

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дискретная математика**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### **1. Цели освоения дисциплины**

Дисциплина "Дискретная математика" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний, умений и навыков в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по специальности "10.05.01-Компьютерная безопасность" (уровень специалитета), содействует фундаментализации образования, развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами дискретной математики, формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам дискретной математики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

### **2. Место дисциплины в структуре ОП специалитета**

Дисциплина "Дискретная математика" относится к обязательной части образовательной программы. Она играет исключительно важную роль для общематематической и общепрофессиональной подготовки специалиста. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин "Алгебра", "Теория чисел", "Информатика" и "Математическая логика и теория алгоритмов". Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Дискретная математика", используются обучаемыми при изучении общепрофессиональных и профессионально-специализированных дисциплин.

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП специалитета**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Код компетенции	Формулировка компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-3</b> Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности;	<b>И-ОПК-3_1</b> Способен использовать в профессиональной деятельности аппарат и методы дискретной математики	<b>Знать:</b> свойства основных дискретных структур: линейных рекуррентных последовательностей, графов, конечных автоматов, комбинаторных структур, основные понятия и методы теории графов, основные понятия и методы теории конечных автоматов, основные понятия и методы комбинаторного анализа <b>Уметь:</b> применять стандартные методы дискретной математики для решения профессиональных задач <b>Владеть:</b> владеет навыками применения языка и средств дискретной математики при решении профессиональных задач
	<b>И-ОПК-3_2</b> Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения	<b>Знать:</b> основные понятия, принципиальные результаты и методы дискретной математики. <b>Уметь:</b> решать задачи периодичности и эквивалентности для линейных рекуррентных последовательностей и конечных автоматов, применять аппарат производящих функций и рекуррентных соотношений для решения перечислительных задач, решать оптимизационные задачи на графах, решать задачи по теории алфавитного кодирования <b>Владеть навыками:</b> решения комбинаторных задач, включая использование аппарата производящих функций, построения оптимальных кодов, решения оптимизационных задач на графах, установления автоматности и неавтоматности языков.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	<b>Введение.</b> Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Роль и место курса в формировании специалистов. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.	4	1						
2	<b>Основные комбинаторные методы.</b> Выборки, перестановки, сочетания и размещения. Биномиальная теорема. Принцип включения-исключения. Рекуррентные соотношения и производящие функции. Числа Стирлинга и их свойства. Теорема Холла о системе различных представителей.	4	7	4		2		4	Контрольная работа, лаб. работа «порождение комбинаторных объектов», дом. задания

3	<b>Основы теории графов.</b> Графы и орграфы. Степени. Теорема Эйлера о сумме степеней. Изоморфизмы. Пути. Маршруты. Разложение графа на компоненты связности		3	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
4	<b>Циклы в графах.</b> Цикломатическое число. Пространство и базис циклов. Соотношение между числами независимых циклов, вершин, ребер и компонент.		3	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
5	<b>Деревья.</b> Теорема о характеризации деревьев. Остовы графа. Наименьший остов. Реберная и вершинная связность.		3	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
6	<b>Эйлеровы графы.</b> Необходимые и достаточные условия. Построение эйлеровой цепи.		3	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
7	<b>Планарные графы.</b> Теорема о том, что $K_5$ и $K_{3,3}$ не планарны. Теорема Куратовского (без доказательства). Критерий планарности (без доказательства). Теорема Эйлера (без доказательства).		3	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
8	<b>Некоторые применения теории графов.</b> Покрытия и независимые множества. Раскраски. Задача о наименьшем покрытии. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графах. Задача поиска гамильтонова цикла в графе. Задача о коммивояжере. Паросо- четания. Максимальное паросочетание.		3	2		2		2	Контрольная работа, лаб. работа «алгоритмы на графах», дом. задания

9	<b>Алфавитное кодирование.</b> Схема алфавитного кодирования. Алфавитное кодирование и гомоморфизмы свободной полугруппы. Однозначность раскодирования. Префиксные коды. Теорема А.А. Маркова. Неравенство Макмиллана. Избыточность кодов. Оптимальные коды, алгоритмы их построения.		6	3		1		2	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос Контрольная работа. Лаб. работа «Коды Хаффмана»
						2	0,5	33,5	экзамен
	<b>Всего в 4 семестре</b>		<b>32</b>	<b>16</b>		<b>7</b>	<b>0,5</b>	<b>52,5</b>	
10	<b>Булевы функции и функции k-значной логики.</b> Булевы функции и функции многозначной ( <b>k-значной</b> ) логики. Их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики - теоремы Э. Поста и А.В.Кузнецова. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.	5	3	2		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
11	<b>NP-полнота.</b> NP-полнота задач для булевых функций: "Выполнимость", "Проблема полноты конечной системы булевых функций", "Проблема шаферовости"		3	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос

	булевой функции", "Проблема вхождения в класс S", "Проблема вхождения в класс M", "Проблема вхождения в класс L".								
12	<b>Схемы из функциональных элементов.</b> Двоичный одноразрядный полусумматор и сумматор. n-разрядный сумматор. Шифраторы и дешифраторы, мультиплексоры и демультиплексоры.		3	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
13	<b>Детерминированные автоматы без выхода.</b> Алфавиты и языки. Детерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, функция переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) детерминированным автоматом. Регулярные выражения и регулярные языки. Операции с автоматами. Теорема С.Клини.		4	2		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
14	<b>Недетерминированные автоматы без выхода.</b> Недетерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, отношение переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов:		2	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос

	табличный и диаграммой переходов. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) недетерминированным автоматом. Эквивалентность состояний автоматов. Эквивалентность автоматов. Эквивалентность недетерминированных и детерминированных автоматов. Теорема Майхилла - Нероуда. Алгоритмические проблемы для автоматов и автоматных языков. Минимизация автоматов.								
15	<b>Детерминированные автоматы с выходом.</b> Детерминированные автоматы с выходом: входной, выходной и внутренний алфавиты, функция переходов и функция выходов. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Автоматные (ограниченно-детерминированные) функции. Автоматные базисы и проблема полноты. Ее алгоритмическая неразрешимость.		2	2		1		2	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
16	<b>Эксперименты с автоматами.</b> Основные понятия теории экспериментов с автоматами. Диагностические эксперименты. Установочные эксперименты. Эксперименты по распознаванию автоматов. Тестирование		2					1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос



	автоматов. Тестирование комбинационных схем. Методы построения тестов. Вероятностное тестирование. Оценки вероятности обнаружения неисправности. Псевдослучайное тестирование.								
17	<b>Поля.</b> Поля частных и их свойства. Подполя. Простое подполе поля. Характеристика поля. Описание простых полей. Классификация расширений поля: конечные, конечной степени, алгебраические, трансцендентные. Теорема о башне полей.	5	2	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
18	<b>Поле разложения многочлена.</b> Поле корня и поле разложения многочлена, свойства. Понятие минимального поля разложения. Описание и изоморфизм простых расширений поля. Изоморфизм минимальных полей разложения многочлена. Вид элементов конечного расширения поля.	5	2			1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
19	<b>Конечные поля и многочлены над ними.</b> Основные свойства конечных полей. Теоремы существования и единственности. Описание подполей конечного поля. Теорема о примитивном элементе. Существование и число неприводимых многочленов заданной степени над конечным полем. Способ построения конечного	5	4	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос

	поля. Описание минимального поля разложения и корней многочлена над конечным полем.								
20	<b>Дискретные функции.</b> Представление дискретных функций многочленами над полем. Спектральные представления дискретных функций.	5	2			1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
21	<b>Линейные рекуррентные последовательности.</b> Цикловая структура линейного преобразования над конечным полем. Линейные преобразования максимального периода. Пространство ЛРП с данным характеристическим многочленом и его базисы. Сумма, пересечение и произведение пространств ЛРП. Усложнения линейных рекуррент. Представление ЛРП с неприводимым характеристическим многочленом над конечным полем с помощью функции след.	5	4	2				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
						2	0,5	33,5	экзамен
	<b>Всего в 5 семестре</b>	<b>108</b>	<b>32</b>	<b>16</b>		<b>7</b>	<b>0,5</b>	<b>52,5</b>	
	<b>Всего</b>	<b>216</b>	<b>64</b>	<b>32</b>		<b>14</b>	<b>1</b>	<b>105</b>	

### Содержание разделов программы дисциплины "Дискретная математика":

**Введение.** Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Роль и место курса в формировании специалистов. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.

**Основные комбинаторные методы.** Выборки, перестановки, сочетания и размещения. Биномиальная теорема. Принцип включения-исключения. Рекуррентные соотношения и

производящие функции. Числа Стирлинга и их свойства. Теорема Холла о системе различных представителей.

**Основы теории графов.** Графы и орграфы. Степени. Теорема Эйлера о сумме степеней. Изоморфизмы. Пути. Маршруты. Разложение графа на компоненты связности.

**Циклы в графах.** Цикломатическое число. Пространство и базис циклов. Соотношение между числами независимых циклов, вершин, ребер и компонент. Разрезы.

**Деревья.** Теорема о характеристике деревьев. Остоны графа. Наименьший остов. Реберная и вершинная связность.

**Эйлеровы графы.** Необходимые и достаточные условия. Построение эйлеровой цепи.

**Планарные графы.** Теорема о том, что  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарны. Теорема Куратовского (без доказательства). Критерий планарности (без доказательства). Теорема Эйлера (без доказательства).

**Некоторые применения теории графов.** Покрытия и независимые множества. Задача о наименьшем покрытии (без доказательства). Раскраски. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графах. Задача поиска гамильтонова цикла в графе. Задача о коммивояжере. Паросочетания. Максимальное паросочетание. Задача о назначениях.

**Алфавитное кодирование.** Схема алфавитного кодирования. Алфавитное кодирование и гомоморфизмы свободной полугруппы. Однозначность раскодирования. Префиксные коды. Теорема А.А.Маркова. Неравенство Макмиллана. Избыточность кодов. Оптимальные коды, алгоритмы их построения.

**Булевы функции и функции  $k$ -значной логики.** Булевы функции и функции многозначной ( $k$ -значной) логики. Их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики - теоремы Э. Поста и А.В.Кузнецова. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.

**NP-полнота.** NP-полнота задач для булевых функций: "Выполнимость", "Проблема полноты конечной системы булевых функций", "Проблема шеферовости булевой функции", "Проблема вхождения в класс  $S$ ", "Проблема вхождения в класс  $M$ ", "Проблема вхождения в класс  $L$ ".

**Схемы из функциональных элементов.** Двоичный одноразрядный полусумматор и сумматор.  $n$ -разрядный сумматор. Шифраторы и дешифраторы, мультиплексоры и демультимплексоры.

**Детерминированные автоматы без выхода.** Алфавиты и языки. Детерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, функция переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) детерминированным автоматом. Регулярные выражения и регулярные языки. Операции с автоматами. Теорема С.Клини.

**Недетерминированные автоматы без выхода.** Недетерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, отношение переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) недетерминированным автоматом. Эквивалентность состояний автоматов. Эквивалентность автоматов. Эквивалентность недетерминированных и детерминированных автоматов. Теорема Майхилла - Нероуда. Алгоритмические проблемы для автоматов и автоматных языков. Минимизация автоматов.

**Детерминированные автоматы с выходом.** Детерминированные автоматы с выходом: входной, выходной и внутренний алфавиты, функция переходов и функция выходов.

Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Автоматные (ограниченно-детерминированные) функции. Автоматные базисы и проблема полноты. Ее алгоритмическая неразрешимость.

**Эксперименты с автоматами.** Основные понятия теории экспериментов с автоматами. Диагностические эксперименты. Установочные эксперименты. Эксперименты по распознаванию автоматов. Тестирование автоматов. Тестирование комбинационных схем. Методы построения тестов. Вероятностное тестирование. Оценки вероятности обнаружения неисправности. Псевдослучайное тестирование.

**Поля.** Поля частных и их свойства. Подполя. Простое подполе поля. Характеристика поля. Описание простых полей. Классификация расширений поля: конечные, конечной степени, алгебраические, трансцендентные. Теорема о башне полей.

**Поле разложения многочлена.** Поле корня и поле разложения многочлена, свойства. Понятие минимального поля разложения. Описание и изоморфизм простых расширений поля. Изоморфизм минимальных полей разложения многочлена. Вид элементов конечного расширения поля.

**Конечные поля и многочлены над ними.** Основные свойства конечных полей. Теоремы существования и единственности. Описание подполей конечного поля. Теорема о примитивном элементе. Существование и число неприводимых многочленов заданной степени над конечным полем. Способ построения конечного поля. Описание минимального поля разложения и корней многочлена над конечным полем.

**Дискретные функции.** Представление дискретных функций многочленами над полем. Спектральные представления дискретных функций.

**Линейные рекуррентные последовательности.** Цикловая структура линейного преобразования над конечным полем. Линейные преобразования максимального периода. Пространство ЛРП с данным характеристическим многочленом и его базисы. Сумма, пересечение и произведение пространств ЛРП. Усложнения линейных рекуррент. Представление ЛРП с неприводимым характеристическим многочленом над конечным полем с помощью функции след.

## **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Лекция-беседа** или «диалог с аудиторией», является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Эта лекция предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Преимущество лекции-беседы состоит в том, что она позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей студентов.

**Обобщающая лекция** – проводится в завершение изучения раздела или темы для закрепления знаний. На лекции вновь выделяются основные вопросы, используются обобщающие таблицы, схемы, алгоритмы, позволяющие включить усвоенные знания в новые связи и зависимости, переводя их на более высокие уровни усвоения.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows;

- Microsoft Office;

- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

- для подготовки материалов для лабораторных работ и материалов лекций - -Microsoft Visual Studio 2017/2019 .

– для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

**7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

1. Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : учебное пособие. / Гаврилов Г. П. , Сапоженко А. А. - 3-е изд. , перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 416 с. - ISBN 978-5-9221-0477-7. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт].

- URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922104777.html> (дата обращения: 24.01.2022). - Режим доступа : по подписке.

2. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-0810-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/71772> (дата обращения: 24.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Башкин М.А., Якимова О.П. Дискретная математика: сборник задач. Ярославль, ЯрГУ, 2012. 96 с. 4,41 п.л. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120208.pdf>

4. Башкин М.А., Якимова О.П. Дискретная математика: сборник задач. Часть 2.

Ярославль, ЯрГУ, 2013. 76 с. 4,0 п.л. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130203.pdf>

5. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов : учебник / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — 5-е изд., испр. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с. — ISBN 5-9221-0026-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2242> (дата обращения: 24.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов : учебное пособие / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 112 с. — ISBN 978-5-8114-0853-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/112> (дата обращения: 24.01.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### **б) дополнительная литература**

1. Дурнев В.Г., Башкин М.А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – Часть 1. – 168 с.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070295.pdf>
2. Дурнев В.Г., Башкин М.А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – Часть 2. – 180 с.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>

#### **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы):

Профессор, доктор физ.-матем. наук    Дурнев В.Г.

Доцент, кандидат физ.-матем. наук    Якимова О.П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дискретная математика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

Домашние задания по теме № 2 **Основные комбинаторные методы.**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 – 1.60 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 1:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2012. – 96 с.

Домашние задания по теме № 3 **Основы теории графов.**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 – 1.35 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 4 **Циклы в графах.**

Задания для самостоятельного решения № 1.79 – 1.84 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 5 **Деревья.**

Задания для самостоятельного решения № 1.44 – 1.60 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 6 **Эйлеровы графы.**

Задания для самостоятельного решения № 1.74 – 1.78 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 7 **Планарные графы.**

Задания для самостоятельного решения № 1.61 – 1.73 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 8 **Некоторые применения теории графов.**

Задания для самостоятельного решения № 1.36 – 1.43, 1.85 - 1.100 из главы 1 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Домашние задания по теме № 9 **Алфавитное кодирование.**

Задания для самостоятельного решения № 2.1 – 2.12 из главы 2 сборника задач Башкин М.А. **Дискретная математика. Ч. 2:** сборник задач / М. А. Башкин, О. П. Якимова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.28 из параграфа 1 главы V, № 3.1 - 3.31 из параграфа 3 главы V сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 10 **"Булевы функции и функции k-значной логики."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 36 из параграфа 2 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 8.1 - 8.45 из параграфа 8 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 11 **"NP-полнота."**

Задания для самостоятельного решения № 16.19 - 16.26 из параграфа 16 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 12 **"Схемы из функциональных элементов."**

Задания для самостоятельного решения № 13.1 - 13.17 из параграфа 13 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 13 **"Детерминированные автоматы без выхода."**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.27 из параграфа 1 главы VI, № 2.1 - 2.24 из параграфа 2 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 14 **"Недетерминированные автоматы без выхода."**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.27 из параграфа 1 главы VI, № 2.1 - 2.24 из параграфа 2 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 15 **"Детерминированные автоматы с выходом."**

Задания для самостоятельного решения № 3.1 - 3.22 из параграфа 3 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 16 **"Поля."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 16 из параграфа 6 глава XXI учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Домашние задания по теме № 17 **"Поле разложения многочлена."**



Задания для самостоятельного решения № 1 - 16 из параграфа 6 глава XXI учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Домашние задания по теме № 18 **"Конечные поля и многочлены над ними."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 17 из параграфа 5 глава XXII учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Домашние задания по теме № 19 **"Дискретные функции."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 76 из параграфа 13 глава XXV учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Задания для самостоятельного решения № 10.1 - 10.21 из параграфа 10 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 20 **"Линейные рекуррентные последовательности."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 16 из главы IX учебника Алферов А.П. Основы криптографии. Учебное пособие. / А.П. Алферов, А. Ю. Зубов, А.С. Кузьмин, А.В. Черемушкин. М.: Гелиос АРВ, 2002. 480 с.

Задания для самостоятельного решения № 1 - 76 из параграфа 13 глава XXV учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

## **Примеры (образцы) заданий для контрольных работ**

### **Контрольная работа № 1**

1. Найти число различных слов, которые можно получить перестановкой букв из слова

БАРБАРАБРА,

и которые при этом не содержат подслов вида «ААА».

2. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении  $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$ .
3. Найти  $a_n$  по рекуррентному соотношению и начальным условиям

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 7 \cdot 3^n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 3.$$

### **Контрольная работа № 2**

1. Какая схема кодирования называется префиксной?
2. Используя теорему Ал.А. Маркова, по заданному алфавитному коду выясните, является ли код разделимым:  $\varphi(A) = \{ab, addab, abb, add, ca\}$

3. Используя метод Хаффмена, постройте оптимальный код по распределению вероятностей  $P$ :  $P = (0,34; 0,19; 0,16; 0,16; 0,15)$ ,

4. Дано сообщение  $\alpha = 00101$ . Напишите кодовое слово  $\beta$ , используя код с исправлением ошибки.

### Контрольная работа № 3

1. Определение хроматического числа и хроматического индекса.
2. На конференции присутствуют 50 ученых, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.
3. Решите задачу, используя теорему Эйлера и свойства степенной последовательности графа: могут ли степени вершин в графе быть равны и, если нет, то объясните почему:  
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1.
4. Есть такая сеть метро, что с любой станции можно добраться до любой другой не поднимаясь на поверхность. Докажите, что мы можем закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого можно было бы добраться с любой станции на любую другую.
5. Построить граф и задать его матрицей смежности. Граф задан массивом ребер (в каждой ячейке в столбик записаны номера соседних вершин и вес соединяющего их ребра).  

1	1	2	2	3	3	4	4	5
4	5	4	5	6	5	4	5	6
3	3	1	2	5	3	7	9	1
6. Для графа задания 5 найти кратчайший остов. Указать последовательность ребер в порядке их добавления в основное дерево (использовать алгоритм Прима).

### Задания для реализации на языке программирования

1. Порождение комбинаторных объектов, таких как сочетания, перестановки.

Примеры заданий:

- напечатать все перестановки длины  $N$ ;
- сгенерировать все подмножества данного  $n$ -элементного множества  $\{0, \dots, n-1\}$ ;
- перечислить все возрастающие последовательности длины  $k$  из чисел  $1..n$  в лексико-графическом порядке.

2. Алгоритмы на графах.

Примерные задания:

- реализовать алгоритм Прима построения остовного дерева, если граф задан с помощью списка смежных вершин;
- написать программу нахождения диаметра графа, заданного с помощью матрицы смежности.

3. Код Хаффмана (командный проект, 3-4 студента). Данная задача легко разбивается на блоки (интерфейс программы и ввод данных, разбор текста и подсчет частот всех встречающихся в нем символов, построение кода Хаффмана, кодирование текста), но при этом требует взаимодействия обучающихся для создания функционирующего приложения и его тестирования.

### Таблица соответствия контрольных мероприятий, компетенций и индикаторов их достижения

Контрольное мероприятие	Индикатор освоения компетенции
-------------------------	--------------------------------

<i>Работа на практических занятиях, выполнение домашних заданий</i>	И-ОПК-3_2, И-ОПК-3_1
<i>Сдача проекта Код Хаффмана</i>	И-ОПК-3_1
<i>Реализация комбинаторных алгоритмов и алгоритмов на графах</i>	И-ОПК-3_1
<i>Контрольные работы</i>	И-ОПК-3_2

## 1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к экзамену (4-й семестр)

1. Элементы комбинаторики. Выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями.
2. Биномиальные коэффициенты, их свойства.
3. Биномиальная теорема. Полиномиальная теорема.
4. Формула включения и исключения.
5. Производящие функции и рекуррентные соотношения.
6. Алфавитное кодирование.
7. Префиксные коды. Теорема Маркова (без доказательства). Критерий однозначности декодирования.
8. Неравенство Крафта - Макмиллана для разделимых кодов. Условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов.
9. Избыточность кодов. Методы построения оптимальных кодов. Метод Хаффмана.
10. Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.
11. Основные понятия теории графов. Связность.
12. Определение и простейшие свойства деревьев. Теорема о эквивалентности определений дерева.
13. Плоские и планарные графы. Критерий планарности без доказательства. Теорема (формула) Эйлера - с доказательством.
14. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Теорема Эйлера о существовании эйлера цикла с доказательством.
15. Независимые множества вершин и ребер. Теорема об оценке числа независимости. Доминирование. Теорема Галлаи.
16. Раскраски.
17. Циклы в графах. Цикломатическое число.

### Вопросы к экзамену (5-й семестр)

- 1) Булевы функции. Способы задания булевых функций: таблицы и термы. Двуместные булевы функции.
- 2) Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Термы и задаваемые ими булевы функции. Замыкание класса булевых функций.
- 3) Полные системы булевых функций. Теорема Э. Поста о функциональной полноте.
- 4) NP-полнота и co-NP-полнота некоторых проблем для булевых функций.
- 5) Полиномы Жегалкина. Псевдобулевы функции, коэффициенты Фурье. Разложения по ортогональным системам.
- 6) Схемы из функциональных элементов. Двоичный сумматор.
- 7) Функции k-значной логики.
- 8) Детерминированные и недетерминированные автоматы без выхода и принимаемые (распознаваемые) ими языки. Эквивалентность недетерминированных и детерминированных автоматов.

- 9) Регулярные выражения и регулярные языки. Теорема С.Клини.  
10) Автоматы с выходом и автоматные функции. n-местные автоматные функции. Суперпозиция автоматных функций.  
11) Теоретико-автоматные модели шифраторов.

## **2. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

### **2.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций** **Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

### **Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;

- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

## 2.2 Описание процедуры выставления оценки

Экзаменационный ответ оценивается по 4-х бальной системе, в соответствие с которой выставляются оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

### **Правила выставления оценки:**

оценка «**отлично**» выставляется студенту, если он владеет материалом дисциплины; четко и определенно отвечает на вопросы, легко сравнивает различные части, разбирает новые и сложные предлагаемые ему случаи, видит и понимает взаимосвязь понятий, легко справляется с практическими заданиями.

оценка «**хорошо**» выставляется студенту, если он твердо знает и понимает материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на поставленные вопросы, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

оценка «**удовлетворительно**» выставляется студенту, если он имеет знания основного материала, но не усвоил его деталей, может ответить на вопросы по определениям основных понятий, но приходит в замешательство от заданий по объяснению взаимосвязи или доказательству положений дисциплины; испытывает затруднения при выполнении практических работ.

оценка «**неудовлетворительно**» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями и ошибками выполняет практические работы.

### **Оценивание контрольных работ:**

Каждая из задач(заданий) оценивается следующими баллами:

0 (задача не сделана), 1 (сделано кое-что), 2 (сделана приблизительно наполовину), 3 (сделана с некоторыми недочетами), 4 (сделана полностью). Считается общее число баллов за все задания. Оценка за работу студента ставится в зависимости от набранного им числа баллов по отношению к максимально-возможному числу баллов:

0 – 50 % – неудовлетворительно,

51 – 67 % – удовлетворительно,

68 – 84 % – хорошо

85-100% – отлично.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины**  
**«Дискретная математика»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Дискретная математика" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большинству тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Для успешного освоения дисциплины важно самостоятельное решение достаточно большого набора хорошо подобранных задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы дискретной математики. Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач. При этом особое внимание уделяется активизации самостоятельной работы студентов над задачами: выдача обучаемым для самостоятельной работы текущих домашних заданий, частичный разбор их решений на практических занятиях и постоянный контроль их выполнения.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с основными понятиями дискретной математики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде устного опроса на практических занятиях и контрольных работ в 4м и 5-ом семестре. Также проводятся консультации (при необходимости) по лекционному материалу и разбору некоторых заданий для самостоятельной работы.

В конце каждого семестра изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. Билеты формируются на основании списка вопросов к экзамену, который охватывает полностью всю программу дисциплины. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

**Учебно-методическое обеспечение**  
**самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы рекомендуется использовать следующую учебную литературу:

1. Дурнев В.Г. Элементы дискретной математики. Части 1 и 2 / В.Г. Дурнев, М.А. Башкин, О.П. Якимова – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – Часть 1 – 168 с. - Часть 2 -180 с.
2. Башкин М.А. Дискретная математика: сборник задач. Части 1 и 2. / М.А. Башкин, О.П. Якимова - Ярославль, ЯрГУ, 2012. - Часть 1 - 96 с. - Часть - 76 с.

3. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.
4. Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Для углубленного изучения отдельных тем рекомендуется обращаться к следующей литературе:

1. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике. / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко – М.: Физматлит, 2004. – 424 с.
2. Иванов Б. Н., Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс : учеб. пособие для вузов / Б. Н. Иванов, М., Известия, 2011, 511с
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Санкт-Петербург: Питер. 2001.
4. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженеров. / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский - М.: Энергоатомиздат. 1988.
5. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука. 1982.
6. Глухов М.М. Алгебра. Части 1 и 2. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев - М.: "Гелиос АРВ". 2003.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.
8. Редькин Н. П. Дискретная математика. – М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. – 174 с.
9. Лидл Р. Конечные поля. Том 1 и 2. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер - М.: Мир. 1988.
10. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Мир. 1987.
11. Минский М. Вычисления и автоматы. М.: Мир. 1971.
12. Трахтенброт Б.А. Конечные автоматы. / Б.А. Трахтенброт, Я.М. Барздинь Я.М. - М.: Наука. 1970.
13. Липский В.В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир. 1973.
14. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест – М.: МЦНМО, 1999. – 960 с.
15. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц – М.: Мир, 1985. – 512 с.

**Приложение №3 к рабочей программе дисциплины**  
**«Дискретная математика»**

**Фонд оценочных средств**  
**для оценки уровня сформированности**

**компетенции ОПК-3 «Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности» (И-ОПК-3\_1, И-ОПК-3\_2)**

1. Элементы комбинаторики. Выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями.
2. Биномиальные коэффициенты, их свойства.
3. Биномиальная теорема. Полиномиальная теорема.
4. Формула включения и исключения.
5. Производящие функции и рекуррентные соотношения.
6. Алфавитное кодирование.
7. Префиксные коды. Теорема Маркова (без доказательства). Критерий однозначности декодирования.
8. Неравенство Крафта - Макмиллана для разделимых кодов. Условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов.
9. Избыточность кодов. Методы построения оптимальных кодов. Метод Хаффмана.
10. Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.
11. Основные понятия теории графов. Связность.
18. Определение и простейшие свойства деревьев. Теорема о эквивалентности определений дерева.
19. Плоские и планарные графы. Критерий планарности без доказательства. Теорема (формула) Эйлера - с доказательством.
20. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Теорема Эйлера о существовании эйлера цикла с доказательством.
21. Независимые множества вершин и ребер. Теорема об оценке числа независимости. Доминирование. Теорема Галлаи.
22. Раскраски.
23. Циклы в графах. Цикломатическое число.
24. Булевы функции. Способы задания булевых функций: таблицы и термы.
25. Двуместные булевы функции.
26. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Термы и задаваемые ими булевы функции. Замыкание класса булевых функций.
27. Полные системы булевых функций. Теорема Э. Поста о функциональной полноте.
28. NP-полнота и co-NP-полнота некоторых проблем для булевых функций.
29. Полиномы Жегалкина. Псевдобулевы функции, коэффициенты Фурье. Разложения по ортогональным системам.
30. Схемы из функциональных элементов. Двоичный сумматор.
31. Функции k-значной логики.
32. Детерминированные и недетерминированные автоматы без выхода и принимаемые (распознаваемые) ими языки. Эквивалентность недетерминированных и детерминированных автоматов.
33. Регулярные выражения и регулярные языки. Теорема С.Клини.
34. Автоматы с выходом и автоматные функции. n-местные автоматные функции. Суперпозиция автоматных функций.
35. Теоретико-автоматные модели шифраторов.



## Список задач

### I. Комбинаторика

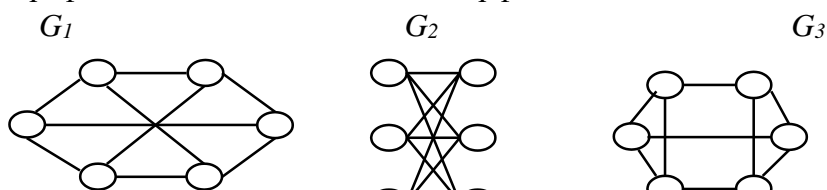
1. Из трёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (без повторения цифр), сколько таких, в которых цифра 2 является последней?
2. Сколькими способами можно разложить 9 разных предметов по 3-м ящикам, так, чтобы в первом ящике было 2 предмета, во втором — 3, в третьем — остальные?
3. Общее количество сочетаний элементов некоторых множеств по 2 равно а) 3, б) 6, в) 66, г) 210. Сколько элементов содержат эти множества?
4. Сколькими разными способами можно разложить 12 одинаковых монет по трём кошелькам?
5. Слово «университет» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найдите общее количество разных буквенных последовательностей в этом испытании.
6. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5?
7. Сколько машинных (различающихся по написанию и необязательно имеющих смысл) можно составить из букв слов «молоко», «перестановка», «перекресток»?
8. Есть прямоугольник, разбитый на клетки. Вдоль одной стороны —  $n$  клеток, вдоль другой —  $m$ . Пусть можно двигаться по сторонам клеток либо вправо, либо вверх. Сколько существует различных путей из левого нижнего угла в правый?
9. Сколькими способами можно упорядочить множество  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  так, чтобы каждое чётное число имело чётный номер?
10. Пароль состоит из 2-х букв, за которыми следуют 4 цифры или из 4-х букв, за которыми следуют 2 цифры. Сколько можно составить разных паролей, если из 33 букв русского алфавита используются только 16 первых букв и все 10 арабских цифр?
11. В предыдущей задаче уберём три любые буквы, а к 10 цифрам добавим знаки \* и ^. Сколько разных паролей можно получить в этом случае?
12. Найдите член разложения (номер и вид)  $(\sqrt{a} - b)^9$ , содержащий  $a^3$ .
13. Вычислите коэффициент при  $a^5$  в разложении  $(1 + a)^7$ .
14. Вычислите коэффициент при  $a^{15}$  в разложении  $(1 + a^5)^7$ .
15. Найдите член разложения  $(\sqrt{x} / y + y^3 \sqrt{x})^{18}$ , содержащий  $x^4$ .
16. Найдите член разложения  $(\sqrt[3]{x} / y + y / \sqrt[4]{x})^{18}$ , содержащий  $x^{-1}$ .
17. Найдите член разложения  $(\sqrt[3]{a} - 1 / \sqrt{a})^{15}$ , не содержащий  $a$ .
18. Найдите член разложения  $(2x / a - \sqrt{a} / (2x))^{12}$ , не содержащий  $x$ .
19. Определите  $x$  из условия, что третий член разложения бинома  $(x + x^{\lg x})^5$  равен  $10^6$ .
20. Определите  $x$  из условия, что разность между пятым и третьим членами разложения  $(x + \sqrt{5})^6$  равна 300.

21. Контрольная работа состоит из четырех заданий. Известно, что  $i$ -ое задание сделали  $A_i$  % студентов,  $i$ -ое и  $j$ -ое –  $A_{ij}$  %,  $i$ -ое,  $j$ -ое и  $k$ -ое –  $A_{ijk}$  %, а все задания  $A_{1234}$  %. Сколько процентов студентов
- 1) не сделали ни одного задания;
  - 2) сделали в точности два задания;
  - 3) сделали не менее двух заданий.

	а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	з)	и)	к)
$A_1$	40	50	90	60	30	30	70	50	70	60
$A_2$	60	40	20	20	40	50	50	50	50	70
$A_3$	40	60	60	60	40	50	30	50	40	50
$A_4$	50	50	60	50	50	60	40	60	60	50
$A_{12}$	20	20	20	10	10	10	50	40	50	30
$A_{13}$	20	30	60	50	20	20	30	40	40	50
$A_{14}$	30	30	60	40	30	20	40	30	40	50
$A_{23}$	30	40	20	10	30	20	10	30	20	20
$A_{24}$	40	20	20	20	30	30	30	30	20	20
$A_{34}$	20	40	40	40	30	40	20	30	20	40
$A_{123}$	10	20	20	0	10	10	10	30	20	20
$A_{124}$	20	10	20	10	10	10	30	30	20	20
$A_{134}$	10	20	40	30	20	20	20	30	20	40
$A_{234}$	20	20	20	10	20	20	10	30	0	10
$A_{1234}$	10	10	20	0	10	10	10	30	0	10

## II. Графы

1. Привести пример графа, в котором удаление некоторых двух ребер увеличивает число связных компонент, но удаление любого одного ребра числа связных компонент не меняет.
2. Приведите пример двух графов, ни один из которых не является подграфом другого.
3. Какие из графов  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  являются изоморфными?



4. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?
5. У царя Гвидона было 5 детей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и т. д.) 57 имели ровно трёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?
6. Докажите, что связный граф с  $2k$  нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно  $k-1$  раз и не проводя никакое ребро дважды.
7. Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды, нарисовать правильный пятиугольник с диагоналями?
8. Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6 ребрами и 3 висячими вершинами

9. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)
10. Решите задачу, используя теорему Эйлера и свойства степенной последовательности графа: показать, что в любом графе, имеющем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

### III. Алфавитное кодирование

1. Выяснить, является ли код  $C$  с кодирующим алфавитом  $\{0, 1, 2\}$  однозначно декодируемым:

- 1)  $C = \{01, 201, 112, 122, 0112\}$ ;
- 2)  $C = \{001, 021, 102, 201, 001121, 01012101\}$ ;
- 3)  $C = \{0, 01, 0010001001\}$ ;
- 4)  $C = \{20, 01202, 22, 2001, 2012010, 10201121, 1112\}$ ;
- 5)  $C = \{01, 011, 100, 2100, 101210, 001210\}$ ;
- 6)  $C = \{01, 011, 100, 2100, 10110, 00112\}$ ;
- 7)  $C = \{01, 12, 021, 0102, 10112\}$ ;
- 8)  $C = \{01, 12, 012, 111, 0102, 10112, 01112\}$ ;
- 9)  $C = \{01, 12, 012, 0102, 020112\}$ ;
- 10)  $C = \{01, 10, 210, 121, 0210, 0112\}$ .

2. С помощью процедуры Хаффмена построить двоичный код с минимальной избыточностью для набора вероятностей  $P$ :

- a)  $P = (0,4; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1)$ ;
- b)  $P = (0,6; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1)$ ;
- c)  $P = (0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2)$ ;
- d)  $P = (0,5; 0,2; 0,1; 0,09; 0,08; 0,03)$ ;
- e)  $P = (0,3; 0,3; 0,18; 0,06; 0,04; 0,04; 0,04; 0,04)$ ;
- f)  $P = (0,35; 0,25; 0,2; 0,04; 0,03; 0,03; 0,03; 0,03; 0,03; 0,01)$ ;
- g)  $P = (0,3; 0,2; 0,1; 0,1; 0,06; 0,06; 0,06; 0,06; 0,06)$ ;
- h)  $P = (0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05)$ .

3. Построить оптимальный  $(P, q)$ -код для заданных  $P$  и  $q$ :

- a)  $P = (0,35; 0,2; 0,2; 0,15; 0,1)$ ,  $q = 3$ ;
- b)  $P = (0,4; 0,15; 0,15; 0,1; 0,1)$ ,  $q = 3$ ;
- c)  $P = (0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1)$ ,  $q = 3$ ;
- d)  $P = (0,4; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1)$ ,  $0,08; 0,06; 0,06$ ,  $q = 3$ ;
- e)  $P = (0,2; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1)$ ,  $0,1; 0,1$ ,  $q = 4$ ;
- f)  $P = (0,21; 0,21; 0,17; 0,15; 0,12; 0,08; 0,04; 0,02)$ ,  $q = 4$ ;
- g)  $P = (0,21; 0,15; 0,14; 0,13; 0,12; 0,11; 0,11; 0,03)$ ,  $q = 4$ ;

4. Для данного множества  $C \subseteq B^n$  найти кодовое расстояние:

- a)  $C = \{11000, 10101, 01110\}$ ;
- b)  $C = \{111100, 110011, 001111\}$ ;
- c)  $C = \{00001, 11111, 10100, 01010\}$ ;
- d)  $C = \{101010, 010110, 000001\}$ ;
- e)  $C = \{01101010, 11000110, 00011001, 10101100\}$ .

5. Построить по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения:

- a)  $\alpha = 001$ ;    b)  $\alpha = 1011$ ;    c)  $\alpha = 1010$ ;    d)  $\alpha = 100$ ;    e)  $\alpha = 1001$ ;