите многочлены  $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ .

б) Проверьте, что для этих  $k$  справедлива формула Родрига

$$\chi_k(t) = c_k [t^k (t-1)^k]^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

4.3. При каких  $k \in \mathbb{N}$  и  $t_i \in \mathbb{R}$  скалярное произведение в  $\mathbb{R}_n[t]$  можно задать формулой

$$(f, g)_3 := \sum_{i=1}^k f(t_i)g(t_i) ?$$

4.4. Равенство

$$(x, y)^* = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i y_j$$

с некоторыми  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  задаёт скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Известно, что  $a_{11} = 1, a_{21} = -1, a_{31} = 6, a_{33} = 2$ .

а) Возможно ли, что  $a_{22} = -2$ ?

б) Допустимы ли равенства  $a_{22} = 2, a_{23} = 0$ ?

в) Обозначим  $s := a_{22}, t := a_{23}$ . Изобразите множество точек  $(s, t)$  на декартовой плоскости.

4.5. Почему в ходе процесса ортогонализации линейно независимой системы по обычной схеме не может получиться нулевой вектор?

4.6. Пусть  $f_1, \dots, f_m \in E$  — линейно независимая система. Положим  $e_1 := f_1$  и для  $k = 2, \dots, m$

$$e_k := \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & f_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & f_k \end{vmatrix}.$$

Определитель понимается в смысле разложения по последнему столбцу. Докажите, что система  $e_1, \dots, e_m$  является ортогональной и при любом  $k$  выполняется равенство  $\text{lin}(e_1, \dots, e_k) = \text{lin}(f_1, \dots, f_k)$ .

4.7. Обозначим через  $\text{Gr}(f_1, \dots, f_k)$  *определитель Грама* системы векторов  $f_1, \dots, f_k$ , определяемый равенством

$$\text{Gr}(f_1, \dots, f_k) := \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & (f_2, f_k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & (f_k, f_k) \end{vmatrix}.$$

Докажите, что для любой линейно независимой системы  $f_1, \dots, f_k$  справедливо неравенство  $\text{Gr}(f_1, \dots, f_k) > 0$ .

*Указание.* Примените подход, изложенный в упр. 4.6. В обозначениях этого упражнения верно  $(e_k, e_k) > 0$ . Представьте второй сомножитель в виде  $e_k = \alpha_{k1}f_1 + \dots + \alpha_{k,k-1}f_{k-1} + \alpha_{kk}f_k$ . Обратите внимание, что  $(e_k, f_1) = \dots = (e_k, f_{k-1}) = 0$ ,  $\alpha_{kk} = \Delta_{k-1}$ ,  $(e_k, f_k) = \Delta_k$ . Здесь  $\Delta_k := \text{Gr}(f_1, \dots, f_k)$ . Получите на этом пути неравенство  $\Delta_k \Delta_{k-1} > 0$ ,  $k > 1$ .

4.8. Пусть  $f_1 = (1, 2, 2, -1)$ ,  $f_2 = (1, 1, -5, 3)$ ,  $f_3 = (3, 2, 8, -7)$ .

- а) Примените к системе  $f_1, f_2, f_3$  обычную схему ортогонализации.  
б) Примените метод упр. 4.6. Сравните результаты вычислений.

4.9. Подпространство  $L \subset \mathbb{R}^4$  задаётся системой уравнений:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$3x_1 - x_3 + 3x_4 = 0.$$

Найдите а) ортогональные и б) ортонормированные базисы  $L$  и  $L^\perp$ .

4.10. Решите предыдущую задачу в случае  $L = \text{lin}(f_1, f_2, f_3)$ , где  $f_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (-1, 5, 6, 2)$ ,  $f_3 = (-4, 2, 3, -1)$ .

4.11. Реализуйте на компьютере методы решения упр. 4.9, 4.10.

4.12. Докажите, что для линейных подпространств  $L_1, L_2$  евклидова пространства  $E$  имеют место равенства

$$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp, \quad (L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp.$$

4.13. Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — ортонормированный базис подпространства  $L \subset E$ . Определим оператор  $P : E \rightarrow L$  равенством

$$P(x) := \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j.$$

Покажите, что  $P$  является *проектором на  $L$* , т. е. линейным оператором, имеющим свойство  $P(g) = g$  для любого  $g \in L$ .

4.14. Пусть  $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ . Найдите расстояние  $\text{dist}(x, L)$  и векторы  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$ , такие что  $x = y + z$ . Рассмотрите случаи:

- а)  $L = \text{lin}(f_1, f_2, f_3)$ , где  $f_1 = (-1, 0, -1, 0)$ ,  $f_2 = (1, 1, 1, 1)$ ,  
 $f_3 = (0, 1, 0, 1)$ ;  
 б)  $L$  задаётся системой уравнений:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

4.15. Разработайте и реализуйте на компьютере методы решения задач из упр. 4.14.

## 8.5. Билинейные и квадратичные формы

5.1. Какие из функций  $B : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$  являются билинейными формами на линейном пространстве  $L = M_n(\mathbb{R})$ ?

- а)  $B(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB})$ ,      б)  $B(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})$ ,  
 в)  $B(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ ,    г)  $B(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\mathbf{AB}|$ .

5.2. Какие из функций  $B : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$  являются билинейными формами на линейном пространстве  $L = \mathbb{R}_n[t]$ ?

а)  $B(g, h) = \int_0^1 g(t)h(t) dt$ ,      б)  $B(g, h) = \int_0^1 [g(t)]^2 h(t) dt$ ,

в)  $B(g, h) = g(0)h(0) + g(1)h(1)$ ,    г)  $B(g, h) = |g(0)h(0)|$ .

5.3. Определим билинейную форму  $B(x, y)$  на  $\mathbb{R}^3$  равенством

$$B(x, y) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - x_3y_3,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

а) Найдите матрицу  $\mathbf{A}_1$  билинейной формы  $B$  в каноническом базисе  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

б) Найдите матрицу  $\mathbf{A}_2$  билинейной формы  $B$  в базисе  $f_1 = (1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (1, 1, 0)$ ,  $f_3 = (1, 0, 0)$ .

в) Проверьте и объясните равенство  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{C}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{C}$ , где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Положим для многочленов  $g, h \in \mathbb{R}_2[t]$

$$B(g, h) = \int_0^1 g(t)h(t) dt + g(0)h(0) - g(1)h(1).$$

а) Покажите, что  $B$  — симметричная билинейная форма на  $\mathbb{R}_2[t]$ . Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определённой?

б) Найдите матрицу билинейной формы  $B$  в базисе  $g_1(t) = 1 + t$ ,  $g_2(t) = 1 - t$ ,  $g_3(t) = 1 + t^2$ .

5.5. Билинейная форма  $B$  имеет в базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите значение  $B(x, y)$ , если в этом базисе  $x = \{1, -1, 5\}$ ,  $y = \{2, 1, 4\}$ .

б) Пусть  $f_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ ,  $f_2 = -e_3$ ,  $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$ . Проверьте, что векторы  $f_1, f_2, f_3$  также образуют базис, и найдите в нём матрицу той же билинейной формы  $B$ .

5.6. Найдите симметричную билинейную форму, ассоциированную с квадратичной формой  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

а)  $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 7x_1x_3 + 2x_2x_3$ ,

б)  $Q(x) = 2x_1x_2 - x_2x_3$ .

5.7. Приведите квадратичную форму  $Q$ , заданную на  $\mathbb{R}^3$ , к каноническому виду с помощью метода Лагранжа и с помощью метода Якоби. Укажите соответствующие канонические базисы  $\mathbb{R}^3$ . Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы.

а)  $Q(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ ,

б)  $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ .

*Примечание.* Упражнения на применение метода собственных значений даны в следующем пункте.

5.8. Выясните, при каких значениях параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$  следующие квадратичные формы на  $\mathbb{R}^3$  являются положительно определёнными. Примените критерий Сильвестра.

а)  $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ,

б)  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ ,

в)  $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ .

5.9. Пусть

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

— квадратичная форма на  $\mathbb{R}^n$ . Докажите следующие утверждения:

а) если  $Q$  — положительно определённая, то  $a_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

б) существуют такие  $Q$ , которые не являются положительно определёнными, но в то же время  $a_{ii} > 0$  для всех  $i$ .

5.10. Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы  $Q(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^2)$ ,  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ , если а)  $n = 2$ ; б)  $n \in \mathbb{N}$  — произвольное.

## 8.6. Линейные операторы

### в евклидовых пространствах

6.1. Пусть  $D : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$  — оператор дифференцирования. Найдите матрицу сопряжённого оператора  $D^*$  в следующих базисах:

а)  $1, t, t^2$ ; б)  $\frac{1}{2}(t^2 - t), t^2 - 1, \frac{1}{2}(t^2 + t)$ ; в)  $1, t, \frac{1}{2}(3t^2 - 2)$ .

Скалярное произведение в  $\mathbb{R}_2[t]$  задаётся равенством  $(f, g) := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ , где  $a_i$  и  $b_i$  — коэффициенты  $f$  и  $g$ .

6.2. Пусть  $D$  — оператор дифференцирования, действующий в пространстве  $\mathbb{R}_1[t]$ . Найдите матрицу сопряжённого оператора  $D^*$  в базисе  $1, t$ , если  $(f, g) := f(0)g(0) + f(1)g(1)$ .

6.3. Линейный оператор  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  в базисе  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,

$f_2 = (1, 1, 0)$ ,  $f_3 = (1, 1, 1)$  имеет матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли оператор  $A$  симметричным и почему? Скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$  задаётся стандартным образом.

6.4. Отображение  $A : \mathbb{R}_4[t] \rightarrow \mathbb{R}_4[t]$  определяется с помощью равенства а)  $Af(t) := f(-t)$ , б)  $Af(t) := t^4 f(t^{-1})$ . Является ли  $A$  линейным симметричным оператором? Скалярное произведение имеет вид  $(f, g) := \sum a_i b_i$ , где  $a_i, b_i$  — коэффициенты многочленов  $f, g$ .

6.5. Примените метод собственных значений к квадратичной форме

а)  $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ ,

б)  $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$ ,

в)  $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 + x_5^2$ .

Приведите квадратичную форму к каноническому виду (к главным осям), укажите канонический ортонормированный базис, а также связь старых и новых координат. Выясните вопрос о положительной определённости квадратичной формы.

6.6. Разработайте и реализуйте на компьютере метод собственных значений для анализа квадратичных форм на  $\mathbb{R}^n$ .

6.7. Докажите, что все собственные значения матрицы  $\mathbf{A} \in SM_n(\mathbb{R})$  тогда и только тогда лежат на отрезке  $[a, b]$ , когда квадратичная форма с матрицей  $\mathbf{A} - \mu \mathbf{E}$  положительно определена при любом  $\mu < a$  и отрицательно определена при любом  $\mu > b$ .

6.8. Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in SM_n(\mathbb{R})$  и собственные значения матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  принадлежат отрезкам  $[a, b]$  и  $[c, d]$  соответственно. Докажите, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  принадлежат отрезку  $[a + c, b + d]$ .

6.9. Докажите, что все корни многочлена

$$p(t) = t^3 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 2abc$$

действительны при любых  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

6.10. Пусть  $A, B : L \rightarrow L$  — ортогональные операторы.

а) Являются ли ортогональными операторы  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $AB$ ?

б) Покажите, что  $A^2 B^2$  — собственный ортогональный оператор.



6.11. Привести пример ортогонального оператора  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , не имеющего собственных векторов.

6.12. Существуют ли ортогональные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , для которых выполняется равенство

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{A}^3 \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

## 9. Первокурсникам о самостоятельной работе

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением дисциплины «Алгебра и геометрия», других дисциплин математического и компьютерного циклов и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Это означает, что ваша профессия будет связана с математикой и информационными технологиями. Какие условия необходимы для овладения этой замечательной профессией? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься профессиональными вопросами и желание это делать;
- регулярные занятия этими вопросами;
- хорошее здоровье.

Зачастую не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности. Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математических и компьютерных дисциплинах, каковы уровень понимания и степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий вовсе не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется

большая самостоятельная работа. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. «Чистое» знание определения без умения его применять в несложной ситуации вполне может быть оценено неудовлетворительно.

Приведём пример, касающийся нашей дисциплины. Студент может сформулировать определение матрицы линейного оператора в данном базисе: это матрица,  $k$ -й столбец которой содержит координаты образа  $k$ -го базисного вектора в этом базисе. Однако задача найти матрицу оператора дифференцирования  $D : \mathbb{R}_1[t] \rightarrow \mathbb{R}_1[t]$  в базисе  $1 + t, 1 - t$  оказывается для него непосильной. У автора накопилось много примеров такого сорта. Научитесь самостоятельно прогнозировать подобные ситуации. Научитесь задавать себе несложные, но разнообразные вопросы, связанные с определениями и теоремами, методами решения задач, алгоритмами. При определённой тренировке ваша подготовка значительно улучшится.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство практически исчезло из школьной математики, где царит подготовка к ЕГЭ. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий, и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления.

Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома — как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного. По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком, должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики и компьютерных дисциплин

само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное достоинство нашей науки.

Самостоятельная работа по изучению математики и компьютерных технологий, которая ожидает вас на математическом факультете, будет для вас трудной и, возможно, временами покажется вам скучной и однообразной. Но ведь вы хотите стать хорошими специалистами, не правда ли? Автор искренне желает успехов и удачи на вашем нелёгком пути.

Учебное издание

**Невский**

Михаил Викторович

**Материалы по дисциплине  
«Алгебра и геометрия»**

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерный набор, вёрстка М. В. Невский

Подписано в печать 28.01.2019. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .  
Усл. печ. л. 3,03. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 3 экз.

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150003 Ярославль, ул. Советская, 14.