

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**  
Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Современные проблемы дифференциально-разностных уравнений**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Современные проблемы дифференциально-разностных уравнений» (СПДРУ) – дать студентам представление о применении методов функционального анализа к исследованию конкретных прикладных задач. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются дифференциально-разностные уравнения;
- познакомить студентов с основными видами дифференциально-разностных уравнений;
- научить студентов методам исследования дифференциально-разностных уравнений;
- познакомить с краевыми задачами для дифференциально-разностных уравнений
- дать представление о корректности постановки задачи;
- научить студентов исследовать вопросы существования и устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к вариативной части блока Б1, номер в РУП – Б1.0.12.

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины СПДРУ, используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ИД-ОПК-3.1 Обладает знаниями в области математического моделирования	Знать основные понятия и результаты теории дифференциально-разностных уравнений Уметь решать типовые вычислительные и аналитические задачи дифференциально-разностных уравнений Владеть навыками самостоятельного изучения вопросов теории дифференциально-разностных уравнений
	ИД-ОПК-3.2 Способен разрабатывать математические модели при решении задач	Знать основные алгоритмические методы теории дифференциально-разностных уравнений Уметь выделять составляющие теории дифференциально-разностных уравнений Владеть навыками

профессиональной деятельности	теории дифференциально-разностных уравнений
ИД-ОПК-3.3 Способен анализировать, сравнивать, совершенствовать разработанные математические модели	Уметь пользоваться аналитическим аппаратом теории дифференциально-разностных уравнений (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.) Владеть способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к теории дифференциально-разностных уравнений

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет **3** зачёт. ед., **108** акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости
			Контактная работа						Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
		<b>3</b>	лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	

1.	<p>Определение дифференциально-разностного уравнения (ДРУ).  Прикладные задачи, приводящие к ДРУ.  Пространство начальных условий.  Метод шагов.  Линейные ДРУ с постоянными коэффициентами.  Общий вид линейного ДРУ.  Теорема существования, единственности решения задачи Коши для линейного ДРУ.  Теорема о непрерывной зависимости решений линейного ДРУ от начальных условий и параметров уравнения.</p>	3	2	2		2		12	<p>задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа</p>
2.	<p>Решения Эйлера.  Характеристическое уравнение.  Представление решений линейного автономного ДРУ с помощью преобразования Лапласа.  Функция Коши.  Решение неоднородного уравнения.  Сопряженное уравнение.  Теорема о взаимосвязи исходного и сопряженного уравнений.</p>	3	2	2		2		10	<p>задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа</p>
3.	<p>Методы исследования нулей характеристических квазиполиномов.  Асимптотическое расположение нулей.  Условия, обеспечивающие принадлежность нулей заданному типу.  Метод D-разбиений.</p>	3	4	4		2		12	<p>задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа</p>
4	<p>Полугруппа и производящий оператор.  Расщепление фазового пространства с помощью сопряженного уравнения.  Поведение решений на корневых подпространствах</p>	4	2	2		2		12	<p>задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа</p>

5	ДРУ с близкими к постоянным периодическими коэффициентами. Экспоненциальная дихотомия решений. Проекторы. Устойчивость решений.	4	4	4				12	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
6	Нелинейные ДРУ. Метод нормальных форм исследования нелинейных ДРУ.	4	4	4				12	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
							0.5		Экзамен
	<b>ИТОГО</b>	<b>108</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4+2</b>	<b>0,5</b>	<b>70</b>	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

В рамках практических занятий возможно привлечения компьютерного практикума.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

Синхронное или асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины осуществляется посредством сообщений в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, а также электронной почты.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).  
Microsoft Office STD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.

Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.

Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться):

- **Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ**

[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- **Электронно-библиотечная система «Юрайт»**

<https://www.biblio-online.ru/>

- **Электронно-библиотечная система «Лань»**

<http://e.lanbook.com/>

- **Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»**

[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- **Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU**

<http://elibrary.ru/>

База научных статей Mathnet

База Scopus

База Web of Sciences

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Р.Беллман, К.Л.Кук Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир. 1967. 548 с.

2. Е.П.Кубышкин, С.Е.Биркган. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Учебное пособие / Ярсл.гос.ун-т.Ярославль. 1989. 67 с.

<http://www.lib.uniya.ac.ru/edocs/iuni/19890931.pdf>

3. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Из-во Наука, 1972, 496 с.

### **в) дополнительная литература:**

1. А.Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Из-во Наука. 1972. 352 с.

**в) ресурсы сети «Интернет»**

Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

Электронный архив ЯрГУ

Электронный каталог Научной библиотеки ЯрГУ им. П.Г.Демидова

Математические журналы базы Scopus

Математические журналы базы Mathnet

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Аудитория, предназначенная для проведения практических занятий

Доски обычные, меловые

Компьютерный проектор, экран

Компьютерный класс на 10-15 компьютеров

Автор(-ы):

Профессор кафедры математического  
моделирования, доктор физ.-мат. наук, профессор

Евгений Павлович Кубышкин

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Современные проблемы дифференциально-разностных уравнений»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Пример задания, предлагающегося на экзамене

1. Найти условия на параметры уравнения, обеспечивающие устойчивость его решений:

$$\dot{x}(t) + ax(t - 1) + bx(t - 2) = 0.$$

2. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Сопряженное уравнение

**Вопросы к экзамену**

1. Определение ДРУ. Прикладные задачи, приводящие к ДРУ. Пространство начальных условий. Метод шагов.
2. Линейные ДРУ с постоянными коэффициентами. Теорема существования, единственности решения задачи Коши для линейного ДРУ.
3. Решения Эйлера. Характеристическое уравнение. Представление решений линейного автономного ДРУ с помощью преобразования Лапласа.
4. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Сопряженное уравнение.
5. Периодические решения неоднородного уравнения.
6. Экспоненциальная дихотомия решений уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчивость решений.
6. Методы исследования нулей характеристических квазиполиномов. Асимптотическое расположение нулей.
7. Условия, обеспечивающие принадлежность нулей заданному типу. Метод D-разбиений.
8. Полугруппа и производящий оператор..
9. Расщепление фазового пространства с помощью сопряженного уравнения. Поведение решений на корневых подпространствах.
10. ДРУ с близкими к постоянным периодическими коэффициентами. Экспоненциальная дихотомия решений. Проекторы. Устойчивость решений.
11. Нелинейные ДРУ. Метод нормальных форм исследования нелинейных ДРУ

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины**  
**«Современные проблемы дифференциально-разностных уравнений»**  
*(наименование дисциплины)*

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, "чистое" знание определения без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.