

Учебное издание

Глызин Сергей Дмитриевич

Колесов Андрей Юрьевич

**Релаксационные автоколебания
в нейронных системах**

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор, верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 08.10.13. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 12,78. Уч.-изд. л. 11,0.
Тираж 100 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001
150049, г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

**РЕЛАКСАЦИОННЫЕ
АВТОКОЛЕБАНИЯ
В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ
ЯрГУ
2013

УДК 519.87(075.8)
 В183.4я73
 Г 55

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
 в качестве учебного издания. План 2013 учебного года*

Рецензенты:

Проказников А. В., доктор физико-математических наук, профессор;
 кафедра прикладной математики и вычислительной техники
 Ярославского государственного технического университета

Глызин, Сергей Дмитриевич.

Г 55 Релаксационные автоколебания в нейронных системах:
 учебное пособие / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос.
 ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 220 с.
 ISBN 978-5-8397-0941-6

В учебном пособии изложена теория релаксационных колебаний для специального класса уравнений с запаздываниями, моделирующими электрическую активность нервных клеток.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.68 Прикладная математика и информатика (дисциплины „Асимптотические методы нелинейной динамики“ и „Непрерывные математические модели“, цикл М1), очной формы обучения, а также может быть полезно для студентов других математических и физических специальностей.

Рис. 12. Библиогр.: 43 назв.

УДК 519.87(075.8)
 ББК В183.4я73

ISBN 978-5-8397-0941-6

© ЯрГУ, 2013

32. *Bélair J.* Stability in a model of a delayed neural network // *J. Dynamics and Differential Equations*. 1993. V. 5. P. 607–623.
33. *Bélair J., Campbell S., Van den Driessche P.* Frustration Stability and delay-induced oscillations in a neural network model // *SIAM J. Appl. Math.* 1996. V. 56. P. 245–255.
34. *Gopalsamy K., Leung I.* Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1996. V. 89:3–4. P. 395–426.
35. *Liao X., Liao Y.* Stability of Hopfield-type neural networks II // *Science in China Series A: Mathematics*. 1997. V. 40:8. P. 813–816.
36. *Ye H., Michel A. N., Wang K.* Qualitive analysis of Cohen–Grossberg neural networks with multiple delays // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51. P. 2611–2618.
37. *Campbell S., Ruan S., Wei J.* Qualitative Analysis of a Neural Network Model with Multiple Time Delays // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999. V. 9:8. P. 1585–1595.
38. *Кохонен Т.* Ассоциативная память. М.: Мир, 1980. 240 с.
39. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. V. 68. P. 393–407.
40. *Kopell N., Somers D.* Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // *J. Math. Biol.* 1995. V. 33. P. 261–280.
41. *FitzHugh R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical J.* 1961. T. 1. P. 445–466.
42. *Terman D.* An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics // *Tutorials in Mathematical Biosciences I, Lecture Notes in Mathematics*. 2005. V. 1860. P. 21–68.
43. *Hutchinson G.E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. of Sci.* 1948. V. 50. P. 221–246.

21. *Chay T.R., Rinzel J.* Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model // *Biophys. J.* 1985. V. 47, № 3. P. 357 – 366.
22. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. V. 46, № 2. P. 233 – 253.
23. *Coombes S., Bressloff P.C.* Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system. World Scientific Publishing Company, 2005.
24. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // *Анализ и особенности. Часть 2. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда.* Тр. МИАН. Т. 259. М.: Наука, 2007. С. 106–133.
25. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 1. С. 76–89.
26. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // *Дифференциальные уравнения.* 2011. Т. 47, № 12. С. 1675–1692.
27. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // *Дифференциальные уравнения.* 2012. Т. 48, № 2. С. 168–172.
28. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. Тр. МИАН. Т. 222. М.: Наука, 1998. 192 с.
29. *Hopfield J.J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1984. V. 81. P. 3088–3092.
30. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. М.: Вильямс, 2006. 1103 с.
31. *Marcus C.M., Westervelt R.M.* Stability of analog neural networks with delay // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 39:1. P. 347–359.

Оглавление

Введение	6
1. Релаксационные автоколебания в нейронных системах с одним запаздыванием	11
1.1. Асимптотический анализ одного уравнения	11
1.1.1. Постановка задачи	11
1.1.2. Основной результат	13
1.1.3. Существование периодического решения	16
1.1.4. Анализ свойств устойчивости	29
1.1.5. Асимптотика периода решения. Формула поправки	31
1.2. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов	32
1.2.1. Постановка задачи	33
1.2.2. Основные теоремы	34
1.2.3. Обоснование C -сходимости	38
1.2.4. Доказательство C^1 -сходимости	55
1.3. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов	59
1.3.1. Описание объекта исследования	59
1.3.2. Базовая теорема	60
1.3.3. Анализ предельного отображения	63
1.3.4. Обоснование теоремы 1.6	66
1.3.5. Заключительные замечания	80
2. Исследование релаксационных автоколебаний в случае двух запаздываний	84
2.1. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах	84

2.1.1. Введение	85
2.1.2. Формулировка результата	87
2.1.3. Доказательство существования bursting-цикла	91
2.1.4. Анализ свойств устойчивости	101
2.2. Дискретные автоволны в нейронных системах	104
2.2.1. Введение	104
2.2.2. Основные результаты	106
2.2.3. Доказательство теоремы 2.4	112
2.2.4. Заключение	126
2.3. Буферность в нейронных системах	127
2.3.1. Локальная постановка задачи	127
2.3.2. Метод квазинормальных форм	130
2.3.3. Численный анализ одного примера	134
3. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием	135
3.1. Введение	135
3.2. Релаксационные автоколебания в математической модели отдельного нейрона	137
3.2.1. Описание результата	137
3.2.2. Доказательство существования релаксационного цикла	141
3.2.3. Анализ свойств устойчивости	150
3.3. Релаксационные автоколебания в кольцевой нейронной сети	154
3.3.1. Общая схема исследования	154
3.3.2. Анализ вспомогательного нелинейного уравнения	157
3.3.3. Доказательство теоремы 3.2	161
3.3.4. Анализ вспомогательного линейного уравнения	168
3.3.5. Итоговые результаты	171
3.4. Заключение	176
4. Об одном способе математического моделирования химических синапсов	186
4.1. Постановка задачи	186
4.2. Общая схема исследования	190
4.3. Вспомогательное нелинейное уравнение	193

- Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 5. С. 605–626.
- Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.
- Мищенко Е. Ф. и др. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Наука, 1995. 336 с.
- Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. Тр. МИАН. Т. 199, ред. Е. Ф. Мищенко. М.: Наука, 1993. 126 с.
- Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // Тр. МИАН. Т. 216. М.: Наука, 1997. С. 126–153.
- Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: Эдиториал УРСС, 2009. 288 с.
- Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. 406 с.
- Мищенко Е. Ф. и др. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 431 с.
- Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии // ДАН, 2010. **434**:6. С. 735–738.
- Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
- Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 6. С. 51–82.
- Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 919–932.

Литература

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* Action potentials recorded from inside a nerve fiber // *Nature*. 1939. V. 144. P. 710–711.
2. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. V. 117. P. 500–544.
3. *Izhikevich E.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2000. V. 10(6). P. 1171–1266.
4. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., and Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. V. 78. P. 1213–1265.
5. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // *Докл. АН СССР*. 1955. Т. 102, № 5. С. 889–891.
6. *Мищенко Е. Ф.* Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1957. Т. 21, № 5. С. 627–654.
7. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром // *Докл. АН СССР*. 1958. Т. 120, № 5. С. 967–969.
8. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1959. Т. 23, № 5. С. 643–660.

4.4. Обоснование теоремы 4.1	197
4.5. Вспомогательное линейное уравнение	204
4.6. Основные результаты	207

Заключение	215
-------------------	------------

Литература	216
-------------------	------------

Введение

Моделирование динамики изменения электрического потенциала нервных клеток связано, в первую очередь, с работами А.Л. Ходжкина и А.Ф. Хаксли [1, 2]. Этим авторам в статье [2] впервые удалось представить феноменологическую модель, полученную на основе соотношений балансного типа, так, что ее динамика при надлежащем выборе параметров обладает основными качественными свойствами, характерными для наблюдаемых в эксперименте нервных клеток.

Модель Ходжкина–Хаксли довольно сложна и содержит большое количество параметров, зависимость от которых весьма значительна. Вместе с тем следует отметить, что во многих случаях уравнение Ходжкина–Хаксли дает вполне удовлетворительное количественное соответствие экспериментальным данным.

С момента появления модели Ходжкина–Хаксли предпринимались многочисленные попытки ее упрощения с сохранением основных эффектов, характерных для динамики нейронов. В суммирующих статьях [3, 4] приведен ряд критериев, которым должна удовлетворять модель импульсного нейрона, и перечислено большое число модельных систем. Естественно, что наиболее простые из них удовлетворяют далеко не всем требованиям. Среди этих требований наиболее важным является условие существования у модели устойчивого периодического режима импульсного типа. Таким условиям удовлетворяет, в частности, предложенная в [14] модель с запаздыванием

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1))] u. \quad (0.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, функции $f_{\text{Na}}(u)$ и $f_{\text{K}}(u)$ характеризуют проводимости ионных каналов. Данная задача легко обобщается в сторону добавления слагаемых, отвечающих за проводимость других ионных каналов и добавления в моделируемые токи добавочных запаздываний. Наиболее плодот-

Заключение

В пособии развивается подход к моделированию электрической активности нейронов и их простейших ассоциаций (цепочки, кольца) с помощью систем с запаздыванием. Предложен алгоритм асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных уравнений и систем с запаздыванием. Этот алгоритм основан на сведении уравнений к предельному релейному уравнению, а систем связанных уравнений — к системе с импульсным воздействием.

Основным полученным результатом является доказательство утверждений о соответствии устойчивых периодических режимов предельных систем устойчивым решениям исходных задач.

На основе исследования предельных уравнений и систем удалось показать, что ассоциации связанных релаксационных осцилляторов могут иметь большое, неограниченно растущее с ростом числа осцилляторов количество сосуществующих устойчивых решений.

Особо отметим рассмотренную в последней части пособия модель синаптической связи между нейронными элементами. В этом случае удалось показать, что в исследуемой системе наблюдается растущее с ростом количества взаимодействующих осцилляторов число релаксационных bursting-циклов.

Добавим еще, что соотношения (4.101)–(4.106) выведены при аналогичном (4.36) априорном предположении $x_*(t) < 0 \forall t \in [\Delta, \Delta + nT_0 + t_0]$. Последнее же эквивалентно условиям

$$\delta_n < 0, \quad (\delta_n - b - 1/c) \exp(-bt_0) + b + 1/c < 0. \quad (4.107)$$

Обратим внимание, что в случае (4.106) соответствующее уравнение (4.84) оказывается линейным по Δ и при натуральных m, k , удовлетворяющих требованиям (4.29), имеет единственное решение $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$. Далее, предположим, что при выбранных значениях параметров a, b, c, m, k, n и при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$ выполняются неравенства (4.100), (4.107). Тогда исходная система (4.12) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ допускает устойчивую бегущую волну вида (4.92) с асимптотикой

$$\max_{0 \leq t \leq m\hat{\Delta}_{(k)}/k} |\hat{x}_{(k)}(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon) = \hat{\Delta}_{(k)} + O(\varepsilon), \quad (4.108)$$

где $x_*(t)$ – периодическое решение (4.101)–(4.106) релейного уравнения (4.30) при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$.

Действительно, факт существования требуемой бегущей волны вытекает из теорем 4.1, 4.2, аналоги которых, как уже было сказано выше, здесь сохраняются. Устойчивость же цикла (4.92), (4.108) определяется по корням уравнения (4.82) при $\beta = 1 - \exp(-(n+1)bt_0)$. Таким образом, в данном случае мы заведомо находимся в рамках применимости леммы 4.4, а значит, и теоремы 4.3.

В заключение отметим, что, помимо циклов вида (4.15), в системе (4.12) могут существовать и другие аттракторы. Как показал численный эксперимент, при $m = 3$ и при некоторых наборах параметров a, b, c соответствующая ей предельная система (4.14) допускает устойчивые циклы, отличные от бегущих волн, а также хаотические аттракторы.

творным, с нашей точки зрения, оказался учет еще одного запаздывания в уравнении (0.1).

Для модификации модели одиночного импульсного нейрона (0.1) воспроизведем ход рассуждений из [14], приводящий к данному уравнению. В первую очередь отметим, что в [14] во внимание принимаются только калиевые и натриевые токи, в качестве начала отсчета принимается уровень наибольшей поляризации мембраны и отклонение потенциала от этого уровня обозначается $u(t)$. Уравнение баланса токов при условии пренебрежения токами утечки записывается в виде:

$$c\dot{u} = I_{Na} + I_K. \quad (0.2)$$

Далее предполагается, что токи I_{Na} и I_K можно представить следующим образом:

$$I_{Na} = \chi_{Na}(u) \cdot u, \quad I_K = \chi_K(u) \cdot u, \quad (0.3)$$

где $\chi_{Na}(u)$ $\chi_K(u)$ – гладкие функции, определяющие натриевую и калиевую проводимости.

Обратимся к анализу зависимости $\chi_{Na}(u)$. В состоянии сильной поляризации ($u \ll 1$) на внутренней поверхности мембраны наблюдается избыток ионов натрия. Работа ионных насосов состоит в их откачивании из клетки (см. [2]). В силу положительности заряда ионов натрия данный процесс уменьшает мембранный потенциал, поэтому $\chi_{Na}(u) < 0$ при $u \ll 1$. С другой стороны, спайк связан с током положительных ионов натрия внутрь клетки, что приводит к росту величины u . Таким образом, при значении u выше некоторого уровня проводимость $\chi_{Na}(u) > 0$. Далее следует состояние электрохимического равновесия $u_{Na} \gg 1$ для ионов натрия: $\chi_{Na}(u_{Na}) = 0$. В результате получаем вид зависимости (см. [14]) проводимости $\chi_{Na}(u)$, который изображен на рис. 0.1 а.

Перейдем к обсуждению зависимости калиевой проводимости от мембранного потенциала. В книге [14] принята гипотеза о том, что она запаздывает по отношению к текущему значению мембранного потенциала. Примем это запаздывание за единицу времени и будем считать, что $\chi_K = \chi_K(u(t-1))$.

В состоянии сильной поляризации поток ионов калия направлен внутрь клетки, что способствует росту мембранного потенциала, а поэтому $\chi_K(u) > 0$ при $u \ll 1$. После прохождения максимума пика потенциала действия поток ионов калия меняет свое направление. Таким образом, существует такой уровень, что при значении $u(t-1)$ выше него проводимость $\chi_K(u(t-1)) < 0$. Суммируя данные рассуждения, приходим к виду зависимости $\chi_K(u)$, изображенному на рис. 0.1 б.

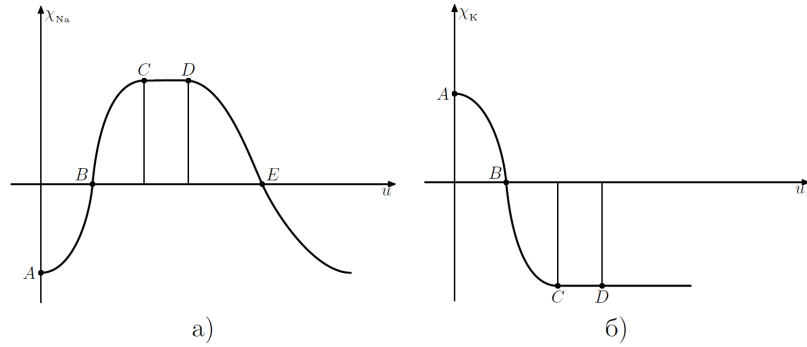


Рис. 0.1. Вид кривых натриевой (а) и калиевой (б) проводимостей (воспроизводится по книге [14])

Предсказать более детально вид кривых $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ затруднительно, отметим лишь, что в состоянии сильной поляризации мембранный потенциал медленно растет, поэтому

$$\chi_{Na}(0) + \chi_K(0) > 0. \quad (0.4)$$

Методы, используемые далее, позволяют исследовать модели для широкого класса нелинейностей, и описанных свойств зависимостей оказывается вполне достаточно для асимптотического анализа.

Для упрощения зависимости $\chi_{Na}(u)$ в книге [14] указывается на то, что участки относительной стабилизации проводимостей $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ (участки CD графиков) достаточно велики, и на этом основании предполагается, что в процессе функционирования нейрона задействован лишь участок AD кривой $\chi_{Na}(u)$. В связи с этим ниспадающий участок DE игнорируется. Введение обозначений

$$\begin{aligned} \chi_{Na}(u) &= a - (b - a)f_{Na}(u), \quad \chi_K(u) = (b - a)f_K(u) - b, \\ \lambda &= h(b - a) > 0, \end{aligned} \quad (0.5)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ — константы, характеризующие установившиеся значения $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ на промежутке CD, а $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ — достаточно гладкие функции, имеющие нулевые пределы при $u \rightarrow \infty$, позволяет перейти к модели (0.1), которая и изучается в первой части нашего пособия.

Существенное обобщение модели (0.1) может быть получено за счет учета запаздывания и ниспадающего участка в функции проводимости

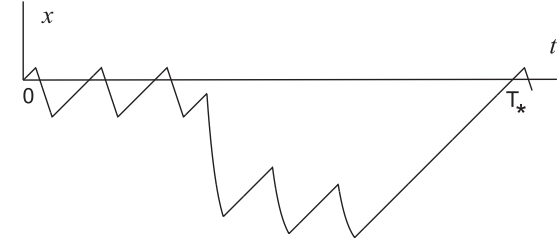


Рис. 4.3.

Подробный анализ всех оставшихся ситуаций (4.99) хотя и представляет несомненный интерес, но выходит за рамки настоящей работы. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь случая

$$t_0 + 1 + nT_0 < \Delta < (n + 1)T_0, \quad (4.100)$$

обобщающего уже разобранный вариант (4.31).

Непосредственная проверка показывает, что при условиях (4.100) релейное уравнение (4.30) допускает цикл $x_*(t)$ периода T_* , задающийся равенствами:

$$x_*(t) = x_0(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \Delta; \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} x_*(t) &= (\delta_r - b - 1/c) \exp(-b(t - \Delta - rT_0)) + b + 1/c \quad \text{при} \\ &rT_0 + \Delta \leq t \leq rT_0 + \Delta + t_0, \quad r = 0, 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} x_*(t) &= (\delta_r - b - 1/c) \exp(-bt_0) + b + 1/c + t - rT_0 - \Delta - t_0 \quad \text{при} \\ &rT_0 + \Delta + t_0 \leq t \leq (r + 1)T_0 + \Delta, \quad r = 0, 1, \dots, n - 1; \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$x_*(t) = t - T_* \quad \text{при} \quad nT_0 + \Delta + t_0 \leq t \leq T_*, \quad (4.104)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_r &= (\Delta - (n + 1)T_0) \exp(-rbt_0) + \\ &+ \left(b + 1/c + \frac{T_0 - t_0}{1 - \exp(-bt_0)} \right) (1 - \exp(-rbt_0)), \quad r = 0, 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$T_* = \Delta + t_0 + nT_0 + (b + 1/c - \delta_n) \exp(-bt_0) - b - 1/c. \quad (4.106)$$

График функции $x_*(t)$ при $n = 2$ и $a = 3$, $b = 1.1$, $c = -15$, $\Delta = 14.9$ представлен на рис. 4.3.

жем утверждать, что при $m \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и при условиях (4.96) в системе (4.12) происходит неограниченное накопление устойчивых циклов, т. е. реализуется известное явление буферности.

Необходимо отметить, что, помимо найденных выше, в системе (4.12) существуют и другие периодические решения типа бегущих волн. Их отыскание проводится по следующей схеме.

Обозначим через $x_\varphi(t)$ решение релейного уравнения (4.30) с произвольной начальной функцией

$$\varphi(t) \in C[-\max(1, \Delta), 0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-\max(1, \Delta), 0), \quad \varphi(0) = 0. \quad (4.98)$$

Нетрудно увидеть, что при $0 \leq t \leq \Delta$ оно совпадает с периодическим решением (4.8) релейного уравнения (4.34). Далее, при $t = \Delta$ происходит "срыв" с этого решения и при $t > \Delta$ для $x_\varphi(t)$ будут получаться различные формулы в зависимости от принадлежности точки $t = \Delta$ одной из четырех фаз цикла (4.8). А именно, здесь естественным образом выделяются четыре случая

$$\Delta \in (nT_0, 1 + nT_0), \quad (1 + nT_0, t_0 + nT_0), \quad (t_0 + nT_0, t_0 + 1 + nT_0), \quad (t_0 + 1 + nT_0, (n + 1)T_0), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4.99)$$

Можно показать, что при надлежащем выборе параметров a , b , c во всех вариантах (4.99) найдется такой первый момент времени $T_* = T_*(\Delta) > \Delta$, при котором функция $x_\varphi(t + T_*)$, $-\max(1, \Delta) \leq t \leq 0$ попадет в класс (4.98), а значит, будет построено периодическое решение $x_*(t)$ уравнения (4.30) периода T_* . Для этого решения остается в силе теорема 4.1, а если уравнение (4.84) при некоторых натуральных m и k допускает простой корень $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)} > 0$, то справедлив и аналог теоремы 4.2 о существовании цикла вида (4.92). Устойчивость же бегущей волны (4.92) определяется по расположению корней аналогичного (4.82) алгебраического полинома, который во всех случаях (4.99) может быть выписан в явном виде.

Изложенная схема исследования периодических движений была реализована нами в простейшем варианте (4.31), когда цикл $x_*(t)$ вспомогательного релейного уравнения (4.30) устроен наиболее просто (в этом случае он имеет всего один экспоненциальный участок, т. е. отрезок времени, на котором $x_*(t) = c_1 \exp(-bt) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$). Выбор данного варианта позволяет нам, избежав громоздких выкладок, наглядно проиллюстрировать используемые в главе оригинальные подходы к анализу бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных осцилляторов.

натриевого канала. Вернемся к виду функции $\chi_{\text{Na}}(u)$, приведенной на рис. 0.1 а, и предположим, что она представима в следующем виде:

$$\chi_{\text{Na}}(u) = \chi_{\text{Na}}^{(1)}(u) + \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u), \quad (0.6)$$

где

$$\chi_{\text{Na}}^{(1)}(0) < 0, \quad \chi_{\text{Na}}^{(2)}(0) = 0, \quad (0.7)$$

$$\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u) = a_1 + O(1/u), \quad \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u) = -a_2 + O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \quad (0.8)$$

Относительно функции $\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u)$ будем предполагать, что она достаточно мала по модулю на участке AD графика 0.1 а, кроме того, считаем, что $a_1, a_2 > 0$, $a_1 - a_2 < 0$. Предположим, наконец, что в натриевом канале также учитывается запаздывание, иначе говоря, натриевая проводимость записывается в виде $\chi_{\text{Na}}(u(t - h))$, где $0 < h < 1$.

В этом случае в соответствии с (0.2), (0.3) приходим к уравнению

$$cu = [\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u(t - h)) + \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u(t - h)) + \chi_K(u(t - 1))]u. \quad (0.9)$$

Нетрудно видеть, что модель (0.9) сводится к уравнению (0.1) при $h = 0$ и отброшенном слагаемом $\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u)$ (соответствует отбрасыванию участка DE зависимости $\chi_{\text{Na}}(u)$). С другой стороны, при условии, что у функции $\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u)$ разница между значениями в нуле и на бесконечности относительно мала и соответствующий ей ток не учитывается, получается модель, обладающая более богатой динамикой, чем (0.1). Кроме того, что особенно важно, эта модель может иметь импульсные режимы, в том числе и пакеты импульсов. Для формирования модельного уравнения не будем учитывать в (0.9) слагаемое $\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u)$ и обозначим

$$\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u) = \chi_K(0)(f(u) - 1), \quad \chi_K(u) = \chi_K(0)(1 - g(u)), \quad \lambda = \chi_K(0)/c, \quad (0.10)$$

тогда от уравнения (0.9) приходим к

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t - h)) - g(u(t - 1))]u. \quad (0.11)$$

Здесь $u(t) > 0$ – по-прежнему мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (0.11) функций

$f(u), g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad uf'(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u), \quad ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (0.12)$$

где $a_0 = 1 + a_2/\chi_K(0)$, $b_0 = 1 + b/\chi_K(0)$ – положительные константы, а число $-b$ представляет собой предельное значение функции $\chi_K(u)$ при $u \rightarrow +\infty$. Типовыми примерами таких функций являются

$$f(u) = (1 - u)/(1 + c_1 u), \quad g(u) = c_2 u/(1 + u), \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0. \quad (0.13)$$

Основные результаты, представленные в предлагаемой работе, касаются релаксационных свойств уравнений (0.1), (0.11) и систем связанных уравнений такого типа.

Опишем структуру пособия. В первой главе формулируется общий подход к асимптотическому интегрированию уравнения (0.1) и обосновывается существование и устойчивость его релаксационных циклов. Затем во второй части главы рассматривается цепочка связанных осцилляторов вида (0.1). Связь в этом случае предполагается диффузионной. При подходящих значениях параметров в цепочке из m элементов удастся доказать сосуществование не менее m релаксационных циклов.

Импульсные нейроны, наблюдаемые в эксперименте, в некоторых случаях генерируют импульсные пакеты, это явление обычно называется bursting. Уравнение (0.1) не обладает таким свойством, однако учет запаздывания в обеих функциях проводимости позволяет перейти к модели (0.11), имеющей релаксационный bursting цикл. Вторая глава посвящена анализу уравнения с двумя запаздываниями, в ней излагается механизм возникновения bursting цикла. Наряду с этим удастся показать, что в системе из m связанных генераторов при подходящем выборе параметров сосуществует сколь угодно большое число устойчивых bursting циклов.

В третьей главе методы, разработанные для моделей (0.1), (0.11), применяются к сетям Хопфилда с запаздыванием. Для таких сетей получены результаты, аналогичные найденным в главах 1, 2 для моделей (0.1), (0.11).

Наконец, в последней, четвертой, части работы приведена модель синаптической связи между нейронами.

При $\varepsilon > 0$ уравнение (4.95) также допускает решение $\varkappa = 1$, поскольку при $\varkappa = 1$, $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ уравнение (4.70) заведомо имеет единичный мультипликатор (в этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (4.16) на цикле $x = \widehat{x}_{(k)}(t, \varepsilon)$). Добавим еще, что в силу аналитичности функции $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ по переменной \varkappa и аналогичного (4.73) равномерного по $\varkappa \in B(r)$ равенства $\partial \nu_1 / \partial \varkappa = \beta + O(\sqrt{\varepsilon})$ количество корней уравнения (4.95) в круге $\varkappa \in B(r)$ равно m , причем корень $\varkappa = 1$ является простым. Что же касается остальных $m - 1$ корней этого уравнения, то они при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к корням $\varkappa_j : |\varkappa_j| < 1$, $j = 1, \dots, m - 1$ уравнения (4.82).

Подведем итог. Из проделанного анализа следует, что за исключением простого единичного все мультипликаторы $\nu \in \mathbb{C}$ цикла (4.92) по модулю меньше единицы. Действительно, имеется $m - 1$ так называемых критических мультипликаторов $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, m - 1$, стремящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к величинам $\nu = \varkappa_j^{m/k}$, где \varkappa_j , $j = 1, \dots, m - 1$ – уже упоминавшиеся выше корни уравнения (4.82). Остальные же мультипликаторы ν рассматриваемого цикла лежат в круге (4.94). Теорема 4.3 доказана.

Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о сосуществовании циклов (4.92) с различными номерами k . Для того чтобы разобраться с ним, предположим, что на некотором отрезке $[z_1, z_2] \subset (0, 1)$ выполняются условия

$$a > \max_{z_1 \leq z \leq z_2} \gamma_1(z), \quad \max_{z_1 \leq z \leq z_2} \gamma_2(z) < c + 1/b < \min_{z_1 \leq z \leq z_2} \gamma_3(z), \quad (4.96)$$

где $\gamma_j(z)$, $j = 1, 2, 3$ – функции (4.88). В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.4. Пусть параметры a, b, c фиксированы и удовлетворяют требованиям (4.96). Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в системе (4.12) сосуществуют экспоненциально орбитально устойчивые циклы (4.92) с номерами

$$k : \quad z_1 m \leq k \leq z_2 m. \quad (4.97)$$

Для доказательства достаточно заметить, что в случае (4.96) набор параметров (a, b, c) принадлежит одновременно всем множествам (4.89) с номерами (4.97). А это значит, что при каждом таком k мы находимся в рамках применимости теорем 4.2, 4.3.

Добавим еще, что при увеличении m количество натуральных k , принадлежащих множеству (4.97), неограниченно растёт. Тем самым мы мо-

где $\hat{x}_{(k)}(t, \varepsilon) = x_*(t, \varepsilon, \Delta)|_{\Delta=\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)}$, а $\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ – корень (4.91) уравнения (4.90).

В дополнение к установленной теореме отметим, что при $k \geq m$ условия (4.86) и требование $\hat{\Delta}_{(k)} > 0$ несовместны. Тем самым система (4.12) заведомо не имеет бегущих волн вида (4.92) с номерами $k \geq m$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости цикла (4.92). Справедлива следующая

Теорема 4.3. В условиях предыдущей теоремы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ цикл (4.92) экспоненциально орбитально устойчив.

Доказательство. Напомним, что все мультипликаторы ν цикла (4.92) задаются равенствами (4.21), (4.22), где $\nu_s(\varkappa, \varepsilon)$, $s \geq 1$ – мультипликаторы вспомогательного линейного уравнения (4.70) при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$. В связи с этим обратим внимание, что для оператора монодромии (4.19) системы (4.17), отвечающей циклу (4.92), имеет место оценка

$$\|V(\varepsilon)\|_{C([-1,0];\mathbb{R}^m) \rightarrow C([-1,0];\mathbb{R}^m)} \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (4.93)$$

справедливость которой вытекает из свойств вида (4.57)–(4.62) коэффициентов (4.18). Таким образом, при рассмотрении уравнений (4.22) в силу очевидного неравенства $|\nu| \leq \|V(\varepsilon)\|$ и соотношения (4.21) мы вправе ограничиться значениями $\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq r$, где $r = (M+1)^{k/m}$, M – константа из (4.93).

Итак, при условии $\varkappa \in B(r)$ подставим в уравнение (4.70) $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ и воспользуемся леммой 4.3. В результате убеждаемся, что все возможные решения $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнений (4.22) при $s \geq 2$, а значит, и отвечающие им мультипликаторы $\nu = \varkappa^{m/k}$ цикла (4.92) допускают оценку вида

$$|\nu| \leq M \exp(-\delta/\varepsilon) \quad (4.94)$$

с некоторыми универсальными постоянными $M, \delta > 0$. Таким образом, проблема устойчивости цикла (4.92) сводится к анализу расположения корней уравнения (4.22) при $s = 1$.

Опираясь на асимптотическое представление (4.73), приходим к выводу, что интересующее нас уравнение записывается в виде

$$[1 + \beta(\varkappa - 1)]^k = \varkappa^m + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.95)$$

Заметим, далее, что при $\varepsilon = 0$ в силу леммы 4.4 оно имеет простой корень $\varkappa = 1$, а остальные его корни (обозначим их через \varkappa_j , $j = 1, \dots, m-1$) лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

Глава 1.

Релаксационные автоколебания в нейронных системах с одним запаздыванием

1.1. Асимптотический анализ одного уравнения

В первую очередь рассмотрим скалярное сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием (0.1), являющееся моделью отдельного нейрона. В данной главе изучаются вопросы существования, асимптотики и устойчивости его релаксационного цикла.

1.1.1. Постановка задачи

Основой излагаемых ниже построений служит теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, берущая начало с работы Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [5]. Последующее развитие этой теории отражено в работах [6–9], а достаточно законченный характер она приняла в монографиях [10, 11]. Уместно также отметить монографию [12] и работу [13], в которых основные идеи и методы из [10, 11] перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием.

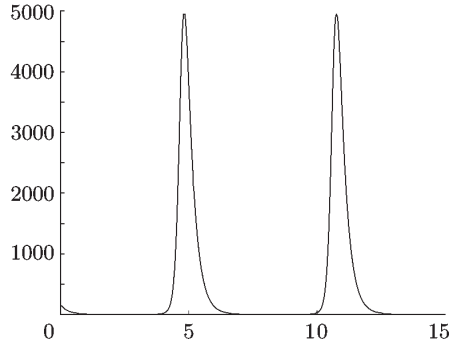


Рис. 1.1.

Результаты настоящей работы представляют собой естественное продолжение начатых в [12, 13] исследований.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. Будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона моделируется уравнением (0.1) (см. [14], с. 32), выпишем его и предположения, его касающиеся, заново

$$\dot{u} = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u. \quad (1.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, таковы, что

$$\alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Предполагаем, что фигурирующие в (1.1) функции $f(u)$, $g(u)$ принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и обладают свойствами

$$\begin{aligned} f(0) = g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) + 1 < \alpha \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Как будет показано ниже, при сформулированных ограничениях и при всех достаточно больших λ уравнение (1.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1) \quad (1.4)$$

(положительность величины T_0 вытекает из неравенства (1.2)). Функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода имеет асимптотически высокий

Обозначим через $\mathcal{U}_{m,k}$ множество наборов параметров $(a, b, c) : a, b > 0, c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (4.86), (4.87). Для более удобного его представления введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \gamma_1(z) = \max\left(\frac{2z-1}{1-z}, 0\right), \quad \gamma_2(z) = \frac{t_0 - (z^{-1} - 1)T_0}{1 - \exp(-bt_0)}, \\ \gamma_3(z) = \min\left(\frac{(z^{-1} - 1)T_0 - t_0}{(z^{-1} - 1)(\exp(bt_0) - 1)}, \right. \\ \left. \frac{(T_0 - 1 - t_0)\exp(-bt_0) + t_0 - (z^{-1} - 1)(1 + t_0)}{1 - \exp(-bt_0)}\right) \end{aligned} \quad (4.88)$$

переменной $z \in (0, 1)$. Нетрудно заметить, что с помощью этих функций интересующее нас множество записывается в виде

$$\mathcal{U}_{m,k} = \{(a, b, c) : a > \gamma_1(k/m), b > 0, \gamma_2(k/m) < c + 1/b < \gamma_3(k/m)\}. \quad (4.89)$$

Итак, мы убедились, что при $(a, b, c) \in \mathcal{U}_{m,k}$ и при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$ периодическое решение (4.41) уравнения (4.30) имеет нужный период $m\hat{\Delta}_{(k)}/k$. Обратимся теперь к периодическому решению $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (4.16) и рассмотрим соответствующее ему уравнение

$$T_*(\varepsilon, \Delta) = m\Delta/k. \quad (4.90)$$

Напомним, далее, что в силу (4.50) период $T_*(\varepsilon, \Delta)$ допускает асимптотическое представление $T_*(\varepsilon, \Delta) = T_*(\Delta) + O(\varepsilon)$, равномерное по Δ из любого компакта K , для которого выполняются требования (4.31), (4.38). А отсюда и из простоты корня $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$ уравнения (4.84) очевидным образом следует, что уравнение (4.90) имеет хотя бы один корень $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$, такой что

$$\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon) = \hat{\Delta}_{(k)} + O(\varepsilon). \quad (4.91)$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. Пусть натуральные m, k удовлетворяют условиям (4.29), а параметры a, b, c фиксированы и $(a, b, c) \in \mathcal{U}_{m,k}$. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (4.12) допускает цикл (бегущую волну)

$$C_k : \quad x_j = \hat{x}_{(k)}(t + (j-1)\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.92)$$

обозначать через $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ и $T_*(\varepsilon, \Delta)$ соответственно, подчеркивая явно зависимость этих функций от Δ . Аналогичным образом, через $T_*(\Delta)$ обозначим период функции (4.41) и заметим, что в силу (4.37), (4.39) для него справедлива формула

$$T_*(\Delta) = \Delta + t_0 + (T_0 + c + 1/b - \Delta) \exp(-bt_0) - c - 1/b. \quad (4.83)$$

Изучим сначала вопрос о существовании периодического решения с периодом $T = m\Delta/k$ у релейного уравнения (4.30). С этой целью обратимся к уравнению

$$T_*(\Delta) = m\Delta/k \quad (4.84)$$

для нахождения фазового сдвига $\Delta > 0$, считая, что натуральные m и k удовлетворяют условиям (4.29). Из соотношения (4.83) очевидным образом следует, что данное уравнение имеет единственное решение $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$, где

$$\hat{\Delta}_{(k)} = \frac{t_0 + T_0 \exp(-bt_0) - (1 - \exp(-bt_0))(c + 1/b)}{m/k - 1 + \exp(-bt_0)}. \quad (4.85)$$

Напомним, далее, что решение (4.85) должно удовлетворять условиям (4.31), (4.38), при которых, собственно, и был построен цикл (4.41) релейного уравнения (4.30). В связи с этим подставим формулу (4.85) в упомянутые условия. В результате получим серию ограничений

$$\begin{aligned} (m/k - 1)(c + 1/b) &< \frac{(m/k - 1)T_0 - t_0}{\exp(bt_0) - 1}, \\ \frac{t_0 - (m/k - 1)T_0}{1 - \exp(-bt_0)} &< c + 1/b < \frac{(T_0 - 1 - t_0) \exp(-bt_0) + t_0 - (m/k - 1)(1 + t_0)}{1 - \exp(-bt_0)} \end{aligned} \quad (4.86)$$

на параметры a, b, c . Добавим еще, что данные ограничения совместны в том и только в том случае, когда выполняется неравенство

$$\frac{t_0 - (m/k - 1)T_0}{1 - \exp(-bt_0)} < \frac{(m/k - 1)T_0 - t_0}{(m/k - 1)(\exp(bt_0) - 1)},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно оценке

$$a > \frac{2k - m}{m - k} \quad (4.87)$$

на параметр a .

всплеск длины α , а в остальное время асимптотически мала. Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла дает его график на плоскости (t, u) в случае $\alpha = 3, \beta = 1, \lambda = 3.5, f = g = (u + 1)/(u^2 + 1)$, изображенный на рис. 1.1.

1.1.2. Основной результат

При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (1.1) релаксационного цикла $u_*(t, \lambda)$ с требуемыми свойствами удобно сделать в (1.1) замену $u = \exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует уравнение (1.1) к виду

$$\dot{x} = -1 + \alpha F(x(t-1), \varepsilon) - \beta G(x, \varepsilon), \quad (1.5)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, заметим, что в силу свойств (1.3) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = R(x), \quad R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

позволяющие перейти от уравнения (1.5) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -1 + \alpha R(x(t-1)) - \beta R(x). \quad (1.7)$$

Как и в работе [13], дадим пошаговое конструктивное определение понятия решения уравнения (1.7). Для этого зафиксируем некоторое

$$\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad (1.8)$$

рассмотрим множество функций

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) &= -\sigma_0(\alpha - \beta - 1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (1.7) с начальной функцией (1.9).

Заметим сразу, что поскольку $\varphi(t-1) < 0$ при $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, то по крайней мере при значениях t , достаточно близких к $-\sigma_0$, в силу

(1.6), (1.7) функция x_φ определяется из задачи Коши $\dot{x} = \alpha - \beta - 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = (\alpha - \beta - 1)t. \quad (1.10)$$

Ясно также, что до тех пор, пока $x_\varphi(t)$ или $x_\varphi(t-1)$ не сменит знак, правая часть уравнения (1.7) меняться не будет. А отсюда в свою очередь заключаем, что формула (1.10) сохраняется на промежутке $t \in [-\sigma_0, 0)$.

При $t = 0$ первый раз происходит переключение, обусловленное сменой знака у $x_\varphi(t)$, и при $t \geq 0$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши $\dot{x} = \alpha - 1$, $x(0) = 0$, т. е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = (\alpha - 1)t. \quad (1.11)$$

Точнее говоря, формула (1.11) остается в силе пока $x_\varphi(t-1) < 0$, $x_\varphi(t) > 0$, т. е. до момента времени $t = 1$.

При $t = 1$ происходит очередное переключение, связанное теперь со сменой знака $x_\varphi(t-1)$, и при $t \geq 1$ для нахождения x_φ имеем задачу Коши $\dot{x} = -1$, $x(1) = \alpha - 1$. Тем самым на промежутке $t \in [1, \alpha)$ получаем равенство

$$x_\varphi(t) = \alpha - t. \quad (1.12)$$

В точке $t = \alpha$ решение $x_\varphi(t)$ снова меняет знак, и поэтому при $t \geq \alpha$ рассмотрению подлежит уравнение $\dot{x} = -1 - \beta$ с нулевым начальным условием при $t = \alpha$. А отсюда нетрудно вывести, что на промежутке $t \in [\alpha, \alpha + 1)$ интересующее нас решение задается формулой

$$x_\varphi(t) = -(1 + \beta)(t - \alpha). \quad (1.13)$$

При $t \geq \alpha + 1$ снова, как и на начальном этапе, функции $x_\varphi(t)$ и $x_\varphi(t-1)$ становятся отрицательными. Поэтому на промежутке $t \in [\alpha + 1, T_0)$, где величина T_0 определена в (1.4), решение $x_\varphi(t)$ имеет аналогичный (1.10) вид

$$x_\varphi(t) = (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta. \quad (1.14)$$

Завершая описание построения решения $x_\varphi(t)$, отметим, что в силу условия (1.8) на постоянную σ_0 функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит исходному начальному множеству (1.9). А это означает, что при $t \geq T_0 - \sigma_0$ весь процесс повторяется. Более того, из формул (1.10)–(1.14) вытекает, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (1.9)

асимптотическое представление (4.73). Остальные же собственные значения $\nu_s(\varkappa, \varepsilon)$, $s \geq 2$ оператора $W(\varepsilon)$ допускают оценку (4.72) с некоторыми универсальными (зависящими только от r) постоянными $M, \delta > 0$. Лемма 4.3 доказана.

В связи с равенством (4.73) и предстоящим в дальнейшем анализом уравнений (4.22) оказывается полезной следующая

Лемма 4.4. При любых $\beta \in (0, 1)$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$ все корни уравнения

$$[1 + \beta(\varkappa - 1)]^k = \varkappa^m \quad (4.82)$$

за исключением простого единичного лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

Доказательство. Пусть сначала $0 < \beta \ll 1$. Тогда интересующие нас корни $\varkappa = \varkappa_r(\beta)$, $r = 1, \dots, m-1$ уравнения (4.82) при $\beta = 0$ обращаются в $\exp(2\pi r i / m)$ и, как нетрудно убедиться, удовлетворяют неравенствам

$$\left. \frac{d}{d\beta} |\varkappa_r(\beta)|^2 \right|_{\beta=0} = -\frac{2k}{m} \left(1 - \cos \frac{2\pi r}{m} \right) < 0, \quad r = 1, \dots, m-1.$$

Таким образом, при малых $\beta > 0$ утверждение леммы верно.

Предположим теперь, что уравнение (4.82) при некотором значении $\beta \in (0, 1)$ имеет корень $\varkappa_0 = \exp(i\omega_0)$, $\omega_0 \geq 0$. Тогда с необходимостью

$$|\varkappa_0|^{2m} = 1 = |1 + \beta(\varkappa_0 - 1)|^{2k} = (1 + 2(1 - \beta)\beta(\cos \omega_0 - 1))^k,$$

а, значит, $\cos \omega_0 = 1$ и $\varkappa_0 = 1$. Лемма 4.4 доказана.

Интересно отметить, что в случае $\beta \in (0, m/k)$, $k > m$ уравнение (4.82) допускает ровно $k - m$ корней, модули которых больше единицы. При $\beta \rightarrow 0$ эти корни "уходят" в бесконечность, а при любом фиксированном $\beta \in (0, m/k)$ остаются в области $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| > 1\}$.

4.6. Основные результаты

В данном пункте применим разработанные в п. 4.2 – 4.5 вспомогательные конструкции непосредственно к исходной системе (4.12). Напомним, что проблема существования ее бегущих волн (4.15) сводится к отысканию периодических решений вспомогательного уравнения (4.16), имеющих периоды $m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$. В связи с этим в дальнейшем периодическое решение уравнения (4.16), доставляемое теоремой 4.1, и его период будем

где β – постоянная из (4.73).

Для обоснования соотношения (4.77) необходимо знать асимптотическое поведение решения $\tilde{h}(t, \varepsilon)$. В связи с этим дополним уравнение (4.70) начальным условием $h \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ методом шагов, учитывая, что коэффициенты $B_*(t, \varepsilon)$, $C_*(t, \varepsilon)$ меняются δ -образно (см. (4.57) – (4.62)), а для коэффициента $A_*(t, \varepsilon)$ справедливо вытекающее из (4.11), (4.18), (4.48) равномерное по $t \in \Sigma_2$ асимптотическое представление:

$$A_*(t, \varepsilon) = A_0(t) + O(\exp(-\delta/\sqrt{\varepsilon})),$$

$$A_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-\sigma_0, \Delta) \cup (\Delta + t_0, T_* - \sigma_0/2], \\ -b & \text{при } t \in (\Delta, \Delta + t_0), \end{cases}$$

где $\delta = \text{const} > 0$. В результате убеждаемся, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0} |\tilde{h}(t, \varepsilon)| \leq M, \quad M = \text{const} > 0; \quad (4.78)$$

во-вторых, равномерно по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\varkappa \in B(r)$

$$\tilde{h}(t, \varepsilon) = h(t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.79)$$

где, напомним, Σ_1, Σ_2 – множества (4.58), а через $h(t)$, $t \geq -\sigma_0$ обозначено решение импульсной задачи Коши

$$\dot{h} = A_0(t)h, \quad h|_{t=-\sigma_0} = 1, \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} h(1+0) &= h(1-0) - (a+1)h(0), \\ h(t_0+1+0) &= h(t_0+1-0) - (1+1/a)h(t_0), \\ h(\Delta+0) &= h(\Delta-0) + \varkappa b(c-\beta_1)h(0), \\ h(\Delta+t_0+0) &= h(\Delta+t_0-0) + \varkappa(b/a)(c-\beta_2)h(t_0). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Что же касается свойства (4.77), то оно очевидным образом следует из (4.79) и из равенства $h(T_* - \sigma_0) = 1 + \beta(\varkappa - 1)$, проверяемого посредством интегрирования системы (4.80), (4.81) (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Вернемся к оператору $W(\varepsilon)$. Объединяя оценку (4.76) с проделанным выше асимптотическим анализом (см. (4.78), (4.79)), приходим к выводу, что $W(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = \nu_*(\varkappa, \varepsilon) + O(\exp(-\delta/\varepsilon))$, $\delta = \text{const} > 0$, для которого в силу (4.77) справедливо

при $t \geq -\sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией (рис. 1.2)

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha-1)t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha-t & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1+\beta)(t-\alpha) & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha+1, \\ (\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1) - 1 - \beta & \text{при } \alpha+1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $x_0(t+T_0) \equiv x_0(t)$.

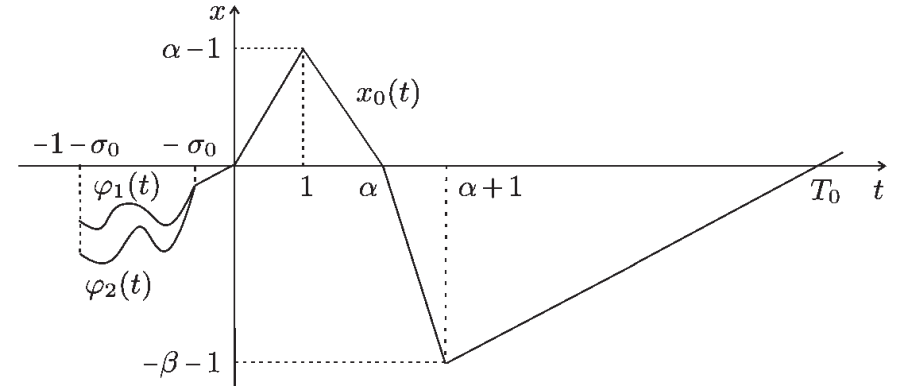


Рис. 1.2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (1.5) и (1.7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (1.5) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (1.16)$$

Доказательство, содержащееся в следующих двух пунктах, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 (см. (1.8)) зафиксируем произвольно постоянные $q_1 > \sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, $q_2 \in (0, \sigma_0(\alpha - \beta - 1))$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1). \quad (1.17)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (1.5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ (если он существует). И наконец, на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ зададим оператор Π_ε с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (1.18)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (1.18) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

1.1.3. Существование периодического решения

Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, считая, что

$$\sigma_0 < 1/2. \quad (1.19)$$

Так как в силу (1.19) его длина не превосходит единицы, то в этом случае $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ и, следовательно, на указанном отрезке $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 - \beta G(x, \varepsilon) + \alpha F(\varphi(t - 1), \varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1). \quad (1.20)$$

При асимптотическом исследовании задачи (1.20) существенным является то обстоятельство, что в силу неравенств из (1.17) и свойств (1.3) равномерно по $t \in [-\sigma_0, \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ имеем

$$F(\varphi(t - 1), \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (1.21)$$

Подставим, далее, соотношение (1.20) в (1.20), отбросим экспоненциально малое по ε (т. е. имеющее порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) слагаемое и в получившемся уравнении для x выполним замены $x = \varepsilon v(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. В результате приходим к не зависящему от ε модельному скалярному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (1.22)$$

Лемма 4.3. Для любого $r > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, $\delta = \delta(r) > 0$, $M = M(r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\varkappa \in B(r)$, где $B(r) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq r\}$, выполняется неравенство

$$\sup_{s \geq 2} |\nu_s(\varkappa, \varepsilon)| \leq M \exp(-\delta/\varepsilon). \quad (4.72)$$

Что же касается мультипликатора $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$, то он является простым и допускает равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое представление

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \beta = 1 - \exp(-bt_0). \quad (4.73)$$

Доказательство. Фиксируем произвольно положительное r и будем считать, что параметр \varkappa из (4.70) принадлежит множеству $B(r)$. Далее, введем в рассмотрение конечномерный оператор

$$\widetilde{W}(\varepsilon)h_0 = h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (4.74)$$

где $\widetilde{h}(t, \varepsilon)$ – решение уравнения (4.70) на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $h \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (4.71) и (4.74). С этой целью рассмотрим функцию

$$h(t, \varepsilon) - h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t, \varepsilon) \quad (4.75)$$

и заметим, что при $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ она также является решением уравнения (4.70), а при $t = -\sigma_0$ обращается в нуль. Тем самым мы вправе применить к (4.75) оценку вида (4.67), которая для уравнения (4.70), естественно, сохраняется. Из упомянутой оценки следует, что

$$\|W(\varepsilon) - \widetilde{W}(\varepsilon)\|_{C[-\Delta-\sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-\Delta-\sigma_0, -\sigma_0]} \leq M \exp(-\delta/\varepsilon), \quad (4.76)$$

где универсальные константы $M, \delta > 0$ зависят лишь от выбора r .

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (4.74). Нетрудно увидеть, что спектр этого оператора состоит из двух точек – простого собственного значения $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, где $\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = \widetilde{h}(T_*(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon)$, и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности. Что же касается собственного значения $\nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, то для него, как будет показано ниже, имеет место равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое равенство

$$\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.77)$$

и из уже полученной оценки вида (4.68) на $(r-1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на r -м отрезке изменения t .

На завершающем этапе обоснования теоремы 4.1 применим неравенство (4.67) вместе с очевидной оценкой $\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M$, $M = \text{const} > 0$ и асимптотическим представлением $\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$ (см. (4.49), (4.50)) к оператору (4.54). В результате убеждаемся, что

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-\delta/\varepsilon). \quad (4.69)$$

Остается добавить, что оценка (4.69) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$ в метрике фазового пространства $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Теорема 4.1 доказана.

4.5. Вспомогательное линейное уравнение

В данном пункте исследуем вопрос об асимптотическом поведении мультипликаторов аналогичного (4.20) линейного уравнения

$$\dot{h} = A_*(t, \varepsilon)h + B_*(t, \varepsilon)h(t-1) + \varkappa C_*(t, \varepsilon)h(t-\Delta), \quad (4.70)$$

где $A_*(t, \varepsilon)$, $B_*(t, \varepsilon)$, $C_*(t, \varepsilon)$ – коэффициенты (4.18), вычисленные на найденном выше периодическом решении $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (4.16), а \varkappa – произвольный комплексный параметр.

Рассмотрим решение $h(t, \varepsilon)$ уравнения (4.70) с произвольной начальной функцией $h_0(t)$ из пространства $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Далее, обозначим через $W(\varepsilon)$ оператор монодромии этого уравнения, действующий в пространстве $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ по правилу:

$$W(\varepsilon)h_0 = h(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (4.71)$$

где, напомним, $T_*(\varepsilon)$ – период цикла $x_*(t, \varepsilon)$.

Введем в рассмотрение собственные значения $\nu_s(\varkappa, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \dots$ оператора (4.71), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

В дальнейшем нас будет интересовать специальное решение $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, уравнения (1.22), задающееся равенством

$$v_0(\tau) = V^{-1}(z)|_{z=(\alpha-\beta-1)\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

где $V^{-1}(z)$ – функция, обратная к

$$V(z) = z - \int_{-\infty}^z \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Подчеркнем, что определение (1.23) корректно, поскольку условия (1.3) гарантируют как выполнение неравенства $\alpha - 1 - \beta g(\exp s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$ и сходимость несобственного интеграла из (1.24), так и справедливость свойств $V'(z) = (\alpha - 1 - \beta)/(\alpha - 1 - \beta g(\exp z)) > 0 \forall z \in \mathbb{R}$, $V(z) \rightarrow \pm\infty$ при $z \rightarrow \pm\infty$. А отсюда в свою очередь вытекает существование обратной функции $V^{-1}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}$.

Остановимся на асимптотическом поведении функции (1.23) при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Для этого выясним сначала характер поведения функций $V(z)$ и $V^{-1}(z)$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Обращаясь в очередной раз к свойствам (1.3), из равенства (1.24) последовательно выводим:

$$V(z) = z + O(\exp z), \quad V^{-1}(z) = z + O(\exp z), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.25)$$

Для получения же аналогичных (1.25) формул при $z \rightarrow +\infty$ представим $V(z)$ в виде

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} z - \int_{-\infty}^0 \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds - \\ &\quad - \int_0^z \left(\frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} - \frac{\beta}{\alpha - 1} \right) ds = \\ &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} (z - c_0) - \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} \int_z^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \int_{-\infty}^0 \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds = \\ &= \frac{(\alpha - 1)\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du - \beta \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Остается заметить, что из соотношений (1.26), (1.27) требуемые асимптотические представления

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} (z - c_0) + O(\exp(-z)), \\ V^{-1}(z) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} z + c_0 + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} z\right)\right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

при $z \rightarrow +\infty$ вытекают уже очевидным образом.

Суммируя проделанные построения и объединяя формулы (1.23), (1.25), (1.28), приходим к выводу, что интересующие нас асимптотические равенства для $v_0(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= (\alpha - \beta - 1)\tau + O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ v_0(\tau) &= (\alpha - 1)\tau + c_0 + O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Как оказывается, функция (1.23) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (1.20). А именно убедимся в том, что решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ этой задачи допускает представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=t/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0, \quad (1.30)$$

где через $\Delta_{1,\varphi}$, $\Delta_{2,\varphi}$, ..., здесь и ниже обозначаются остатки, имеющие экспоненциальный по ε порядок малости равномерно по φ , t .

Подставляя соотношение (1.30) в (1.20), для отыскания $\Delta_{1,\varphi}$ получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{1,\varphi} &= -\beta[g(\exp(v_0(t/\varepsilon) + \Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))] + \\ &+ \alpha(F(\varphi(t-1), \varepsilon) - 1), \quad \Delta_{1,\varphi}|_{t=-\sigma_0} = \delta(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\delta(\varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1) - \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}$. Помимо равенства (1.20), ее анализ основывается на следующих двух фактах. Во-первых, в силу первого

что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |h(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-\delta/\varepsilon) \|h_0\| \quad (4.67)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , h_0) постоянными M , $\delta > 0$, где, напомним, $\|*\|$ – норма в пространстве (4.55).

Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ и учтем соответствующие оценки для $A_\varphi(t, \varepsilon)$, $B_\varphi(t, \varepsilon)$, $C_\varphi(t, \varepsilon)$ из (4.57) в явной формуле

$$\begin{aligned} h(t, \varepsilon) &= \int_{-\sigma_0}^t \exp\left(\int_s^t A_\varphi(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) \left[B_\varphi(s, \varepsilon) h_0(s-1) + C_\varphi(s, \varepsilon) h_0(s-\Delta) \right] ds, \\ &\quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\max_t |h(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-\delta/\varepsilon) \|h_0\|, \quad (4.68)$$

где M , $\delta > 0$ – некоторые универсальные постоянные.

Для распространения оценки (4.68) на оставшийся отрезок $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем данный промежуток на отрезки времени $[1 - \sigma_0 + r, 2 - \sigma_0 + r]$, $r = 0, 1, \dots, r_0$ и $[2 - \sigma_0 + r_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $r_0 = \lfloor T_\varphi - 2 \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на свойство интегральной ограниченности

$$\int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} (|A_\varphi(t, \varepsilon)| + |B_\varphi(t, \varepsilon)| + |C_\varphi(t, \varepsilon)|) dt \leq M, \quad M = \text{const} > 0,$$

справедливое в силу (4.57) – (4.62), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |h(t, \varepsilon)| &\leq |h(1 - \sigma_0 + r, \varepsilon)| \exp\left(\int_{1 - \sigma_0 + r}^t |A_\varphi(s, \varepsilon)| ds\right) + \\ &+ \int_{1 - \sigma_0 + r}^t \exp\left(\int_s^t |A_\varphi(\sigma, \varepsilon)| d\sigma\right) \left[|B_\varphi(s, \varepsilon)| \cdot |h(s-1)| + \right. \\ &\quad \left. + |C_\varphi(s, \varepsilon)| \cdot |h(s-\Delta)| \right] ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + r \end{aligned}$$

А отсюда требуемые неравенства из (4.57) для $B_\varphi(t, \varepsilon)$, $C_\varphi(t, \varepsilon)$ вытекают очевидным образом. Что же касается коэффициента $A_\varphi(t, \varepsilon)$, то для него имеем

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| \leq b \sup_{u \geq 0} g(u) < \infty.$$

Обратимся теперь к асимптотическим равенствам (4.59)–(4.62) и докажем, к примеру, соотношения (4.59) (остальные обосновываются аналогично). С этой целью перейдем на отрезке $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ к переменной $\tau = (t - \tau_1 - 1)/\varepsilon$. В результате $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon$ записывается в виде функции $x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$, для которой с учетом равенства $x_\varphi(\tau_1, \varepsilon) = 0$ получаем представление

$$x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = \dot{x}_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon)\tau, \quad (4.64)$$

где значение $\bar{\tau}$ таково, что $|\bar{\tau}| \leq |\tau|$. Учитывая, далее, в (4.64) асимптотические формулы (4.48) и очевидную оценку $|\bar{\tau}| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$, приходим к выводу, что

$$x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = (1 + O(\sqrt{\varepsilon}))\tau, \quad (4.65)$$

где остаток равномерен по τ , φ .

На заключительном этапе привлечем второе неравенство (4.63), из которого в силу (4.65) вытекает, что

$$\begin{aligned} |f'(\exp(x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon)) \exp(x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon) - f'(\exp \tau) \exp \tau| &\leq \\ &\leq M\sqrt{\varepsilon} |\tau| \exp(-|\tau|), \quad -1/\sqrt{\varepsilon} \leq \tau \leq 1/\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Применим затем оценку (4.66) непосредственно к вычислению интервалов из (4.59). В результате убеждаемся, что равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt &= \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} f'(\exp \tau) \exp \tau d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} |f'(\exp \tau)| \exp \tau d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) = \int_0^{+\infty} |f'(u)| du + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Лемма 4.2 доказана.

Вернемся к интересующему нас вопросу об асимптотическом поведении фигурирующего в (4.54) решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (4.56). Покажем,

асимптотического представления из (1.29) имеем

$$\delta(\varepsilon) = O(\exp(-(\alpha - \beta - 1)\sigma_0/\varepsilon)); \quad (1.32)$$

во-вторых, из условий (1.3) вытекает, что

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(u_1^2, u_2^2)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (1.33)$$

где $M_1 = \sup_{u \in \mathbb{R}_+} (1 + u^2)|g'(u)| < \infty$.

Предположим сначала, что на интересующем нас отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$ выполняется априорная оценка

$$|\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| \leq M_2 \varepsilon \quad (1.34)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от t , φ , ε) константой $M_2 > 0$. Отсюда и из неравенства (1.33) нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} |g(\exp(v_0(t/\varepsilon) + \Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))| &\leq \\ &\leq \frac{M_3}{\varepsilon} \exp(-|v_0(t/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)|, \end{aligned} \quad (1.35)$$

при $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$, где постоянная $M_3 > 0$ зависит от M_2 из (1.34), но не зависит от t , φ , ε .

Последующий способ действий стандартен. Сначала переходим обычным образом от (1.31) к соответствующему интегральному уравнению, из которого в свою очередь с учетом неравенства (1.35) получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| &\leq |\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s - 1), \varepsilon) - 1| ds + \\ &+ \frac{M_3}{\varepsilon} \int_{-\sigma_0}^t \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(s, \varepsilon)| ds. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Далее, применяя к (1.36) лемму Гронуолла–Беллмана и используя известные свойства (1.20), (1.32), убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| &\leq \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1), \varepsilon) - 1| ds \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{M_3}{\varepsilon} \int_{-\sigma_0}^t \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|) ds \right\} \leq \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1), \varepsilon) - 1| ds \right) \times \\ &\times \exp \left\{ M_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|v_0(\tau)|) d\tau \right\} = O(\exp(-q_2/\varepsilon)) \end{aligned}$$

(сходимость фигурирующего здесь несобственного интеграла вытекает из установленных ранее свойств (1.29) функции $v_0(\tau)$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$). А это означает, что сделанное выше априорное предположение (1.34) действительно выполняется и, следовательно, остаток $\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)$ из (1.30) обладает требуемой экспоненциальной малостью.

Рассмотрим теперь промежуток времени $\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. На нем по-прежнему $x_\varphi(t-1, \varepsilon) = \varphi(t-1)$, а значит, сохраняется асимптотическое равенство (1.20). Будем считать, что для функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$, определяющей-ся из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 - \beta G(x, \varepsilon) + \alpha F(\varphi(t-1), \varepsilon), \\ x|_{t=\sigma_0} &= \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.37)$$

при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t, \varepsilon) \geq q, \quad (1.38)$$

где одной и той же буквой q здесь и в последующем обозначаются различные универсальные (не зависящие от t, φ, ε) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Принимая во внимание неравенство (1.38) и используя в очередной раз свойства (1.3), убеждаемся в том, что в данном случае

$$|G(x, \varepsilon)| = O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.39)$$

Далее, для начального условия из (1.37) в силу второго равенства (1.29) и установленной выше оценки (1.34) имеем

$$\varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0, \varepsilon) = (\alpha - 1)\sigma_0 + \varepsilon c_0 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} C_\varphi(t, \varepsilon) dt &= b(c - \beta_1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |C_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= b|c - \beta_1| \int_0^{+\infty} |g'(u)| du + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} C_\varphi(t, \varepsilon) dt &= \frac{b}{a}(c - \beta_2) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} |C_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \frac{b}{a}|c - \beta_2| \int_0^{+\infty} |g'(u)| du + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

где $\beta_1 = \Delta - T_0$, $\beta_2 = \Delta + t_0 - T_*$.

Доказательство. Из свойств (4.5), (4.11) функций $f(u)$, $g(u)$ последовательно выводим:

$$\begin{aligned} |f'(\exp x) \exp x| + |g'(\exp x) \exp x| + |f''(\exp x) \exp(2x)| + \\ + |g''(\exp x) \exp(2x)| \leq M \exp(-|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ |f'(\exp x_1) \exp x_1 - f'(\exp x_2) \exp x_2| + \\ + |g'(\exp x_1) \exp x_1 - g'(\exp x_2) \exp x_2| \leq \\ \leq M|x_1 - x_2| \exp(-\min(|x_1|, |x_2|)) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

где здесь и ниже одной и той же буквой M обозначены различные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Далее, объединяя оценки на $f'(\exp x) \exp x$, $g'(\exp x) \exp x$ из (4.63) с установленными ранее асимптотическими представлениями для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и формулами (4.58), заключаем, что

$$|B_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} [\exp(-|t-1|/\varepsilon) + \exp(-a|t-t_0-1|/\varepsilon)], \quad t \in \Sigma_1;$$

$$|C_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} [\exp(-|t-\Delta|/\varepsilon) + \exp(-a|t-t_0-\Delta|/\varepsilon)], \quad t \in \Sigma_2.$$

Лемма 4.2. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_1, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M_2 \exp(-\delta_1/\varepsilon), \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0} |C_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_3 \exp(-\delta_2/\varepsilon), \\ \max_{t \in \Sigma_1} |B_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_4 \exp(-\delta_3/\sqrt{\varepsilon}), \\ \max_{t \in \Sigma_2} |C_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_5 \exp(-\delta_4/\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.57)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^2 (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}), \\ \Sigma_2 &= [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^2 (\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.58)$$

а постоянные $M_k > 0$, $k = 1, \dots, 5$, $\delta_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$ не зависят от ε , φ . Кроме этого, имеют место равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \int_0^{+\infty} |f'(u)| du + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -1 - 1/a + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} |f'(u)| du + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.60)$$

И наконец, учитывая соотношения (1.20), (1.39), (1.40) в (1.37), приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = (\alpha - 1)t + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(t, \varepsilon), \quad \sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0. \quad (1.41)$$

Напомним, однако, что формула (1.41) получена нами при априорном предположении (1.38). Но из (1.41) в свою очередь следует, что условие (1.38) будет выполняться при любом фиксированном $q \in (0, (\alpha - 1)\sigma_0)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, асимптотическое равенство (1.41) доказано.

Перейдем к рассмотрению отрезка $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Особенность этого случая состоит в том, что указанный промежуток времени содержит точку переключения $t = 1$ релейного уравнения (1.7). Поэтому, согласно представлению (1.30), здесь

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon). \quad (1.42)$$

Для функции же $x_\varphi(t, \varepsilon)$, определяющейся из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 + \alpha F(x_\varphi(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) - \beta G(x, \varepsilon), \\ x|_{t=1-\sigma_0} &= (\alpha - 1)(1 - \sigma_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(1 - \sigma_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.43)$$

по-прежнему считаем выполненным априорное условие (1.38).

При асимптотическом анализе задачи (1.43) нам потребуется аналогичная (1.35) оценка

$$|f(\exp s_1) - f(\exp s_2)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp(-|v_0((t - 1)/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon)|,$$

где $s_1 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon$, $s_2 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}$, $M > 0$ — универсальная константа, а t изменяется на отрезке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Объединяя это неравенство с формулами (1.39), (1.42), после несложных преобразований из (1.43) выводим, что

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= \alpha - 1 + \varepsilon[(\alpha - 1)\tau + c_0 + \alpha a(\tau)]|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(t, \varepsilon), \\ 1 - \sigma_0 &\leq t \leq 1 + \sigma_0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где функция $a(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$a(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp v) - 1)|_{v=v_0(s)} ds. \quad (1.45)$$

Как и в предыдущем случае, формула (1.44) носит пока условный характер, так как она получена в предположении (1.38). Поэтому для ее обоснования достаточно убедиться в том, что правая часть равенства (1.44) действительно удовлетворяет оценке (1.38) при надлежащем выборе постоянной $q > 0$.

При решении поставленной задачи необходима информация о поведении при $\tau \rightarrow \pm\infty$ функции (1.45). В связи с этим представим ее в виде

$$a(\tau) = -\tau + \int_{-\infty}^0 (f(\exp v_0(s)) - 1) ds + \int_0^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds - \int_{\tau}^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds.$$

Отсюда и из (1.45) с учетом свойств функций $f(u)$, $v_0(\tau)$ (см. (1.3), (1.29)) очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} a(\tau) &= O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ a(\tau) &= -\tau + a_0 + O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\infty}^0 (f(\exp v_0(s)) - 1) ds + \int_0^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{v_0(0)} \frac{f(\exp v) - 1}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv + \int_{v_0(0)}^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Возвращаясь к равенству (1.44) и подставляя в его правую часть формулы (1.46), приходим к выводу, что при дополнительном ограничении

$$\sigma_0 < \alpha - 1 \quad (1.48)$$

на параметр σ_0 (которое всюду ниже считаем выполненным) требуемая оценка (1.38) оказывается справедливой на отрезке $t \in [1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0]$ при любом фиксированном q из интервала $0 < q < \min(\alpha - 1 - \sigma_0, (\alpha - 1)(1 - \sigma_0))$.

Прежде чем перейти к рассмотрению очередного промежутка времени, попытаемся упростить формулу для a_0 из (1.46). Недостаток последнего равенства (1.47) заключается в том, что в нем фигурирует величина $v_0(0)$, для которой нет явного выражения. Однако от этой трудности удастся избавиться.

себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, по крайней мере, одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (4.16) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (4.48), (4.50), (4.51) обладает требуемыми свойствами (4.42).

Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 4.1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (4.41). Из явной формулы (4.46) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)h_0 &= h(t + T_\varphi, \varepsilon) - \\ &- \frac{h(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Здесь функция $h_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{h_0(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] : h_0(-\sigma_0) = 0\} \quad (4.55)$$

с нормой $\|h_0\| = \max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)|$, а через $h(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ обозначено решение линейного уравнения

$$\dot{h} = A_\varphi(t, \varepsilon)h + B_\varphi(t, \varepsilon)h(t - 1) + C_\varphi(t, \varepsilon)h(t - \Delta) \quad (4.56)$$

с начальной функцией $h_0(t)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ и с коэффициентами $A_\varphi(t, \varepsilon)$, $B_\varphi(t, \varepsilon)$, $C_\varphi(t, \varepsilon)$, получающимися из (4.18) при замене $x(t, \varepsilon)$ на $x_\varphi(t, \varepsilon)$.

Из явной формулы (4.54) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, действующего из C_0 в C_0 , сводится к анализу введенного выше решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (4.56). В связи с этим нам потребуются некоторые свойства коэффициентов данного уравнения.

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad \max_{t \in \Sigma} |\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) - \dot{x}_*(t)| = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.48)$$

где множество Σ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_* - \sigma_0/2]$ с выброшенными интервалами $(1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$, $(\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$, $j = 1, 2$.

Подведем промежуточный итог. Опираясь на свойства (4.47), (4.48) и учитывая оценку (4.40), наложенную на параметр σ_0 , приходим к выводу, что интересующий нас второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения (4.45) асимптотически близок к T_* . Точнее говоря, из соответствующих асимптотических равенств (см. (4.41), (4.48))

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_* + O(\varepsilon), \quad \dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \Delta + \tau_2 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq T_* - \sigma_0/2 \quad (4.49)$$

очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно и равномерно по φ

$$T_\varphi = T_* + O(\varepsilon). \quad (4.50)$$

Формулы (4.48), (4.50) свидетельствуют, что оператор (4.46) действительно определен на множестве (4.43) и равномерно по φ

$$\max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (4.51)$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (4.51) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (4.52)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (4.44) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что свойства $x_*(t) < 0 \quad \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$, $x_*(-\sigma_0) = -\sigma_0$ гарантируются выбором σ_0 (см. (4.40)). Поэтому для проверки включения (4.52) достаточно убедиться, что $-q_1 < x_*(t) < -q_2 \quad \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Справедливости же этих неравенств добиваемся за счет выбора свободных параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t). \quad (4.53)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (4.40), (4.53) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в

Справедлива

Лемма 1.1. Для постоянной a_0 из (1.46) имеет место явная формула

$$a_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du - \frac{\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du + \\ + \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du. \quad (1.49)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$a_0(z) = \int_{-\infty}^z \frac{f(\exp v) - 1}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv + \int_z^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv \quad (1.50)$$

и заметим, что $a'_0(z) = -1/(\alpha - 1 - \beta g(\exp z))$. Следовательно, мы можем перейти от (1.50) к эквивалентной форме записи

$$a_0(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{f(\exp v) - 1}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv + \\ + \int_0^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv - \int_0^z \frac{dv}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)}. \quad (1.51)$$

Заметим, далее, что интересующая нас константа a_0 задается равенством $a_0 = a_0(z)|_{z=v_0(0)}$. Таким образом, задача сводится к вычислению третьего интеграла из (1.51) при $z = v_0(0)$.

Перейдем в упомянутом интеграле к новой переменной τ по формуле $v = v_0(\tau)$, где $v_0(\tau)$ – функция (1.23). В результате имеем

$$- \int_0^{v_0(0)} \frac{dv}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} = - \int_{\tau_0}^0 d\tau = \tau_0, \quad (1.52)$$

где τ_0 – корень уравнения $v_0(\tau) = 0$, для которого в свою очередь из представлений (1.23), (1.24) вытекает явное выражение

$$\tau_0 = -\frac{1}{\alpha - \beta - 1} \int_{-\infty}^0 \frac{\beta(1 - g(\exp v))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv. \quad (1.53)$$

И наконец, объединяя соотношения (1.51)–(1.53) и выполняя во всех интегралах замену переменной $u = \exp v$, получаем требуемое равенство (1.49). Лемма 1.1 доказана.

Вернемся к асимптотическому анализу решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$. Рассмотрим очередной промежуток времени $1 + \sigma_0 \leq t \leq \alpha - \sigma_0$ при условии

$$\sigma_0 < (\alpha - 1)/2, \quad (1.54)$$

гарантирующем, что $1 + \sigma_0 < \alpha - \sigma_0$. В этом случае при выполнении априорных оценок

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq q, \quad x_\varphi(t, \varepsilon) \geq q \quad (1.55)$$

вопрос нахождения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ сводится к интегрированию уравнения вида

$$\dot{x} = -1 + O(\exp(-q/\varepsilon)) \quad (1.56)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} x|_{t=1+\sigma_0} &= \alpha - 1 + \varepsilon[(\alpha - 1)\tau + c_0 + \alpha a(\tau)]|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(1 + \sigma_0, \varepsilon) = \\ &= \alpha - 1 - \sigma_0 + \varepsilon(c_0 + \alpha a_0) + O(\exp(-q/\varepsilon)) \end{aligned} \quad (1.57)$$

(при выводе второго равенства из (1.57) использована асимптотика функции $a(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$).

Из соотношений (1.56), (1.57) очевидным образом вытекает асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \alpha - t + \varepsilon c_1 + \Delta_{4,\varphi}(t, \varepsilon), \quad c_1 = c_0 + \alpha a_0, \quad 1 + \sigma_0 \leq t \leq \alpha - \sigma_0, \quad (1.58)$$

имеющее пока условный характер. Для проверки же справедливости формулы (1.58) следует убедиться в справедливости оценок (1.55). Объединяя (1.58) с уже установленными ранее асимптотическими представлениями для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ (см. (1.41), (1.44)), приходим к выводу, что условия (1.55) будут выполняться при любом фиксированном q из интервала $(0, \min[\sigma_0, (\alpha - 1)\sigma_0])$.

Следующий временной промежуток $\alpha - \sigma_0 \leq t \leq \alpha + \sigma_0$ характерен тем, что, во-первых, он содержит точку переключения $t = \alpha$ релейного уравнения (1.7); во-вторых, при рассматриваемых t в силу уже известных асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\sigma_0 \leq t \leq \alpha - \sigma_0$ (см. (1.41), (1.44), (1.58)) имеем $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq q$. Таким образом, используя свойства

4.4. Обоснование теоремы 4.1

Поскольку обоснование сформулированной выше теоремы во многом аналогично доказательству близких утверждений из [18, 20], то здесь мы опустим ряд технических деталей.

Фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $0 < q_2 < \sigma_0$ и обозначим через

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \quad (4.43)$$

замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (4.44)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$ уравнения (4.16) с начальным условием $\varphi(t)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения

$$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0 \quad (4.45)$$

(если он существует). И наконец, зададим оператор $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (4.46)$$

Последующий план действий стандартен [18, 20]. Сначала мы убедимся, что при подходящем выборе параметров q_1, q_2 оператор (4.46) определен на множестве (4.43) и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на произвольном решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с начальным условием из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

Для реализации описанного плана необходимо знать равномерную по φ и t асимптотику решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$. Но поскольку соответствующие построения вполне аналогичны изложенным в работах [18, 20], то здесь ограничимся лишь минимальной сводкой итоговых результатов. А именно, ниже нам потребуются следующие факты:

1) на рассматриваемом отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$ уравнение $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет ровно два простых корня $\tau_j = \tau_j(\varepsilon, \varphi)$, $j = 1, 2$;

2) справедливы равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические равенства

$$\tau_1 = O(\varepsilon), \quad \tau_2 = t_0 + O(\varepsilon), \quad (4.47)$$

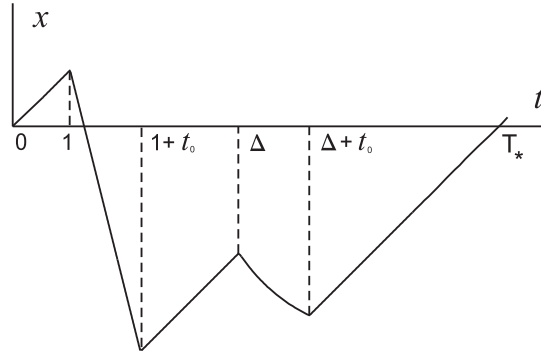


Рис. 4.2.

Итак, при условии (4.40) на параметр σ_0 процесс построения решения $x_\varphi(t)$ на отрезках времени $rT_* - \sigma_0 \leq t \leq (r+1)T_* - \sigma_0$, $r = 1, 2, \dots$ циклически повторяется. А это значит, что при $t \geq -\sigma_0$ любое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (4.32) совпадает с T_* -периодической функцией

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ (\Delta - T_0 - c - \frac{1}{b}) \exp(b(\Delta - t)) + c + \frac{1}{b} & \text{при } \Delta \leq t \leq \Delta + t_0, \\ t - T_* & \text{при } \Delta + t_0 \leq t \leq T_*. \end{cases} \quad (4.41)$$

График функции (4.41) при $a = 4$, $b = 0.9$, $c = -5$, $\Delta = 4$ представлен на рис. 4.2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (4.16) и (4.30). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (31), (38), (4.40) на параметры a , b , c , Δ , σ_0 . Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (16) допускает единственный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \quad (4.42)$$

(1.3) функции $f(u)$, убеждаемся в справедливости аналогичного (1.20) асимптотического равенства

$$F(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.59)$$

Последующие действия подобны тем, что были предприняты при выводе формулы (1.30). А именно на основании свойства (1.59) отбросим в правой части уравнения (1.5) экспоненциально малое слагаемое, содержащее запаздывание, и выполним после этого в нем замены $x = \varepsilon w(\tau)$, $\tau = (t - \alpha)/\varepsilon$. В результате приходим к аналогичному (1.22) модельному уравнению

$$\frac{dw}{d\tau} = -1 - \beta g(\exp w), \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.60)$$

Как и в случае (1.22), нас будет интересовать некоторое специальное решение $w = w_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, этого уравнения, обладающее при $\tau \rightarrow -\infty$ нужными асимптотическими свойствами. А именно необходимо добиться, чтобы с экспоненциальной по ε точностью формула (1.58) при $t = \alpha - \sigma_0$ совпадала с соответствующим выражением $x = \varepsilon w(\tau)$ при $\tau = -\sigma_0/\varepsilon$. Согласно (1.58), требуемое решение уравнения (1.60) при $\tau \rightarrow -\infty$ должно расти как $-\tau + c_1$. Остается заметить, что такое решение действительно существует и задается соотношением

$$w_0(\tau) = W^{-1}(z)|_{z=-\tau+c_1}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.61)$$

где $W^{-1}(z)$ – функция, обратная к

$$W(z) = z + \int_z^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{1 + \beta g(\exp s)} ds.$$

Проверку корректности определения (1.61), а также вывод асимптотических равенств для $w_0(\tau)$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$ и для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\alpha - \sigma_0 \leq t \leq \alpha + \sigma_0$ опустим, отсылая к аналогичным построениям в случае $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$. Приведем лишь итоговые формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon} + \Delta_{5,\varphi}(t, \varepsilon), \quad \alpha - \sigma_0 \leq t \leq \alpha + \sigma_0, \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= -\tau + c_1 + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ w_0(\tau) &= -(\beta + 1)\tau + c_2 + O(\exp(-(\beta + 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.63)$$

где

$$c_2 = (\beta + 1) \left[c_1 + \frac{\beta}{1 + \beta} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du - \beta \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du \right]. \quad (1.64)$$

Рассмотрение следующего отрезка времени $\alpha + \sigma_0 \leq t \leq \alpha + 1 - \sigma_0$ основано на оценках $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq q$, $x_\varphi(t, \varepsilon) \leq -q$, первая из которых – следствие установленных ранее асимптотических формул, а вторая пока априорна. Далее, объединяя упомянутые оценки со свойствами функций f , g (см. (1.3)), приходим к выводу, что здесь интегрированию подлежит уравнение вида

$$\dot{x} = -1 - \beta + O(\exp(-q/\varepsilon)),$$

которое, согласно (1.62)–(1.64), следует дополнить начальным условием

$$x|_{t=\alpha+\sigma_0} = -(\beta + 1)\sigma_0 + \varepsilon c_2 + O(\exp(-q/\varepsilon)).$$

Отсюда очевидным образом имеем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -(\beta + 1)(t - \alpha) + \varepsilon c_2 + \Delta_{6,\varphi}(t, \varepsilon), \quad \alpha + \sigma_0 \leq t \leq \alpha + 1 - \sigma_0. \quad (1.65)$$

В силу (1.65) сделанное ранее априорное предположение выполняется с константой $q \in (0, (\beta + 1)\sigma_0)$.

Следующий промежуток интегрирования $\alpha + 1 - \sigma_0 \leq t \leq \alpha + 1 + \sigma_0$ содержит точку переключения $t = \alpha + 1$ уравнения (1.7). Поэтому рассуждения здесь подобны тем, что были проведены в случае $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Опуская соответствующие выкладки, ограничимся лишь сводкой итоговых результатов:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -\beta - 1 + \varepsilon[-(\beta + 1)\tau + c_2 + \alpha b(\tau)]|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon} + \Delta_{7,\varphi}(t, \varepsilon), \quad (1.66)$$

где $\alpha + 1 - \sigma_0 \leq t \leq \alpha + 1 + \sigma_0$, а функция $b(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается аналогичным (1.45) равенством

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(\exp w)|_{w=w_0(s)} ds \quad (1.67)$$

и обладает асимптотическими свойствами

$$\begin{aligned} b(\tau) &= O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ b(\tau) &= \tau + b_0 + O(\exp(-(\beta + 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty; \end{aligned} \quad (1.68)$$

Дальнейший анализ связан с отрезком времени $\Delta \leq t \leq \Delta + t_0$, где, напомним, t_0 – момент времени, фигурирующий в (4.8). Из уже установленной формулы (4.35) и свойств функции $x_0(t)$ вытекает, что при $t \in (\Delta, \Delta + t_0)$ имеет место оценка $x_\varphi(t - \Delta) > 0$, а значит, $H(x_\varphi(t - \Delta)) = 1$. Кроме того, мы а priori предполагаем, что

$$x_\varphi(t) < 0 \quad \text{при} \quad \Delta \leq t \leq \Delta + t_0. \quad (4.36)$$

Объединяя соотношения (4.8), (4.35), (4.36) с условиями (4.31), убеждаемся, что $x_\varphi(t - 1) < 0$ при $\Delta \leq t \leq \Delta + t_0$ и, следовательно, при рассматриваемых значениях t решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot{x} = 1 + b(c - x)$, $x|_{t=\Delta} = \Delta - T_0$. Несложный ее анализ приводит к очередному равенству

$$x_\varphi(t) = (\Delta - T_0 - c - 1/b) \exp(-b(t - \Delta)) + c + 1/b, \quad \Delta \leq t \leq \Delta + t_0. \quad (4.37)$$

Следует, однако, напомнить, что формула (4.37) получена нами при априорном предположении (4.36). Справедливость же последнего эквивалентна условию

$$c + 1/b < \frac{T_0 - \Delta}{\exp(bt_0) - 1}, \quad (4.38)$$

которое всюду ниже считаем выполненным.

При $\Delta + t_0 < t \leq \Delta + t_0 + 1$ в силу (4.8), (4.35), (4.36) имеем $x_\varphi(t - 1) < 0$, $x_\varphi(t - \Delta) < 0$. Поэтому в данном случае решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=\Delta+t_0} = x_\varphi(\Delta + t_0)$ и задается равенством

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad \text{где} \quad T_* = \Delta + t_0 - x_\varphi(\Delta + t_0) > 0. \quad (4.39)$$

Добавим еще, что формула (4.39) сохраняется при тех $t > \Delta + t_0$, для которых одновременно $x_\varphi(t - 1) < 0$, $x_\varphi(t - \Delta) < 0$. Тем самым она заведомо применима при $\Delta + t_0 \leq t < T_* + 1$.

Распорядимся теперь выбором свободного параметра σ_0 из (4.32). В дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min(T_* - \Delta - t_0, T_0 - \Delta), \quad (4.40)$$

обеспечивающее принадлежность функции $x_\varphi(t + T_*)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ множеству (4.32). Кроме того, из (4.40) следует, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0) = -\sigma_0$ имеет на промежутке $(0, T_* + 1]$ ровно два корня $t = t_0 + \sigma_0/a$, $t = T_*$ (данный факт необходим для обоснования приведенной ниже теоремы 4.1).

Его анализ будем проводить при дополнительных условиях

$$t_0 + 1 < \Delta < T_0, \quad (4.31)$$

где величины t_0 , T_0 те же, что и в (4.7), (4.8). Смысл данных ограничений проявится в последующем.

Как и в работах [13, 18, 20], понятие решения уравнения (4.30) определим конструктивно. С этой целью фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на σ_0 в дальнейшем будет уточнена), рассмотрим множество функций

$$\begin{aligned} \varphi(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \\ \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$ решение уравнения (4.30) с произвольным начальным условием из класса (4.32).

При интегрировании уравнения (4.30) существенно то обстоятельство, что фигурирующие в его правой части функции $R(x(t-1))$, $H(x(t-\Delta))$ кусочно-постоянны и меняются лишь тогда, когда $x(t-1)$ или $x(t-\Delta)$ меняет знак. В частности, в силу (4.31), (4.32) при $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ имеем одновременно $\varphi(t-1) < 0$ и $\varphi(t-\Delta) < 0$. Поэтому на указанном промежутке функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0$, а значит, задается формулой

$$x_\varphi(t) = t. \quad (4.33)$$

Добавим еще, что равенство (4.33) можно "протянуть" по t до тех пор, пока выполняются условия $x_\varphi(t-1) < 0$ и $x_\varphi(t-\Delta) < 0$. Следовательно, оно заведомо справедливо на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t \leq \Delta$ из уже проделанных построений вытекает, что $x_\varphi(t-\Delta) < 0$ и в силу этого $H(x_\varphi(t-\Delta)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)). \quad (4.34)$$

Что же касается уравнения (4.34), то его свойства были изучены в статье [18]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение $x(t)$ этого уравнения, такое что $x(t) < 0$ при $-1 \leq t < 0$, $x(0) = 0$, при всех $t \geq 0$ совпадает с функцией $x_0(t)$ (см. (4.8)).

Возвращаясь к исходному уравнению (4.30) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta. \quad (4.35)$$

$$b_0 = \int_{w_0(0)}^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)} dw + \int_{-\infty}^{w_0(0)} \frac{f(\exp w) - 1}{1 + \beta g(\exp w)} dw.$$

Обратим внимание, что, как и в случае (1.47), формула для постоянной b_0 из (1.68) содержит величину $w_0(0)$, для которой мы не имеем явного выражения. Однако, как и выше, эту трудность можно преодолеть.

Лемма 1.2. Для постоянной b_0 из (1.68) справедлива явная формула

$$b_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u(1 + \beta g(u))} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + \beta g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du - c_1, \quad (1.69)$$

где c_1 – постоянная из (1.58).

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$b_0(z) = \int_{-\infty}^z \frac{f(\exp w) - 1}{1 + \beta g(\exp w)} dw + \int_z^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)} dw$$

и заметим, что, во-первых, $b_0 = b_0(z)|_{z=w_0(0)}$; во-вторых, в силу очевидного равенства $b'_0(z) = -1/(1 + \beta g(\exp z))$ ее можно записать в форме

$$b_0(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{f(\exp w) - 1}{1 + \beta g(\exp w)} dw + \int_0^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)} dw - \int_0^z \frac{dw}{1 + \beta g(\exp w)}. \quad (1.70)$$

Тем самым задача свелась к вычислению третьего интеграла из (1.70) при $z = w_0(0)$.

Сделаем в упомянутом интеграле замену переменной $w = w_0(\tau)$, где $w_0(\tau)$ – функция (1.61). В итоге получаем

$$- \int_0^{w_0(0)} \frac{dw}{1 + \beta g(\exp w)} = \int_{\tau_0}^0 d\tau = -\tau_0, \quad (1.71)$$

где τ_0 – корень уравнения $w_0(\tau) = 0$, для которого из (1.61) вытекает равенство

$$\tau_0 = c_1 - \int_0^{+\infty} \frac{\beta g(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)} dw. \quad (1.72)$$

Таким образом, для получения искомой формулы (1.69) остается объединить соотношения (1.70)–(1.72) и сделать во всех интегралах замену переменной $u = \exp w$. Лемма доказана.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$, считая выполненными неравенства

$$\sigma_0 < \frac{1}{2} \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1}, \quad x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \leq -q, \quad x_\varphi(t, \varepsilon) \leq -q, \quad (1.73)$$

рассмотрим отрезок времени $\alpha + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$. Вторая и третья оценки из (1.73) вместе со свойствами (1.3) приводят к выводу, что здесь имеем уравнение вида

$$\dot{x} = \alpha - \beta - 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad (1.74)$$

которое в силу (1.66)–(1.68) необходимо дополнить начальным условием

$$x|_{t=\alpha+1+\sigma_0} = -\beta - 1 + (\alpha - \beta - 1)\sigma_0 + \varepsilon(c_2 + \alpha b_0) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.75)$$

Решая получившуюся задачу Коши (1.74), (1.75), приходим к равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -\beta - 1 + (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) + \varepsilon c_3 + \Delta_{8,\varphi}(t, \varepsilon), \\ \alpha + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2, \quad (1.76)$$

в котором $c_3 = c_2 + \alpha b_0$.

Напомним, что, как и во всех предыдущих случаях, изначально асимптотическое представление (1.76) носит условный характер. Однако уже установленные ранее асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\alpha + \sigma_0 \leq t \leq \alpha + 1 + \sigma_0$ (см. (1.65), (1.66)) и само равенство (1.76) свидетельствуют о том, что требуемые оценки величин $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ и $x_\varphi(t, \varepsilon)$ из (1.73) выполняются при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при любом фиксированном q из интервала $0 < q < \min\{(\beta + 1)\sigma_0, (\alpha - \beta - 1)\sigma_0/2\}$.

Подведем некоторый итог. Первое неравенство из (1.73) гарантирует принадлежность точки $t = T_0 - \sigma_0$ отрезку $\alpha + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$. Этот факт позволяет для нахождения интересующего нас корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ воспользоваться соотношениями (1.74), (1.76). Из указанных формул очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$:

$$T_\varphi = T_0 - \varepsilon \frac{c_3}{\alpha - \beta - 1} + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.77)$$

при $\varkappa = \lambda \cdot \exp(\alpha\Delta)$. Таким образом, с необходимостью найдется номер s , для которого будут выполняться равенства $(\nu_s(\varkappa, \varepsilon)|_{\varkappa=\lambda \cdot \exp(\alpha\Delta)})^k = \exp(m\alpha\Delta) = \nu^k = \varkappa^m$. А это и означает, что справедливы соотношения (4.21), (4.22).

В случае, когда мультипликатор ν кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору отвечает ровно r линейно независимых решений Ляпунова-Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\alpha t)H(t, \varepsilon)$, где столбцами матрицы $H(t, \varepsilon)$ размера $m \times r$ являются линейно независимые T -периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (4.17) под действием замен (4.24) здесь вместо (4.25) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t + \Delta, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)D \quad (4.28)$$

с некоторой постоянной матрицей D размера $r \times r$.

Свойство (4.28) позволяет свести проблему обоснования формул (4.21), (4.22) к предыдущему случаю. Для того чтобы сделать это, фиксируем некоторое собственное значение λ матрицы D , а через e обозначим отвечающий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_0(t, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)e$ справедливо соотношение (4.25). Последующие же рассуждения совпадают с изложенными выше. Лемма 4.1 доказана.

Итак, проблема существования у системы (4.12) циклов вида (4.15) сводится к поиску периодических решений вспомогательного скалярного уравнения (4.16) периода $T = m\Delta/k$. Что же касается вопроса об устойчивости бегущих волн, то он решается отдельно и в силу леммы 4.1 состоит в асимптотическом вычислении корней уравнений (4.22). Ниже оба эти вопроса изучаются для натуральных m и k , удовлетворяющих требованиям

$$m \geq 2, \quad 1 \leq k \leq m - 1. \quad (4.29)$$

4.3. Вспомогательное нелинейное уравнение

В данном пункте исследуем вопрос о существовании у вспомогательного уравнения (4.16) релаксационного периодического движения. В связи с этим в первую очередь, опираясь на свойства (4.13), перейдем от (4.16) к соответствующему релейному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t - 1)) + b(c - x)H(x(t - \Delta)). \quad (4.30)$$

Лемма 4.1. *Каждый мультипликатор $\nu : \nu \neq 0$ системы (4.17) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^{m/k}, \quad (4.21)$$

где \varkappa – корень одного из уравнений

$$[\nu_s(\varkappa, \varepsilon)]^k = \varkappa^m, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.22)$$

Доказательство. Фиксируем любой мультипликатор $\nu \neq 0$ системы (4.17) и предположим, что он является простым. Обозначим, далее, через

$$h(t, \varepsilon) = \exp(\alpha t) h_0(t, \varepsilon), \quad h_0(t, \varepsilon) = \text{colon}(h_{0,1}(t, \varepsilon), \dots, h_{0,m}(t, \varepsilon)), \quad (4.23)$$

$$h_0(t + m\Delta/k, \varepsilon) \equiv h_0(t, \varepsilon), \quad \alpha = \frac{k}{m\Delta} \ln \nu$$

отвечающее ему решение Ляпунова-Флоке. Отметим, далее, что поскольку система (4.17) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta \rightarrow t, \quad h_{j-1} \rightarrow h_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.24)$$

а мультипликатор ν простой, то решение (4.23) под действием этих замен перейдет в решение $\lambda \cdot \exp(\alpha(t + \Delta)) h_0(t, \varepsilon)$, где λ – некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_0(t + \Delta, \varepsilon) = \lambda h_0(t, \varepsilon), \quad \text{где } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

из которого, в свою очередь, выводим:

$$h_{0,m-j}(t, \varepsilon) = \lambda^{j+1} h_{0,1}(t - (j+1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad \lambda^m = 1. \quad (4.26)$$

Что же касается компоненты $h_{0,1}(t, \varepsilon)$, то в силу (4.26) она является T -периодическим решением уравнения

$$\dot{h} = -\alpha h + A(t, \varepsilon)h + \exp(-\alpha)B(t, \varepsilon)h(t-1) + \lambda C(t, \varepsilon)h(t-\Delta). \quad (4.27)$$

Проделанные построения показывают, что уравнение (4.27) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем, далее, в этом уравнении замену $\exp(\alpha t)h \rightarrow h$. В результате единичный мультипликатор перейдет в $\exp(m\alpha\Delta/k)$, а само уравнение (4.27) – в уравнение (4.20)

Далее, объединяя все полученные выше асимптотические представления для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (1.30), (1.41), (1.44), (1.58), (1.62)–(1.66), (1.76)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad (1.78)$$

где $x_0(t)$ – функция (1.15), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$.

Формулы (1.77), (1.78) свидетельствуют о том, что оператор (1.18) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (1.79)$$

В силу равенства (1.79) включение $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$ будет выполняться при условии

$$x_0(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (1.80)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (1.17) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (1.8), обеспечивающее выполнение для функции $x_0(t)$ свойств (1.9). Поэтому справедливости включения (1.80) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t). \quad (1.81)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (1.8), (1.19), (1.48), (1.54), (1.73), (1.81) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (1.5) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (1.77)–(1.79) удовлетворяет требуемым условиям (1.16).

1.1.4. Анализ свойств устойчивости

Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 1.1, т. е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла

$x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (1.15). Из явной формулы (1.18) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - l(g_0) \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (1.82)$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент линейного пространства $C_0 = \{g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] : g_0(-\sigma_0) = 0\}$, через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A(t, \varepsilon)g + B(t, \varepsilon)g(t-1), \\ A(t, \varepsilon) &= -(\beta/\varepsilon)g'(\exp x)|_{x=x_\varphi(t, \varepsilon)/\varepsilon}, \\ B(t, \varepsilon) &= (\alpha/\varepsilon)f'(\exp x)|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.83)$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а линейный функционал $l : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ определен формулой

$$l(g_0) = g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)/\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon). \quad (1.84)$$

Из соотношений (1.82), (1.84) следует, что вопрос оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (1.83). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\| \quad (1.85)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , g_0) постоянными M , $q > 0$.

Из установленных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ вытекают оценки

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| dt &\leq M_1, \quad \int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| dt \leq M_2, \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| &\leq M_3 \exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (1.86)$$

где M_1 , M_2 , M_3 , $q > 0$ – некоторые универсальные константы. Далее, используя свойства (1.86) в формуле

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t B(s, \varepsilon) g_0(s-1) \exp\left\{\int_s^t A(\tau, \varepsilon) d\tau\right\} ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0,$$

периода $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что при некотором натуральном k уравнение (4.16) имеет требуемое периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ периода $T = m\Delta/k$. Тогда вопрос об устойчивости соответствующего цикла (4.15) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{h}_j &= A(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_j + B(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_j(t-1) + \\ &\quad + C(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $h_0 = h_m$, а коэффициенты $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= -bG(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon), \quad B(t, \varepsilon) = F'_x(x(t-1, \varepsilon), \varepsilon), \\ C(t, \varepsilon) &= b(c - x(t, \varepsilon))G'_x(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поясним смысл термина "мультипликатор" применительно к системе (4.17). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([-1, 0]; \mathbb{R}^m)$ непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ вектор-функций $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ с нормой $\|h\|_E = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{-1 \leq t \leq 0} |h_j(t)|$. Далее, оператором монодромии системы (4.17) назовем ограниченный линейный оператор $V(\varepsilon) : E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $h(t) \in E$ по правилу:

$$V(\varepsilon)h = h(t + m\Delta/k, \varepsilon), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (4.19)$$

где $h(t, \varepsilon) = (h_1(t, \varepsilon), \dots, h_m(t, \varepsilon))$ – решение системы (4.17) на отрезке времени $0 \leq t \leq m\Delta/k$ с начальной функцией $h(t)$, $-1 \leq t \leq 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m\Delta/k > 1$ компактен и сам $V(\varepsilon)$). Что же касается мультипликаторов системы (4.17), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (4.19).

Наряду с (4.17) введем в рассмотрение вспомогательное скалярное линейное уравнение

$$\dot{h} = A(t, \varepsilon)h + B(t, \varepsilon)h(t-1) + \varkappa C(t, \varepsilon)h(t-\Delta) \quad (4.20)$$

с комплексным параметром \varkappa и обозначим через $\nu_s(\varkappa, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \dots$ его мультипликаторы, занумерованные в порядке убывания модулей (в случае скалярного уравнения определение мультипликаторов аналогично данному выше). Справедливо следующее утверждение.

Действительно, после перехода к новым переменным $x_j = (1/\lambda) \ln u_j$, $j = 1, \dots, m$ система (4.10) записывается в виде

$$\dot{x}_j = F(x_j(t-1), \varepsilon) + b(c - x_j)G(x_{j-1}, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.12)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $x_0 = x_m$, $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$. Далее, обратим внимание, что в силу свойств (4.5), (4.11) справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x), \quad (4.13)$$

где $H(x)$ – функция из (4.3). А отсюда, в свою очередь, следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ система (4.12) переходит в релейную систему

$$\dot{x}_j = R(x_j(t-1)) + b(c - x_j)H(x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad x_0 = x_m. \quad (4.14)$$

Наличие предельного объекта (4.14) существенно облегчает проблему отыскания аттракторов системы (4.12) и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [13] о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем. Ниже упомянутые результаты используются в совокупности с некоторой специальной методикой исследования вопросов существования и устойчивости циклов в кольцевых цепочках однонаправленно связанных осцилляторов. С помощью этой методики удастся показать, что при увеличении m и при подходящем выборе остальных параметров в системе (4.12) может сосуществовать любое конечное число устойчивых периодических движений, т.е. реализуется известное явление бифуркации.

4.2. Общая схема исследования

В дальнейшем будем интересоваться проблемами существования и устойчивости у системы (4.12) специальных периодических решений – так называемых бегущих волн. Точнее говоря, речь пойдет о периодических решениях, допускающих представление

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.15)$$

где $\Delta > 0$, а функция $x(t, \varepsilon)$ – периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + b(c - x)G(x(t-\Delta), \varepsilon) \quad (4.16)$$

приходим к выводу, что при $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$

$$\max_t |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon). \quad (1.87)$$

Для распространения оценки (1.87) на оставшийся промежуток $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно разобьем указанный промежуток на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_\varphi - 2 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть. Используя первые два свойства (1.86), замечаем, что из равенства

$$g(t, \varepsilon) = g(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) \exp \left\{ \int_{1 - \sigma_0 + k}^t A(s, \varepsilon) ds \right\} + \int_{1 - \sigma_0 + k}^t B(s, \varepsilon) g(s - 1, \varepsilon) \exp \left\{ \int_s^t A(\tau, \varepsilon) d\tau \right\} ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + k,$$

и из уже полученной оценки (1.87) на $(k-1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая неравенство (1.85) в (1.82), (1.84), приходим к выводу, что

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon). \quad (1.88)$$

Остается добавить, что оценка (1.88) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ во множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что, согласно (1.88), спектральный радиус оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*)$ экспоненциально мал. А это значит, что все мультипликаторы μ цикла $x_*(t, \varepsilon)$, являющиеся (за исключением простого единичного) собственными значениями упомянутого оператора, лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$. Теорема 1.1 полностью доказана.

1.1.5. Асимптотика периода решения.

Формула поправки

Обратимся к асимптотической формуле для периода $T_*(\varepsilon)$ цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Согласно равенству (1.77), она имеет вид

$$T_*(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \quad (1.89)$$

где, напомним, постоянная T_0 определена в (1.4), а $T_1 = -c_3/(\alpha - \beta - 1)$. Напомним далее, что для всех постоянных c_j , $0 \leq j \leq 3$, нами получены явные выражения (см. (1.27), (1.49), (1.58), (1.64), (1.69), (1.76)). Используя соответствующие формулы, после некоторых преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.2. Для коэффициента T_1 из (1.89) справедливо интегральное представление

$$T_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha - \beta)f(u)g(u) - f(u) - (\alpha - \beta - 1)g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))(1 + \beta g(u))} du. \quad (1.90)$$

Необходимо заметить, что аналогичная (1.90) формула при более сильных, чем (1.3), ограничениях на функции $f(u)$ и $g(u)$ приведена в монографии [14] (см. с. 181). Из наших же построений следует, что и условия (1.3) в свою очередь можно несколько ослабить. А именно теоремы 1.1, 1.2 остаются в силе в случае, когда

$$f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u^\delta), \quad u \rightarrow +\infty, \quad \delta = \text{const} \in (0, 1].$$

В заключение отметим, что цикл

$$u_*(t, \lambda) = \exp(x_*(t, \varepsilon)/\varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (1.91)$$

исходного уравнения (1.1) обладает следующими релаксационными свойствами при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \max_t u_*(t, \lambda) &= O(\exp(\alpha - 1)\lambda), \quad \min_t u_*(t, \lambda) = O(\exp(-(\beta + 1)\lambda)), \\ T_*(\lambda) &= T_0 + \frac{1}{\lambda} T_1 + O(\exp(-q\lambda)), \quad q = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Равенства (1.92) объясняют, в частности, причину наличия у графика функции (1.91) достаточно высокого всплеска даже при не слишком больших значениях λ (см. рис. 1.1, отвечающий случаю $\lambda = 3.5$).

1.2. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов

Во втором параграфе данной главы рассматривается сингулярно возмущенная система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, моделирующая диффузионное взаимодействие двух нейронов.

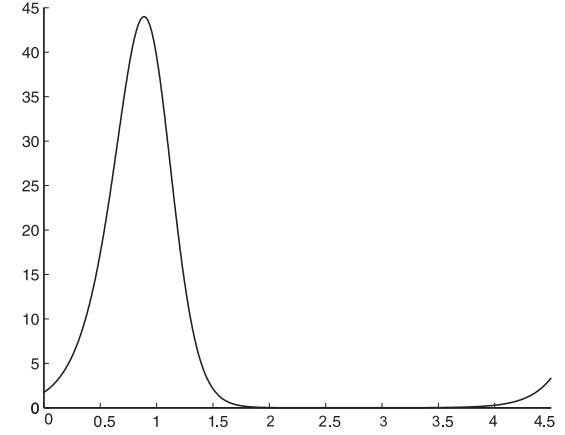


Рис. 4.1.

где $u_0 = u_m$, $s_0 = s_m$, а функции s_j заданы равенствами (4.3). Однако, на наш взгляд, в данной ситуации следует отказаться от общепринятых представлений и в качестве математической модели рассматриваемой нейронной сети взять несколько иную систему

$$\dot{u}_j = [\lambda f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)] u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (4.10)$$

в которой $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, а функция $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что

$$\begin{aligned} g(u) &> 0 \quad \forall u > 0, \quad g(0) = 0; \\ g(u) - 1, \quad ug'(u), \quad u^2 g''(u) &= O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Мотивы, по которым мы остановили свой выбор на системе (4.10), состоят в следующем. Во-первых, при переходе от (4.9) к (4.10) общий качественный характер синаптической связи сохраняется, поскольку в обоих случаях соответствующие связующие слагаемые $b s_{j-1}(u_{j-1})(u_* - u_j)$ и $b g(u_{j-1}) u_j \ln(u_*/u_j)$ меняют знак с "+" на "-" при увеличении потенциалов u_j и при прохождении их через критическое значение u_* . Во-вторых, и это самое главное, для системы (4.10) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием.

дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа. В связи с этим будем считать, что функционирование отдельного нейрона моделируется уравнением вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (4.4)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ обладает свойствами:

$$f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad u f'(u), \quad u^2 f''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad (4.5)$$

где $a = \text{const} > 0$. Примером такой функции служит

$$f(u) = (1 - u)/(1 + u/a). \quad (4.6)$$

Уравнение (4.4), представляющее собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона [43], было предложено и исследовано в статье [18]. В упомянутой работе показано, что при всех $\lambda \gg 1$ оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл $u_*(t, \lambda) > 0$ периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

где $T_0 = (1 + a)t_0$, $t_0 = 1 + 1/a$, $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u_*(t, \lambda))$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (4.8)$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла дает его график на плоскости (t, u) , построенный численно для случая (4.4), (4.6) при $\lambda = 5$, $a = 2$ (см. рис. 1).

Предположим теперь, что имеет место однонаправленное синаптическое взаимодействие в сети из m , $m \geq 2$ нейронов, объединенных в кольцо. В этом случае, руководствуясь описанной выше методикой, мы можем перейти от уравнения (4.4) к аналогичной (4.2) системе

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= \lambda f(u_j(t-1))u_j + b s_{j-1}(u_{j-1})(u_* - u_j), \\ j &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Исследуются вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических движений этой системы.

1.2.1. Постановка задачи

Изучаемая ниже система, которая согласно [14] моделирует слабое электрическое взаимодействие двух нейронов, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda[-1 + \alpha f(u_1(t-1)) - \beta g(u_1)]u_1 + d(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda[-1 + \alpha f(u_2(t-1)) - \beta g(u_2)]u_2 + d(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (1.93)$$

Здесь, как и ранее, $u_j(t) > 0$, $j = 1, 2$ – мембранные потенциалы нейронов, параметр $\lambda > 0$ предполагается большим, $d = \text{const} > 0$, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, удовлетворяют условиям

$$\alpha > 1 + \beta, \quad \alpha < 2(1 + \beta). \quad (1.94)$$

Необходимо отметить, что существенным в неравенствах (1.94) является лишь первое ограничение, а второе носит технический характер. Причины его введения и возможный способ отказа от него прояснятся в ходе дальнейшего изложения.

Далее, будем считать, что функции $f(u)$ и $g(u)$ принадлежат классу $C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) + 1 < \alpha \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) &= O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.95)$$

отличающимися от условий (1.3) лишь добавочным требованием стремления к нулю величин $u^2 f''(u)$, $u^2 g''(u)$.

При сформулированных ограничениях система (1.93) допускает так называемый однородный цикл $(u_1, u_2) : u_1 = u_2 = u_*(t, \lambda)$, где функция $u_*(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и имеет период $T_*(\lambda)$, для которого справедливо доказанное в предыдущем параграфе предельное равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1). \quad (1.96)$$

Напомним, что существование и единственность у парциального осциллятора (1.1) требуемого цикла установлены нами в первой части данной главы.

В дальнейшем будет показано, что, во-первых, однородный цикл системы (1.93) экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d > 0$ и при всех $\lambda \gg 1$; во-вторых, при подходящем выборе параметров α, β, d наряду с устойчивым однородным циклом рассматриваемая система имеет по крайней мере два устойчивых неоднородных периодических режима, переходящие друг в друга при перестановке координат

$$u_1 \rightarrow u_2, \quad u_2 \rightarrow u_1.$$

1.2.2. Основные теоремы

Для удобства последующего анализа положим в системе (1.93) $u_j = \exp(x_j/\varepsilon)$, $j = 1, 2$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, а затем перейдем к новым переменным $x = x_1$, $y = (x_2 - x_1)/\varepsilon$. В результате интересующая нас система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d (\exp y - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y + G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.97)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, u, \varepsilon) &= -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \\ G(x, u, y, v, \varepsilon) &= \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + v\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) \right] + \\ &+ \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + y\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Зафиксируем постоянную σ_0 , подчиненную неравенствам

$$0 < \sigma_0 < \min\left(\frac{2(\beta+1)-\alpha}{\alpha-\beta-1}, 1\right) \quad (1.99)$$

(такой выбор возможен в силу оценок (1.94)), и рассмотрим банахово пространство \mathcal{F} непрерывных при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ начальных вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$ (здесь и далее операция $(\cdot, \cdot)^T$ означает транспонирование) с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \max_{j=1,2} \left(\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)| \right). \quad (1.100)$$

циальный способ связи динамических систем. Характерная особенность этого способа состоит в том, что правые части соответствующих дифференциальных уравнений меняются скачкообразно при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения. В нейронных системах идея ФТМ реализуется, как правило, следующим образом.

Предположим, что напряжение $u = u(t)$ и сила тока $v = v(t)$ в отдельной нейронной клетке удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = f(u, v), \quad \dot{v} = g(u, v). \quad (4.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а на правые части $f, g \in C^\infty$ наложены стандартные ограничения (см. [10], с. 45–55), обеспечивающие существование устойчивого релаксационного цикла. Типовым примером модели (4.1) служит известная система ФитцХью – Нагумо [41].

Рассмотрим, далее, простейшую сеть, состоящую из двух синаптически связанных нейронов. В этом случае согласно выработанным к настоящему времени представлениям (см., например, [42]) соответствующие им электрические переменные (u_j, v_j) , $j = 1, 2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 &= f(u_1, v_1) + b s_2(u_2)(u_* - u_1), \quad \dot{v}_1 = g(u_1, v_1), \\ \varepsilon \dot{u}_2 &= f(u_2, v_2) + b s_1(u_1)(u_* - u_2), \quad \dot{v}_2 = g(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь b – положительный параметр, характеризующий максимальную проводимость синапса, u_* – потенциал покоя (или потенциал Нернста), а функции $s_j(u_j)$, $j = 1, 2$ – постсинаптические проводимости, зависящие от пресинаптических потенциалов u_j .

Следует отметить, что существует несколько различных способов выбора функций $s_j(u_j)$, описание которых можно найти в [42]. Мы же, руководствуясь идеей ФТМ, остановимся на простейшем из них. А именно, будем считать, что

$$s_j(u_j) = H(u_j - u_{**}), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где u_{**} – порог, начиная с которого одна клетка влияет на другую. Например, если $u_1 < u_{**}$, то первый нейрон не действует на второй, а если $u_1 > u_{**}$, то действует.

Наша основная задача заключается в том, чтобы адаптировать приведенный выше способ моделирования химических синапсов для

Глава 4.

Об одном способе математического моделирования химических синапсов

Последняя глава пособия посвящена задаче моделирования химических синапсов. Вводится в рассмотрение новая математическая модель кольцевой нейронной сети с однонаправленными химическими связями, представляющая собой сингулярно возмущенную систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Изучаются вопросы о существовании и устойчивости в этой системе релаксационных периодических движений. Устанавливается реализуемость в ней известного феномена буферности.

4.1. Постановка задачи

В данной главе продолжается начатый в работах [17, 20, 26, 27] цикл исследований, посвященных релаксационным автоколебаниям в нейронных системах с запаздыванием. А именно, ниже предлагается некоторый новый подход к моделированию химических синапсов, в основе которого лежит подходящим образом модифицированная идея быстрой пороговой модуляции.

Феномен быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation или FTM), впервые описанный в работах [39, 40], представляет собой спе-

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (1.97) с начальными условиями из множества

$$S = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T : \varphi_1(t) \in S_1, \varphi_2(t) \in S_2\} \subset \mathcal{F}. \quad (1.101)$$

Здесь $S_1 = S_1(\sigma_0, q_1, q_2)$ – совокупность функций из $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -q_2, \quad \varphi_1(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1), \quad (1.102)$$

где $q_1 > (1 + \sigma_0)(\alpha - \beta - 1)$, $q_2 \in (0, \sigma_0(\alpha - \beta - 1))$ – некоторые фиксированные универсальные (не зависящие от φ_1) постоянные. В качестве множества S_2 возьмем произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов о периодических решениях системы (1.97) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим обозначим через $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T$, $t \geq -\sigma_0$, решение упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t)$ из множества S . Далее, введем в рассмотрение второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ (в случае, когда он существует) и на множестве (1.101) определим оператор $\Pi_\varepsilon : S \rightarrow \mathcal{F}$ равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = (x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), y_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon))^T, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (1.103)$$

Помимо равенства (1.103), нам потребуется еще оператор $\Pi_0 : S \rightarrow \mathcal{F}$, который зададим формулой

$$\Pi_0(\varphi) = (x_0(t), y_0(t + T_0, z))^T|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (1.104)$$

Здесь T_0 – величина из равенства (1.96), а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами (1.15). Компонента $y_0(t, z)$, $z \in \mathbb{R}$, при $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ является решением задачи Коши

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=-\sigma_0} = z, \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} y(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y(-0), \quad y(1+0) = y(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y(+0), \\ y(\alpha+0) &= (1+\beta)y(\alpha-0), \quad y(\alpha+1+0) = y(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta} y(\alpha+0). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Подчеркнем, что задача (1.105), (1.106) представляет собой так называемую систему с импульсным воздействием. Это означает, что в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, $t = \alpha$ и $t = \alpha + 1$ ее решение $y_0(t, z)$

претерпевает конечные скачки, вычисляющиеся по правилам (1.106). Однако в силу второго неравенства (1.94) и условий (1.99) на параметр σ_0 функция $y_0(t + T_0, z)$ оказывается непрерывной на нужном отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Тем самым требуемое включение $\Pi_0(\varphi) \in \mathcal{F}$ заведомо выполняется при любых $\varphi \in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ операторов (1.103), (1.104) по переменной φ . Проводя соответствующие вычисления, убеждаемся в том, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathcal{F}_0 = \{g_0(t) = (g_{1,0}(t), g_{2,0}(t))^T \in \mathcal{F} : g_{1,0}(-\sigma_0) = 0\} \quad (1.107)$$

с нормой (1.100), а результаты их применения к произвольному элементу $g_0(t) \in \mathcal{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)g_0 &= (g_1(t + T_\varphi, \varepsilon), g_2(t + T_\varphi, \varepsilon))^T - \\ &- \frac{g_1(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} (\dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \dot{y}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon))^T, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)g_0 &= \left(0, \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}\right)^T g_{2,0}(-\sigma_0), \\ &-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Здесь $g(t, \varepsilon) = (g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))^T$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, — решение линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A(t, \varepsilon)g + B(t, \varepsilon)g(t - 1), \\ A(t, \varepsilon) &= (a_{ij})_{i,j=1,2}, \quad B(t, \varepsilon) = (b_{ij})_{i,j=1,2} \end{aligned} \quad (1.110)$$

с начальной функцией $g_0(t)$ из пространства (1.107) и коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial F}{\partial x}, \quad b_{11} = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad a_{12} = \varepsilon d \exp(y_\varphi(t, \varepsilon)), \quad b_{12} = 0, \\ a_{21} &= \frac{\partial G}{\partial x}, \quad b_{21} = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad a_{22} = \frac{\partial G}{\partial y} - 2d \operatorname{ch}(y_\varphi(t, \varepsilon)), \quad b_{22} = \frac{\partial G}{\partial v}, \end{aligned} \quad (1.111)$$

где все производные вычислены при $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $u = x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$, $y = y_\varphi(t, \varepsilon)$, $v = y_\varphi(t - 1, \varepsilon)$.

Сформулируем утверждение о связи между операторами (1.103) и (1.104).

Предположим теперь, что запоминающая среда, о которой говорилось выше, описывается системой (3.191). Далее, будем считать, что при некотором натуральном n_0 параметры a , b в (3.191) удовлетворяют условиям (3.174). Тогда при всех достаточно малых $\mu > 0$ эта система допускает устойчивые циклы (3.192) с номерами $n = 0, 1, \dots, n_0$. И наконец, предположим, что с каждым из этих циклов связан соответствующий блок информации R_n .

Работа описанной математической модели ассоциативной памяти вполне понятна: для того чтобы получить требуемую информацию R_n , необходимо заставить систему (3.191) функционировать в периодическом режиме (3.192) с соответствующим номером n . Добиться желаемого результата удастся за счет введения ключа $K_n = n$ и дополнительного контекста C_n . В качестве C_n в данном случае уместно взять начальные условия цикла (3.192) при $\mu = 0$, которые, подчеркнем, известны нам в явном виде.

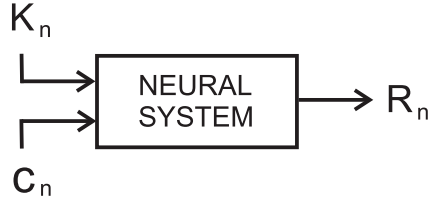


Рис. 3.4.

при всех $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной релаксационной системе (3.88) циклу (3.192), (3.194) соответствует экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида (3.167), для которого выполняются предельные равенства (3.200).

Интересно отметить, что фигурирующие в (3.164), (3.198) множества \mathcal{U}_n , \mathcal{V}_n не пересекаются. А это значит, что при заданном n в системе (3.191) не могут одновременно существовать циклы вида (3.192) с фазовыми сдвигами (3.193) и (3.194). Действительно, эти циклы "живут" в различных диапазонах изменения параметра b и переходят друг в друга при прохождении b через критическое значение $b = b_{n,1}$. Что же касается вопроса о существовании и устойчивости циклов (3.192) с фазовыми сдвигами

$$\hat{\Delta}_n \in (1 + nT_0, t_0 + nT_0) \cup (nT_0, 1 + nT_0),$$

то он подлежит отдельному исследованию, выходящему за рамки настоящей работы. Добавим только, что в отличие от случаев (3.193), (3.194) циклы с такими значениями $\hat{\Delta}_n$ обнаружить при численном анализе системы (3.191) не удалось.

В заключение остановимся на приложении полученных нами результатов к проблеме объяснения механизма функционирования ассоциативной памяти. В связи с этим напомним, что согласно монографии [38] в простейшем случае ассоциативная память работает по схеме, представленной на рис. 4.1. А именно, имеется некоторая запоминающая среда, реализованная в виде нейронной системы и хранящая в себе блоки информации R_n , $n = 0, 1, \dots, n_0$. Далее, для извлечения из системы конкретного результата R_n необходимо на ее вход подать соответствующий символьный ключ K_n и некоторую дополнительную информацию C_n , называемую контекстом.

Теорема 1.3 (о C^1 -сходимости). Пусть множество S выбрано описанным выше образом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Доказательство данной теоремы приведем в пп. 3, 4. Здесь же остановимся на одном важном следствии из C^1 -сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (1.97).

Заметим, что в силу (1.105), (1.106) оператор (1.104) является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} y_0(t, z)|_{t=T_0-\sigma_0}, \quad (1.113)$$

где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка $\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t))^T$: $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, $\varphi_2^*(t) = y_0(t + T_0, z_*)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оператора Π_0 (при условии, конечно, что точка $\varphi_*(t)$ принадлежит введенному выше множеству (1.101)). Последнее же требование не является ограничением, поскольку в силу выбора постоянных q_1, q_2 из (1.102) включение $x_0(t) \in S_1$ выполняется автоматически, а справедливости включения $\varphi_2^*(t) \in S_2$ можно добиться за счет подходящего выбора множества S_2 .

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t))^T \in S$ – неподвижная точка оператора Π_0 , то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а величина $z_* = \varphi_2^*(-\sigma_0)$ такова, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (1.109) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух точек: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и собственного значения $\mu = \Phi'(z_*)$ (в общем случае простого).

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 1.4 (о соответствии). Каждой неподвижной точке $z = z_*$, $|\Phi'(z_*)| \neq 1$, отображения (1.113) соответствует релаксационный цикл системы (1.97), существующий при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в случае $|\Phi'(z_*)| < 1$ (> 1).

Доказательство. Пусть $\varphi_*(t) \in S$ – неподвижная точка оператора (1.104), отвечающая неподвижной точке $z = z_*$ отображения (1.113). Рассмотрим, далее, уравнение

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0, \quad (\varphi, \varepsilon) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}, \quad (1.114)$$

и заметим, что в силу предельных равенств (1.112) и отмеченных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ к данному уравнению в точке $(\varphi, \varepsilon) = (\varphi_*(t), 0)$ пространства $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ применима теорема о неявном отображении по переменной φ . Таким образом, из уравнения (1.114) однозначно определяется неподвижная точка $\varphi = \varphi_*^\varepsilon(t) \in S$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_*^\varepsilon(t) - \varphi_*(t)\|_{\mathcal{F}} = 0$, оператора (1.103), а отвечающее ей решение $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$ системы (1.97) будет, очевидно, периодическим с периодом $T_* = T_{\varphi|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}}$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденного периодического решения. Из проведенных выше построений следует, что все его мультипликаторы (за исключением простого единичного) являются собственными значениями оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon)$. Последний же в силу вытекающего из (1.112) равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} = 0$ имеет одно собственное значение, асимптотически близкое к $\Phi'(z_*)$, а остальной его спектр лежит в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq r_0\}$ асимптотически малого по ε радиуса $r_0 = r_0(\varepsilon)$. Таким образом, свойства устойчивости рассматриваемого цикла совпадают с аналогичными свойствами неподвижной точки $z = z_*$ отображения (1.113). Теорема 1.4 доказана.

Установленная теорема сводит интересующий нас вопрос о периодических движениях системы (1.97) к поиску неподвижных точек одномерного отображения (1.113). Вопрос же о количестве и устойчивости последних будет изучен в третьей части настоящей главы.

1.2.3. Обоснование C -сходимости

Доказательство равенств (1.112) основывается на построении равномерной по $\varphi \in S$ асимптотики введенного выше решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T$ системы (1.97). Как будет показано ниже, при всех $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$, где $\delta = \text{const} \in (0, 1)$, справедливо равномерное по φ , t асимптотическое представление

$$(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T = (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \quad (1.115)$$

где граничное значение $b_{n,1}$ задается формулой (3.162), а $b_{n,0}$ имеет вид

$$b_{n,0} = \frac{[\exp(\mu(m-1)(t_0 + nT_0)) - \exp(\mu(T_0 - t_0))](\exp(\mu T_0) - 1)}{(1 + 1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}. \quad (3.199)$$

Тогда, во-первых, релейная система (3.191) допускает экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение вида (3.192), (3.194); во-вторых, в исходной релаксационной системе (3.88) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ этому циклу отвечает экспоненциально орбитально устойчивое периодическое движение вида (3.167), удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq m\hat{\Delta}_n(\varepsilon)} |\hat{x}_n(t, \varepsilon) - \hat{x}_n(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\Delta}_n(\varepsilon) = \hat{\Delta}_n. \quad (3.200)$$

Необходимо добавить, что в теореме 3.9 и в двух последующих теоремах речь идет о цикле (3.192), в котором, как и ранее, $\hat{\Delta}_n = (1/\mu) \ln(1/\hat{z}_n)$, где \hat{z}_n – единственный корень уравнения (3.160) из интервала $(0, 1)$. Что же касается функции $\hat{x}_n(t)$, то теперь она определяется посредством равенств (3.195), (3.196) при $\Delta = \hat{\Delta}_n$.

Отдельно рассмотрим случай малых μ . Объединяя формулы (3.162), (3.172), (3.199), убеждаемся, что при $\mu = 0$ условие (3.198) переходит в неравенства

$$\max \left(a + 1, (m-1)(a+1) - \frac{ma}{n+1} \right) < b < (m-1)(a+1) - \frac{ma^2}{(n+1)(a+1)}. \quad (3.201)$$

Тем самым справедливы следующие факты.

Теорема 3.10. *Предположим, что параметры $a, b > 0$ при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют неравенствам (3.201). Тогда найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ релейная система (3.191) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида (3.192) с фазовым сдвигом $\hat{\Delta}_n$ из интервала (3.194).*

Теорема 3.11. *В рамках предыдущей теоремы по любым достаточно малым $0 < \mu_1 < \mu_2$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2) > 0$, что*

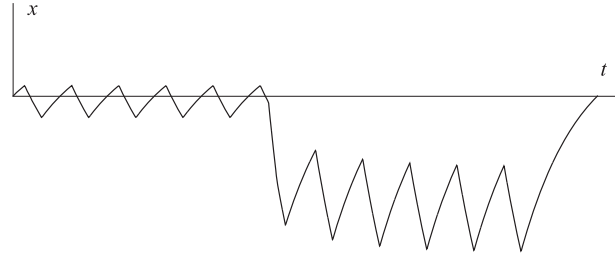


Рис. 3.3.

$$x_n^0(t) = y_0(t - \Delta) + [x_n^0(1 + t_0 + nT_0) - y_0(1 + t_0 + nT_0 - \Delta)] \times \\ \times \exp(-\mu(t - 1 - t_0 - nT_0)) \quad \text{при } 1 + t_0 + nT_0 \leq t \leq 2\Delta, \\ x_n^0(t) = \theta(t - T_n^0) \quad \text{при } 2\Delta \leq t \leq T_n^0, \quad (3.196)$$

а T_n^0 задается равенством

$$T_n^0 = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu x_n^0(2\Delta)) \quad (3.197)$$

(график функции $x_n^0(t)$ при $a = 2$, $b = 8$, $\Delta = 21.6$, $\mu = 0.2$ показан на рис. 3.3). Кроме того, здесь справедливы аналоги теоремы 3.2 и леммы 3.5, причем, что не менее важно, формулы (3.148), (3.149) остаются без изменений. Сохраняются в данном случае и формулы (3.160), (3.161), (3.172), (3.173), поскольку функции $T_n^0(\Delta)$, определяющиеся правыми частями соотношений (3.116) и (3.197), на самом деле совпадают и имеют вид

$$T_n^0(\Delta) = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln(\alpha_{n,1} \exp(-2\mu\Delta) + \alpha_{n,2} \exp(-\mu\Delta)),$$

где $\alpha_{n,1}$, $\alpha_{n,2}$ – коэффициенты (3.161).

Перечисленные базовые факты по существу сводят случай (3.194) к уже разобранным ситуациям (3.193). В частности, аналогом теорем 3.3, 3.4 здесь является следующий результат.

Теорема 3.9. Пусть параметры a , b , $\mu > 0$ фиксированы и при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют условию

$$b \in \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R} : \max((1+a) \exp \mu, b_{n,0}) < b < b_{n,1}\}, \quad (3.198)$$

Здесь $q = \text{const} > 0$, а через $(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T$ обозначено решение системы (1.97) со специальным начальным условием $\varphi(t) \equiv (-\sigma_0(\alpha - \beta - 1), z)^T$, $z = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Для обоснования равенства (1.115) прежде всего необходимо исследовать асимптотику функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ при условии, что параметр z изменяется на некотором компактном подмножестве числовой оси. Соответствующий анализ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq -\varepsilon^\delta$, считая выполненными на нем априорные оценки

$$x(t, z, \varepsilon) \leq -M_1 \varepsilon^\delta, \quad |y(t, z, \varepsilon)| \leq M_2 \quad (1.116)$$

(здесь и далее в аналогичных (1.115) асимптотических представлениях и в неравенствах вида (1.116) через q , M_1 , M_2 и т. д. обозначены различные универсальные, т. е. не зависящие от t , φ , z , ε , положительные постоянные, точные значения которых несущественны).

Объединяя свойства (1.116) с равенствами $x(t-1, z, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, $y(t-1, z, \varepsilon) \equiv z$ (справедливость которых вытекает из оценки $\sigma_0 < 1$) и используя явные формулы (1.98) для функций F и G , приходим к выводу, что на рассматриваемом отрезке в силу условий (1.95) равномерно по t , z справедливы асимптотические представления

$$F(x, x(t-1), \varepsilon) = \alpha - \beta - 1 + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \quad (1.117)$$

Отсюда и из (1.97) очевидным образом выводим, что равномерно по t , z имеют место соотношения

$$(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T = (\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon))^T + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad (1.118)$$

в которых

$$\tilde{x} = (\alpha - \beta - 1)t + \varepsilon d \int_{-\sigma_0}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \tilde{y} = y_0(t, z), \quad (1.119)$$

а $y_0(t, z)$ – решение задачи Коши (1.105), (1.106).

Напомним, далее, что формула (1.118) носит пока условный характер, поскольку она получена при априорных предположениях (1.116). Но, как нетрудно увидеть, при подходящем выборе постоянных M_1 , M_2 требуемые оценки (1.116) для правых частей равенств (1.118), (1.119) действительно

выполняются. А это значит, что асимптотическое представление (1.118) обретает законную силу.

На следующем этапе убедимся в том, что равенство (1.118) сохраняется при дифференцировании по z . Обозначим $g_1(t, z, \varepsilon) = \partial x(t, z, \varepsilon)/\partial z$, $g_2(t, z, \varepsilon) = \partial y(t, z, \varepsilon)/\partial z$ и заметим, что компоненты g_1 , g_2 удовлетворяют линейной системе (1.110), коэффициенты которой вычисляются по аналогичным (1.111) формулам при $x = x(t, z, \varepsilon)$, $u = x(t - 1, z, \varepsilon)$, $y = y(t, z, \varepsilon)$, $v = y(t - 1, z, \varepsilon)$, а начальные функции, заданные на отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, имеют вид $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 1$. Далее, проводя те же рассуждения, что и при выводе равенств (1.117), убеждаемся в справедливости для коэффициентов этой системы равномерных по t , z асимптотических представлений

$$\begin{aligned} a_{11}, a_{21}, b_{11}, b_{21}, b_{22} &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad a_{12} = \varepsilon d \exp(y(t, z, \varepsilon)), \\ a_{22} &= -2d \operatorname{ch}(y(t, z, \varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Отсюда несложно вывести асимптотическое равенство

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right)^\tau = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z}(t, z, \varepsilon), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z}(t, z, \varepsilon) \right)^\tau + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}} \right) \right), \quad (1.121)$$

которое, как и соотношения (1.120), выполняется равномерно по t , z .

Перейдем к рассмотрению отрезка $-\varepsilon^\delta \leq t \leq \varepsilon^\delta$. Поскольку при указанных t по-прежнему имеем $x(t - 1, z, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1) < 0$, $y(t - 1, z, \varepsilon) \equiv z$, то, согласно свойствам (1.95) функций $f(u)$, $g(u)$, в данном случае равномерно по t , z справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} f(\exp(x(t - 1, z, \varepsilon)/\varepsilon)) &= 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ f(\exp(x(t - 1, z, \varepsilon)/\varepsilon + y(t - 1, z, \varepsilon))) &= 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{aligned} \quad (1.122)$$

Далее, учитывая соотношения (1.122), отбросим в правых частях системы (1.97) добавки порядка $\exp(-q/\varepsilon)$. В результате после замены $x = \varepsilon v_{1,1}(\tau)$, $x/\varepsilon + y = v_{1,2}(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$ она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_{1,1}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_{1,2} - v_{1,1}) - 1) + \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,1}), \\ \frac{dv_{1,2}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_{1,1} - v_{1,2}) - 1) + \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,2}). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Получившуюся систему (1.123) будем рассматривать на асимптотически большом отрезке $\tau \in J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ с начальными условиями

$$v_{1,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_{1,1}(z, \varepsilon), \quad v_{1,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_{1,2}(z, \varepsilon), \quad (1.124)$$

коэффициенты системы (3.177) не обладают никакой спецификой, сделать это весьма затруднительно.

В случае кольцевой симметричной системы (3.88) описанные выше трудности преодолеваются косвенным образом. А именно, не выписывая явно отображение (3.187), нам удалось с помощью специальных приемов найти его неподвижные точки и проанализировать их устойчивость. В результате при каждом целом $n \geq 0$ и при условиях (3.164) на параметры a , b , $\mu > 0$ был найден экспоненциально орбитально устойчивый цикл релейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= -\mu x_j + 1 - (a + 1)F(x_j(t - 1)) - bF(x_{j-1}), \\ j &= 1, \dots, m, \quad x_0 = x_m, \end{aligned} \quad (3.191)$$

задающийся равенствами

$$x_j = \hat{x}_n(t + (j - 1)\hat{\Delta}_n), \quad j = 1, \dots, m, \quad \hat{x}_n(t + \hat{T}_n) \equiv \hat{x}_n(t). \quad (3.192)$$

Здесь $\hat{\Delta}_n$ – корень уравнения (3.159) из интервала $(1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$, а функция $\hat{x}_n(t)$ и период \hat{T}_n получаются из (3.118) и (3.116) при $\Delta = \hat{\Delta}_n$. Заметим также, что поскольку все точки переключения цикла (3.192) простые и нормальные, то он подпадает под действие теоремы 3.8. Следовательно, отвечающий ему цикл релаксационной системы (3.88), для которого имеют место свойства (3.190), является единственным. Тем самым теперь мы можем утверждать, что при каждом $n \geq 0$ корень (3.166) уравнения (3.165) определяется однозначно (ранее, напомним, был установлен только факт его существования).

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. При отыскании циклов (3.192) мы рассматривали только случай, когда фазовый сдвиг $\hat{\Delta}_n$ принадлежит интервалу

$$1 + t_0 + nT_0 < \hat{\Delta}_n < (n + 1)T_0. \quad (3.193)$$

Однако развитая в разделе 3.3 методика позволяет установить аналогичные теоремам 3.3 – 3.6 утверждения и для случая

$$t_0 + nT_0 < \hat{\Delta}_n < 1 + t_0 + nT_0. \quad (3.194)$$

Действительно, при $\Delta \in (t_0 + nT_0, 1 + t_0 + nT_0)$ и при $b > (1 + a) \exp \mu$ вспомогательное релейное уравнение (3.103) допускает аналогичный (3.118) цикл $x_n^0(t)$ периода T_n^0 , где

$$\begin{aligned} x_n^0(t) &= x_0(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \quad x_n^0(t) = x_0(\Delta) \exp(-\mu(t - \Delta)) + \\ &+ y_0(t - \Delta) - (a + 1)\theta(t - \Delta) \quad \text{при } \Delta \leq t \leq 1 + t_0 + nT_0, \end{aligned} \quad (3.195)$$

где $\Phi(\omega)$ – вектор-функция (3.181). Действительно, любой неподвижной точке $\omega = \omega_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\begin{aligned} \varphi_*(t) &= (\varphi_{*,1}(t), \dots, \varphi_{*,m}(t)), \\ \varphi_{*,j}(t) &= x_j(t + T_0(\omega_*), \omega_*), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.188)$$

оператора Π_0 , а в системе (3.177) – цикл

$$\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_m(t)), \quad \hat{x}(t + \hat{T}) \equiv \hat{x}(t), \quad (3.189)$$

где $\hat{T} = T_0(\omega_*)$, $\hat{x}_j(t) = x_j(t, \omega_*)$, $j = 1, \dots, m$, $0 \leq t \leq \hat{T}$.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = (\varphi_{1,*}(t), \dots, \varphi_{m,*}(t)) \in S$ есть неподвижная точка оператора Π_0 , то с необходимостью вектор $\omega_* = (\varphi_{2,*}(-\sigma_0), \dots, \varphi_{m,*}(-\sigma_0))$ таков, что $\Phi(\omega_*) = \omega_*$. Кроме того, как нетрудно увидеть, спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из собственных значений матрицы $\Phi'(\omega_*)$ и нулевого собственного значения бесконечной кратности.

Итак, предположим, что отображение (3.187) имеет неподвижную точку $\omega = \omega_*$, причем спектральный радиус соответствующей матрицы Якоби $\Phi'(\omega_*)$ строго меньше единицы. Тогда из соотношений (3.186) и из описанных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$, вычисленного на неподвижной точке (3.188), вытекает следующий результат.

Теорема 3.8. При сформулированных ограничениях неподвижной точке $\omega = \omega_*$ отображения (3.187) отвечает единственный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $\hat{x}(t, \varepsilon) = (\hat{x}_1(t, \varepsilon), \dots, \hat{x}_m(t, \varepsilon))$, $\hat{x}_1(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv I_1 \theta(-\sigma_0)$ системы (3.176) периода $\hat{T}(\varepsilon)$. Этот цикл существует при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq m} \max_{0 \leq t \leq \hat{T}(\varepsilon)} |\hat{x}_j(t, \varepsilon) - \hat{x}_j(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{T}(\varepsilon) = \hat{T}, \quad (3.190)$$

где $\hat{x}_j(t)$, \hat{T} – компоненты и период цикла (3.189).

Теоремы 3.7, 3.8 сводят интересующую нас проблему отыскания устойчивых периодических решений системы (3.176) к поиску устойчивых неподвижных точек предельного $(m-1)$ -мерного отображения (3.187). В принципе, интегрируя релейную систему (3.177) методом шагов, в ряде случаев мы можем выписать это отображение в явном виде и проанализировать. Однако в общей ситуации, когда m сколь угодно велико, а

где $\bar{v}_{1,1} = \tilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon$, $\bar{v}_{1,2} = \tilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon + \tilde{y}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x} , \tilde{y} – функции (1.119). Решение же задачи Коши (1.123), (1.124) обозначим через $(v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon), v_{1,2}(\tau, z, \varepsilon))^T$.

Для отыскания главных членов асимптотики функций $v_{1,j}(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, положим в (1.123) $\varepsilon = 0$. В итоге приходим к системе

$$\frac{dv_{1,1}}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,1}), \quad \frac{dv_{1,2}}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,2}).$$

Далее, нетрудно заметить, что эта система допускает решение $(v_{1,1}^0(\tau, z), v_{1,2}^0(\tau, z))^T$ с компонентами

$$v_{1,1}^0 = V^{-1}(u)|_{u=(\alpha-\beta-1)\tau+\kappa_{1,1}}, \quad v_{1,2}^0 = V^{-1}(u)|_{u=(\alpha-\beta-1)\tau+\kappa_{1,2}}, \quad (1.125)$$

где $V^{-1}(u)$ – функция, обратная к

$$V(u) = u - \int_{-\infty}^u \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (1.126)$$

а функции $\kappa_{1,j} = \kappa_{1,j}(z)$, $j = 1, 2$, имеют вид

$$\kappa_{1,1} = d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \kappa_{1,2} = \kappa_{1,1} + y_0(-0, z) \quad (1.127)$$

(сходимость несобственного интеграла в (1.126) и существование обратной функции $V^{-1}(u)$ при любых $u \in \mathbb{R}$ вытекают из свойств (1.95) и, в частности, условия $\alpha > 1 + \beta g(u) \forall u \in \mathbb{R}_+$). Как оказывается, именно это решение и является искомым. Точнее говоря, справедлива

Лемма 1.3. Равномерно по $\tau \in J(\varepsilon)$ и по параметру z имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} v_{1,j}(\tau, z, \varepsilon) &= v_{1,j}^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial v_{1,j}}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) &= \frac{\partial v_{1,j}^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Доказательство. Остановимся сначала на некоторых свойствах функций $v_{1,j}^0(\tau, z)$, $\bar{v}_{1,j}(z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, необходимых для обоснования соот-

ношений (1.128). Отметим в первую очередь, что при $\tau \rightarrow \pm\infty$ выполняются равномерные по z асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_{1,j}^0(\tau, z) &= (\alpha - \beta - 1)\tau + \kappa_{1,j} + O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_{1,j}^0(\tau, z) &= (\alpha - 1)\tau + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \kappa_{1,j} + c_0 + \\ &+ O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.129)$$

где $j = 1, 2$, а постоянная c_0 имеет вид

$$c_0 = \frac{(\alpha - 1)\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du - \beta \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du. \quad (1.130)$$

Доказательство равенств (1.129), (1.130) опустим, отсылая к соответствующему месту предыдущего пункта (см., также [20]). Добавим только, что формулы (1.129) сохраняются при дифференцировании по z .

Указанные асимптотические свойства функций $v_{1,j}^0(\tau, z)$, $j = 1, 2$, при $\tau \rightarrow -\infty$ и формулы (1.119), (1.127) приводят к выводу, что

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1,j}(z, \varepsilon) - v_{1,j}^0(\tau, z)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial \bar{v}_{1,j}}{\partial z}(z, \varepsilon) - \frac{\partial v_{1,j}^0}{\partial z}(\tau, z) \Big|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Таким образом, нужные соотношения (1.128) заведомо выполняются при $\tau = -\varepsilon^{\delta-1}$.

Последующий анализ основан на методе дифференциальных неравенств. А именно при априорном предположении

$$|v_{1,1} - v_{1,2}| \leq M, \quad \tau \in J(\varepsilon), \quad (1.132)$$

из (1.123) имеем

$$\alpha - M_1\varepsilon - 1 - \beta g(\exp v_{1,j}) \leq \frac{dv_{1,j}}{d\tau} \leq \alpha + M_2\varepsilon - 1 - \beta g(\exp v_{1,j}), \quad j = 1, 2. \quad (1.133)$$

Далее, учитывая первую группу равенств (1.131) и увеличивая, если это необходимо, постоянные $M_1, M_2 > 0$ из (1.133), добиваемся выполнения оценок

$$v_{j,\min}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} \leq \bar{v}_{1,j}(z, \varepsilon) \leq v_{j,\max}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}, \quad j = 1, 2, \quad (1.134)$$

и обозначим через $S \subset E$ – подмножество начальных функций (3.178), таких что

$$-q_{1,j} \leq \varphi_j(t) \leq -q_{2,j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.184)$$

Из соотношений (3.182) – (3.184) очевидным образом следует, что справедливо включение $\Pi_0(S) \subset S$.

Для формулировки основного утверждения о связи между решениями систем (3.176) и (3.177) нам понадобится оператор последования $\Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\varphi \in S$, по траекториям системы (3.176). Упомянутый оператор определяется посредством аналогичных (3.182) равенств

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\varphi) &= (\bar{\varphi}_1(t, \varepsilon), \dots, \bar{\varphi}_m(t, \varepsilon)) : \quad \bar{\varphi}_j(t, \varepsilon) = x_{j,\varphi}(t + T_\varphi, \varepsilon), \\ &\quad -s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.185)$$

где $x_\varphi(t, \varepsilon) = (x_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \dots, x_{m,\varphi}(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$ – решение системы (3.176) с произвольным начальным условием $\varphi \in S$, а через T_φ обозначен $(2n_0 + 2)$ -й по счету положительный корень аналогичного (3.179) уравнения, в котором компонента $x_1(t - \sigma_0, \omega)$ заменена на $x_{1,\varphi}(t - \sigma_0, \varepsilon)$. Из общих результатов работы [13] о C^1 -близости решений релейных и релаксационных систем с запаздыванием вытекает следующая

Теорема 3.7 (о C^1 -сходимости). *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор (3.185) определен на множестве S , преобразует его в себя и удовлетворяет предельным соотношениям*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_E &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)\|_{E_0 \rightarrow E_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Здесь $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ – соответствующие производные Фреше, а E_0 – подпространство пространства E , выделяемое равенством $\varphi_1(-\sigma_0) = 0$.

Отдельно остановимся на одном важном следствии из C^1 -сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (3.176). В связи с этим обратим внимание, что оператор (3.182) является надстройкой над соответствующим $(m - 1)$ -мерным отображением

$$\omega \rightarrow \Phi(\omega), \quad (3.187)$$

где $\text{int } \Omega$ – совокупность внутренних точек множества Ω (предполагаем, естественно, что $\text{int } \Omega \neq \emptyset$).

Следующее ограничение связано с точками переключений релейной системы (3.177). Предположим, что найдется такое независимое от $\omega \in \Omega$ натуральное k_0 , что решение $x(t, \omega)$ на интервале $t \in (-\sigma_0, T_0(\omega) - \sigma_0)$ допускает ровно k_0 точек переключения $t_1 < t_2 < \dots < t_{k_0}$, которые являются простыми и нормальными. Для пояснения этих терминов заметим, что в любой точке переключения $t = t_k$ должно выполняться хотя бы одно равенство $x_i(t - s_{ij}, \omega) = 0$. Далее, простой назовем точку $t = t_k$, в которой справедливо ровно одно из упомянутых соотношений, а именно $x_{i_k}(t_k - s_{i_k j_k}, \omega) = 0$. Что же касается свойства нормальности переключения, то оно означает, что $\dot{x}_{i_k}(t_k - s_{i_k j_k}, \omega) \neq 0$.

Описанные условия позволяют корректно определить оператор последования Пуанкаре

$$\Pi_0(\varphi) = (\bar{\varphi}_1(t), \dots, \bar{\varphi}_m(t)) : \bar{\varphi}_j(t) = x_j(t + T_0(\omega), \omega), \\ -s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \omega = (\varphi_2(-\sigma_0), \dots, \varphi_m(-\sigma_0)) \quad (3.182)$$

по траекториям релейной системы (3.177). Действительно, требования (3.180), (3.181) свидетельствуют о том, что оператор (3.182) переводит класс начальных условий (3.178) в себя, а из ограничений, наложенных на точки переключения решения $x(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, вытекает непрерывная дифференцируемость этого оператора по Фреше.

На следующем этапе конкретизируем область определения оператора (3.182). С этой целью введем в рассмотрение банахово пространство

$$E = C[-s_1 - \sigma_0, -\sigma_0] \times \dots \times C[-s_m - \sigma_0, -\sigma_0]$$

вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ с нормой

$$\|\varphi\|_E = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)|.$$

Фиксируем затем постоянные $q_{1,j}, q_{2,j} > 0$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие неравенствам

$$q_{1,j} > - \min_{\substack{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \\ \omega \in \Omega}} x_j(t + T_0(\omega), \omega), \\ q_{2,j} < - \max_{\substack{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \\ \omega \in \Omega}} x_j(t + T_0(\omega), \omega), \quad (3.183)$$

где

$$v_{j,\min} = V_{\min}^{-1}(u)|_{u=(\alpha - M_1\varepsilon - \beta - 1)\tau - 2M_1\varepsilon^\delta + \kappa_{1,j}(z)}, \quad j = 1, 2; \\ v_{j,\max} = V_{\max}^{-1}(u)|_{u=(\alpha + M_2\varepsilon - \beta - 1)\tau + 2M_2\varepsilon^\delta + \kappa_{1,j}(z)}, \quad j = 1, 2, \quad (1.135)$$

а функции V_{\min} , V_{\max} получаются из (1.126) при замене α на $\alpha - M_1\varepsilon$ и $\alpha + M_2\varepsilon$ соответственно. И наконец, объединяя неравенства (1.133), (1.134), приходим к выводу, что

$$v_{j,\min}(\tau, z, \varepsilon) \leq v_{1,j}(\tau, z, \varepsilon) \leq v_{j,\max}(\tau, z, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad (1.136)$$

при всех $\tau \in J(\varepsilon)$.

Напомним, однако, что неравенства (1.136) получены нами при априорном условии (1.132). Но поскольку из (1.135) при $\forall \tau \in J(\varepsilon)$ имеем

$$|v_{1,\min}(\tau, z, \varepsilon) - v_{2,\max}(\tau, z, \varepsilon)| + |v_{2,\min}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,\max}(\tau, z, \varepsilon)| \leq M, \\ |v_{j,\min}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,j}^0(\tau, z)| + |v_{j,\max}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,j}^0(\tau, z)| \leq M\varepsilon^\delta, \quad j = 1, 2, \quad (1.137)$$

то эти неравенства обретают законную силу. Остается добавить, что из неравенств (1.136), (1.137) первая группа асимптотических формул (1.128) вытекает очевидным образом.

Перейдем теперь к обоснованию асимптотических представлений (1.128) для $h_j = \partial v_{1,j} / \partial z$, $j = 1, 2$. Дифференцируя правые части системы (1.123) и начальные условия (1.124) по z , для h_1, h_2 получаем некоторую линейную неоднородную систему, из которой в свою очередь при априорных предположениях

$$|h_j| \leq M, \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J(\varepsilon) \quad (1.138)$$

выводим аналогичные (1.133) дифференциальные неравенства

$$-M_1\varepsilon + a_j(\tau, z, \varepsilon)h_j \leq \frac{dh_j}{d\tau} \leq M_2\varepsilon + a_j(\tau, z, \varepsilon)h_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.139)$$

Здесь, как обычно, $M_1, M_2 > 0$ – некоторые универсальные постоянные, а функции $a_j(\tau, z, \varepsilon)$ имеют вид

$$a_j(\tau, z, \varepsilon) = -\beta g'(\exp v) \exp v|_{v=v_{1,j}(\tau, z, \varepsilon)}, \quad j = 1, 2, \quad (1.140)$$

и в силу свойств (1.95) и уже установленных равенств (1.128) для $v_{1,j}(\tau, z, \varepsilon)$ допускают оценки

$$|a_j(\tau, z, \varepsilon)| \leq M \exp(-|v_{1,j}^0(\tau, z)|), \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J(\varepsilon). \quad (1.141)$$

Из неравенств (1.139) очевидным образом имеем

$$h_{j,\min}(\tau, z, \varepsilon) \leq h_j(\tau, z, \varepsilon) \leq h_{j,\max}(\tau, z, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad (1.142)$$

где

$$\begin{aligned} h_{j,\min} &= \frac{\partial \bar{v}_{1,j}}{\partial z}(z, \varepsilon) \exp \left\{ \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} a_j(s, z, \varepsilon) ds \right\} - \\ &\quad - M_1 \varepsilon \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \exp \left\{ \int_s^{\tau} a_j(\sigma, z, \varepsilon) d\sigma \right\} ds, \\ h_{j,\max} &= \frac{\partial \bar{v}_{1,j}}{\partial z}(z, \varepsilon) \exp \left\{ \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} a_j(s, z, \varepsilon) ds \right\} + \\ &\quad + M_2 \varepsilon \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \exp \left\{ \int_s^{\tau} a_j(\sigma, z, \varepsilon) d\sigma \right\} ds. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Отсюда и из оценок $|h_{j,\min}|, |h_{j,\max}| \leq M$, $j = 1, 2$ (справедливых в силу (1.140), (1.141), (1.143)), вытекает законность априорных предположений (1.138).

На заключительном этапе доказательства леммы убедимся в том, что функции (1.143) равномерно по τ , z отличаются от

$$\frac{\partial v_{1,j}^0}{\partial z}(\tau, z) = \kappa'_{1,j}(z) \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} a_j(s, z, 0) ds \right\}, \quad j = 1, 2,$$

на величины порядка ε^{δ} . Снова обращаясь к свойствам (1.95) функции $g(u)$, последовательно выводим неравенства

$$\begin{aligned} |g'(u) + ug''(u)| &\leq M/(1+u^2) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \\ |u_1 g'(u_1) - u_2 g'(u_2)| &\leq \frac{M}{1 + \min(u_1^2, u_2^2)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Применяя затем второе неравенство (1.144) к формулам (1.140), приходим к выводу, что

$$|a_j(\tau, z, \varepsilon) - a_j(\tau, z, 0)| \leq M \varepsilon^{\delta} \exp(-|v_{1,j}^0(\tau, z)|), \quad \tau \in J(\varepsilon), \quad j = 1, 2. \quad (1.145)$$

Наряду с (3.176) введем в рассмотрение соответствующую релейную систему

$$\dot{x}_j = -\mu_j x_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} F(x_i(t - s_{ij})) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.177)$$

где $F(x)$ – функция из (3.9). Предположим, далее, что среди величин I_j имеется хотя бы одна положительная (без ограничения общности будем считать, что $I_1 > 0$). В этом случае множество начальных функций для системы (3.177) определим так. Фиксируем некоторое компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$, выберем достаточно малую постоянную $\sigma_0 > 0$ и положим $s_j = \max_{1 \leq k \leq m} s_{jk}$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим затем всевозможные функции $\varphi_j(t) \in C[-s_j - \sigma_0, -\sigma_0]$, $j = 1, \dots, m$, такие что

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &< 0 \quad \forall t \in [-s_j - \sigma_0, -\sigma_0], \quad j = 1, \dots, m; \\ \omega &= (\varphi_2(-\sigma_0), \dots, \varphi_m(-\sigma_0)) \in \Omega, \quad \varphi_1(-\sigma_0) = I_1 \theta(-\sigma_0), \end{aligned} \quad (3.178)$$

где $\theta(t)$ – функция (3.12).

Обозначим через $x(t, \omega) = (x_1(t, \omega), \dots, x_m(t, \omega))$ решение системы (3.177) с произвольными начальными условиями из класса (3.178). Обратим внимание, что в силу неравенств $\varphi_j(t) < 0$ на самом деле это решение не зависит от конкретных значений $\varphi_j(t)$ при $-s_j - \sigma_0 \leq t < -\sigma_0$, а определяется только заданием вектора ω из (3.178).

Сформулируем ряд дополнительных предположений относительно системы (3.177). В связи с этим фиксируем некоторое целое $n_0 \geq 0$ и будем считать, что при $\forall \omega \in \Omega$ уравнение

$$x_1(t - \sigma_0, \omega) = I_1 \theta(-\sigma_0) \quad (3.179)$$

имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n_0 + 2)$ -х простых корней, занумерованных в порядке возрастания, а через $T_0 = T_0(\omega)$ обозначим корень данного уравнения с номером $2n_0 + 2$. Кроме того, считаем выполненными неравенства

$$x_j(t + T_0(\omega), \omega) < 0 \quad \forall t \in [-s_j - \sigma_0, -\sigma_0], \quad j = 1, \dots, m \quad (3.180)$$

и включение

$$\Phi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (x_2(t + T_0(\omega), \omega), \dots, x_m(t + T_0(\omega), \omega))|_{t=-\sigma_0} \in \text{int } \Omega, \quad (3.181)$$

Теорема 3.6. По любым достаточно малым $\mu_2 > \mu_1 > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ циклы \hat{C}_n , $n = 0, 1, \dots, n_0$, о которых говорится в теореме 3.5, экспоненциально орбитально устойчивы.

В дополнение к установленным теоремам отметим, что множества \mathcal{U}_n из (3.164) заведомо не пусты при всех $n \geq 0$. Действительно, несложная проверка показывает, что $(1 + a) \exp \mu < b_{n,2}$ при $\forall n \geq 0, m \geq 2$, а значит, длина каждого интервала

$$\max((a + 1) \exp \mu, b_{n,1}) < b < b_{n,2}, \quad n \geq 0 \quad (3.175)$$

строго положительна. Следует также добавить, что при $\mu \rightarrow 0$ в случае $m \geq 3$ интервалы (3.175) переходят в интервалы (3.174), а в случае $m = 2$ длины этих интервалов стремятся к нулю. Таким образом, при $m = 2$ теоремы 3.3, 3.4 сохраняются, а теоремы 3.5, 3.6 не имеют места. Именно по этой причине мы с самого начала ограничились рассмотрением кольцевых сетей Хопфилда (3.88) из трех и более уравнений.

3.4. Заключение

Предложенные нами подходы к асимптотическому анализу релаксационных циклов обыгрывают факт симметрии системы (3.88) и вследствие этого не переносятся на произвольные сети Хопфилда. Однако существует альтернативный подход к отысканию аттракторов системы (3.3), который можно назвать методом предельных отображений. Суть этого метода заключается в следующем.

Предположим, что коэффициенты a_{ij} , I_j из (3.3) пропорциональны некоторому параметру $\lambda \gg 1$, а функции $f_i(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ обладают при $u \rightarrow \pm\infty$ свойствами (3.5). Тогда после замен $u_j = \lambda x_j$, $j = 1, \dots, m$ интересующая нас система (3.3) примет вид

$$\dot{x}_j = -\mu_j x_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i(x_i(t - s_{ij})/\varepsilon) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.176)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $\mu_j = \text{const} > 0$, a_{ij} , $I_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $s_{ij} = \text{const} \geq 0$. Исследование этой системы будем проводить при дополнительных условиях регулярности $s_{jj} > 0$, $j = 1, \dots, m$, которые в случае (3.88) заведомо выполняются.

И наконец, объединяя соотношения (1.131), (1.141), (1.143), (1.145), получаем требуемые асимптотические равенства

$$h_{j,\min}, h_{j,\max} = \frac{\partial v_{1,j}^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \tau \in J(\varepsilon), \quad j = 1, 2,$$

которые в совокупности с оценками (1.142) приводят к нужным асимптотическим представлениям для $h_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$. Лемма 1.3 доказана.

Заканчивая рассмотрение отрезка времени $-\varepsilon^\delta \leq t \leq \varepsilon^\delta$, учтем в правых частях системы (1.123) и в начальных условиях (1.124) отброшенные ранее остатки порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$. В результате после применения к получившейся задаче Коши описанного выше метода дифференциальных неравенств приходим к равномерным по $t \in [-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta]$ и z асимптотическим представлениям

$$\begin{aligned} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T &= (\varepsilon v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon), v_{1,2}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon))^T|_{\tau=t/\varepsilon} + \\ &\quad + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right)^T &= \left(\varepsilon \frac{\partial v_{1,1}}{\partial z}, \frac{\partial v_{1,2}}{\partial z} - \frac{\partial v_{1,1}}{\partial z}\right)^T|_{\tau=t/\varepsilon} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.146)$$

Из формул (1.146), в частности, следует, что на изученном выше асимптотически малом промежутке изменения t компонента $y(t, z, \varepsilon)$ меняется существенно. А именно из (1.106), (1.125)–(1.130) и (1.146) вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=-\varepsilon^\delta} &= y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^\delta} &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta) = y_0(+0, z) + O(\varepsilon^\delta). \end{aligned} \quad (1.147)$$

Тем самым, придерживаясь принятой в теории релаксационных колебаний терминологии, данный отрезок будем называть участком быстрых движений.

При рассмотрении следующего промежутка времени $\varepsilon^\delta \leq t \leq 1 - \varepsilon^\delta$ считаем выполненными условия

$$\begin{aligned} x(t - 1, z, \varepsilon) &\leq -M_1 \varepsilon^\delta, \quad |y(t - 1, z, \varepsilon)| \leq M_2, \\ x(t, z, \varepsilon) &\geq M_3 \varepsilon^\delta, \quad |y(t, z, \varepsilon)| \leq M_4, \end{aligned} \quad (1.148)$$

первые два из которых – следствия уже установленных формул (1.118), (1.146), а два другие пока априорны. Учитывая далее оценки (1.148) в

формулах (1.98), получаем аналогичные (1.117) соотношения

$$\begin{aligned} F(x, x(t-1), \varepsilon) &= \alpha - 1 + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (1.149)$$

Отсюда, повторяя практически дословно рассуждения, предшествующие появлению формул (1.118), (1.121), выводим аналогичные асимптотические представления (справедливые равномерно по $\varepsilon^\delta \leq t \leq 1 - \varepsilon^\delta$ и z)

$$\begin{aligned} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T &= (\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon))^T + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right)^T &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \right)^T + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.150)$$

где \tilde{x} , \tilde{y} – компоненты решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + \alpha - 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \\ x|_{t=\varepsilon^\delta} &= \varepsilon v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}, \\ y|_{t=\varepsilon^\delta} &= (v_{1,2}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Отдельно остановимся на асимптотических свойствах фигурирующих в (1.150) функций \tilde{x} , \tilde{y} . Учитывая в (1.151) асимптотические формулы (1.128), (1.147) и характер поведения функций (1.125) при $\tau \rightarrow +\infty$ (см. (1.129), (1.130)), после несложных преобразований приходим к выводу, что равномерно по $t \in [\varepsilon^\delta, 1 - \varepsilon^\delta]$ и z имеют место асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\alpha - 1)t + \varepsilon d \int_0^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_0(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon d \int_0^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_0(z) \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} &= \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (1.152)$$

где

$$c_0(z) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_0, \quad (1.153)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что для корня $\Delta = \hat{\Delta}_n$ уравнения (3.159) имеет место равенство

$$\hat{\Delta}_n|_{\mu=0} = \frac{n+1}{m} (1 + 1/a)(a + b + 1). \quad (3.173)$$

Перейдем к условию (3.164). Объединяя соотношения (3.162), (3.163), (3.172), (3.173), нетрудно увидеть, что при $\mu = 0$ оно переходит в неравенства

$$\max \left(a + 1, (m-1)(a+1) - \frac{m a^2}{(n+1)(a+1)} \right) < b < (m-1)(a+1). \quad (3.174)$$

Следует также добавить, что все асимптотические формулы из п. 3.3.3, 3.3.4 являются равномерно пригодными по μ .

Перечисленные факты свидетельствуют о том, что при условиях (3.174) и при $0 \leq \mu \ll 1$ уравнение (3.165) по-прежнему разрешимо, а равенство (3.166) выполняется равномерно по μ . Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.5. Пусть параметры $a, b > 0$ фиксированы и при некотором натуральном $n = n_0$ удовлетворяют условиям (3.174). Тогда найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ система (3.88) допускает самосимметричные периодические движения (3.167) с номерами $n = 0, 1, \dots, n_0$.

Вопрос об устойчивости любого цикла (3.167) при независимых малых параметрах ε, μ остается открытым. Связано это с тем, что при $\mu = 0$ выполняется равенство $\hat{\beta}_n = 0$ (см. (3.149)), а значит, корни $\varkappa_j \neq 1$, $j = 1, \dots, m-1$ уравнения (3.171) таковы, что $\varkappa_j^m = 1$, $j = 1, \dots, m-1$. Следовательно, критические мультипликаторы $\nu_j = \nu_j(\varepsilon, \mu)$, $j = 1, \dots, m-1$, о которых говорится в доказательстве теоремы 3.4, при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ стремятся к единице. Остальные же мультипликаторы цикла (3.167) (за исключением простого единичного) лежат в круге вида (3.169), где постоянная $M > 0$ не зависит от ε, μ .

Тем не менее результат об устойчивости при малых μ все же удается сформулировать при условии, что параметр μ в определенном смысле отделен от нуля. А именно, опираясь на построения, изложенные при обосновании теоремы 3.4, нетрудно увидеть, что справедливо следующее утверждение.

Объединяя асимптотические представления (3.148), (3.166), приходим к выводу, что интересующее нас уравнение записывается в виде

$$1 + \widehat{\beta}_n(\varkappa - 1) = \varkappa^m + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.170)$$

где $\widehat{\beta}_n$ – коэффициент из (3.148) при $\Delta = \widehat{\Delta}_n$. Перейдем, далее, от (3.170) к соответствующему предельному уравнению

$$1 + \widehat{\beta}_n(\varkappa - 1) = \varkappa^m. \quad (3.171)$$

Заметим, что оно имеет простой корень $\varkappa = 1$, а остальные его корни (обозначим их через \varkappa_j , $j = 1, \dots, m-1$) в силу вытекающего из (3.149) неравенства $\widehat{\beta}_n < 1$ и леммы 3.6 лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

Возвращаясь к уравнению (3.170), отметим, что оно также допускает решение $\varkappa = 1$, поскольку при $\varkappa = 1$, $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$ уравнение (3.145) представляет собой линеаризацию на цикле $x = \widehat{x}_n(t, \varepsilon)$. Добавим еще, что в силу аналитичности функции $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ по \varkappa и аналогичного (3.148) равенства

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) = \beta + O(\sqrt{\varepsilon})$$

количество корней уравнения (3.170) в круге $\varkappa \in B(r)$ равно m , причем корень $\varkappa = 1$ является простым. Что же касается остальных $m-1$ корней этого уравнения, то они при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к корням $\varkappa_j : |\varkappa_j| < 1$, $j = 1, \dots, m-1$ уравнения (3.171).

Подведем итог. Из проделанного анализа следует, что за исключением простого единичного все мультипликаторы $\nu \in \mathbb{C}$ цикла (3.167) по модулю меньше единицы. Действительно, имеется $m-1$ так называемых критических мультипликаторов $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, m-1$, стремящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к величинам $\nu = \varkappa_j^m$, где \varkappa_j , $j = 1, \dots, m-1$ – уже упоминавшиеся выше корни уравнения (3.171). Остальные же мультипликаторы ν рассматриваемого цикла лежат в круге (3.169). Теорема 3.4 доказана.

Обратим внимание, что в условиях теорем 3.3, 3.4 параметр μ считался фиксированным и строго положительным. Рассмотрим теперь случай, когда μ – независимый от ε малый параметр. Привлекая формулы (3.17), (3.20), (3.116), приходим к выводу, что

$$t_0|_{\mu=0} = 1 + 1/a, \quad T_0|_{\mu=0} = 2 + a + 1/a, \\ T_n^0|_{\mu=0} = (n+1)(1+1/a)(a+b+1). \quad (3.172)$$

c_0 – постоянная (1.130), а $y_0(t, z)$ – решение задачи (1.105), (1.106).

Для придания изложенным построениям законной силы следует вспомнить о том, что третье и четвертое неравенства из (1.148) пока условны. Но, как показывает непосредственная проверка, правые части из (1.152) удовлетворяют этим неравенствам при соответствующем выборе постоянных M_3 , M_4 .

Обратимся, далее, к очередному отрезку времени $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$ и будем считать, что при указанных t выполняются априорные оценки

$$x(t, z, \varepsilon) \geq M_1, \quad |y(t, z, \varepsilon)| \leq M_2. \quad (1.154)$$

Из этих неравенств в силу свойств (1.95) очевидным образом имеем

$$g(\exp(x/\varepsilon)) = O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad g(\exp(x/\varepsilon + y)) = O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.155)$$

Функции $x(t-1)$ и $y(t-1)$ теперь, согласно (1.146), задаются равенствами

$$x(t-1) = \varepsilon v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ y(t-1) = (v_{1,2}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \quad (1.156)$$

На следующем этапе подставим соотношения (1.155), (1.156) в систему (1.97), отбросим в ее правых частях слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$ и выполним замены $x = \alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}$, $y = v_{2,2} - v_{2,1}$, $\tau = (t-1)/\varepsilon$. В результате придем к системе

$$\frac{dv_{2,1}}{d\tau} = \varepsilon d(\exp(v_{2,2} - v_{2,1}) - 1) - 1 + \alpha f(\exp v_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)), \\ \frac{dv_{2,2}}{d\tau} = \varepsilon d(\exp(v_{2,1} - v_{2,2}) - 1) - 1 + \alpha f(\exp v_{1,2}(\tau, z, \varepsilon)), \quad (1.157)$$

которую, как и аналогичную систему (1.123), будем рассматривать на отрезке $\tau \in J(\varepsilon)$, где $J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$, с начальными условиями

$$v_{2,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_{2,1}(z, \varepsilon), \quad v_{2,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_{2,2}(z, \varepsilon). \quad (1.158)$$

Здесь $\bar{v}_{2,1} = (\tilde{x}(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon) - \alpha + 1)/\varepsilon$, $\bar{v}_{2,2} = \bar{v}_{2,1} + \tilde{y}(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x} , \tilde{y} – функции из (1.152).

При исследовании задачи (1.157), (1.158) существенную роль играют аналогичные (1.125) специальные функции

$$v_{2,j}^0(\tau, z) = (\alpha - 1)\tau + \varkappa_{2,j}(z) + \alpha \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp v_{1,j}^0(s, z)) - 1] ds, \quad j = 1, 2, \quad (1.159)$$

где

$$\begin{aligned}\varkappa_{2,1}(z) &= d \int_0^1 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_0(z), \\ \varkappa_{2,2}(z) &= \varkappa_{2,1}(z) + y_0(1 - 0, z),\end{aligned}\quad (1.160)$$

$c_0(z)$ – функция (1.153), а через $y_0(t, z)$ по-прежнему обозначено решение задачи (1.105), (1.106).

Используя аналогичные построения, изложенные в первом разделе данной главы (см., также [20]), нетрудно показать, что для функций (1.159) при $\tau \rightarrow \pm\infty$ имеют место равномерные по z (и допускающие дифференцирование по z) асимптотические равенства

$$\begin{aligned}v_{2,j}^0(\tau, z) &= (\alpha - 1)\tau + \varkappa_{2,j} + O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_{2,j}^0(\tau, z) &= -\tau + \varkappa_{2,j} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1} \varkappa_{1,j} + \\ &+ c_1 + O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2,\end{aligned}\quad (1.161)$$

где

$$\begin{aligned}c_1 &= \int_0^1 \frac{\alpha(f(u) - 1)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du - \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du + \\ &+ \int_1^{+\infty} \frac{\alpha f(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du.\end{aligned}\quad (1.162)$$

Перечисленные свойства функций (1.159) позволяют установить следующее утверждение.

Лемма 1.4. Для решения $(v_{2,1}(\tau, z, \varepsilon), v_{2,2}(\tau, z, \varepsilon))^T$ задачи Коши (1.157), (1.158) равномерно по $\tau \in J(\varepsilon)$ и по параметру z справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned}v_{2,j}(\tau, z, \varepsilon) &= v_{2,j}^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial v_{2,j}}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) &= \frac{\partial v_{2,j}^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2.\end{aligned}\quad (1.163)$$

На доказательстве сформулированного утверждения не останавливаемся, поскольку оно основано на методе дифференциальных неравенств и

Теорема 3.3. Пусть параметры $a, b > 0$, $\mu > 0$ в системе (3.88) фиксированы и при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют условию (3.164). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ эта система имеет самосимметричный цикл

$$C_n: \quad x_j = \widehat{x}_n(t + (j - 1)\widehat{\Delta}_n(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.167)$$

где $\widehat{x}_n(t, \varepsilon) = x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)|_{\Delta=\widehat{\Delta}_n(\varepsilon)}$, а $\widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$ – корень (3.166) уравнения (3.165).

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости цикла (3.167). Справедлива следующая

Теорема 3.4. В условиях предыдущей теоремы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ цикл (3.167) экспоненциально орбитально устойчив.

Доказательство. Напомним, что все мультипликаторы ν цикла (3.167) задаются равенствами (3.95), (3.96), где $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k \geq 1$ – мультипликаторы вспомогательного линейного уравнения (3.145) при $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$. В связи с этим обратим внимание, что для оператора монодромии (3.93) системы (3.91), отвечающей циклу (3.167), имеет место оценка

$$\|V(\varepsilon)\|_{C([-1,0];\mathbb{R}^m) \rightarrow C([-1,0];\mathbb{R}^m)} \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (3.168)$$

справедливость которой вытекает из свойств (3.142), (3.143) коэффициентов (3.92). Таким образом, при рассмотрении уравнений (3.96) в силу очевидного неравенства $|\nu| \leq \|V(\varepsilon)\|$ и соотношения (3.95) мы вправе ограничиться значениями параметра $\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq r$, где $r = (M + 1)^{1/m}$, M – константа из (3.168).

Итак, при условии $\varkappa \in B(r)$ подставим в уравнение (3.145) $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$ и воспользуемся леммой 3.5. В результате убеждаемся, что, согласно (3.147), все возможные решения $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнений (3.96) при $k \geq 2$ лежат в круге радиуса порядка $\varepsilon^{1/m}$, а отвечающие им мультипликаторы $\nu = \varkappa^m$ цикла (3.167) допускают оценку вида

$$|\nu| \leq M\varepsilon \quad (3.169)$$

с некоторой универсальной постоянной $M > 0$. Таким образом, проблема устойчивости цикла (3.167) сводится к анализу расположения корней уравнения (3.96) при $k = 1$.

Анализ уравнения (3.160) не вызывает затруднений. Действительно, из очевидных свойств $P(0) = 0$, $P(1) > 1$, $P'(z) > 0 \forall z \in [0, 1]$ следует, что оно имеет единственное решение $z = \hat{z}_n \in (0, 1)$. Однако, для того чтобы это решение принадлежало требуемому интервалу

$$(z_1, z_2), \quad z_1 = \exp(-\mu(n+1)T_0), \quad z_2 = \exp(-\mu(nT_0 + 1 + t_0)),$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств $P(z_1) < 1$, $P(z_2) > 1$, которые, в свою очередь, эквивалентны условиям вида $b_{n,1} < b < b_{n,2}$ на параметр b . Что же касается граничных значений $b_{n,1}$, $b_{n,2}$ этого параметра, то они однозначно определяются из соответствующих равенств $P(z_2) = 1$, $P(z_1) = 1$ и задаются формулами

$$b_{n,1} = \frac{[\exp(\mu(m-1)(nT_0+1+t_0)) - \exp(\mu(T_0-1-t_0))](\exp(\mu T_0)-1)}{(1+1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}, \quad (3.162)$$

$$b_{n,2} = \frac{(\exp(\mu(m-1)(n+1)T_0) - 1)(\exp(\mu T_0) - 1)}{(1+1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}. \quad (3.163)$$

Итак, мы видим, что при

$$b \in \mathcal{U}_n, \quad \mathcal{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R} : \max((1+a)\exp \mu, b_{n,1}) < b < b_{n,2}\} \quad (3.164)$$

и при $\Delta = \hat{\Delta}_n$, где $\hat{\Delta}_n = (1/\mu) \ln(1/\hat{z}_n)$, периодическое решение (3.118) уравнения (3.103) имеет нужный период $m\hat{\Delta}_n$. Обратимся теперь к периодическому решению $x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (3.90) и рассмотрим соответствующее ему уравнение

$$T_n^*(\varepsilon, \Delta) = m\Delta. \quad (3.165)$$

Напомним, далее, что в силу (3.138) для $T_n^*(\varepsilon, \Delta)$ имеет место асимптотическое представление

$$T_n^*(\varepsilon, \Delta) = T_n^0(\Delta) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)),$$

которое, как уже было сказано выше, выполняется равномерно по Δ из любого компакта $K \subset (1+t_0+nT_0, (n+1)T_0)$. А отсюда и из простоты корня $\Delta = \hat{\Delta}_n$ уравнения (3.159) очевидным образом следует, что уравнение (3.165) допускает хотя бы один корень $\Delta = \hat{\Delta}_n(\varepsilon)$, такой что

$$\hat{\Delta}_n(\varepsilon) = \hat{\Delta}_n + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)). \quad (3.166)$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

с несущественными изменениями повторяет все этапы обоснования леммы 1.3.

Возвращаясь к системе (1.157) и учитывая в ее правых частях и в начальных условиях (1.158) отброшенные слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, приходим к выводу, что для интересующих нас функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ равномерно по $t \in [1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta]$ и z выполняются аналогичные (1.146) асимптотические равенства

$$\begin{aligned} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T &= (\alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}(\tau, z, \varepsilon), v_{2,2}(\tau, z, \varepsilon) - \\ &\quad - v_{2,1}(\tau, z, \varepsilon))^T|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right)^T &= \left(\varepsilon \frac{\partial v_{2,1}}{\partial z}, \frac{\partial v_{2,2}}{\partial z} - \frac{\partial v_{2,1}}{\partial z}\right)^T|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.164)$$

Завершая рассмотрение промежутка $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$, отметим два момента. Во-первых, используя свойства (1.161), (1.162) функций (1.159) и равенства (1.163), убеждаемся в том, что правые части из (1.164) действительно удовлетворяют оценкам (1.154) при подходящем выборе постоянных $M_1, M_2 > 0$ и, следовательно, формулы (1.164) обретают законную силу. Во-вторых, из (1.106), (1.160)–(1.164) заключаем, что

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=1-\varepsilon^\delta} &= y_0(1-0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=1+\varepsilon^\delta} &= y_0(1-0, z) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1} y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta) = \\ &= y_0(1-0, z) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_0(+0, z) + O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (1.165)$$

а значит, отрезок $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$ представляет собой очередной участок быстрых движений.

Последующие пять шагов асимптотического анализа функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$, связанные с рассмотрением отрезков времени $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha - \varepsilon^\delta$, $\alpha - \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha + \varepsilon^\delta$, $\alpha + \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha + 1 - \varepsilon^\delta$, $\alpha + 1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha + 1 + \varepsilon^\delta$ и $\alpha + 1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$, вполне аналогичны четырем предыдущим. Поэтому здесь приведем лишь сводку итоговых результатов.

При $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha - \varepsilon^\delta$ имеют место асимптотические равенства (1.150), в которых теперь $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y - 1) - 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y,$$

$$x|_{t=1+\varepsilon^\delta} = \alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, \quad y|_{t=1+\varepsilon^\delta} = (v_{2,2}(\tau, z, \varepsilon) - v_{2,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}.$$

Для самих же функций $\tilde{x}(t, z, \varepsilon)$, $\tilde{y}(t, z, \varepsilon)$ справедливы аналогичные (1.152), (1.153) формулы

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha - t + \varepsilon d \int_0^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_1(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon d \int_0^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_1(z) \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta),\end{aligned}\tag{1.166}$$

где

$$c_1(z) = c_0(z) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1} d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_1,\tag{1.167}$$

а c_1 – постоянная (1.162).

При $\alpha - \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha + \varepsilon^\delta$ интересующее нас решение задается аналогичными (1.146) равенствами

$$\begin{aligned}(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T &= (\varepsilon w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon), w_{1,2}(\tau, z, \varepsilon) - \\ &\quad - w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon))^T|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right)^T &= \left(\varepsilon \frac{\partial w_{1,1}}{\partial z}, \frac{\partial w_{1,2}}{\partial z} - \frac{\partial w_{1,1}}{\partial z} \right)^T|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}} \right) \right).\end{aligned}\tag{1.168}$$

Здесь $(w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon), w_{1,2}(\tau, z, \varepsilon))^T$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dw_{1,1}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(w_{1,2} - w_{1,1}) - 1) - 1 - \beta g(\exp w_{1,1}), \quad w_{1,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{w}_{1,1}(z, \varepsilon), \\ \frac{dw_{1,2}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(w_{1,1} - w_{1,2}) - 1) - 1 - \beta g(\exp w_{1,2}), \quad w_{1,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{w}_{1,2}(z, \varepsilon),\end{aligned}$$

где $\bar{w}_{1,1} = \tilde{x}(\alpha - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon$, $\bar{w}_{1,2} = \bar{w}_{1,1} + \tilde{y}(\alpha - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x} , \tilde{y} – функции (1.166). Далее, для компонент $w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)$, $w_{1,2}(\tau, z, \varepsilon)$ в свою очередь имеют место равномерные по $\tau \in J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ и z асимптотические представления

$$\begin{aligned}w_{1,j}(\tau, z, \varepsilon) &= w_{1,j}^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial w_{1,j}}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) &= \frac{\partial w_{1,j}^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2,\end{aligned}\tag{1.169}$$

Таким образом, при малых $\beta > 0$ утверждение леммы 3.6 верно.

Предположим теперь, что уравнение (3.158) при некотором $\beta \in (0, 1)$ имеет корень $\varkappa_0 = \exp(i\omega_0)$, $\omega_0 > 0$. Тогда с необходимостью

$$\begin{aligned}\beta^2 |\varkappa_0|^2 &= \beta^2 = |\varkappa_0^m - 1 + \beta|^2 = (\cos(m\omega_0) - 1 + \beta)^2 + \sin^2(m\omega_0) = \\ &= \beta^2 + 2(1 - \beta)(1 - \cos(m\omega_0)),\end{aligned}$$

а значит, $\cos(m\omega_0) = 1$ и $\varkappa_0^m = 1$. А отсюда и из (3.158), в свою очередь, заключаем, что $\varkappa_0 = 1$. Лемма 3.6 доказана.

3.3.5. Итоговые результаты

В данном пункте применим разработанные в п. 3.3.2 – 3.3.4 вспомогательные конструкции непосредственно к исходной системе (3.88). Напомним, что проблема существования ее самосимметричных циклов (3.89) сводится к отысканию периодических решений вспомогательного уравнения (3.90), имеющих период $m\Delta$. В связи с этим в дальнейшем периодическое решение уравнения (3.90), доставляемое теоремой 3.2, и его период будем обозначать через $x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)$ и $T_n^*(\varepsilon, \Delta)$ соответственно, подчеркивая явно зависимость этих функций от Δ . Аналогичным образом, через $T_n^0(\Delta)$ обозначим функцию от Δ , задающуюся правой частью равенства (3.116). Отметим еще, что все полученные в п. 3.3.3, 3.3.4 асимптотические формулы справедливы равномерно по $\Delta \in K$, где K – произвольный компакт из интервала $(1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$.

Изучим сначала вопрос о существовании $m\Delta$ -периодического решения у релейного уравнения (3.103) при условиях (3.104). С этой целью обратимся к уравнению

$$T_n^0(\Delta) = m\Delta\tag{3.159}$$

для отыскания $\Delta \in (1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$. Учитывая, далее, в (3.159) явные формулы (3.14), (3.17), (3.23), (3.108) – (3.110), (3.116), после некоторых преобразований приходим к выводу, что это уравнение эквивалентно уравнению для $z = \exp(-\mu\Delta)$, имеющему вид

$$P(z) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{n,1} z^m + \alpha_{n,2} z^{m-1} = 1,\tag{3.160}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{n,1} &= \exp(\mu(n + 1)T_0), \\ \alpha_{n,2} &= b(1 + 1/a)(\exp \mu - 1) \frac{\exp(\mu(n + 1)T_0) - 1}{\exp(\mu T_0) - 1}.\end{aligned}\tag{3.161}$$

во-вторых, равномерно по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\varkappa \in B(r)$

$$\tilde{h}(t, \varepsilon) = h(t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.155)$$

где Σ_1, Σ_2 – множества из (3.142), а через $h(t)$, $t \geq -\sigma_0$ обозначено решение импульсной задачи Коши

$$\dot{h} = -\mu h, \quad h|_{t=-\sigma_0} = 1, \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} h(1 + kT_0 + 0) &= h(1 + kT_0 - 0) - (1 + a)h(kT_0), \\ h(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= h(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (1 + 1/a)h(t_0 + kT_0), \\ h(\Delta + kT_0 + 0) &= h(\Delta + kT_0 - 0) - \varkappa b h(kT_0), \\ h(\Delta + t_0 + kT_0 + 0) &= h(\Delta + t_0 + kT_0 - 0) - (\varkappa b/a)h(t_0 + kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Что же касается свойства (3.153), то оно очевидным образом следует из (3.155) и из равенства $h(T_n^0 - \sigma_0) = 1 + \beta(\varkappa - 1)$, проверяемого посредством интегрирования системы (3.156), (3.157) (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Вернемся к оператору $W(\varepsilon)$. Объединяя оценку (3.152) с проделанным выше асимптотическим анализом (см. (3.154), (3.155)), приходим к выводу, что $W(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = \nu_*(\varkappa, \varepsilon) + O(\varepsilon)$, для которого в силу (3.153) справедливо асимптотическое представление (3.148). Остальные же собственные значения $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k \geq 2$ оператора $W(\varepsilon)$ допускают оценку (3.147) с некоторой универсальной (зависящей только от r) постоянной $M > 0$. Лемма 3.5 доказана.

В связи с равенством (3.148) и предстоящим в дальнейшем анализом уравнений (3.96) оказывается полезной следующая

Лемма 3.6. При любом $\beta \in (0, 1)$ все корни $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнения

$$1 + \beta(\varkappa - 1) = \varkappa^m \quad (3.158)$$

за исключением простого единичного лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

Доказательство. Пусть сначала $0 < \beta \ll 1$. Тогда интересующие нас корни $\varkappa = \varkappa_k(\beta)$, $k = 1, \dots, m-1$ уравнения (3.158) при $\beta = 0$ обращаются в $\exp(2\pi k i/m)$ и, как нетрудно убедиться, удовлетворяют неравенствам

$$\left. \frac{d}{d\beta} |\varkappa_k(\beta)|^2 \right|_{\beta=0} = -\frac{2}{m} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{m} \right) < 0, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

где

$$w_{1,1}^0(\tau, z) = W^{-1}(u)|_{u=-\tau+\theta_{1,1}}, \quad w_{1,2}^0(\tau, z) = W^{-1}(u)|_{u=-\tau+\theta_{1,2}}, \quad (1.170)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1,1}(z) &= d \int_0^\alpha [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_1(z), \\ \theta_{1,2}(z) &= \theta_{1,1}(z) + y_0(\alpha - 0, z), \end{aligned} \quad (1.171)$$

а $W^{-1}(u)$ – функция, обратная к

$$W(u) = u + \int_u^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{1 + \beta g(\exp s)} ds. \quad (1.172)$$

Отметим еще вытекающие из соотношений (1.170)–(1.172) равномерные по z асимптотические равенства

$$\begin{aligned} w_{1,j}(\tau, z) &= -\tau + \theta_{1,j}(z) + O(\exp \tau), \\ \frac{\partial w_{1,j}}{\partial z} &= \theta'_{1,j}(z) + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ w_{1,j}(\tau, z) &= -(\beta + 1)\tau + (\beta + 1)\theta_{1,j}(z) + c_2 + O(\exp(-(\beta + 1)\tau)), \\ \frac{\partial w_{1,j}}{\partial z} &= (\beta + 1)\theta'_{1,j}(z) + O(\exp(-(\beta + 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.173)$$

где

$$c_2 = \beta \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du - \beta(1 + \beta) \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du, \quad (1.174)$$

а также аналогичные (1.147), (1.165) соотношения

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha-\varepsilon^\delta} &= y_0(\alpha - 0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta} &= (\beta + 1)y_0(\alpha - 0, z) + O(\varepsilon^\delta) = y_0(\alpha + 0, z) + O(\varepsilon^\delta). \end{aligned} \quad (1.175)$$

При $\alpha + \varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha + 1 - \varepsilon^\delta$ снова справедливы асимптотические равенства (1.150), в которых $(\tilde{x}, \tilde{y})^\tau$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) - \beta - 1, \quad x|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta} = \varepsilon w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, \\ \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta} = (w_{1,2}(\tau, z, \varepsilon) - w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Используя предшествующую информацию о функциях $w_{1,j}(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ (см. (1.169)–(1.174)), нетрудно убедиться в том, что для решения $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ задачи (1.176) имеют место равномерные по t, z асимптотические формулы

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -(\beta+1)(t-\alpha) + \varepsilon d \int_{\alpha}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_2(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon d \int_{\alpha}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_2(z) \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta),\end{aligned}\tag{1.177}$$

где $c_2(z) = (\beta+1)\theta_{1,1}(z) + c_2$.

На очередном участке быстрых движений $\alpha+1-\varepsilon^\delta \leq t \leq \alpha+1+\varepsilon^\delta$ интересующее нас решение допускает аналогичные (1.164) асимптотические представления

$$\begin{aligned}(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T &= (-\beta-1 + \varepsilon w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon), w_{2,2}(\tau, z, \varepsilon) - \\ &\quad - w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon))^T \Big|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right)^T &= \left(\varepsilon \frac{\partial w_{2,1}}{\partial z}, \frac{\partial w_{2,2}}{\partial z} - \frac{\partial w_{2,1}}{\partial z} \right)^T \Big|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon^{1-\delta}} \right) \right).\end{aligned}\tag{1.178}$$

Здесь $(w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon), w_{2,2}(\tau, z, \varepsilon))^T$, $\tau \in J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dw_{2,1}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(w_{2,2} - w_{2,1}) - 1) - \beta - 1 + \alpha f(\exp w_{1,1}(\tau, z, \varepsilon)), \\ \frac{dw_{2,2}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(w_{2,1} - w_{2,2}) - 1) - \beta - 1 + \alpha f(\exp w_{1,2}(\tau, z, \varepsilon)), \\ w_{2,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{w}_{2,1}(z, \varepsilon), \quad w_{2,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{w}_{2,2}(z, \varepsilon),\end{aligned}$$

где $\bar{w}_{2,1} = (\tilde{x}(\alpha+1-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon) + \beta+1)/\varepsilon$, $\bar{w}_{2,2} = \bar{w}_{2,1} + \tilde{y}(\alpha+1-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x}, \tilde{y} – функции (1.177). Для компонент же $w_{2,j}(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, в свою очередь справедливы равномерные по $\tau \in J(\varepsilon)$ и z асимптотические представления

$$\begin{aligned}w_{2,j}(\tau, z, \varepsilon) &= w_{2,j}^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial w_{2,j}}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) &= \frac{\partial w_{2,j}^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{1.179}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно положительное r и будем считать, что параметр \varkappa в (3.145) принадлежит множеству $B(r)$. Далее, введем в рассмотрение конечномерный оператор

$$\widetilde{W}(\varepsilon)h_0 = h_0(-\sigma_0)\tilde{h}(t + T_n^*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \tag{3.150}$$

где $\tilde{h}(t, \varepsilon)$ – решение уравнения (3.145) на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $\tilde{h} \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (3.146) и (3.150). С этой целью рассмотрим функцию

$$h(t, \varepsilon) - h_0(-\sigma_0)\tilde{h}(t, \varepsilon) \tag{3.151}$$

и заметим, что при $t \in [-\sigma_0, T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0]$ она также является решением уравнения (3.145), а при $t = -\sigma_0$ обращается в нуль. Тем самым мы вправе применить к (3.151) оценку вида (3.144), которая для уравнения (3.145), естественно, сохраняется. Из упомянутой оценки следует, что

$$\|W(\varepsilon) - \widetilde{W}(\varepsilon)\|_{C[-\Delta-\sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-\Delta-\sigma_0, -\sigma_0]} \leq M\varepsilon, \tag{3.152}$$

где универсальная константа $M > 0$ зависит лишь от выбора r .

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (3.150). Нетрудно увидеть, что его спектр состоит из двух точек – простого собственного значения $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, где $\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = \tilde{h}(T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon)$, и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности. Что же касается собственного значения $\nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, то для него, как будет показано ниже, имеет место равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое равенство

$$\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{3.153}$$

где постоянная β определена формулами (3.149).

Для обоснования соотношения (3.153) необходимо знать асимптотическое поведение решения $\tilde{h}(t, \varepsilon)$. В связи с этим дополним уравнение (3.145) начальным условием $\tilde{h} \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0$ методом шагов, учитывая δ -образное поведение коэффициентов $A_n^*(t, \varepsilon)$, $B_n^*(t, \varepsilon)$ (см. (3.142), (3.143)). В результате убеждаемся, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0} |\tilde{h}(t, \varepsilon)| \leq M, \quad M = \text{const} > 0; \tag{3.154}$$

3.3.4. Анализ вспомогательного линейного уравнения

В данном пункте исследуем вопрос об асимптотическом поведении мультипликаторов аналогичного (3.94) линейного уравнения

$$\dot{h} = -\mu h + A_n^*(t, \varepsilon)h(t-1) + \varkappa B_n^*(t, \varepsilon)h(t-\Delta), \quad (3.145)$$

где $A_n^*(t, \varepsilon)$, $B_n^*(t, \varepsilon)$ – коэффициенты (3.92), вычисленные на найденном выше периодическом решении $x_n^*(t, \varepsilon)$ уравнения (3.90), а \varkappa – произвольный комплексный параметр.

Рассмотрим решение $h(t, \varepsilon)$ уравнения (3.145) с произвольной начальной функцией $h_0(t)$ из пространства $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Далее, обозначим через $W(\varepsilon)$ оператор монодромии уравнения (3.145), действующий в пространстве $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ по правилу:

$$W(\varepsilon)h_0 = h(t + T_n^*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (3.146)$$

где, напомним, $T_n^*(\varepsilon)$ – период цикла $x_n^*(t, \varepsilon)$.

Введем в рассмотрение собственные значения $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$ оператора (3.146), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.5. Для любого $r > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, $M = M(r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\varkappa \in B(r)$, где $B(r) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq r\}$, выполняется неравенство

$$\sup_{k \geq 2} |\nu_k(\varkappa, \varepsilon)| \leq M\varepsilon. \quad (3.147)$$

Что же касается мультипликатора $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$, то он является простым и допускает равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое представление

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.148)$$

где

$$\beta = \frac{\beta_0}{\exp(-\mu(\Delta - T_0)) + \beta_0}, \quad \beta_0 = b(1 + 1/a)(\exp \mu - 1) \frac{1 - \exp(-\mu(n+1)T_0)}{1 - \exp(-\mu T_0)}. \quad (3.149)$$

Остановимся на некоторых свойствах фигурирующих в (1.179) функций $w_{2,j}^0$, $j = 1, 2$. Отметим, во-первых, что они задаются аналогичными (1.159), (1.160) соотношениями

$$w_{2,j}^0(\tau, z) = -(\beta + 1)\tau + \theta_{2,j}(z) + \alpha \int_{-\infty}^{\tau} f(\exp w_{1,j}^0(s, z)) ds, \quad j = 1, 2, \quad (1.180)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{2,1}(z) &= d \int_{\alpha}^{\alpha+1} [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_2(z), \\ \theta_{2,2}(z) &= \theta_{2,1}(z) + y_0(\alpha + 1 - 0, z); \end{aligned} \quad (1.181)$$

во-вторых, при $\tau \rightarrow \pm\infty$ для них справедливы асимптотические представления (равномерные по z и допускающие дифференцирование по z)

$$\begin{aligned} w_{2,j}^0(\tau, z) &= -(\beta + 1)\tau + \theta_{2,j}(z) + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ w_{2,j}^0(\tau, z) &= (\alpha - \beta - 1)\tau + \theta_{2,j}(z) - \alpha \theta_{1,j}(z) + \\ &+ c_3 + O(\exp(-(\beta + 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.182)$$

где

$$c_3 = \int_0^1 \frac{\alpha(f(u) - 1)}{u(1 + \beta g(u))} du + \alpha \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + \beta g(u)}{u(1 + \beta g(u))} du. \quad (1.183)$$

И наконец, объединяя соотношения (1.178)–(1.183), приходим к аналогичным (1.147), (1.165), (1.175) формулам

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha+1-\varepsilon^\delta} &= y_0(\alpha + 1 - 0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} &= y_0(\alpha + 1 - 0, z) - \alpha y_0(\alpha - 0, z) + O(\varepsilon^\delta) = \\ &= y_0(\alpha + 1 - 0, z) - \frac{\alpha}{\beta + 1} y_0(\alpha + 0, z) + O(\varepsilon^\delta). \end{aligned} \quad (1.184)$$

На последнем из участков, а именно при $\alpha + 1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ для функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ в очередной раз справедливы равенства (1.150), в которых $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + \alpha - \beta - 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \\ x|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} &= -\beta - 1 + \varepsilon w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, \end{aligned}$$

$$y|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} = (w_{2,2}(\tau, z, \varepsilon) - w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}.$$

Функции \tilde{x} , \tilde{y} в данном случае допускают равномерные по t , z асимптотические представления

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - \beta - 1 + \\ &+ \varepsilon d \int_{\alpha+1}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_3(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon d \int_{\alpha+1}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c_3(z) \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (1.185)$$

где $c_3(z) = \theta_{2,1}(z) - \alpha \theta_{1,1}(z) + c_3$.

Подведем некоторый итог. В первую очередь обратим внимание, что все изложенные выше построения остаются в силе при замене специального начального условия $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $\varphi_1(t) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, $\varphi_2(t) \equiv z$, $z = \text{const} \in \mathbb{R}$, на произвольную начальную функцию $\varphi(t) \in S$. Действительно, нетрудно заметить, что при этом сохраняются все соотношения вида (1.117), (1.122), (1.149) и т.д. Тем самым для $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T$ остаются в силе базовые формулы

$$(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T = (\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon))^T + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$$

в случае, когда $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ задается равенствами из (1.119), (1.152), (1.166), (1.177), (1.185), и аналогичные формулы на участках быстрых движений (см. (1.146), (1.164), (1.168), (1.178)). А отсюда требуемое асимптотическое представление (1.115) вытекает очевидным образом.

Суммируя полученную информацию (см. (1.115), (1.118), (1.119), (1.146), (1.147), (1.149)–(1.153), (1.164)–(1.185)), приходим к выводу, что равномерно по $\varphi \in S$ выполняются асимптотические равенства

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad (1.186)$$

$$\max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_\varphi(t, \varepsilon) - y_0(t, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} = O(\varepsilon^\delta), \quad (1.187)$$

где $x_0(t)$ – функция (1.15), $y_0(t, z)$ – решение задачи Коши (1.105), (1.106), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок времени $[-\sigma_0, T_0 - \varepsilon^\delta]$ с выброшенными интервалами быстрых движений $(-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta)$, $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$,

где $M = \text{const} > 0$. Что же касается асимптотических формул (3.143), то они устанавливаются по той же схеме, что и аналогичные им соотношения (3.81), (3.82).

Вернемся к уравнению (3.140) и обозначим через $h(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ его решение с произвольным начальным условием $h_0(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$, $h_0(-\sigma_0) = 0$. Объединяя свойства (3.142), (3.143) коэффициентов (3.141) с асимптотическими представлениями

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \int_{1+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt = \\ &= (1+1/a) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= b \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \int_{\Delta+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt = \\ &= \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

и интегрируя уравнение (3.140) методом шагов, получаем аналогичное (3.85) неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)| \quad (3.144)$$

с независимой от ε , φ , h_0 постоянной $M > 0$. И наконец, учитывая оценку (3.144) в аналогичной (3.77) явной формуле для $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, приходим к выводу о сжимаемости оператора (3.120).

Из проделанных построений и принципа сжимающих отображений следует, что при условиях (3.117), (3.121), (3.139) на параметры σ_0 , q_1 , q_2 оператор Π_ε имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ единственную неподвижную точку $\varphi = \varphi_n^*(t, \varepsilon)$. Полагая, далее, $x_n^*(t, \varepsilon) = x_\varphi(t, \varepsilon)|_{\varphi=\varphi_n^*}$, $T_n^*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_n^*}$, получаем требуемое периодическое решение уравнения (3.90), обладающее свойствами (3.119). Теорема 3.2 доказана.

где

$$\Sigma_1 = [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}),$$

$$\Sigma_2 = [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}),$$

а постоянные $M_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$ не зависят от ε , φ . Кроме этого, имеют место равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические представления

$$\int_{1+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\int_{1+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt = -1 - 1/a + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \int_{\Delta+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt = -b + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\int_{\Delta+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt = -\frac{b}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.143)$$

где $k = 1, \dots, n+1$.

Для обоснования оценок (3.142) достаточно заметить, что в силу свойств (3.83) функции $f(u)$, аналогичных свойств $g(u)$ и полученных выше асимптотических представлений для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ справедливы неравенства

$$|A_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 + (t - 1 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2} + \frac{1}{1 + (t - 1 - t_0 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2}, \quad t \in \Sigma_1;$$

$$|B_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 + (t - \Delta - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2} + \frac{1}{1 + (t - \Delta - t_0 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2}, \quad t \in \Sigma_2,$$

$(\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$. Далее, из равенства (1.186) заключаем, что для отыскания второго положительного корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ следует воспользоваться асимптотическими представлениями (1.150), (1.185). Из этих формул и из очевидного свойства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = \alpha - \beta - 1 + O(\varepsilon)$, $t \in [\alpha + 1 + \varepsilon^\delta, T_0 - \varepsilon^\delta]$, вытекает, что требуемый корень находится однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi = T_0 + O(\varepsilon). \quad (1.188)$$

И наконец, объединяя формулы (1.186)–(1.188), убеждаемся в справедливости первого предельного равенства из (1.112).

1.2.4. Доказательство C^1 -сходимости

Обоснование второго предельного соотношения (1.112) помимо уже установленных асимптотических свойств решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))^T$ требует знания асимптотики при $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ решения $g(t, \varepsilon) = (g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))^T$ линейной системы (1.110) с произвольной начальной функцией $g_0(t) = (g_{1,0}(t), g_{2,0}(t))^T$ из пространства \mathcal{F}_0 . Как будет показано ниже, на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ имеет место оценка

$$\max_t \|g(t, \varepsilon) - \tilde{g}(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}) \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \quad (1.189)$$

где

$$\tilde{g}(t, \varepsilon) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}(t, z, \varepsilon), \frac{\partial y}{\partial z}(t, z, \varepsilon) \right)^T \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} g_{2,0}(-\sigma_0), \quad (1.190)$$

$M, q > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от ε , φ , g_0) постоянные, а символом $\|\cdot\|$ здесь и далее в зависимости от контекста обозначается кубическая векторная норма в \mathbb{R}^2 или индуцированная ей матричная норма.

Для доказательства неравенства (1.189) выполним в (1.110) замену $g = \tilde{g} + h$. Далее, обратим внимание, что вектор-функция $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет аналогичной (1.110) системе с матрицами $\tilde{A}(t, \varepsilon)$, $\tilde{B}(t, \varepsilon)$, вычисленными на решении $(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))^T|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$. Кроме того, из асимптотического представления (1.115) вытекает, что

$$A(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, \varepsilon) + \Delta_1(t, \varepsilon), \quad B(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) + \Delta_2(t, \varepsilon),$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|\Delta_j(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}), \quad j = 1, 2. \quad (1.191)$$

Поэтому для нахождения h получаем линейную систему

$$\dot{h} = A(t, \varepsilon)h + B(t, \varepsilon)h(t-1) + F(t, \varepsilon) \quad (1.192)$$

с неоднородностью $F(t, \varepsilon) = \Delta_1(t, \varepsilon)\tilde{g}(t, \varepsilon) + \Delta_2(t, \varepsilon)\tilde{g}(t-1, \varepsilon)$ и начальной функцией

$$h_0(t) = g_0(t) - (0, 1)^T g_{2,0}(-\sigma_0). \quad (1.193)$$

Исследование системы (1.192) начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Как обычно, перейдем от нее к соответствующему интегральному уравнению, которое с учетом вытекающего из (1.193) равенства $h_0(-\sigma_0) = 0$ примет вид

$$h(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t K(t, s, \varepsilon)B(s, \varepsilon)h_0(s-1)ds + \int_{-\sigma_0}^t K(t, s, \varepsilon)F(s, \varepsilon)ds.$$

где $K(t, \tau, \varepsilon)$ – матрица Коши системы $\dot{h} = A(t, \varepsilon)h$. Отсюда для функции $\gamma(t, \varepsilon) = \|h(t, \varepsilon)\|$ получаем оценку

$$\gamma(t, \varepsilon) \leq \gamma_0(\varepsilon) \max_{-\sigma_0 \leq \tau \leq t \leq 1-\sigma_0} \|K(t, \tau, \varepsilon)\|, \quad (1.194)$$

где

$$\gamma_0(\varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|B(s, \varepsilon)\| \|h_0(s-1)\| ds + \int_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|F(s, \varepsilon)\| ds. \quad (1.195)$$

Дальнейший анализ основан на следующих фактах, вытекающих из проведенных в предыдущем пункте асимптотических построений. Во-первых, в силу оценок из (1.191) и известных асимптотических свойств функции $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|F(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}) \|g_0\|_{\mathcal{F}}; \quad (1.196)$$

во-вторых, для матриц $K(t, \tau, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq \tau \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|K(t, \tau, \varepsilon)\| &\leq \frac{M_1}{\varepsilon}, \quad \int_{-\sigma_0}^{T_0 - \varepsilon^\delta} \|B(t, \varepsilon)\| dt \leq \frac{M_2}{\varepsilon}, \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} \|B(t, \varepsilon)\| &\leq M_3 \exp(-q/\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.197)$$

Подведем промежуточный итог. Из всей совокупности асимптотических представлений для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.123) – (3.126), (3.129) – (3.133)) следует, что равномерно по начальным функциям $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_n^0(t)| = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)). \quad (3.137)$$

Далее, из равенства (3.137) и условия (3.117), наложенного на σ_0 , заключаем, что требуемый $(2n+2)$ -ой по счету положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения (3.26) принадлежит отрезку $2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$. А отсюда и из формул (3.135), (3.136) вытекает, что T_φ определяется однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотику

$$T_\varphi = T_n^0 + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)). \quad (3.138)$$

Остается лишь добавить, что в силу равенств (3.137), (3.138) оператор (3.120) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, а при аналогичных (3.76) дополнительных условиях

$$q_1 > -\min_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_n^0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_n^0(t) \quad (3.139)$$

на параметры q_1, q_2 преобразует это множество в себя.

Для исследования вопроса о сжимаемости оператора (3.120) введем в рассмотрение уравнение в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$, имеющее вид

$$\dot{h} = -\mu h + A_\varphi(t, \varepsilon)h(t-1) + B_\varphi(t, \varepsilon)h(t-\Delta), \quad (3.140)$$

где коэффициенты A_φ, B_φ задаются аналогичными (3.92) равенствами

$$\begin{aligned} A_\varphi(t, \varepsilon) &= -\frac{a+1}{\varepsilon} f'(x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon), \\ B_\varphi(t, \varepsilon) &= -\frac{b}{\varepsilon} g'(x_\varphi(t-\Delta, \varepsilon)/\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Остановимся затем на необходимых в дальнейшем свойствах коэффициентов (3.141). Справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом леммы 3.2.

Лемма 3.4. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_1 \varepsilon, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0} |B_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M_2 \varepsilon, \\ \int_{\Sigma_1} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &\leq M_3 \sqrt{\varepsilon}, \quad \int_{\Sigma_2} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt \leq M_4 \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

а d_1^\pm – постоянные из (3.7).

При $\Delta + \tau_{2k} - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \Delta + \tau_{2k} + \sqrt{\varepsilon}$, $k = 1, \dots, n+1$ имеют место асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0) + \varepsilon w_{*,k}(\tau)|_{\tau=(t-\Delta-\tau_{2k})/\varepsilon} + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.132)$$

где

$$\begin{aligned} w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 + 0)\tau - b \int_0^\tau g(-as)ds; \\ w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 - 0)\tau + \frac{b}{a} d_1^+ \ln |\tau| + O(1), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 + 0)\tau + \frac{b}{a} d_1^- \ln \tau + O(1), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Следует, однако, напомнить, что пока наши построения, касающиеся отрезка времени $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$, носят условный характер, поскольку они были выполнены при априорном предположении (3.31). Но полученные на этом пути асимптотические формулы (3.129) – (3.133) и уже известные формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $t \in [\Delta - 1 - \sigma_0, \Delta - \sigma_0] \subset (t_0 + nT_0, \Delta]$ свидетельствуют о том, что при подходящем выборе постоянной $q > 0$ требуемое неравенство (3.31) действительно выполняется. Таким образом, все условные конструкции (3.129) – (3.133) обретают законную силу.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ рассмотрим отрезок времени $2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$ и предположим, что на нем имеют место априорные оценки

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \leq -q, \quad x_\varphi(t - \Delta, \varepsilon) \leq -q, \quad q = \text{const} > 0. \quad (3.134)$$

В этом случае в силу свойств (3.5), (3.7) уравнение (3.90) примет вид

$$\dot{x} = -\mu x + 1 + O(\varepsilon). \quad (3.135)$$

Дополним его начальным условием $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$, известным из предыдущих построений. Интегрируя затем получившуюся задачу Коши методом шагов, приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \theta(t - T_n^0) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad 2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2. \quad (3.136)$$

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что из самого равенства (3.136) и из установленных ранее асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$ вытекает справедливость априорных предположений (3.134) при соответствующем выборе константы $q > 0$.

Обратим внимание, что из (1.197) в некоторых пояснениях нуждается только первое неравенство (второе и третье – очевидные следствия проведенного нами асимптотического анализа). Для обоснования же первой из упомянутых оценок введем в рассмотрение матрицу Коши $\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)$ системы

$$\dot{h} = \tilde{A}(t, \varepsilon)h, \quad \tilde{A}(t, \varepsilon) = C^{-1}A(t, \varepsilon)C, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.198)$$

Заметим, далее, что в силу равенств (1.111) и полученных нами асимптотических формул для решений системы (1.97) матрица $\tilde{A}(t, \varepsilon)$ из (1.198) удовлетворяет оценке вида

$$\int_{-\sigma_0}^{T_0 - \varepsilon^\delta} \|\tilde{A}(t, \varepsilon)\| dt \leq M. \quad (1.199)$$

Далее, учитывая неравенство (1.199), заключаем, что для $\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)$ имеет место оценка

$$\|\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M.$$

Отсюда и из очевидного соотношения $K(t, \tau, \varepsilon) = C\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)C^{-1}$ получаем нужное неравенство для $K(t, \tau, \varepsilon)$.

Объединяя соотношения (1.194)–(1.197), приходим к выводу, что требуемое неравенство (1.189) выполняется на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Для распространения же его на оставшийся промежуток $1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ воспользуемся методом шагов. А именно разобьем указанный промежуток на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_0 - \varepsilon^\delta]$, где $k_0 = \lfloor T_0 - 2 + \sigma_0 - \varepsilon^\delta \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть. Заметим, далее, что из аналогичного (1.194) неравенства

$$\gamma(t, \varepsilon) \leq \gamma_{k+1}(\varepsilon) \max_{1 - \sigma_0 + k \leq \tau \leq t \leq 2 - \sigma_0 + k} \|K(t, \tau, \varepsilon)\|, \quad 1 - \sigma_0 + k \leq t \leq 2 - \sigma_0 + k,$$

где

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon) = \gamma(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) + \int_{1 - \sigma_0 + k}^{2 - \sigma_0 + k} \|B(s, \varepsilon)\| \gamma(s - 1, \varepsilon) ds + \int_{1 - \sigma_0 + k}^{2 - \sigma_0 + k} \|F(s, \varepsilon)\| ds,$$

и уже установленной оценки (1.189) на $(k-1)$ -м отрезке вытекает нужная оценка на k -м отрезке изменения t .

Полученная информация позволяет уже достаточно просто завершить доказательство теоремы 1.3. Действительно, при $T_\varphi - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ в силу неравенства $T_\varphi - 1 - \sigma_0 > \alpha + 1 + \varepsilon^\delta$ (вытекающего из условий (1.94) и (1.99)) для $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ справедливы асимптотические представления (1.150), в которых функции \tilde{x} , \tilde{y} задаются формулами (1.185). Отсюда и из оценки (1.189) очевидным образом имеем

$$\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_1(t + T_\varphi, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon \|g_0\|_{\mathcal{F}},$$

$$\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} \left| g_2(t + T_\varphi, \varepsilon) - g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z) \right|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} \leq M_2 \varepsilon^\delta \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \quad (1.200)$$

где постоянные $M_1, M_2 > 0$ не зависят от ε , φ , g_0 . И наконец, применяя оценки (1.200) непосредственно к оператору $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ (см. (1.108)), убеждаемся в справедливости второго предельного равенства из (1.112). Теорема 1.3 полностью доказана.

В заключение обсудим вопрос о справедливости аналогов теорем 1.3, 1.4 при отказе от второго условия из (1.94). Для формулировки соответствующего результата, считая выполненными требования

$$\sigma_0 < (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t),$$

на множестве S зададим оператор

$$\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi) = (x(t + T_z, z, \varepsilon), y(t + T_z, z, \varepsilon))|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (1.201)$$

где T_z – второй положительный корень уравнения $x(t - \sigma_0, z, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$.

Оператор (1.201), несмотря на его зависимость от ε , является некоторым аналогом предельного оператора (1.104). Проведенный выше асимптотический анализ и, в частности, соотношения (1.115), (1.189) позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.202)$$

t выполняется априорная оценка вида (3.31) с независимой от t , φ , ε постоянной $q > 0$. В этом случае в силу свойств (3.5) равномерно по t , φ

$$f(x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon) = O(\varepsilon). \quad (3.127)$$

Что же касается функции $x_\varphi(t - \Delta, \varepsilon)$, то для нее при $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$ справедлива серия асимптотических равенств (3.124) – (3.126), в которых необходимо заменить t на $t - \Delta$.

Итак, на интересующем нас промежутке времени, согласно (3.90), (3.127), исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + \mu x = 1 - b g(x_\varphi(t - \Delta, \varepsilon)/\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (3.128)$$

правая часть которого фактически уже известна. Точнее говоря, добавка $O(\varepsilon)$ в (3.128), естественно, обновляется по прошествии каждого отрезка времени длины 1. Но поскольку при интегрировании уравнения (3.90) методом шагов мы последовательно рассматриваем именно такие промежутки, то при каждом $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$ левая часть формулы (3.127) уже известна из предыдущего шага. Впрочем, ее явный вид несущественен. Важно лишь, что она имеет порядок ε .

Технические подробности, связанные с интегрированием уравнения (3.128), опустим. Как и выше, приведем лишь сводку итоговых результатов.

При $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$ выполняется аналогичное (3.124) асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(t) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.129)$$

где $x_n^0(t)$ – функция (3.118).

На отрезках $t \in (\Delta + \tau_{2k-1} - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_{2k-1} + \sqrt{\varepsilon})$, $k = 1, \dots, n + 1$ справедливы асимптотические формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(\Delta + (k - 1)T_0) + \varepsilon v_{*,k}(\tau)|_{\tau=(t-\Delta-\tau_{2k-1})/\varepsilon} + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.130)$$

где

$$\begin{aligned} v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k - 1)T_0 - 0)\tau - b \int_0^\tau g(s)ds; \\ v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k - 1)T_0 - 0)\tau - b d_1^- \ln |\tau| + O(1), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k - 1)T_0 + 0)\tau - b d_1^+ \ln \tau + O(1), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.131)$$

Формула (3.122), в свою очередь, позволяет отбросить соответствующее слагаемое в правой части из (3.90) и перейти к исследованию уравнения (3.8), свойства которого уже изучены. Поэтому здесь ограничимся лишь сводкой итоговых результатов.

Соотношение (3.122) свидетельствует о том, что при $-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с точностью до величин порядка ε совпадает с циклом уравнения (3.8), доставляемым теоремой 3.1. Далее, обратим внимание, что в силу условий (3.104), (3.121) точка $t = \Delta - \sigma_0$ принадлежит интервалу $(t_0 + 1 + nT_0, (n+1)T_0)$. А отсюда и из сделанного в п. 3.2.2 анализа вытекает, что на рассматриваемом промежутке уравнение $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет ровно $2n + 2$ простых корня $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{2n+2}$, где $\tau_j = \tau_j(\varepsilon, \varphi)$, $j = 1, \dots, 2n + 2$ допускают равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \tau_1 &= O(\varepsilon), \quad \tau_{2k} = t_0 + (k-1)T_0 + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad k = 1, \dots, n+1; \\ \tau_{2k-1} &= (k-1)T_0 + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad k = 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Объединяя затем равенства (3.123) с полученными в п. 3.2.2 асимптотическими формулами, приходим к следующим фактам.

На множестве $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$ справедливо асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.124)$$

где $x_0(t)$ – функция (3.23), а остаток здесь и во всех остальных встречающихся ниже случаях равномерен по t, φ .

На промежутках $(1 + \tau_{2k-1} - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_{2k-1} + \sqrt{\varepsilon})$, $k = 1, \dots, n+1$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_{2k-1}-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.125)$$

где $v_1(\tau)$ – функция (3.44).

На отрезках времени $(1 + \tau_{2k} - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_{2k} + \sqrt{\varepsilon})$, $k = 1, \dots, n+1$ имеют место формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t_0 + 1) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_{2k}-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.126)$$

где $w_1(\tau)$ – функция (3.66).

Следующий этап построения асимптотики $x_\varphi(t, \varepsilon)$ связан с рассмотрением отрезка $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$. Будем считать, что при указанных

Подчеркнем, что равенства (1.202) выполняются вне зависимости от знака величины $2(1 + \beta) - \alpha$. Однако при $2(1 + \beta) - \alpha > 0$ оператор $\tilde{P}_\varepsilon(\varphi)$ в свою очередь сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\Pi_0(\varphi)$ (в C^1 -метрике), и мы можем перейти к более простым соотношениям (1.112).

В случае $2(1 + \beta) - \alpha \leq 0$ такой переход уже невозможен, поскольку становится разрывной на отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ компонента $y_0(t + T_0, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$ оператора $\Pi_0(\varphi)$. Но тем не менее аналог теоремы 1.4 здесь остается в силе. Причина этого в том, что “предельный” оператор $\tilde{P}_\varepsilon(\varphi)$ является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \rightarrow y(t, z, \varepsilon)|_{t=T_z-\sigma_0}, \quad z = \varphi_2(-\sigma_0).$$

Последнее же при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится (в C^1 -метрике на любом конечном отрезке изменения z) к введенному выше отображению (1.113).

1.3. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов

В последней части главы рассматривается математическая модель нейронной системы, представляющая собой цепочку из произвольного числа m , $m \geq 2$, диффузионно связанных сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и с условиями типа Неймана на концах. Изучаются вопросы существования, асимптотики и устойчивости релаксационных периодических решений у этой системы.

1.3.1. Описание объекта исследования

Математическая модель, которая будет исследоваться ниже, имеет вид [14]

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \\ &\quad + \lambda[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)]u_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1.203)$$

где $m \geq 2$, $u_{m+1} = u_m$, $u_0 = u_1$. Здесь $u_j = u_j(t) > 0$ – мембранные потенциалы нейронов, $\lambda > 0$ – большой параметр, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, удовлетворяют неравенству (1.2). Функции

$f(u)$, $g(u)$, как и в предыдущем параграфе, будем считать принадлежащими классу $C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и обладающими свойствами (1.95).

При сформулированных условиях система (1.203) допускает так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (1.204)$$

где $u_*(t, \lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения

$$\dot{u} = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u \quad (1.205)$$

периода

$$T_*(\lambda) : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1). \quad (1.206)$$

Напомним, что существование и единственность у уравнения (1.205) требуемого цикла уже установлены нами в пункте 1.1.

В дальнейшем мы покажем, что, во-первых, однородный цикл (1.204) системы (1.203) экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d > 0$ и при всех $\lambda \gg 1$; во-вторых, при подходящем выборе параметров α , β и надлежащем уменьшении коэффициента диффузии d наряду с устойчивым однородным циклом эта система имеет не менее m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений. Последние по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть автоволновыми режимами.

1.3.2. Базовая теорема

Как и в случае $m = 2$, рассмотренном в предыдущем параграфе, следующий анализ системы (1.203) будем проводить в новых переменных x , y_1, \dots, y_{m-1} , где

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1. \quad (1.207)$$

Подставляя выражения (1.207) в систему (1.203), приходим к релаксационной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y_1 - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] + \\ &\quad + G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \\ j &= \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (1.208)$$

Теорема 3.2. Пусть при некотором целом $n \geq 0$ выполнены условия (3.104). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (3.90) допускает единственный цикл $x_n^*(t, \varepsilon)$, $x_n^*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \theta(-\sigma_0)$ периода $T_n^*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon)} |x_n^*(t, \varepsilon) - x_n^0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_n^*(\varepsilon) = T_n^0. \quad (3.119)$$

3.3.3. Доказательство теоремы 3.2

Поскольку обоснование сформулированной выше теоремы во многом аналогично изложенному в п. 3.2.3, 3.2.3 доказательству теоремы 3.1, то здесь опустим ряд технических деталей.

Как и ранее, фиксируем $q_1 \in (-\theta(-\sigma_0), +\infty)$, $q_2 \in (0, -\theta(-\sigma_0))$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям (3.25). Затем для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ введем в рассмотрение решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$ уравнения (3.90) с начальным условием $\varphi(t)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения (3.26) с номером $2n + 2$ (в предположении, что это уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n + 2)$ -х корней, занумерованных в порядке возрастания) и определим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ посредством аналогичного (3.27) равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.120)$$

Ниже будет показано, что при подходящем выборе параметров σ_0 , q_1 , q_2 оператор (3.120) действует из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и является в этом множестве сжимающим.

Для реализации описанной программы действий необходимо знать равномерную по φ асимптотику решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$. Соответствующий асимптотический анализ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0$, предполагая, что в дополнение к (3.117) выполнено неравенство

$$\sigma_0 < \Delta - t_0 - 1 - nT_0. \quad (3.121)$$

Далее, опираясь на оценки из (3.25) и свойства функции $g(u)$ (см. (3.7)), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$g(\varphi(t - \Delta)/\varepsilon) = O(\varepsilon). \quad (3.122)$$

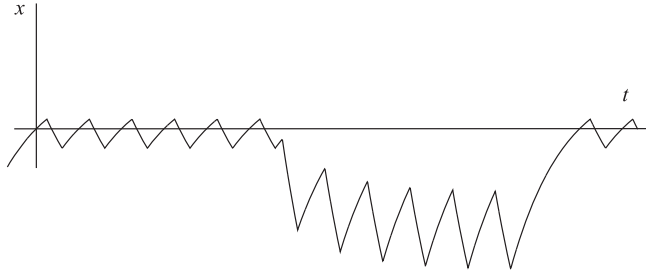


Рис. 3.2.

Остается добавить, что согласно (3.111), (3.115) априорные требования (3.112), (3.114) заведомо выполняются на промежутке $2\Delta \leq t \leq T_n^0$.

Как и в п. 3.2.1, распорядимся теперь выбором свободного параметра σ_0 из (3.105). В дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min(-x_0(\Delta), T_n^0 - \Delta - t_0 - nT_0), \quad (3.117)$$

обеспечивающее принадлежность функции $x_\varphi(t + T_n^0)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ множеству (3.105). Кроме того, из (3.117) следует, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0) = \theta(-\sigma_0)$ имеет на промежутке $(0, T_n^0]$ ровно $2n + 2$ корня (данный факт необходим для обоснования приведенной ниже теоремы 3.2).

Итак, при условии (3.117) процесс построения решения $x_\varphi(t)$ на отрезках времени $kT_n^0 - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_n^0 - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$ циклически повторяется. Тем самым при $t \geq -\sigma_0$ любое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (3.105) совпадает с T_n^0 -периодической функцией

$$x_n^0(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ x_0(\Delta) \exp(-\mu(t - \Delta)) + y_0(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq 2\Delta, \\ \theta(t - T_n^0) & \text{при } 2\Delta \leq t \leq T_n^0. \end{cases} \quad (3.118)$$

График функции (3.118) при $a = 2$, $b = 8$, $\Delta = 23$, $\mu = 0.2$ представлен на рис. 3.2 (при выбранных значениях параметров условия на Δ из (3.104) выполняются для $n = 5$).

Проделанный анализ показывает, что релейное уравнение (3.103) обладает теми же общими свойствами, что и рассмотренное ранее уравнение (3.10). А это значит, что справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 3.1.

где $y_0 = y_m = 0$, а функции F , G_j имеют вид

$$\begin{aligned} F(x, u, \varepsilon) &= -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \\ G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right)\right) \right] + \\ &+ \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) \right], \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Зафиксируем постоянную σ_0 , подчиненную требованиям $0 < \sigma_0 < \min((\beta+1)/(\alpha-\beta-1), 1)$, и на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$, где T_0 — величина из (1.206), обозначим через $y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z)$, $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, компоненты решения импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ y_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \\ y_j(1+0) &= y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0), \\ y_j(\alpha+0) &= (1 + \beta) y_j(\alpha-0), \\ y_j(\alpha+1+0) &= y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0), \\ j &= \overline{1, m-1}, \quad y_0 = y_m = 0, \end{aligned} \quad (1.209)$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \quad (1.210)$$

Далее, рассмотрим отображение

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_0-\sigma_0}, \quad (1.211)$$

действующее из \mathbb{R}^{m-1} в \mathbb{R}^{m-1} . Справедлива

Теорема 1.5. Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (1.211), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (1.208) при

всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл $(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon))$, $x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ периода $T(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad j = \overline{1, m-1},$$

где T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задана равенствами (1.15), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T(\varepsilon) - \sigma_0]$ с выброшенными интервалами $(-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta)$, $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$, $\delta = \text{const} \in (0, 1)$.

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в случае $m = 2$ оно подробно изложено в пункте 1.2. Единственный новый момент, появляющийся при $m > 2$ и нуждающийся в дополнительном анализе, связан с корректностью определения отображения (1.211).

Действительно, на промежутках $-\sigma_0 \leq t < 0$, $0 < t < 1$, $1 < t < \alpha$, $\alpha < t < \alpha + 1$ и $\alpha + 1 < t \leq T_0 - \sigma_0$ решение задачи Коши (1.209), (1.210) удовлетворяет нелинейной системе

$$\dot{y}_j = d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})],$$

$$j = \overline{1, m-1}, \quad y_0 = y_m = 0. \quad (1.212)$$

Таким образом, возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки времени, длины которых отнюдь не малы.

При $m = 2$ поставленный вопрос тривиален, так как в этом случае система (1.212) переходит в скалярное уравнение $\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y$. В случае же $m > 2$ ответ на него дает

Лемма 1.5. *Решение $(y_1(t), \dots, y_{m-1}(t))$ системы (1.212) с произвольным начальным условием $(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=0} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ определено на полуоси $t \geq 0$ и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.*

Для доказательства достаточно заметить, что любое решение системы (1.212) записывается в виде

$$y_j(t) = \ln(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)), \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (1.213)$$

где $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j = d(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}), \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{m+1} = \xi_m, \quad (1.214)$$

Перейдем теперь к рассмотрению отрезка $\Delta \leq t \leq \Delta + 1$ и заметим, что условия на Δ из (3.104) обеспечивают включение $t = \Delta \in (1 + t_0 + nT_0, (n+1)T_0)$. Тем самым в силу (3.23), (3.106) имеем $x_\varphi(t-1) < 0$ при $t \in [\Delta, \Delta + 1]$ и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (3.107) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x - bF(x_0(t - \Delta)), \quad x|_{t=\Delta} = x_0(\Delta).$$

А отсюда заключаем, что при $\Delta \leq t \leq \Delta + 1$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(\Delta) \exp(-\mu(t - \Delta)) + y_0(t - \Delta). \quad (3.111)$$

На следующем этапе обратим внимание, что при априорном условии

$$x_\varphi(t-1) < 0 \quad (3.112)$$

равенство (3.111) сохраняется на отрезке $\Delta \leq t \leq 2\Delta$. Но это условие действительно выполняется, поскольку, согласно (3.23), (3.104), (3.108) – (3.110),

$$x_0(\Delta) = x_0(\Delta - nT_0) = \theta(\Delta - (n+1)T_0) < 0,$$

$$y_0(t - \Delta) < 0 \text{ при } \forall t > \Delta. \quad (3.113)$$

Таким образом, при $\Delta \leq t \leq 2\Delta$ соотношение (3.111) обретает законную силу.

При рассмотрении значений $t \geq 2\Delta$ будем предполагать, что наряду с (3.112) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t - \Delta) < 0. \quad (3.114)$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x, \quad x|_{t=2\Delta} = x_0(\Delta) \exp(-\mu\Delta) + y_0(\Delta),$$

а значит, задается вытекающей (3.108) – (3.110), (3.113) формулой

$$x_\varphi(t) = \theta(t - T_n^0), \quad (3.115)$$

где

$$T_n^0 = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln[1 - \mu(x_0(\Delta) \exp(-\mu\Delta) + y_0(\Delta))] > 2\Delta. \quad (3.116)$$

где $\theta(t)$ – функция (3.12), и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$ решение уравнения (3.103) с произвольным начальным условием из класса (3.105).

При интегрировании уравнения (3.103) следует иметь в виду, что фигурирующие в его правой части функции $F(x(t-1))$, $F(x(t-\Delta))$ кусочно-постоянны и меняются лишь тогда, когда $x(t-1)$ или $x(t-\Delta)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0$ имеем одновременно $\varphi(t-1) < 0$ и $\varphi(t-\Delta) < 0$. Поэтому на указанном промежутке функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши (3.13), а значит, задается равенством (3.14). Добавим еще, что это равенство можно "протянуть" по t до тех пор, пока выполняются условия $x_\varphi(t-1) < 0$ и $x_\varphi(t-\Delta) < 0$. Следовательно, оно заведомо справедливо на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t < \Delta$ из уже проделанных построений вытекает, что $x_\varphi(t - \Delta) < 0$ и $F(x_\varphi(t - \Delta)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет уже изученному в п. 3.2.1 уравнению (3.10) и в силу этого определяется посредством равенства

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta, \quad (3.106)$$

где $x_0(t)$ – функция (3.23).

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x - bF(x_0(t)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (3.107)$$

Привлекая формулы (3.23), нетрудно увидеть, что при $t \geq 0$ она задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b-1)\theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ -(b-1)\theta(t_0)\exp(-\mu(t-t_0)) + \theta(t-t_0) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (3.108)$$

$$y_0(t) = -\delta_{k-1}\exp(-\mu(t - (k-1)T_0)) + y_0(t - (k-1)T_0) \quad \text{при } (k-1)T_0 \leq t \leq kT_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2, \quad (3.109)$$

где

$$\delta_k = \delta \frac{1 - \exp(-k\mu T_0)}{1 - \exp(-\mu T_0)}, \quad (3.110)$$

$$\delta = \frac{\theta(1)(1 + 1/a)(b\exp(-\mu) - a - 1)}{(1 + a(1 - \exp(-\mu)))(1 + (1 - \exp(-\mu))/a)}.$$

Добавим еще, что оценка из (3.104) на параметр b гарантирует выполнение при всех $t > 0$ необходимого в дальнейшем неравенства $y_0(t) < 0$.

принадлежащее инвариантному конусу $K = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) : \xi_j > 0, j = \overline{1, m}\}$. Учитывая, далее, в равенствах (1.213) известные свойства системы (1.214), касающиеся поведения ее решений при $t \rightarrow +\infty$, получаем требуемый результат.

1.3.3. Анализ предельного отображения

В первую очередь запишем правую часть отображения (1.211) в инвариантной форме, не зависящей от выбора параметра σ_0 . Для этого обозначим через $P^t(z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{m-1}$, $P^0(z) = z$, оператор сдвига по траекториям системы (1.212) и положим $\bar{z} = \Phi(z)$. Тогда отображение (1.211) может быть представлено в виде

$$\bar{z} = (P^{T_0-\alpha-1-\sigma_0} \circ P_4 \circ P^1 \circ P_3 \circ P^{\alpha-1} \circ P_2 \circ P^1 \circ P_1 \circ P^{\sigma_0})(z), \quad (1.215)$$

где через P_j , $j = \overline{1, 4}$, обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t = 0$, $t = 1$, $t = \alpha$ и $t = \alpha + 1$ соответственно, действующие по правилам

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} z, & P_2(z) &= z - \frac{\alpha}{\alpha-1} P^{-1}(z), \\ P_3(z) &= (\beta+1)z, & P_4(z) &= z - \frac{\alpha}{\beta+1} P^{-1}(z). \end{aligned} \quad (1.216)$$

Далее, применим к левой и правой частям получившегося равенства (1.215) оператор P^{σ_0} и выполним замену $P^{\sigma_0}(z) \rightarrow z$. В итоге с учетом очевидного соотношения $P^{T_0-\alpha-1-\sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ P^{T_0-\alpha-1}$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (P^{T_0-\alpha-1} \circ P_4 \circ P^1 \circ P_3 \circ P^{\alpha-1} \circ P_2 \circ P^1 \circ P_1)(z). \quad (1.217)$$

Поиск аттракторов отображения (1.217) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

Лемма 1.6. Нулевая неподвижная точка отображения (1.217) экспоненциально устойчива при любых значениях параметров $\alpha, \beta > 0$, удовлетворяющих условию (1.2), и при любом $d > 0$.

Доказательство. Несложно показать, что отвечающая точке $z = 0$ матрица Якоби $\Phi'_0(0)$ есть оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\begin{aligned}
\dot{h}_j &= d(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}), \\
h_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} h_j(-0), \\
h_j(1+0) &= h_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} h_j(+0), \\
h_j(\alpha + 0) &= (1 + \beta)h_j(\alpha - 0), \\
h_j(\alpha + 1 + 0) &= h_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} h_j(\alpha + 0), \\
j &= \overline{1, m-1}, \quad h_0 = h_m = 0,
\end{aligned} \tag{1.218}$$

за время от $t = -0$ до $t = T_0 - 0$. Далее, применим к системе (1.218) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{k=1}^{m-1} g_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{m} j\right), \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{1.219}$$

В результате убеждаемся в том, что компоненты $g_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, из равенства (1.219) являются решениями импульсной системы

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= -sg, \\
g(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} g(-0), \\
g(1+0) &= g(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} g(+0), \\
g(\alpha + 0) &= (1 + \beta)g(\alpha - 0), \\
g(\alpha + 1 + 0) &= g(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} g(\alpha + 0)
\end{aligned} \tag{1.220}$$

при $0 \leq t \leq T_0$, $s = s_k$, где

$$s_k = 4d \sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{1.221}$$

На завершающем этапе дополним систему (1.220) начальным условием $g|_{t=-0} = 1$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_k = g|_{t=T_0-0, s=s_k}$, где s_k – дискретные значения (1.221) параметра s . В итоге получаем набор чисел μ_k , $k = \overline{1, m-1}$, который, как нетрудно

с некоторой постоянной матрицей C размера $s \times s$.

Свойство (3.102) позволяет свести проблему обоснования формул (3.95), (3.96) к предыдущему случаю. Для того чтобы сделать это, фиксируем некоторое собственное значение s матрицы C , а через e обозначим отвечающий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_0(t, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)e$ справедливо соотношение (3.99). Последующие же рассуждения совпадают с изложенными выше. Лемма 3.3 доказана.

Итак, проблема существования у системы (3.88) самосимметричных циклов (3.89) сводится к поиску $m\Delta$ -периодических решений вспомогательного скалярного уравнения (3.90). Что же касается вопроса об устойчивости этих циклов, то он решается отдельно и в силу леммы 3.3 состоит в асимптотическом вычислении корней уравнений (3.96). Ниже оба эти вопроса исследуются как в общем случае, так и при дополнительном предположении о малости параметра μ .

3.3.2. Анализ вспомогательного нелинейного уравнения

В данном пункте сформулируем аналогичное теореме 3.1 утверждение о существовании у вспомогательного уравнения (3.90) релаксационного периодического движения. В связи с этим в первую очередь, опираясь на свойства (3.5), (3.7) функций $f(u)$, $g(u)$, перейдем от (3.90) к соответствующему релейному уравнению

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)F(x(t - 1)) - bF(x(t - \Delta)), \tag{3.103}$$

где $F(x)$ – функция из (3.9).

Как и в п. 3.2.1, понятие решения уравнения (3.103) будем определять конструктивно. С этой целью фиксируем произвольно целое неотрицательное n и предположим, что параметры a , b , μ , Δ из (3.103) удовлетворяют условиям

$$1 + t_0 + nT_0 < \Delta < (n + 1)T_0, \quad b > (a + 1) \exp \mu, \tag{3.104}$$

где, напомним, моменты времени t_0 и T_0 определены равенствами (3.17) и (3.20). Далее, фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (как и в п. 3.2.1, оценку сверху на этот параметр уточним в последующем), рассмотрим множество функций

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \\
\varphi(-\sigma_0) &= \theta(-\sigma_0),
\end{aligned} \tag{3.105}$$

отвечающее ему решение Ляпунова-Флоке. Отметим, далее, что поскольку система (3.91) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta \rightarrow t, \quad h_{j-1} \rightarrow h_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.98)$$

а мультипликатор ν простой, то решение (3.97) под действием этих замен перейдет в решение $c \exp(\alpha(t + \Delta))h_0(t, \varepsilon)$, где c – некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_0(t + \Delta, \varepsilon) = c h_0(t, \varepsilon), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

из которого, в свою очередь, выводим:

$$h_{0,m-j}(t, \varepsilon) = c^{j+1} h_{0,1}(t - (j+1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad c^m = 1. \quad (3.100)$$

Что же касается компоненты $h_{0,1}(t, \varepsilon)$, то в силу (3.100) она является $m\Delta$ -периодическим решением уравнения

$$\dot{h} = -(\mu + \alpha)h + \exp(-\alpha)A(t, \varepsilon)h(t-1) + cB(t, \varepsilon)h(t-\Delta). \quad (3.101)$$

Проделанные построения показывают, что уравнение (3.101) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем, далее, в этом уравнении замену $\exp(\alpha t)h \rightarrow h$. В результате единичный мультипликатор перейдет в $\exp(m\alpha\Delta)$, а само уравнение (3.101) – в уравнение (3.94) при $\varkappa = c \exp(\alpha\Delta)$. Таким образом, с необходимостью найдется номер k , для которого будут выполняться равенства

$$\nu_k(\varkappa, \varepsilon)|_{\varkappa = c \exp(\alpha\Delta)} = \exp(m\alpha\Delta) = \varkappa^m.$$

А это и означает, что справедливы соотношения (3.95), (3.96).

В случае, когда мультипликатор ν кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору отвечает ровно s линейно независимых решений Ляпунова-Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\alpha t)H(t, \varepsilon)$, где столбцами матрицы $H(t, \varepsilon)$ размера $m \times s$ являются линейно независимые $m\Delta$ -периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (3.91) под действием замен (3.98) здесь вместо (3.99) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t + \Delta, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)C \quad (3.102)$$

увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi'_0(0)$. Более того, справедливы соотношения

$$\mu_k = \mu(s)|_{s=s_k}, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\mu(s) = \frac{1}{\alpha - \beta - 1}(\alpha \exp s - \alpha + 1)(\alpha \exp s - \beta - 1) \exp(-sT_0).$$

Далее, несложная проверка показывает, что $\mu(0) = 1$, $\mu'(s) < 0 \quad \forall s > 0$, $\mu(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Отсюда очевидным образом следуют включения $\mu_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, m-1}$. Лемма 1.6 доказана.

В системе (1.208) неподвижной точке $z = 0$ отвечает цикл, являющийся аналогом однородного цикла (1.204) и имеющий компоненты $x(t, \varepsilon) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)|_{\lambda=1/\varepsilon}$, $y_j(t, \varepsilon) \equiv 0$, $j = \overline{1, m-1}$, где $u_*(t, \lambda)$ – функция из (1.204). Лемма 1.6 и теорема 1.5 приводят к выводу, что этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном значении $d > 0$ и при всех достаточно малых ε .

Отыскание других устойчивых неподвижных точек отображения (1.217) будем проводить в предположении малости параметра d , что позволяет асимптотически проинтегрировать систему (1.209) при $0 \leq t \leq T_0$ и при

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \quad (1.222)$$

где

$$\mathcal{U}_1 = \{(\alpha, \beta) : \alpha > (\beta + 1)(\beta + 2), \beta > 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(\alpha, \beta) : 1 < \alpha < 2, 0 < \beta < (\alpha - 1)(2 - \alpha)\}. \quad (1.223)$$

На этом пути приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.6. При любых фиксированных значениях α, β , удовлетворяющих включению (1.222), и при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (1.211) имеет m экспоненциально устойчивых неподвижных точек

$$O_{k_0}(d) = (z_{1,k_0}(d), z_{2,k_0}(d), \dots, z_{m-1,k_0}(d)), \quad k_0 = \overline{0, m-1}, \quad (1.224)$$

компоненты которых при $d \rightarrow 0$ в случае $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$ допускают асимптотику

$$z_{j,k_0} = \ln \frac{1}{d} - \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \ln(k_0 + 1 - j) + o(1), \quad j = \overline{1, k_0};$$

$$z_{j,k_0} = -\ln \frac{1}{d} + \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \ln(j - k_0) + o(1), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}, \quad (1.225)$$

а в случае $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ – асимптотику

$$\begin{aligned} z_{j,k_0} &= -(\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} - (\alpha - 1) \ln(k_0 + 1 - j) + \\ &\quad + \alpha \ln(\alpha - 1) + o(1), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ z_{j,k_0} &= (\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} + (\alpha - 1) \ln(j - k_0) - \\ &\quad - \alpha \ln(\alpha - 1) + o(1), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \end{aligned} \quad (1.226)$$

Доказательству этой теоремы посвятим следующий пункт. Здесь же отметим, что в совокупности с теоремой 1.5 она гарантирует наличие у исходной системы (1.203) (при условии (1.222) и при соответствующем уменьшении параметра d) не менее m устойчивых автоволновых периодических режимов, сосуществующих с устойчивым однородным циклом (1.204).

1.3.4. Обоснование теоремы 1.6

Предположим сначала, что $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$. Выберем затем некоторое целое k_0 , $0 \leq k_0 \leq m - 1$, и в соответствии с ожидаемыми равенствами (1.225) дополним систему (1.209) начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=0} &= \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=0} &= -\ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \end{aligned} \quad (1.227)$$

где $v_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m - 1}$. Далее, зафиксируем произвольно компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и обозначим через

$$(y_1(t, v, d), \dots, y_{m-1}(t, v, d))^T, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad v = (v_1, \dots, v_{m-1})^T \in \Omega, \quad (1.228)$$

решение получившейся задачи Коши (1.209), (1.227).

Согласно формулам (1.227) и правилам пересчета начальных условий в точке $t = 0$ (см. (1.209)), на отрезке $0 \leq t \leq 1$ после замен

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j &= -\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}; \\ \tau &= d^{-\delta_0} t, \quad \delta_0 = \beta / (\alpha - \beta - 1) \end{aligned} \quad (1.229)$$

Во избежание недоразумений поясним смысл термина "мультипликатор" применительно к системе (3.91). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([-1, 0]; \mathbb{R}^m)$ непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ вектор-функций $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ с нормой

$$\|h\|_E = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{-1 \leq t \leq 0} |h_j(t)|.$$

Далее, оператором монодромии системы (3.91) назовем ограниченный линейный оператор $V(\varepsilon) : E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $h(t) \in E$ по правилу:

$$V(\varepsilon)h = h(t + m\Delta, \varepsilon), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (3.93)$$

где $h(t, \varepsilon) = (h_1(t, \varepsilon), \dots, h_m(t, \varepsilon))$ – решение системы (3.91) на отрезке $0 \leq t \leq m\Delta$ с начальной функцией $h(t)$, $-1 \leq t \leq 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m\Delta > 1$ компактен и сам $V(\varepsilon)$). Что же касается мультипликаторов системы (3.91), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (3.93).

Наряду с (3.91) введем в рассмотрение вспомогательное скалярное линейное уравнение

$$\dot{h} = -\mu h + A(t, \varepsilon)h(t - 1) + \varkappa B(t, \varepsilon)h(t - \Delta) \quad (3.94)$$

с комплексным параметром \varkappa и обозначим через $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$ его мультипликаторы, занумерованные в порядке убывания модулей (в случае скалярного уравнения определение мультипликаторов аналогично данному выше). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Каждый мультипликатор $\nu : \nu \neq 0$ системы (3.91) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^m, \quad (3.95)$$

где \varkappa – корень одного из уравнений

$$\nu_k(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^m, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.96)$$

Доказательство. Фиксируем любой мультипликатор $\nu \neq 0$ системы (3.91) и предположим, что он является простым. Обозначим, далее, через

$$\begin{aligned} h(t, \varepsilon) &= \exp(\alpha t) h_0(t, \varepsilon), \quad h_0(t, \varepsilon) = \text{colon}(h_{0,1}(t, \varepsilon), \dots, h_{0,m}(t, \varepsilon)), \\ h_0(t + m\Delta, \varepsilon) &\equiv h_0(t, \varepsilon), \quad \alpha = \frac{1}{m\Delta} \ln \nu \end{aligned} \quad (3.97)$$

3.3. Релаксационные автоколебания в кольцевой нейронной сети

3.3.1. Общая схема исследования

Обратимся теперь к кольцевой модели (3.6). Как и выше, при асимптотическом анализе этой системы удобно сделать в ней замены $u_j = \lambda x_j$, $j = 1, \dots, m$. В результате указанных замен рассматриваемая система преобразуется к виду

$$\dot{x}_j = -\mu x_j + 1 - (a+1)f(x_j(t-1)/\varepsilon) - b g(x_{j-1}/\varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.88)$$

где $x_0 = x_m$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $a, b, \mu = \text{const} > 0$.

В дальнейшем будем интересоваться вопросом о существовании и устойчивости у системы (3.88) так называемых самосимметричных периодических движений, не меняющихся при циклических перестановках координат x_j , $j = 1, \dots, m$. Точнее говоря, речь пойдет о периодических решениях, допускающих представление вида

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.89)$$

где $\Delta > 0$, а функция $x(t, \varepsilon)$ – периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a+1)f(x(t-1)/\varepsilon) - b g(x(t-\Delta)/\varepsilon) \quad (3.90)$$

периода $T = m\Delta$.

Предположим, что уравнение (3.90) допускает требуемое $m\Delta$ -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$. Тогда вопрос об устойчивости соответствующего цикла (3.89) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = -\mu h_j + A(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_j(t-1) + B(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.91)$$

где $h_0 = h_m$, а коэффициенты $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ задаются равенствами

$$A(t, \varepsilon) = -\frac{a+1}{\varepsilon} f'(x(t-1, \varepsilon)/\varepsilon), \quad B(t, \varepsilon) = -\frac{b}{\varepsilon} g'(x(t-\Delta, \varepsilon)/\varepsilon). \quad (3.92)$$

приходим к задаче Коши

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\delta_0} H_2(h) + d^{1+\delta_0} H_3, \quad h|_{\tau=0} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} v, \quad (1.230)$$

где $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$, $H_k = (H_{1,k}, \dots, H_{m-1,k})^T$, $k = 1, 2, 3$, а компоненты $H_{j,k}$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} H_{j,1} &= \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{1, k_0-1}; \\ H_{k_0,1} &= -\exp h_{k_0}, \quad H_{k_0+1,1} = \exp(-h_{k_0+1}); \\ H_{j,1} &= \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{k_0+2, m-1}; \end{aligned} \quad (1.231)$$

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= \exp(-h_1), \quad H_{j,2} = \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{2, k_0-1}; \\ H_{k_0,2} &= \exp h_{k_0+1} + \exp(-h_{k_0}) - \exp(-h_{k_0-1}), \\ H_{k_0+1,2} &= \exp h_{k_0+2} - \exp h_{k_0+1} - \exp(-h_{k_0}), \end{aligned} \quad (1.232)$$

$$\begin{aligned} H_{j,2} &= \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{k_0+2, m-2}; \quad H_{m-1,2} = -\exp h_{m-1}; \\ H_{1,3} &= -1, \quad H_{j,3} = 0, \quad j = \overline{2, m-2}; \quad H_{m-1,3} = 1. \end{aligned} \quad (1.233)$$

Добавим еще, что переменная τ в системе (1.230) изменяется на асимптотически большом отрезке $J = [0, d^{-\delta_0}]$.

Для выявления асимптотических свойств компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения задачи (1.230) положим в ней $d = 0$. В результате придем к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dh_j}{d\tau} &= \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{1, k_0-1}; \\ \frac{dh_{k_0}}{d\tau} &= -\exp h_{k_0}; \quad \frac{dh_{k_0+1}}{d\tau} = \exp(-h_{k_0+1}), \\ \frac{dh_j}{d\tau} &= \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{k_0+2, m-1}; \end{aligned} \quad (1.234)$$

$$h_j|_{\tau=0} = \tilde{v}_j, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (1.235)$$

где $\tilde{v}_j = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} v_j$, $j = \overline{1, m-1}$. Как показывает несложная проверка, для компонент $h_j^0(\tau, v)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения получившейся задачи (1.234), (1.235) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s h_{k_0+r}^0(\tau, v) &= \ln \left\{ \frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-\ell} \tilde{v}_{k_0+j} \right) \right\}, \quad s = \overline{1, m-1-k_0}; \\ \sum_{r=0}^{s-1} h_{k_0-r}^0(\tau, v) &= -\ln \left\{ \frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp \left(-\sum_{j=1}^{s-\ell} \tilde{v}_{k_0-j+1} \right) \right\}, \quad s = \overline{1, k_0}. \end{aligned} \quad (1.236)$$

Строгий смысл описанным выше действиям придает

Лемма 1.7. *Равномерно по $\tau \in J$, $v \in \Omega$ имеют место асимптотические представления*

$$\begin{aligned} h_j(\tau, v, d) &= h_j^0(\tau, v) + O(d), \\ \frac{\partial h_j}{\partial v_s}(\tau, v, d) &= \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau, v) + O(d), \quad j, s = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Доказательство. Выполним в системе (1.230) замену $h = h^0(\tau, v) + \tilde{h}$, где $h^0(\tau, v) = (h_1^0(\tau, v), \dots, h_{m-1}^0(\tau, v))^T$. В результате приходим к задаче Коши для вектор-функции $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{m-1})^T$

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tau} = A(\tau)\tilde{h} + \Psi_0(\tau, \tilde{h}) + d^{2+2\delta_0}\Psi_1(\tau, \tilde{h}) + d^{1+\delta_0}\Psi_2, \quad \tilde{h}|_{\tau=0} = 0, \quad (1.238)$$

где

$$\begin{aligned} A(\tau) &= H'_1(h)|_{h=h^0(\tau, v)}, \\ \Psi_0(\tau, \tilde{h}) &= H_1(h^0(\tau, v) + \tilde{h}) - H_1(h^0(\tau, v)) - A(\tau)\tilde{h}, \\ \Psi_1(\tau, \tilde{h}) &= H_2(h^0(\tau, v) + \tilde{h}), \quad \Psi_2 = H_3, \end{aligned} \quad (1.239)$$

а вектор-функции H_1, H_2, H_3 заданы равенствами (1.231)–(1.233).

Обратим внимание на то, что задача (1.238) сингулярна в том смысле, что ее приходится рассматривать на асимптотически большом промежутке времени $\tau \in J$, т. е. необходимо знать поведение при $\tau \rightarrow +\infty$ матрицы $A(\tau)$ и вектор-функций Ψ_0, Ψ_1 . При решении этой задачи нам потребуются вытекающие из (1.236) асимптотические представления (равномерные по $v \in \Omega$)

$$\begin{aligned} h_j^0(\tau, v) &= -\ln \tau + \ln(k_0 + 1 - j) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ h_j^0(\tau, v) &= \ln \tau - \ln(j - k_0) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{k_0+1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.240)$$

Действительно, учитывая соотношения (1.240) в явных формулах (1.231)–(1.233) и (1.239), приходим к выводу о существовании для любого положительного r таких универсальных постоянных $M_s = M_s(r) > 0$, $s = 1, 2, 3$, что для любых векторов $\tilde{h}^{(1)}, \tilde{h}^{(2)}, \tilde{h} \in \mathbb{R}^{m-1}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\tilde{h}^{(1)}\|, \|\tilde{h}^{(2)}\|, \|\tilde{h}\| \leq r$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^{m-1} или индуцированная ей матричная норма), и для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$

приходим к выводу, что

$$\max_t |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \|h_0\|. \quad (3.86)$$

Для распространения оценки (3.86) на оставшийся отрезок $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем данный промежуток на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$ и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_\varphi - 2 \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на свойство интегральной ограниченности

$$\int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt \leq M,$$

имеющее место в силу (3.80) – (3.82), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |h(t, \varepsilon)| &\leq |h(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon)| \exp(-\mu(t - 1 + \sigma_0 - k)) + \\ &+ \int_{1 - \sigma_0 + k}^t \exp(-\mu(t - s)) |A_\varphi(s, \varepsilon)| \cdot |h(s - 1, \varepsilon)| ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + k \end{aligned}$$

и из уже полученной оценки вида (3.86) на $(k - 1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -ом отрезке изменения t .

На завершающем этапе применим неравенство (3.85) вместе с очевидной оценкой $\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M$, $M = \text{const} > 0$ к оператору (3.77). В итоге получаем неравенство

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M\varepsilon. \quad (3.87)$$

Остается добавить, что оценка (3.87) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$ в метрике фазового пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$. Теорема 3.1 доказана.

Завершая анализ математической модели отдельного нейрона, отметим, что исходное уравнение (3.4) при всех достаточно больших λ имеет устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) = \lambda x_*(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda},$$

обладающий выраженными релаксационными свойствами: амплитуда этого цикла асимптотически велика, а его период $T_*(\lambda)$ согласно (3.73) стремится при $\lambda \rightarrow \infty$ к конечному пределу T_0 .

Обратимся теперь к асимптотическим соотношениям (3.81), (3.82) и докажем, к примеру, первые два из них (вторые два обосновываются аналогично). С этой целью перейдем на отрезке $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ к переменной τ по формуле $\tau = (t - \tau_1 - 1)/\varepsilon$ (см. (3.38)). В этом случае $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon$ записывается в виде $x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$, а значит, в силу (3.42), (3.83) имеем

$$|f'(x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon) - f'(\tau)| \leq \frac{M|\tau|\sqrt{\varepsilon}}{1 + |\tau|^3}, \quad -1/\sqrt{\varepsilon} \leq \tau \leq 1/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.84)$$

Применим затем оценку (3.84) непосредственно к вычислению интегралов из (3.81). В результате убеждаемся, что равномерно по φ

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -(a+1) \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} f'(\tau) d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= (a+1) \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) = \\ &= (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Лемма 3.2 доказана.

Вернемся к интересующему нас вопросу об асимптотическом поведении фигурирующего в (3.77) решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (3.79). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \|h_0\| \quad (3.85)$$

с некоторой не зависящей от ε , φ , h_0 постоянной $M > 0$, где, напомним, $\|\cdot\|$ — норма в пространстве (3.78).

Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, на котором для коэффициента $A_\varphi(t, \varepsilon)$ справедлива первая оценка (3.80). Учитывая эту оценку в явной формуле

$$h(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t \exp(-\mu(t-s)) A_\varphi(s, \varepsilon) h_0(s-1) ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0,$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\Psi_0(\tau, \tilde{h}^{(1)}) - \Psi_0(\tau, \tilde{h}^{(2)})\| &\leq \frac{M_1}{\tau+1} \|\tilde{h}^{(1)} - \tilde{h}^{(2)}\|, \\ \|\Psi_1(\tau, \tilde{h}^{(1)}) - \Psi_1(\tau, \tilde{h}^{(2)})\| &\leq (\tau+1)M_2 \|\tilde{h}^{(1)} - \tilde{h}^{(2)}\|, \\ \|\Psi_1(\tau, \tilde{h})\| &\leq (\tau+1)M_3. \end{aligned} \quad (1.241)$$

Обратимся теперь к линейной системе $d\tilde{h}/d\tau = A(\tau)\tilde{h}$ и обозначим через $K(\tau, s)$, $K(s, s) = I$, $\tau \geq s \geq 0$, ее матрицу Коши. Из асимптотических равенств (1.240) и из явных формул (1.231), (1.239) вытекает, что

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\tau+1} + \Delta(\tau), \quad \|\Delta(\tau)\| \leq \frac{M}{\tau^2+1}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad (1.242)$$

где $A_0 = \text{diag}\{A_0^{(1)}, A_0^{(2)}\}$, $A_0^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)})_{i,j=1,k_0}$, $A_0^{(2)} = (a_{i,j}^{(2)})_{i,j=1,m-1-k_0}$,

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(1)} &= 0 \text{ при } j < i \text{ и } j > i+2, \quad a_{i,i}^{(1)} = -(k_0+1-i), \quad a_{i,i+1}^{(1)} = k_0-i; \\ a_{i,j}^{(2)} &= 0 \text{ при } j > i \text{ и } j < i-2, \quad a_{i,i}^{(2)} = -i, \quad a_{i,i-1}^{(2)} = i-1, \end{aligned} \quad (1.243)$$

а буквами M , M_1 и т. д. здесь и ниже обозначаем некоторые универсальные (не зависящие от τ и v) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Используя представление (1.242), для $K(\tau, s)$ получаем интегральное уравнение

$$K(\tau, s) = \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{s+1}\right) + \int_s^\tau \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{\sigma+1}\right) \Delta(\sigma) K(\sigma, s) d\sigma. \quad (1.244)$$

Учитывая, далее, в (1.244) неравенство для $\Delta(\tau)$ из (1.242) и вытекающую из (1.243) оценку

$$\left\| \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{s+1}\right) \right\| \leq M \frac{s+1}{\tau+1}, \quad \tau \geq s \geq 0,$$

приходим к интегральному неравенству для функции $v(\tau, s) = \|K(\tau, s)\|(\tau+1)/(s+1)$ вида

$$v(\tau, s) \leq M_1 + M_2 \int_s^\tau \frac{v(\sigma, s)}{1+\sigma^2} d\sigma,$$

из которого в свою очередь в силу леммы Гронуолла–Беллмана имеем

$$v(\tau, s) \leq M_1 \exp \left\{ \int_s^\tau \frac{M_2}{1 + \sigma^2} d\sigma \right\} \leq M_3.$$

Отсюда для исходной матрицы $K(\tau, s)$ получаем оценку

$$\|K(\tau, s)\| \leq M \frac{s+1}{\tau+1}, \quad \tau \geq s \geq 0. \quad (1.245)$$

Следующий способ действий стандартен. Перейдем от (1.238) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\tilde{h}(\tau) = \int_0^\tau K(\tau, s) \{ \Psi_0(s, \tilde{h}(s)) + d^{2+2\delta_0} \Psi_1(s, \tilde{h}(s)) + d^{1+\sigma_0} \Psi_2 \} ds \quad (1.246)$$

и обозначим через Π оператор, порожденный его правой частью в пространстве $C(J; \mathbb{R}^{m-1})$ непрерывных вектор-функций $\tilde{h}(\tau)$, $\tau \in J$, с нормой $\|\tilde{h}\|_C = \max_{\tau \in J} \|\tilde{h}(\tau)\|$. Из оценок (1.241), (1.245) вытекает, что этот оператор преобразует в себя некоторый замкнутый шар пространства $C(J; \mathbb{R}^{m-1})$ с центром в нуле радиуса $r = M_1 d$ и является в нем сжимающим с константой сжатия $q = M_2 d$, где $M_1, M_2 = \text{const} > 0$. Отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (1.246) имеет в упомянутом шаре единственное решение. Таким образом, установлена первая группа асимптотических равенств из (1.237).

Для доказательства второй группы асимптотических формул (1.237) зафиксируем натуральное s , $1 \leq s \leq m-1$, и продифференцируем задачу (1.230) по компоненте v_s . В результате для $g = (\partial h_1 / \partial v_s, \dots, \partial h_{m-1} / \partial v_s)^\tau$ получим задачу Коши

$$\frac{dg}{d\tau} = A(\tau, d)g, \quad g|_{\tau=0} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} e_s, \quad (1.247)$$

где e_s – единичный орт с номером s , а матрица $A(\tau, d)$ в силу (1.231)–(1.233) и уже установленных асимптотических формул для $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, допускает асимптотическое представление

$$A(\tau, d) = A(\tau) + dB(\tau, d), \quad \|B(\tau, d)\| \leq \frac{M}{\tau+1}, \quad \tau \in J. \quad (1.248)$$

где $\Sigma = [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^2 (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$. Кроме того, справедливы равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические формулы

$$\int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt = \frac{\dot{x}_0(1+0) - \dot{x}_0(1-0)}{\dot{x}_0(0)} + O(\sqrt{\varepsilon}) = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.81)$$

$$\int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt = (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon});$$

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt &= \frac{\dot{x}_0(1+t_0+0) - \dot{x}_0(1+t_0-0)}{\dot{x}_0(t_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}) = \\ &= -1 - 1/a + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt = (1 + 1/a) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств (3.5) функции $f(u)$ последовательно выводим:

$$\begin{aligned} |f'(u)| &\leq \frac{M}{1+u^2}, \quad |f''(u)| \leq \frac{M}{1+|u|^3} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ |f'(u_1) - f'(u_2)| &\leq \frac{M}{1 + \min(|u_1|^3, |u_2|^3)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

где здесь и ниже одной и той же буквой M обозначены различные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Далее, объединяя оценку на $f'(u)$ из (3.83) с установленными ранее асимптотическими представлениями для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, заключаем, что при $t \in \Sigma$

$$|A_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \left(\frac{1}{1 + (t-1)^2/\varepsilon^2} + \frac{1}{1 + (t-t_0-1)^2/\varepsilon^2} \right).$$

А отсюда требуемые неравенства (3.80) вытекают очевидным образом.

q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда, в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (3.8) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (3.72) – (3.74) обладает требуемыми свойствами (3.24).

3.2.3. Анализ свойств устойчивости

Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 3.1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (3.23). Из явной формулы (3.27) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)h_0 = h(t + T_\varphi, \varepsilon) - \frac{h(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.77)$$

Здесь функция $h_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{h_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] : h_0(-\sigma_0) = 0\} \quad (3.78)$$

с нормой $\|h_0\| = \max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)|$, а через $h(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ обозначено решение линейного уравнения

$$\dot{h} = -\mu h + A_\varphi(t, \varepsilon)h(t - 1), \quad A_\varphi(t, \varepsilon) = -\frac{a + 1}{\varepsilon} f'(x_\varphi(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon) \quad (3.79)$$

с начальной функцией $h_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Из явной формулы (3.77) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) : C_0 \rightarrow C_0$ сводится к анализу введенного выше решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (3.79). В связи с этим нам потребуются некоторые свойства коэффициента $A_\varphi(t, \varepsilon)$ из (3.79).

Лемма 3.2. *Найдутся такие не зависящие от ε , φ постоянные M_1 , $M_2 > 0$, что*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq -1 - \sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon, \quad \int_{\Sigma} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.80)$$

Далее, положим в (1.247) $g = g_0 + \tilde{g}$, где $g_0 = (\partial h_1^0 / \partial v_s, \dots, \partial h_{m-1}^0 / \partial v_s)^T$ – решение задачи Коши, получающейся из (1.247) при $d = 0$, и перейдем к аналогичному (1.246) линейному неоднородному интегральному уравнению

$$\tilde{g}(\tau) = d \int_0^\tau K(\tau, s) B(s, d) (g_0(s, v, d) + \tilde{g}(s)) ds. \quad (1.249)$$

Анализ уравнения (1.249) основан на неравенстве (1.245), оценке из (1.248) и вытекающих из (1.236) асимптотических формул (равномерных по $v \in \Omega$)

$$\frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau, v) = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j, s = \overline{1, m-1}. \quad (1.250)$$

Объединяя перечисленные факты и проводя те же рассуждения, что и в нелинейном случае (1.246), убеждаемся в том, что уравнение (1.249) имеет единственное решение $\tilde{g}(\tau, v, d) \in C(J; \mathbb{R}^{m-1})$, $\|\tilde{g}\|_C \leq Md$. Лемма 1.7 полностью доказана.

Возвратимся к решению (1.228) задачи Коши (1.209), (1.227). Подставляя в равенства (1.229) представления (1.237), приходим к выводу, что равномерно по $0 \leq t \leq 1$, $v \in \Omega$ имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j^0(\tau, v)|_{\tau=d-\delta_0 t} + O(d), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(t, v, d) &= -\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + \\ &\quad + h_j^0(\tau, v)|_{\tau=d-\delta_0 t} + O(d), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau, v) \Big|_{\tau=d-\delta_0 t} + O(d), \quad j, s = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.251)$$

Полагая затем в (1.251) $t = 1$ и учитывая асимптотические представления (1.240), (1.250), убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} y_j(1 - 0, v, d) &= \ln \frac{1}{d} + \ln(k_0 + 1 - j) + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(1 - 0, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} - \ln(j - k_0) + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(1 - 0, v, d) &= O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j, s = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.252)$$

Рассмотрим теперь отрезок $1 \leq t \leq \alpha$. В силу равенств (1.252) и правил пересчета начальных условий в точке $t = 1$ на этом промежутке времени решение (1.228) определяется из системы (1.212) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=1} &= -\frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + \ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1} v_j + \\ &\quad + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=1} &= \frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} - \ln(j-k_0) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1} v_j + \\ &\quad + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.253)$$

Равенства (1.253) указывают на целесообразность выполнения в (1.212) замены переменных

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j &= \frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0+1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.254)$$

Действительно, после указанной замены для нахождения $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$ получаем задачу Коши

$$\dot{h} = d^{1+\delta_1} H_1(h) + d^{1-\delta_1} H_2(h) + d H_3, \quad (1.255)$$

$$\begin{aligned} h_j|_{t=1} &= \ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1} v_j + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ h_j|_{t=1} &= -\ln(j-k_0) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1} v_j + O(d^{\min(1, \delta_0)}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.256)$$

Здесь $\delta_1 = (\beta+1)/(\alpha-\beta-1) < 1$ (в силу принадлежности точки (α, β) множеству \mathcal{U}_1 из (1.222), (1.223)), вектор-функции H_k , $k = 1, 2, 3$, те же, что и в (1.230), а остатки в (1.256) сохраняют свой порядок при дифференцировании по v_s , $s = \overline{1, m-1}$.

В отличие от предыдущего случая исследование задачи (1.255), (1.256) тривиально, поскольку ее правые части регулярно зависят от параметра d , а сама она рассматривается на конечном отрезке $1 \leq t \leq \alpha$. Поэтому для компонент $h_j(t, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, ее решения запишем сразу оконча-

Подведем некоторый итог. Из полученных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.30), (3.37), (3.55), (3.58), (3.62) – (3.71)) заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (3.72)$$

где $x_0(t)$ – функция (3.23), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Далее, опираясь на (3.72) и учитывая оценку (3.22), наложенную на параметр σ_0 , приходим к выводу, что интересующий нас второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения (3.26) принадлежит отрезку $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$. А отсюда и из равенства (3.71) (сохраняющего силу при дифференцировании по t) очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_0 - \frac{\chi}{1 + a(1 - \exp(-\mu))} \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (3.73)$$

Формулы (3.72), (3.73) свидетельствуют о том, что оператор (3.27) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)). \quad (3.74)$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (3.74) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_0(t) \in \hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (3.75)$$

где $\hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (3.25) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что свойства $x_0(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0)$, $x_0(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ гарантируются выбором σ_0 (см. (3.22)). Поэтому для проверки включения (3.75) достаточно убедиться, что

$$-q_1 < x_0(t) < -q_2 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0].$$

Справедливости же этих неравенств добиваемся за счет выбора свободных параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t). \quad (3.76)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (3.22), (3.33), (3.59), (3.76) на параметры σ_0, q_1 ,

На участке переключения $\tau_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \tau_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon}$ справедлива аналогичная (3.55) асимптотическая формула

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t_0 + 1) + w_0 \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_2-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (3.65)$$

Здесь $w_0 = -(a+1)c_1^+/a$, а функция $w_1(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ задается равенством

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0)\tau - (a+1) \int_0^\tau f(-as)ds \quad (3.66)$$

и обладает свойствами:

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0)\tau + (a+1)\frac{c_1^+}{a} \ln|\tau| + O(1), \quad (3.67)$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0)\tau + (a+1)\frac{c_1^-}{a} \ln \tau + O(1), \quad (3.68)$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Отметим еще вытекающие из (3.65) – (3.68) аналогичные (3.56) соотношения

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0) + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

На отрезке $\tau_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает аналогичную (3.58) асимптотику

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + \chi \exp(-\mu(t - t_0 - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon \frac{a+1}{a} c_1^- \ln(t - t_0 - 1) + O(\varepsilon), \quad (3.69)$$

где

$$\chi = \frac{a+1}{a} (c_1^- - c_1^+) \frac{(1-a^2)(1-\exp(-\mu))}{a+1-\exp(-\mu)}. \quad (3.70)$$

На промежутке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$ выполняется аналогичное (3.62) асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + \chi \exp(-\mu(t - t_0 - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (3.71)$$

тельный результат:

$$\begin{aligned} h_j(t, v, d) &= \ln(k_0 + 1 - j) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1} v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ h_j(t, v, d) &= -\ln(j - k_0) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1} v_j + \\ &\quad + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}, \end{aligned} \quad (1.257)$$

равномерно по $t \in [1, \alpha]$, $v \in \Omega$. Добавим еще, что равенства (1.257) сохраняются при дифференцировании по v_s , $s = \overline{1, m-1}$.

Соотношения (1.254), (1.257) и правила пересчета начальных условий в точке $t = \alpha$ приводят к выводу, что на очередном отрезке $\alpha \leq t \leq \alpha + 1$ компоненты решения (1.228) удовлетворяют системе (1.212), дополненной начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=\alpha} &= -\frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + (\beta+1) \ln(k_0 + 1 - j) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1} v_j + \\ &\quad + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \end{aligned} \quad (1.258)$$

$$\begin{aligned} y_j|_{t=\alpha} &= \frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} - (\beta+1) \ln(j - k_0) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1} v_j + \\ &\quad + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.259)$$

Анализ получившейся задачи Коши (1.212), (1.258), (1.259) идентичен изложенному выше исследованию задачи (1.212), (1.253): как и в предыдущем случае, после перехода к координатам h_j , $j = \overline{1, m-1}$, посредством аналогичных (1.254) равенств (в которых множитель $(\beta+1)/(\alpha-\beta-1)$ перед $\ln(1/d)$ заменяется на $(\beta+1)^2/(\alpha-\beta-1)$) для $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$ имеем уравнение вида (1.255), где δ_1 следует заменить на $\delta_2 = (\beta+1)^2/(\alpha-\beta-1)$. Подчеркнем, что в силу неравенства $\delta_2 < 1$, вытекающего из условия $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$, упомянутое уравнение регулярно зависит от d . Отсюда очевидным образом следует, что равномерно по $t \in [\alpha, \alpha + 1]$, $v \in \Omega$ имеют место аналогичные (1.254), (1.257) асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + (\beta+1) \ln(k_0 + 1 - j) - \\ &\quad - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1} v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \end{aligned} \quad (1.260)$$

$$y_j(t, v, d) = \frac{(\beta + 1)^2}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} - (\beta + 1) \ln(j - k_0) - \frac{\alpha(\beta + 1)}{\alpha - \beta - 1} v_j + \\ + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}, \quad (1.261)$$

сохраняющиеся при дифференцировании по переменным v_s , $s = \overline{1, m-1}$.

На оставшемся отрезке $\alpha + 1 \leq t \leq T_0$ сталкиваемся с той же ситуацией, что и в случае $0 \leq t \leq 1$. Согласно равенствам (1.260), (1.261) и импульсным соотношениям в точке $t = \alpha + 1$, здесь рассмотрению подлежит система (1.212) с начальными условиями

$$y_j|_{t=\alpha+1} = (\beta + 1) \ln \frac{1}{d} - (\alpha - \beta - 1) \ln(k_0 + 1 - j) + \alpha v_j + \\ + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \quad (1.262)$$

$$y_j|_{t=\alpha+1} = -(\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + (\alpha - \beta - 1) \ln(j - k_0) + \alpha v_j + \\ + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}. \quad (1.263)$$

Выполняя, далее, в задаче Коши (1.212), (1.262), (1.263) замены

$$y_j = (\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j = -(\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}; \quad \tau = d^{-\delta_3}(t - \alpha - 1), \quad (1.264)$$

где $\delta_3 = \beta$, преобразуем ее к аналогичному (1.230) виду

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\delta_3} H_2(h) + d^{1+\delta_3} H_3, \quad h|_{\tau=0} = \tilde{v}. \quad (1.265)$$

Здесь $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$, вектор-функции H_k , $k = 1, 2, 3$, те же, что и в (1.230), а компоненты вектора $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{m-1})^T$ задаются равенствами

$$\tilde{v}_j = -(\alpha - \beta - 1) \ln(k_0 + 1 - j) + \alpha v_j + \\ + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ \tilde{v}_j = (\alpha - \beta - 1) \ln(j - k_0) + \alpha v_j + \\ + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}. \quad (1.266)$$

Добавим еще, что задача (1.265) рассматривается на асимптотически большом отрезке $\tau \in J = [0, (T_0 - \alpha - 1)d^{-\delta_3}]$.

несложный анализ которой приводит к равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + (a + 1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (3.62)$$

Добавим еще, что на самом деле формула (3.62) сохраняется и на отрезке времени $2 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0$ (длина которого в силу неравенства (3.59) положительна). Обосновать этот факт позволяет так называемый метод шагов, суть которого состоит в следующем. Разобьем указанный отрезок на части длины не более единицы и на очередном промежутке, опираясь на равенство (3.62) (уже установленное на предыдущем участке изменения t), сначала получаем оценку вида (3.60), а затем распространяем соотношение (3.62) на шаг вперед. Ясно, что описанный процесс продолжается до тех пор, пока $x_0(t - 1) > 0$. Тем самым рассуждая подобным образом, мы заведомо добиваемся до точки $t = t_0 + 1 - \sigma_0$. Однако в силу равенства $x_0(t_0) = 0$ формула (3.62) не может быть пригодной до значения $t = t_0 + 1$.

Итак, окрестность точки $t = t_0 + 1$ требует отдельного рассмотрения. Для этого нам понадобится момент времени $t = \tau_2(\varepsilon, \varphi)$, являющийся корнем уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ из отрезка $t_0 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + \sigma_0$. Заметим, далее, что, поскольку этот отрезок содержится в промежутке $[1 + \sigma_0, t_0 + 1 - \sigma_0]$, то для отыскания корня $t = \tau_2$ мы вправе воспользоваться асимптотическим представлением (3.62) и вытекающим из (3.61), (3.62) соотношением

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{x}_0(t) - \mu(a + 1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon) < 0, \\ 1 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0.$$

В результате получаем равномерное по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотическое равенство

$$\tau_2 = t_0 + \frac{a + 1}{a}(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t_0 - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (3.63)$$

Последующие четыре шага асимптотического анализа решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ аналогичны уже рассмотренным случаям. Поэтому здесь приведем лишь сводку итоговых результатов.

На отрезке $t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq \tau_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}$ имеет место аналогичное (3.37) асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + (a + 1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t - 1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \\ + \varepsilon \frac{a + 1}{a} c_1^+ \ln(t_0 + 1 - t) + O(\varepsilon). \quad (3.64)$$

являющиеся следствием формул (3.55), (3.45), (3.46). Соотношения (3.56) свидетельствуют о том, что отрезок $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ действительно представляет собой участок переключения.

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0$, длина которого, согласно (3.33), меньше единицы. Таким образом, здесь функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ является известной: для нее справедливо асимптотическое представление (3.30), в котором t заменено на $t-1$. А отсюда и из свойств (3.5), в свою очередь, заключаем, что в данном случае имеет место аналогичная (3.36) асимптотическая формула

$$f(x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon) = 1 + c_1^+ \varepsilon / (t-1) + O(\varepsilon), \quad 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0. \quad (3.57)$$

Дальнейшие рассуждения повторяют практически дословно соответствующее место, предшествующее равенству (3.37). А именно, подставим соотношение (3.57) в правую часть уравнения (3.8) и дополним получившееся уравнение начальным условием (см. (3.55))

$$x|_{t=1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} = x_0(1) + \sqrt{\varepsilon} \dot{x}_0(1+0) + (v_0 - (a+1)c_1^+/2)\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

В результате после несложных преобразований приходим к очередному асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) - \varepsilon(a+1)c_1^+ \ln(t-1) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t-1))\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0. \quad (3.58)$$

Рассмотрим теперь отрезок времени $1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$, предполагая, что

$$\sigma_0 < (t_0 - 1)/2. \quad (3.59)$$

Условие (3.59) и уже установленные асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на отрезке $\sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ (см. (3.30), (3.37), (3.55), (3.58)) свидетельствуют о том, что здесь выполняется неравенство

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q \quad (3.60)$$

с некоторой универсальной константой $q > 0$. Далее, согласно свойствам (3.5) оценка (3.60) влечет за собой аналогичное (3.57) асимптотическое представление

$$f(x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon). \quad (3.61)$$

Таким образом, в силу (3.58), (3.61) на данном отрезке изучению подлежат задача Коши вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x - a + O(\varepsilon), \\ x|_{t=1+\sigma_0} &= x_0(1 + \sigma_0) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu\sigma_0)\varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

Из всего сказанного выше следует, что в данном случае мы находимся в условиях применимости леммы 1.7. Поэтому для компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения задачи (1.265) равномерно по $\tau \in J$, $v \in \Omega$ оказываются справедливыми асимптотические представления (1.237), в которых функции $h_j^0(\tau, v)$ по-прежнему определяются из задачи Коши (1.234), (1.235), но с учетом новых равенств (1.266). Отсюда и из (1.264), (1.240), (1.250) заключаем, что равномерно по $v \in \Omega$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} y_j(T_0, v, d) &= \ln \frac{1}{d} - \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \\ &\quad + \ln(k_0 + 1 - j) + O(d^\varkappa), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(T_0, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \\ &\quad - \ln(j - k_0) + O(d^\varkappa), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(T_0, v, d) &= O(d^\varkappa), \quad j, s = \overline{1, m-1}, \quad \varkappa = \min(\delta_0, 1 - \delta_1, 1 - \delta_2, \delta_3). \end{aligned} \quad (1.267)$$

Подведем промежуточный итог. Из асимптотических равенств (1.267) следует, что после выполнения в отображении (1.217) замен

$$z_j = \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad z_j = -\ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}, \quad (1.268)$$

оно преобразуется к виду

$$v \rightarrow v_* + O(d^\varkappa), \quad v_* = (v_1^*, \dots, v_{m-1}^*)^T, \quad (1.269)$$

где $v_j^* = -\ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \ln(k_0 + 1 - j)$, $j = \overline{1, k_0}$; $v_j^* = \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \ln(j - k_0)$, $j = \overline{k_0 + 1, m-1}$, а остаток имеет указанный порядок малости в метрике $C^1(\Omega)$. Теперь предположим, что вектор v_* является внутренней точкой множества Ω . Тогда, очевидно, отображение (1.269) при всех достаточно малых $d > 0$ допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$v(d) = v_* + O(d^\varkappa), \quad d \rightarrow 0. \quad (1.270)$$

И наконец, объединяя равенства (1.268), (1.270), приходим к требуемым соотношениям (1.224), (1.225).

В случае $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ рассуждения во многом аналогичны приведенным выше. Здесь в соответствии с (1.226) дополним систему (1.209) начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=0} &= -(\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=0} &= (\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \end{aligned} \quad (1.271)$$

где $v_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m - 1}$. Далее, из равенств (1.271) и из импульсных соотношений в точке $t = 0$ заключаем, что на отрезке $0 \leq t \leq 1$ рассмотрению подлежит задача Коши для системы (1.212) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=0} &= -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=0} &= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \end{aligned} \quad (1.272)$$

Как обычно, выполним в задаче (1.212), (1.272) замены

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j &= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \end{aligned} \quad (1.273)$$

В результате для $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$ приходим к задаче Коши

$$\dot{h} = d^{1+\gamma_0} H_1(h) + d^{1-\gamma_0} H_2(h) + d H_3, \quad h|_{t=0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} v, \quad (1.274)$$

где $\gamma_0 = (\alpha - 1)^2 / (\alpha - \beta - 1) < 1$ (в силу условия $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$), а вектор-функции H_k , $k = 1, 2, 3$, те же, что и в (1.230). Остается заметить, что поскольку задача (1.274) регулярно зависит от параметра d , то для компонент $h_j(t, v, d)$, $j = \overline{1, m - 1}$ ее решения справедливы равномерные по $t \in [0, 1]$, $v \in \Omega$ асимптотические равенства

$$h_j(t, v, d) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} v_j + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j = \overline{1, m - 1}, \quad (1.275)$$

сохраняющиеся при дифференцировании по v_s , $s = \overline{1, m - 1}$.

При $1 \leq t \leq \alpha$ в соответствии с равенствами (1.273), (1.275) и очередными импульсными соотношениями рассматриваем систему (1.212),

Для выявления асимптотических свойств правой части из (3.49) воспользуемся вытекающей из условий (3.5) оценкой

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(u_1^2, u_2^2)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.51)$$

где $M_1 = \sup_{u \in \mathbb{R}} (1 + u^2) |f'(u)| < \infty$. Объединяя неравенство (3.51) с формулами (3.42), (3.45), (3.46), приходим к выводу, что

$$\max_{\tau \in J(\varepsilon)} |\psi_{1,\varphi}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.52)$$

где $M_2 > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от ε, φ) постоянная.

Для оценки начального условия $\psi_{2,\varphi}$ подставим в (3.50) явное выражение для $v_\varphi(\varepsilon)$ (см. (3.40)) и воспользуемся свойствами (3.37), (3.45) функций $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $v_1(\tau)$. В результате после несложных преобразований убеждаемся, что

$$|\psi_{2,\varphi}| \leq M_3, \quad (3.53)$$

где, как и в (3.52), $M_3 > 0$ – некоторая универсальная постоянная.

Для завершения обоснования леммы обратимся к явному выражению

$$\tilde{v} = \psi_{2,\varphi} \exp(-\varepsilon \mu(\tau + 1/\sqrt{\varepsilon})) + \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{\tau} \exp(-\varepsilon \mu(\tau - s)) \psi_{1,\varphi}(s, \varepsilon) ds \quad (3.54)$$

для решения задачи Коши (3.48). Применяя к (3.54) уже установленные оценки (3.52), (3.53), получаем неравенство

$$\max_{\tau \in J(\varepsilon)} |\tilde{v}| \leq M_4$$

с универсальной постоянной $M_4 > 0$. А это, собственно, и означает, что справедливо асимптотическое представление (3.47). Лемма 3.1 доказана.

Возвращаясь к исходному решению $x_\varphi(t, \varepsilon)$, заметим, что для него на отрезке времени $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ из (3.38), (3.47) вытекает асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + v_0 \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_1-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (3.55)$$

Приведем еще равенства

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}} &= \dot{x}_0(1 - 0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} &= \dot{x}_0(1 + 0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

Введем в рассмотрение решение

$$v_1(\tau) = \dot{x}_0(1-0)\tau - (a+1) \int_0^\tau f(s)ds, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (3.44)$$

уравнения (3.43) и заметим, что в силу свойств (3.5) для него при $\tau \rightarrow \pm\infty$ справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= \dot{x}_0(1-0)\tau - (a+1)c_1^- \ln|\tau| + O(1), \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= \dot{x}_0(1-0) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= \dot{x}_0(1+0)\tau - (a+1)c_1^+ \ln\tau + O(1), \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= \dot{x}_0(1+0) + O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где c_1^- , c_1^+ – константы из разложений (3.5).

Как оказывается, функция (3.44) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (3.39), (3.40). А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Для решения $v = v_\varphi(\tau, \varepsilon)$ задачи Коши (3.39), (3.40) имеет место равномерное по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$, $\tau \in J(\varepsilon)$ асимптотическое представление

$$v_\varphi(\tau, \varepsilon) = v_0 \ln(1/\varepsilon) + v_1(\tau) + O(1), \quad (3.47)$$

где $v_0 = (a+1)c_1^-$.

Доказательство. Полагая в (3.39), (3.40) $v = v_0 \ln(1/\varepsilon) + v_1(\tau) + \tilde{v}$, для нахождения \tilde{v} приходим к задаче Коши

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} + \varepsilon\mu\tilde{v} = \psi_{1,\varphi}(\tau, \varepsilon), \quad \tilde{v}|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = \psi_{2,\varphi}(\varepsilon), \quad (3.48)$$

где

$$\psi_{1,\varphi} = -\varepsilon\mu(v_0 \ln(1/\varepsilon) + v_1(\tau)) - (a+1)[f(x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon) - f(\tau)], \quad (3.49)$$

$$\psi_{2,\varphi} = v_\varphi(\varepsilon) - v_0 \ln(1/\varepsilon) - v_1(\tau)|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.50)$$

Установим затем некоторые свойства неоднородностей (3.49), (3.50), необходимые для анализа задачи (3.48).

дополненную начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=1} &= \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha-\beta-1} v_j + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=1} &= -\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha-\beta-1} v_j + \\ &\quad + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.276)$$

Сделаем в задаче (1.212), (1.276) аналогичные (1.229) замены

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j &= -\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0+1, m-1}; \\ \tau &= d^{-\gamma_1}(t-1), \quad \gamma_1 = \beta/(\alpha-\beta-1), \end{aligned} \quad (1.277)$$

приводящие ее к аналогичному (1.230) виду

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\tau} &= H_1(h) + d^{2+2\gamma_1} H_2(h) + d^{1+\gamma_1} H_3, \\ h|_{\tau=0} &= -\frac{1}{\alpha-\beta-1} v + O(d^{1-\gamma_0}), \end{aligned} \quad (1.278)$$

где $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$. Остается воспользоваться леммой 1.7, из которой следует, что для компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения задачи (1.278) равномерно по $\tau \in [0, (\alpha-1)d^{-\gamma_1}]$, $v \in \Omega$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} h_j(\tau, v, d) &= h_j^0(\tau, v) + O(d^{1-\gamma_0}), \\ \frac{\partial h_j}{\partial v_s}(\tau, v, d) &= \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau, v) + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j, s = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (1.279)$$

где функции $h_j^0(\tau, v)$ определяются из задачи Коши (1.234), (1.235) при $\tilde{v}_j = -v_j/(\alpha-\beta-1)$, $j = \overline{1, m-1}$.

Объединяя соотношения (1.277), (1.279), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} y_j(\alpha-0, v, d) &= \ln \frac{1}{d} - \ln(\alpha-1) + \ln(k_0+1-j) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(\alpha-0, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln(\alpha-1) - \ln(j-k_0) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(\alpha-0, v, d) &= O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad j, s = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (1.280)$$

Отсюда и из импульсных соотношений в точке $t = \alpha$ вытекает, что на очередном отрезке $\alpha \leq t \leq \alpha + 1$ надо рассматривать систему (1.212) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=\alpha} &= (\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + (\beta + 1) \ln \frac{k_0 + 1 - j}{\alpha - 1} + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=\alpha} &= -(\beta + 1) \ln \frac{1}{d} - (\beta + 1) \ln \frac{j - k_0}{\alpha - 1} + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \end{aligned} \quad (1.281)$$

Задача Коши (1.212), (1.281) после замен

$$\begin{aligned} y_j &= (\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j &= -(\beta + 1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}; \\ \tau &= d^{-\gamma_2}(t - \alpha), \quad \gamma_2 = \beta, \end{aligned} \quad (1.282)$$

в свою очередь преобразуется к аналогичной (1.278) задаче

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\gamma_2} H_2(h) + d^{1+\gamma_2} H_3, \quad h|_{\tau=0} = \tilde{v} + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1)}), \quad (1.283)$$

где $h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{m-1})^T$, $\tilde{v}_j = (\beta + 1) \ln \frac{k_0 + 1 - j}{\alpha - 1}$, $j = \overline{1, k_0}$; $\tilde{v}_j = -(\beta + 1) \ln \frac{j - k_0}{\alpha - 1}$, $j = \overline{k_0 + 1, m - 1}$, а τ изменяется на асимптотически большом отрезке $0 \leq \tau \leq d^{-\gamma_2}$.

Нетрудно увидеть, что к задаче (1.283) применима лемма 1.7, а значит, для компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m - 1}$, ее решения выполняются аналоги равенств (1.237). Объединяя их с (1.282), убеждаемся в справедливости аналогичных (1.280) асимптотических представлений

$$\begin{aligned} y_j(\alpha + 1 - 0, v, d) &= \ln \frac{1}{d} + \ln(k_0 + 1 - j) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(\alpha + 1 - 0, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} - \ln(j - k_0) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}; \end{aligned} \quad (1.284)$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial v_s}(\alpha + 1 - 0, v, d) = O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j, s = \overline{1, m - 1}.$$

Подставим затем равенство (3.36) в правую часть уравнения (3.8) и дополним это уравнение начальным условием

$$x|_{t=1-\sigma_0} = x_\varphi(1 - \sigma_0, \varepsilon) = x_0(1 - \sigma_0) + O(\varepsilon).$$

Несложный анализ получившейся задачи Коши приводит к выводу, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) - \varepsilon(a + 1)c_1^- \ln(1 - t) + O(\varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.37)$$

Построим теперь асимптотику по ε интересующего нас решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на участке переключения $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$, что, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [10], [11], представляет основную трудность. При рассматриваемых t будем искать $x_\varphi(t, \varepsilon)$ в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + \varepsilon v(\tau, \varepsilon), \quad \tau = (t - \tau_1 - 1)/\varepsilon. \quad (3.38)$$

Подставляя, далее, соотношения (3.38) в уравнение (3.8) и принимая во внимание уже известную информацию об $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.30), (3.35), (3.37)), для определения $v(\tau, \varepsilon)$ приходим к задаче Коши

$$\frac{dv}{d\tau} + \varepsilon \mu v = \dot{x}_0(1 - 0) - (a + 1)f(x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon), \quad (3.39)$$

$$v|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = v_\varphi(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (x_\varphi(1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) - x_0(1))/\varepsilon, \quad (3.40)$$

где τ меняется на асимптотически большом отрезке $J(\varepsilon) = [-1/\sqrt{\varepsilon}, 1/\sqrt{\varepsilon}]$.

Для выявления свойств правой части уравнения (3.39) разложим функцию $x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$ по формуле Тейлора в точке $\tau = 0$. В результате с учетом равенства $x_\varphi(\tau_1, \varepsilon) = 0$ получаем представление

$$x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = \dot{x}_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon)\tau, \quad (3.41)$$

где значение $\bar{\tau}$ таково, что $|\bar{\tau}| \leq |\tau|$. Учитывая, далее, в (3.41) асимптотические формулы (3.34), (3.35) и очевидную оценку $|\bar{\tau}| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$, убеждаемся, что

$$x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = (1 + O(\sqrt{\varepsilon}))\tau, \quad (3.42)$$

где остаток равномерен по τ , φ . И наконец, подставим соотношение (3.42) в (3.39) и положим $\varepsilon = 0$. В результате приходим к модельному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = \dot{x}_0(1 - 0) - (a + 1)f(\tau). \quad (3.43)$$

Следует отметить, что область применимости асимптотической формулы (3.30) можно расширить. Действительно, из первого асимптотического свойства (3.5) вытекает, что при выполнении априорного условия

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q \quad (3.31)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от t, ε, φ) постоянной $q > 0$ справедливо представление

$$f(x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon) = \frac{\varepsilon c_1^-}{x_\varphi(t-1, \varepsilon)} + O(\varepsilon^2), \quad (3.32)$$

где c_1^- – коэффициент из (3.5). Подставляя, далее, соотношение (3.32) в правую часть уравнения (3.8), получаем требуемое асимптотическое равенство (3.30). Остается добавить, что поскольку $x_0(t) < 0$ при $t \in [-\sigma_0, 0)$, то оценка (3.31) и представление (3.30) сохраняют силу на любом отрезке вида $[1 - \sigma_0, 1 - \bar{\sigma}]$, где $\bar{\sigma}$ – произвольно фиксированная постоянная из интервала $(0, \min(1, \sigma_0))$. Однако поскольку $x_0(0) = 0$, то до значения $t = 1$ равенство (3.30) "дотянуть" заведомо невозможно.

Для преодоления описанной выше трудности, предполагая, что

$$\sigma_0 < 1/2, \quad (3.33)$$

дополним на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ формулу (3.30) вытекающим из (3.8), (3.32) асимптотическим равенством

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{x}_0(t) + O(\varepsilon) = \exp(-\mu t) + O(\varepsilon) > 0. \quad (3.34)$$

В результате убеждаемся, что на данном отрезке уравнение $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет единственный корень $t = \tau_1(\varepsilon, \varphi)$, причем равномерно по φ

$$\tau_1 = O(\varepsilon). \quad (3.35)$$

Обратимся теперь к очередному отрезку времени $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}$. Поскольку в силу (3.33) его длина меньше единицы, то при указанных t функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ нам известна. А именно, для нее справедливо асимптотическое равенство (3.30), в котором t следует заменить на $t-1$. Объединяя упомянутое равенство с формулами (3.5), (3.35), приходим к выводу, что в данном случае вместо (3.32) выполняется асимптотическое представление

$$f(x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon) = c_1^- \varepsilon / (t-1) + O(\varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.36)$$

На заключительном отрезке $\alpha + 1 \leq t \leq T_0$, согласно (1.284) и импульсным соотношениям при $t = \alpha + 1$, получаем систему (1.212) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=\alpha+1} &= -(\alpha-1) \ln \frac{1}{d} - (\alpha-1) \ln(k_0 + 1 - j) + \alpha \ln(\alpha-1) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j|_{t=\alpha+1} &= (\alpha-1) \ln \frac{1}{d} + (\alpha-1) \ln(j - k_0) - \alpha \ln(\alpha-1) + \\ &\quad + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}, \end{aligned}$$

которая в силу неравенства $\alpha - 1 < 1$ (см. определение множества \mathcal{U}_2) после замен

$$y_j = -(\alpha-1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad y_j = (\alpha-1) \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1},$$

преобразуется к регулярно зависящей от d задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{h} &= d^{1+\gamma_3} H_1(h) + d^{1-\gamma_3} H_2(h) + d H_3, \quad h = (h_1, \dots, h_{m-1})^T, \\ h_j|_{t=\alpha+1} &= -(\alpha-1) \ln(k_0 + 1 - j) + \alpha \ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ h_j|_{t=\alpha+1} &= (\alpha-1) \ln(j - k_0) - \alpha \ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}, \end{aligned}$$

где $\gamma_3 = \alpha - 1$. Отсюда очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} y_j(T_0, v, d) &= -(\alpha-1) \ln \frac{1}{d} - (\alpha-1) \ln(k_0 + 1 - j) + \\ &\quad + \alpha \ln(\alpha-1) + O(d^\varkappa), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ y_j(T_0, v, d) &= (\alpha-1) \ln \frac{1}{d} + (\alpha-1) \ln(j - k_0) - \\ &\quad - \alpha \ln(\alpha-1) + O(d^\varkappa), \quad j = \overline{k_0 + 1, m-1}; \end{aligned} \quad (1.285)$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial v_s}(T_0, v, d) = O(d^\varkappa), \quad j, s = \overline{1, m-1}, \quad \varkappa = \min(1 - \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, 1 - \gamma_3).$$

Для окончания доказательства теоремы 1.6 обратимся к формулам (1.285) и повторим все рассуждения, идущие после равенств (1.267) и завершающие рассмотрение случая $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$. В итоге убеждаемся в существовании при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ у отображения (1.211) устойчивых неподвижных точек (1.224) с асимптотикой (1.226).

1.3.5. Заключительные замечания

В первую очередь поставим вопрос, можно ли расширить область (1.222) изменения параметров α, β , в которой существуют устойчивые неподвижные точки (1.224). В связи с этим представим множество $\mathcal{U} = \{(\alpha, \beta) : \alpha > \beta + 1, \beta > 0\}$ всех допустимых параметров в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4 \cup \mathcal{U}_5 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad (1.286)$$

где $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ – области (1.223),

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3 &= \{(\alpha, \beta) : 2\beta + 2 < \alpha < (\beta + 1)(\beta + 2), \beta > 0\}, \\ \mathcal{U}_4 &= \{(\alpha, \beta) : \max(2, 1 + \beta) < \alpha < 2\beta + 2, \beta > 0\}, \\ \mathcal{U}_5 &= \{(\alpha, \beta) : 1 < \alpha < 2, (\alpha - 1)(2 - \alpha) < \beta < \alpha - 1\}, \\ \Gamma_1 &= \{(\alpha, \beta) : \alpha = (\beta + 1)(\beta + 2), \beta > 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\alpha, \beta) : \alpha = 2\beta + 2, \beta > 0\}, \\ \Gamma_3 &= \{(\alpha, \beta) : \beta = (\alpha - 1)(2 - \alpha), 1 < \alpha < 2\}, \\ \Gamma_4 &= \{(\alpha, \beta) : \alpha = 2, 0 < \beta < 1\}. \end{aligned}$$

Принцип, по которому осуществлено разбиение (1.286) множества \mathcal{U} , состоит в следующем. Рассмотрим систему (1.209) при $m = 2$, имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, \\ y(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y(-0), \quad y(1+0) = y(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y(+0), \\ y(\alpha+0) &= (1 + \beta)y(\alpha-0), \\ y(\alpha+1+0) &= y(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y(\alpha+0), \end{aligned} \quad (1.287)$$

и дополним ее начальным условием

$$y|_{t=-0} = \min(\alpha - 1, 1) \ln \frac{1}{d} + v, \quad v = \operatorname{const} \in \mathbb{R}. \quad (1.288)$$

Далее, через $y(t, v, d)$ обозначим решение получившейся задачи Коши (1.287), (88), а также положим $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = \alpha, t_4 = \alpha + 1$. Последующее асимптотическое интегрирование задачи (1.287), (88) приводит к формулам вида

$$y(t_k + 0, v, d) = c_k \ln \frac{1}{d} + O(1.203), \quad d \rightarrow 0, \quad k = \overline{1, 4},$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon), t \geq -\sigma_0$ уравнения (3.8) с начальным условием $\varphi(t), -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения

$$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = \theta(-\sigma_0) \quad (3.26)$$

(если он существует). И наконец, зададим оператор $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.27)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (3.27) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на произвольном решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с начальным условием из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

3.2.2. Доказательство существования релаксационного цикла

Построение асимптотики по ε функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Согласно (3.8) на этом отрезке $x_\varphi(t, \varepsilon)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)f(\varphi(t - 1)/\varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0). \quad (3.28)$$

Далее, опираясь на неравенства из (3.25) и свойства (3.5), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0], \varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$f(\varphi(t - 1)/\varepsilon) = O(\varepsilon). \quad (3.29)$$

А отсюда и из (3.28) очевидным образом выводим, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0, \quad (3.30)$$

где, напомним, $x_0(t)$ – функция (3.23). Добавим еще, что здесь и во всех аналогичных встречающихся ниже асимптотических равенствах остатки равномерны по t, φ .

которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит введенному ранее множеству (3.11). А это значит, что на промежутках $kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_0 - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$ весь описанный процесс нахождения $x_\varphi(t)$ повторяется снова и снова. Следовательно, при всех $t \geq -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (3.11) совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией $x_0(t)$, для которой в силу (3.14) – (3.21) справедливы равенства

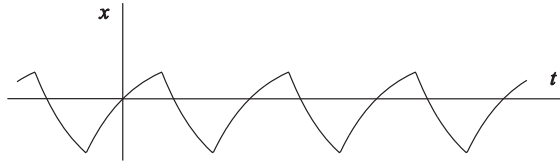


Рис. 3.1.

$$x_0(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \theta(1) \exp(-\mu(t-1)) - a\theta(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ \theta(t - T_0) & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

График этой функции при $a = 2$, $\mu = 0.8$ показан на рис. 3.1.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (3.8) и (3.10). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (3.8) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \theta(-\sigma_0)$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (3.24)$$

Доказательство сформулированной теоремы, приводящееся ниже, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 , подчиненной условию (3.22), фиксируем постоянные $q_1 > -\theta(-\sigma_0)$, $0 < q_2 < -\theta(-\sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0). \quad (3.25)$$

где c_k – некоторые константы. Как оказывается, неравенства $|c_k| \neq 1$ выделяют в \mathcal{U} пять связанных подобластей \mathcal{U}_s , $s = \overline{1, 5}$, разделенных граничными множествами Γ_s , $s = \overline{1, 4}$.

Разбиение (1.286), выполненное для случая $m = 2$, остается актуальным при любом $m \geq 2$. Используя развитую в п. 1.3.4 методику, можно показать, что при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4 \cup \mathcal{U}_5$ утверждение теоремы 1.6 сохраняется, причем при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4$ для устойчивых неподвижных точек (1.224) справедливы равенства (1.225), а при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_5$ – равенства (1.226).

Вопрос о промежуточной динамике системы (1.203) при постепенном уменьшении параметра d в общем случае остается открытым. Ответ на него удастся получить только при $m = 2$, т.е. для так называемой билочальной модели

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= d(u_2 - u_1) + \lambda[-1 + \alpha f(u_1(t-1)) - \beta g(u_1)]u_1, \\ \dot{u}_2 &= d(u_1 - u_2) + \lambda[-1 + \alpha f(u_2(t-1)) - \beta g(u_2)]u_2. \end{aligned} \quad (1.289)$$

Связано это с тем, что при $m = 2$ все фигурирующие в (1.217) операторы могут быть записаны явно, поскольку здесь

$$P^t(z) = \ln \frac{1 + \operatorname{th}(z/2) \exp(-2dt)}{1 - \operatorname{th}(z/2) \exp(-2dt)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.290)$$

Используя формулы (1.216), (1.217), (90), нетрудно убедиться в том, что скалярная функция $\Phi_0(z)$ обладает свойствами

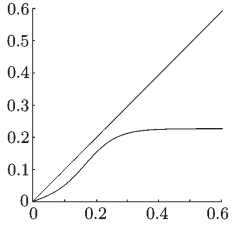
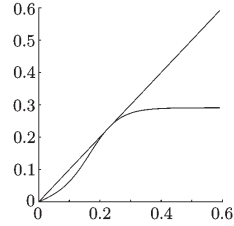
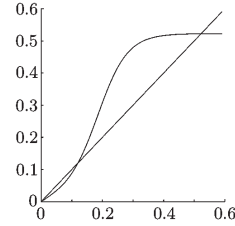
$$\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z), \quad \Phi_0(z) > 0 \quad \forall z \in (0, +\infty), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi_0(z) = \Phi_\infty > 0.$$

Обратим внимание на то, что нечетность функции $\Phi_0(z)$ обусловлена инвариантностью исходной системы (89) по отношению к преобразованию координат

$$u \rightarrow u_2, \quad u_2 \rightarrow u_1. \quad (1.291)$$

Характерная особенность отображения (1.217) в одномерном случае заключается в том, что при уменьшении параметра d на его инвариантном множестве \mathbb{R}_+ происходит бифуркация рождения пары неподвижных точек – устойчивой и неустойчивой. Наглядное представление об этом процессе дают графики функции $\Phi_0(z)$ при $\alpha = 1.1$, $\beta = 0.05$ и при $d = 0.05, 0.0435, 0.03$, построенные с помощью формул (1.216), (1.217), (90) на отрезке $0 \leq z \leq 0.6$ (см. рис. 1.3–1.5). Заметим, далее, что в силу свойства нечетности $\Phi_0(z)$ устойчивой и неустойчивой неподвижным

точкам из \mathbb{R}_+ отвечают аналогичные симметрично расположенные неподвижные точки из \mathbb{R}_- , а всем им в исходной релаксационной системе (89) соответствуют две пары циклов той же устойчивости, переходящие друг в друга в результате замены (91).

Рис. 1.3. $d = 0.05$ Рис. 1.4. $d = 0.0435$ Рис. 1.5. $d = 0.03$

Итак, при фиксированных $(\alpha, \beta) \in \bigcup_{k=1}^5 \mathcal{U}_k$ и при достаточно малых $d > 0$ система (89) имеет три устойчивых цикла – однородный и два неоднородных. Некоторое представление о релаксационных свойствах последних дает рис. 1.6, на котором изображены графики на плоскости (t, u) компонент $u_1(t)$, $u_2(t)$ одного из них при $f = g = (u + 1)/(u^2 + 1)$, $\lambda = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $d = 0.03$ (сплошной линией изображена функция $u_1(t)$, а штриховой – $u_2(t)$).

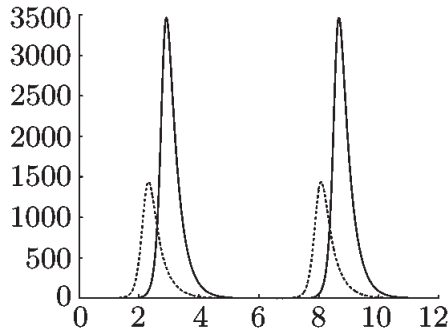


Рис. 1.6.

В заключение главы отметим, что в системе (1.203) наблюдается известный феномен буферности [15, 16], представляющий собой один из

т. е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = \theta(1) \exp(-\mu(t-1)) - a\theta(t-1). \quad (3.16)$$

В свою очередь, соотношения (3.15), (3.16) остаются в силе, пока $x_\varphi(t-1) > 0$, т. е. до очередного момента переключения $t = t_0 + 1$, где $t_0 > 1$ – корень уравнения

$$\theta(1) \exp(-\mu(t-1)) - a\theta(t-1) = 0,$$

задающийся равенством

$$t_0 = 1 + \frac{1}{\mu} \ln \left[1 + \frac{1}{a} (1 - \exp(-\mu)) \right]. \quad (3.17)$$

При $t > t_0 + 1$ имеем дело с аналогичной (3.13) задачей Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1, \quad x|_{t=t_0+1} = \theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0), \quad (3.18)$$

а значит, справедливо аналогичное (3.14) равенство

$$x_\varphi(t) = [\theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0)] \exp(-\mu(t-t_0-1)) + \theta(t-t_0-1). \quad (3.19)$$

Что же касается соотношений (3.18), (3.19), то они сохраняют силу при априорном условии $x_\varphi(t-1) < 0$, т. е. до следующего момента переключения $t = T_0 + 1$, где $t = T_0$ – корень уравнения

$$[\theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0)] \exp(-\mu(t-t_0-1)) + \theta(t-t_0-1) = 0.$$

Несложный подсчет показывает, что для этого корня справедлива явная формула

$$T_0 = t_0 + 1 + \frac{1}{\mu} \ln[1 + a(1 - \exp(-\mu))]. \quad (3.20)$$

Отметим еще, что после нахождения T_0 равенство (3.19) преобразуется к более компактному виду

$$x_\varphi(t) = \theta(t - T_0). \quad (3.21)$$

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (3.11)). Из проделанных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 - 1, \quad (3.22)$$

$u = \lambda x$. Указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)f(x(t - 1)/\varepsilon), \quad (3.8)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, из свойств (3.5) функции $f(u)$ вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x/\varepsilon) = F(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Равенства (3.9), в свою очередь, позволяют перейти от (3.8) к изучению предельного релейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)F(x(t - 1)). \quad (3.10)$$

Как и в работах [13], [18], [20], понятие решения уравнения (3.10) определим конструктивно. В связи с этим фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \\ \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0), \quad (3.11)$$

где

$$\theta(t) = (1 - \exp(-\mu t))/\mu, \quad (3.12)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (3.10) с произвольной начальной функцией (3.11).

Обратимся сначала к отрезку $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$ и заметим, что при указанных t выполняется неравенство $\varphi(t - 1) < 0$. Поэтому на данном промежутке времени решение $x_\varphi(t)$ совпадает с решением задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1, \quad x|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0) \quad (3.13)$$

и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = \theta(t), \quad (3.14)$$

где $\theta(t)$ – функция (3.12). Ясно также, что формула (3.14) сохраняется до тех пор, пока $x_\varphi(t - 1) < 0$. Тем самым она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leq t < 1$.

При $t = 1$ первый раз происходит переключение и при $t > 1$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x - a, \quad x|_{t=1} = \theta(1), \quad (3.15)$$

фундаментальных законов функционирования нелинейного мира. Об этом феномене принято говорить, когда в некоторой системе при подходящем выборе параметров реализуется любое наперед заданное конечное число однотипных аттракторов (циклов, инвариантных торов и т. д.). В нашем случае в силу теорем 1.5, 1.6 при согласованном увеличении количества осцилляторов в цепочке (1.203) и уменьшении параметра связи d происходит неограниченное накопление устойчивых автоволновых периодических движений. С биофизической точки зрения наличие в системе (1.203) большого числа различных аттракторов вполне закономерно, поскольку буферность отражает реальную ситуацию, когда в неокортексе человеческого мозга множество концепций и идей конкурируют друг с другом за доминирование.

Глава 2.

Исследование релаксационных автоколебаний в случае двух запаздываний

2.1. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах

Во второй главе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение (0.11) с двумя запаздываниями и системы связанных уравнений такого типа. Как уже отмечалось во введении, второе запаздывание вводится в уравнение (0.1) с целью моделирования на его основе известного феномена "bursting behavior". В первом параграфе главы установлено существование у этого уравнения при подходящем выборе параметров устойчивого периодического движения с любым наперед заданным количеством всплесков на отрезке времени длины периода. Во втором параграфе устанавливается, что в одномерной цепочке диффузионно связанных осцилляторов такого типа наблюдается известное явление буферности. А именно, при согласованном увеличении числа звеньев цепочки и уменьшении коэффициента диффузии происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений.

процессы в нейроне происходят быстро). Что же касается нелинейности $f(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то для нее в соответствии с требованиями (3.2) будем считать выполненными асимптотические равенства

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^-}{u^k} \quad \text{при } u \rightarrow -\infty, \quad f(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^+}{u^k} \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Предполагаем также, что представления (3.5) остаются в силе при дифференцировании по u любое число раз. Примерами такой функции являются $f(u) = (\arctg u + \pi/2)/\pi$ и $f(u) = (u/\sqrt{u^2 + 1} + 1)/2$.

При сформулированных условиях нами исследуются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости у уравнения (3.4) релаксационного периодического движения.

2) Изучается также цепочка из m , $m \geq 3$, однонаправленно связанных в кольцо нейронов Хопфилда, описываемая системой уравнений

$$\dot{u}_j = -\mu u_j + \lambda[1 - (a + 1)f(u_j(t - 1)) - b g(u_{j-1})], \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Здесь $u_0 = u_m$, параметры μ, a, λ и функция $f(u)$ те же, что и в (3.4), $b = \text{const} > 0$, а для функции $g(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливы аналогичные (3.5) асимптотические представления

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^-}{u^k} \quad \text{при } u \rightarrow -\infty, \quad g(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^+}{u^k} \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad (3.7)$$

сохраняющие силу после дифференцирования по u любое число раз. Показывается, что при подходящем выборе параметров μ, a, b и при всех $\lambda \gg 1$ в системе (3.6) может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых релаксационных циклов. Иными словами, в ней реализуется известный феномен буферности (см. [15], [16]).

3.2. Релаксационные автоколебания в математической модели отдельного нейрона

3.2.1. Описание результата

При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (3.4) релаксационных автоколебаний удобно сделать в нем замену

нелинейных элементов, таковы, что

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f_j(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f_j(u) = 1. \quad (3.2)$$

Достаточно подробное описание свойств этой системы, а также ее вывод можно найти в монографии [30].

Автор работы [29] исходил из допущения, что все элементы сети оказывают друг на друга мгновенное воздействие. Однако в реальности взаимодействие нейронов происходит с некоторыми запаздываниями по времени, обусловленными, например, конечной скоростью переключения усилителей в электрической нейронной сети или конечной скоростью распространения сигнала в биологических сетях. Таким образом, представляется вполне осмысленным переход от системы (3.1) к соответствующей системе дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{u}_j = -\mu_j u_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i(u_i(t - s_{ij})) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

где $s_{ij} = \text{const} \geq 0$. Впервые такой переход был осуществлен в статье [31] и в последующем как сама система (3.3), так и некоторые ее модификации изучались многими авторами (см., например, работы [32–37] и содержащуюся в них библиографию). Как правило, во всех этих статьях рассматривались вопросы об устойчивости состояния равновесия и о возникновении незатухающих автоколебаний в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

В данной главе в отличие от упомянутых выше работ анализу подлежат не гармонические, а релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда. Точнее говоря, результаты данной главы, как и двух предыдущих, являются продолжением цикла публикаций [12, 13, 17–20], связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов А. А. Дородницына, Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [10], [11]. В рамках этой программы для сетей Хопфилда изучаются следующие две конкретные задачи.

1) Рассматривается математическая модель отдельного нейрона Хопфилда, получающаяся из (3.3) при $m = 1$. После соответствующих нормировок переменных t, u и параметров она записывается в виде

$$\dot{u} = -\mu u + \lambda[1 - (a + 1)f(u(t - 1))]. \quad (3.4)$$

Здесь $\mu = \text{const} \geq 0$, $a = \text{const} > 0$, а параметр $\lambda > 0$ предполагается большим (с биофизической точки зрения это означает, что электрические

2.1.1. Введение

К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [12, 17, 18, 20]), связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов А. А. Дородницына, Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [10], [11]. К указанной области относится и данная глава. Объектом анализа в ней служит сингулярно возмущенное скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение (0.11), моделирующее электрическую активность отдельного нейрона. Рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у этого уравнения релаксационного цикла со специальными свойствами, о которых скажем ниже.

Как известно, для автоколебательных процессов в нейронных системах характерно чередование пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с относительно спокойными участками изменения мембранных потенциалов. Указанный феномен в англоязычной литературе получил название "bursting behavior", что дословно означает "взрывное поведение". Ниже за неимением подходящего русского эквивалента будем использовать термин "bursting-эффект".

Исследованию bursting-эффекта посвящена достаточно обширная литература (см., например, работы [3, 4, 21–23] и имеющуюся в них библиографию). Как правило, для математического моделирования этого эффекта привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя быстрыми и одной медленной переменными, в которых при определенных условиях могут существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). Мы же предлагаем принципиально иной подход к решению данной проблемы, связанный с введением запаздываний по времени.

В качестве математической модели отдельного нейрона возьмем дифференциально-разностное уравнение (0.11), способ получения которого приведен во введении к данной книге. Выпишем здесь это уравнение и касающиеся его предположения заново.

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t - h)) - g(u(t - 1))]u. \quad (2.1)$$

Как и ранее $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (2.1) функций $f(u)$, $g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают

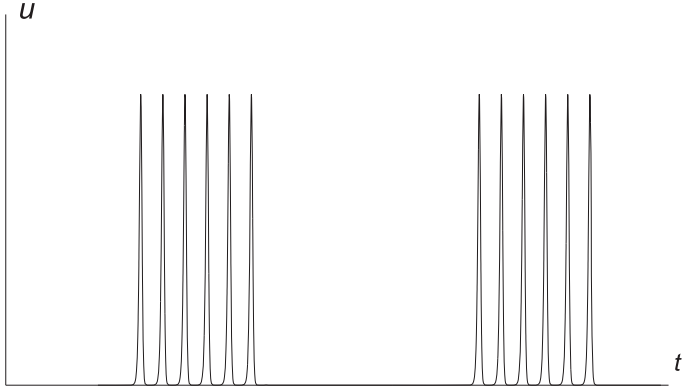


Рис. 2.1.

свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad uf'(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u), \quad ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где a_0, b_0 – положительные константы. Типовыми примерами таких функций являются

$$f(u) = (1 - u)/(1 + c_1 u), \quad g(u) = c_2 u/(1 + u), \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Наш основной результат состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (2.1), (2.2) параметры h, a_0, b_0 , что при всех достаточно больших λ уравнение (2.1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала. Иными словами, при указанном выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется bursting-эффект.

Наглядное представление о релаксационных свойствах bursting-цикла $u_*(t, \lambda)$ дает его график на плоскости (t, u) (см. рис. 2.1), построенный в масштабе 25 : 1 для случая $h = 1/26, \lambda = 130$ и для функций (2.3) при $c_1 = 0.5, c_2 = 4$.

Глава 3.

Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием

В данной главе рассматриваются две модели, одна из которых представляет собой сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием, являющееся математической моделью отдельного нейрона Хопфилда, а вторая состоит из связанных уравнений данного типа и моделирует функционирование кольцевой сети из трех и более однонаправленно связанных нейронов. Основная часть главы посвящена исследованию вопросов о существовании, асимптотике и устойчивости у этих систем релаксационных периодических движений.

3.1. Введение

В 1984 г. Хопфилд [29] предложил математическую модель простейшей нейронной сети, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_j = -\mu_j u_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i(u_i) + I_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Здесь $u_j(t)$ – мембранные потенциалы нейронов, $\mu_j = \text{const} \geq 0$ – коэффициенты затухания за счет токов утечки, $a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}$ – синаптические веса, $I_j = \text{const} \in \mathbb{R}$ – внешние токи смещения, а гладкие функции $f_j(u), u \in \mathbb{R}$, представляющие собой вольт-амперные характеристики

а при дополнительном требовании $\gamma_n > (1/2) \max_{m \geq 1} \gamma_m$ оказывается устойчивым. Добавим еще, что при согласованном увеличении параметров μ_0 и ν_0 оба эти условия будут выполняться для номеров $n_1 \leq n \leq n_2$, где разность $n_2 - n_1$ может быть сделана сколь угодно большой. А отсюда и из теоремы 2.6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.7. *По любому натуральному n_0 можно так подобрать фигурирующие в (12) параметры μ_0, ν_0 , что при условиях (12) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (10) будет иметь не менее n_0 сосуществующих экспоненциально орбитально устойчивых периодических движений.*

2.3.3. Численный анализ одного примера

Сформулированная теорема свидетельствует о том, что при условиях 2.1 – 2.3 в исходном уравнении (1) наблюдается феномен буферности. Реализуемость этого феномена подтверждает и численный эксперимент, который проводился для уравнения (1) с функциями (7) при значениях параметров $a = 2$, $b = 5.48$, $\varepsilon = 1/130$, $\varepsilon h = 0.016$. Точнее говоря, в (1) предварительно была выполнена замена $u = \exp(x/\varepsilon)$, а затем получившееся уравнение для x интегрировалось численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$. В результате удалось обнаружить не менее 60 сосуществующих устойчивых циклов.

В заключение добавим, что буферность вполне естественна для нейронных систем, поскольку она отражает ситуацию, когда в неокортексе человеческого мозга различные идеи и концепции соревнуются друг с другом в целях доминирования. Весьма нетривиальным здесь является то обстоятельство, что добиться наличия этого свойства можно не только за счет усложнения системы, т.е. рассмотрения цепочек или решеток связанных осцилляторов вида (1). Как оказалось, буферность свойственна даже отдельному нейрону, что свидетельствует о содержательности предложенной нами математической модели.

2.1.2. Формулировка результата

При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (2.1) релаксационного bursting-цикла удобно сделать в (2.1) замену $u = \exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon) - G(x(t-1), \varepsilon), \quad (2.4)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, из свойств (2.2) функций $f(u)$, $g(u)$ вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x),$$

$$R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a_0 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ b_0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Равенства (2.5), в свою очередь, позволяют перейти от (2.4) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздываниями

$$\dot{x} = R(x(t-h)) - H(x(t-1)). \quad (2.6)$$

Как и в работах [13], [18], [20], понятие решения уравнения (2.6) определим конструктивно. С этой целью фиксируем произвольно натуральное n и предположим, что параметры h, a_0, b_0 из (2.1), (2.2) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)} < h < \frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+2+1/a_0}, \quad (2.7)$$

$$b_0 > 1 + a_0. \quad (2.8)$$

Далее, фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \quad (2.9)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.6) с произвольной начальной функцией (2.9).

При интегрировании уравнения (2.6) следует иметь в виду, что его правая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию и меняется лишь тогда, когда $x(t-h)$ или $x(t-1)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 + h$ имеем одновременно $\varphi(t-h) < 0$ и $\varphi(t-1) < 0$.

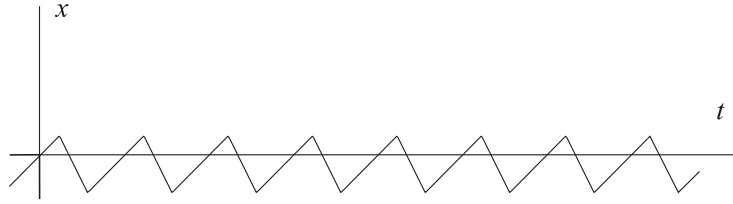


Рис. 2.2.

Поэтому на указанном промежутке времени согласно (2.6), (2.9) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0$, а значит, задается равенством

$$x_\varphi(t) = t. \quad (2.10)$$

Ясно также, что формула (2.10) сохраняется до тех пор, пока $x_\varphi(t-h) < 0$ и $x_\varphi(t-1) < 0$. Тем самым она заведомо справедлива на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t < 1$ в силу уже проделанных построений имеем $x_\varphi(t-1) < 0$ и, следовательно, $H(x_\varphi(t-1)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-h)). \quad (2.11)$$

Что же касается уравнения (2.11), то его свойства были изучены в статье [18]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение $x(t)$ этого уравнения, такое что $x(t) < 0$ при $-h \leq t < 0$, $x(0) = 0$, при всех $t \geq 0$ совпадает с периодической функцией

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ h - a_0(t-h) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ t - t_0 - a_0h - h & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t), \quad (2.12)$$

где $t_0 = h(1+1/a_0)$, $T_0 = h(2+a_0+1/a_0)$. График функции $x_0(t)$ при $a_0 = 2$, $h = 1/26$ представлен на рис. 2.2.

Возвращаясь к исходному уравнению (2.6) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.13)$$

пути для ξ_n выходит счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_n}{ds} = (\gamma_n + i\omega_n^3)\xi_n + d \left(3|\xi_n|^2 + 6 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_m|^2 \right) \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (2.184)$$

где $\gamma_n = 4\mu_0 + 2\nu_0\omega_n^2 - \omega_n^4/3$.

Система (22) и является интересующей нас квазинормальной формой исходного уравнения (10). Для формулировки основного результата перейдем от (22) к соответствующей амплитудной системе для $\eta_n = 3|\xi_n|^2$, $n \geq 1$, которая после нормировки времени $2t \rightarrow t$ примет вид

$$\frac{d\eta_n}{ds} = \gamma_n\eta_n + d \left(\eta_n + 2 \sum_{m \neq n} \eta_m \right) \eta_n, \quad n \geq 1. \quad (2.185)$$

Будем рассматривать (23) как динамическую систему в фазовом пространстве $l = \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) : \|\eta\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty\}$. Справедливо следующее утверждение, аналоги которого установлены в [15, 16, 28].

Теорема 2.6. Любому фиксированному экспоненциально устойчивому или дихотомичному состоянию равновесия системы (23) с конечным числом ненулевых координат $\eta_{n_j} > 0$, $j = 1, \dots, p$, в исходном уравнении (10) при условиях (12) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует p -мерный инвариантный тор той же устойчивости. Главная асимптотика автоколебаний на этом торе задается соотношениями (13), (17), (19), в которых следует положить

$$\xi_{n_j}(s) = \sqrt{\eta_{n_j}/3} \exp(i\omega_{n_j}^3 s), \quad j = 1, \dots, p; \quad \xi_n(s) = 0 \quad \text{при } n \neq n_j.$$

Перейдем к вопросу об аттракторах уравнения (10), доставляемых теоремой 2.6. В связи с этим обратим внимание, что любое состояние равновесия системы (23) из инвариантного конуса $K = \{\eta \in l : \eta_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}\}$ с количеством ненулевых координат $p \geq 2$ оказывается неустойчивым. Устойчивыми же могут быть лишь ее состояния равновесия вида

$$O_n = \{\eta \in l : \eta_n = -\gamma_n/d, \eta_m = 0 \text{ при } m \neq n\}. \quad (2.186)$$

Точнее говоря, в силу неравенства $d < 0$ состояние равновесия (24) с фиксированным номером n принадлежит конусу K при условии $\gamma_n > 0$,

Первые три шага описанной процедуры приводят к равенствам

$$v_1 = v_1^0(\tau, \theta, s), \quad v_2 = v_2^0(\tau, \theta, s), \quad v_3 = -(c_1 + d_1)(v_1^0)^2 + v_3^0(\tau, \theta, s), \quad (2.179)$$

где c_1, d_1 – коэффициенты тейлоровских разложений (6). Подчеркнем, что при $k = 1$ разрешимость уравнения (15) очевидна (в этом случае $\mathcal{F}_1^{(1)} \equiv \mathcal{F}_1^{(2)} \equiv 0$), а при $k = 2, 3$ справедливость условий (16) обеспечивается специальным выбором постоянных σ_1, σ_2 (см. (14)).

На четвертом шаге алгоритма с учетом известной информации (14), (17) приходим к равенству $\mathcal{F}_4^{(2)} = (\partial^3 v_1^0 / \partial \tau^3 - 3\partial v_1^0 / \partial \theta) / 6$. А отсюда и из (16) заключаем, что функция v_1^0 должна удовлетворять краевой задаче

$$\frac{\partial v_1^0}{\partial \theta} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 v_1^0}{\partial \tau^3}, \quad v_1^0(\tau + 1, \theta, s) \equiv -v_1^0(\tau, \theta, s), \quad (2.180)$$

где τ играет роль пространственной переменной, θ – время, а переменная s считается параметром. Тем самым для v_1^0 получается представление

$$v_1^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(s) \exp[i\omega_n \tau - i\omega_n^3 \theta / 3] + \text{к.с.}, \quad (2.181)$$

где $\xi_n(s)$, $n \geq 1$ – пока произвольные комплексные амплитуды.

Заключительный этап связан с рассмотрением уравнений (15), (16) при $k = 5$. Соответствующий подсчет показывает, что в данном случае из (16) для v_2^0 получается аналогичная (18) линейная неоднородная краевая задача

$$\frac{\partial v_2^0}{\partial \theta} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 v_2^0}{\partial \tau^3} = \Phi(\tau, \theta, s), \quad v_2^0(\tau + 1, \theta, s) \equiv -v_2^0(\tau, \theta, s), \quad (2.182)$$

где

$$\Phi = d(v_1^0)^3 + 4\mu_0 v_1^0 - \frac{\partial v_1^0}{\partial s} - 2\nu_0 \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^3 v_1^0}{\partial \tau^3} - \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \tau \partial \theta}, \quad (2.183)$$

а d – постоянная из условия 2.3. Заметим, далее, что в силу (19) неоднородность (21) представляет собой формальный тригонометрический ряд переменных τ, θ . В таком же виде будем искать и v_2^0 . Для этого, однако, необходимо и достаточно, чтобы в ряде для Φ отсутствовали гармоники вида $\exp(\pm i y)$, $y = \omega_n \tau - \omega_n^3 \theta / 3$, $n \in \mathbb{N}$. Добиться же равенства нулю коэффициентов при данных гармониках удастся за счет подходящего выбора имеющихся в запасе комплексных амплитуд $\xi_n(s)$, $n \geq 1$. На этом

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t - 1)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (2.14)$$

Привлекая формулы (2.12), нетрудно увидеть, что при $t \geq 0$ она задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b_0 - 1)t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - b_0 t_0 & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad y_0(t) = (k - 1)(T_0 - b_0 t_0) + \\ + y_0(t - (k - 1)T_0) \text{ при } (k - 1)T_0 \leq t \leq kT_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2. \quad (2.15)$$

Перейдем к рассмотрению очередного отрезка времени $1 \leq t \leq 1 + h$ и заметим, что неравенства (2.7) обеспечивают принадлежность момента времени $t = 1$ интервалу $(nT_0 + t_0 + h, (n + 1)T_0)$. Тем самым, в силу (2.12), (2.13) имеем $x_\varphi(t - h) < 0$ при $t \in [1, 1 + h]$ и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (2.14) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t - 1)), \quad x|_{t=1} = x_0(1).$$

А отсюда заключаем, что при $1 \leq t \leq 1 + h$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(1) + y_0(t - 1). \quad (2.16)$$

На следующем этапе обратим внимание, что при априорном условии

$$x_\varphi(t - h) < 0 \quad (2.17)$$

равенство (2.16) сохраняется на отрезке $1 \leq t \leq 2$. Но это условие действительно выполняется, поскольку согласно (2.7), (2.8), (2.12), (2.15)

$$x_0(1) = x_0(1 - nT_0) = 1 - (n + 1)T_0 < 0, \quad y_0(t - 1) < 0 \text{ при } \forall t > 1. \quad (2.18)$$

Таким образом, при $1 \leq t \leq 2$ соотношение (2.16) обретает законную силу.

При рассмотрении значений $t \geq 2$ будем предполагать, что наряду с (2.17) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t - 1) < 0. \quad (2.19)$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=2} = x_0(1) + y_0(1)$, а значит, задается вытекающей из (2.15), (2.18) формулой

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad T_* = (n + 1)(T_0 + b_0 t_0). \quad (2.20)$$

Остается добавить, что согласно (2.16), (2.20) априорные требования (2.17), (2.19) заведомо выполняются на промежутке $2 \leq t \leq T_*$, длина которого в силу неравенства $T_* - 2 > 0$ (являющегося следствием оценок (2.7), (2.8)) положительна.

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (2.9)). Из проделанных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 + (n+1)b_0t_0 - 1, \quad (2.21)$$

которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_*)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ принадлежит введенному выше множеству (2.9). А это значит, что на промежутках $kT_* - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_* - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$ весь описанный выше процесс построения $x_\varphi(t)$ повторяется снова и снова. Следовательно, при всех $t \geq -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.9) совпадает с одной и той же T_* -периодической функцией $x_*(t)$, задающейся равенствами

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0(1) + y_0(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ t - T_* & \text{при } 2 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t). \quad (2.22)$$

График этой функции при $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, $h = 1/26$ показан на рис. 2.3 (при выбранных значениях параметров неравенства (2.7) выполняются для $n = 5$).

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.4) и (2.6). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.4) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \quad (2.23)$$

Доказательство сформулированной теоремы, содержащееся в разделах 2.1.3, 2.1.4, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 , подчиненной условию (2.21), фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (2.24)$$

называемый метод квазинормальных форм. Упомянутый метод был разработан Ю.С. Колесовым в начале 80-х годов прошлого века для исследования автоколебаний в случае, близком к бесконечномерному вырождению. Общая идея этого метода заключается в построении формальной нормальной формы Пуанкаре-Дюлака в окрестности положения равновесия и в последующем анализе получившейся счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (квазинормальной формы). Что же касается алгоритмических аспектов процедуры нормализации, то они весьма многообразны (см. монографии [15, 16, 28], где рассмотрены различные примеры применения метода квазинормальных форм и приведено его обоснование в некоторых модельных ситуациях).

В нашем случае алгоритмическая часть метода квазинормальных форм состоит в следующем. При условиях (12) главную асимптотику возможных автоколебательных режимов уравнения (10) будем искать в виде

$$v = \sum_{k=1}^5 \varepsilon^{k+1} v_k(\tau, \theta, s), \quad \tau = \left(1 + \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k \sigma_k\right)t, \quad (2.175)$$

где $\theta = \varepsilon^3 t$, $s = \varepsilon^4 t$, $v_k(\tau, \theta, s)$ – подлежащие определению 2-периодические по τ функции, а постоянные σ_k заданы равенствами

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \nu_0 - 1, \quad \sigma_4 = -2\nu_0 + 1. \quad (2.176)$$

После подстановки соотношений (13), (14) в (10) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося равенства, для нахождения функций v_k приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных разностных уравнений

$$\frac{1}{2} [v_k(\tau, \theta, s) + v_k(\tau - 1, \theta, s)] = \mathcal{F}_k^{(1)}(\tau, \theta, s) + \mathcal{F}_k^{(2)}(\tau, \theta, s), \quad (2.177)$$

где $\mathcal{F}_k^{(j)}(\tau+1, \theta, s) \equiv (-1)^{j+1} \mathcal{F}_k^{(j)}(\tau, \theta, s)$, $j = 1, 2$. Условие же разрешимости каждого уравнения (15) в требуемом классе функций имеет вид

$$\mathcal{F}_k^{(2)}(\tau, \theta, s) \equiv 0 \quad (2.178)$$

и если оно выполняется, то само решение v_k задается формулой

$$v_k = \mathcal{F}_k^{(1)}(\tau, \theta, s) + v_k^0(\tau, \theta, s), \quad v_k^0(\tau+1, \theta, s) \equiv -v_k^0(\tau, \theta, s),$$

где v_k^0 – некоторая произвольная функция.

Введем в рассмотрение характеристическое уравнение

$$\varepsilon\lambda + (1/2 - \mu) \exp(-\varepsilon h\lambda) + (1/2 + \mu) \exp(-\lambda) = 0, \quad (2.173)$$

отвечающее нулевому состоянию равновесия уравнения (2.172), и заметим, что в случае $h < \pi$ все его корни распадаются на две группы. К первой группе отнесем некритические корни данного уравнения, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Во вторую группу объединим все оставшиеся его корни $\lambda_n(\varepsilon, \mu)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, являющиеся комплексными и при $\varepsilon = \mu = 0$ обращающиеся в соответствующие корни $\lambda_n = i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения $\exp(-\lambda) = -1$. Как показано в статье [25], эти корни допускают равномерные по n асимптотические представления

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) &= \delta(z, \mu)|_{z=\varepsilon\omega_n} + O(\varepsilon), \quad \delta(z, \mu) = \\ &= \ln(1 + 2\mu) - \frac{1}{2} \ln[(1 - 2\mu)^2 - 4z(1 - 2\mu) \sin(hz) + 4z^2]. \end{aligned}$$

Добавим еще, что при условии $h < 1$ справедливы неравенства $\delta(z, 0) < 0 \forall z > 0$, $\delta''_{zz}(0, 0) = -4(1 - h) < 0$. Следовательно, в этом случае при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ корни $\lambda_n(\varepsilon, \mu)$ заведомо не могут иметь положительных действительных частей порядка единицы. Если же, напротив, $h > 1$, то $\delta(z, 0) > 0$ на некотором промежутке вида $0 < z \leq z_0$, а значит, у уравнения (2.173) с необходимостью существуют корни в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq c$, где $c > 0$ – не зависящая от ε, μ постоянная. В этом случае поставленная выше бифуркационная проблема очевидным образом теряет смысл.

Из всего вышесказанного следует, что интересующая нас ситуация, когда в задаче об устойчивости нулевого решения уравнения (2.172) имеет место максимальное вырождение, реализуется при $h = 1 + \nu$, $|\nu| \ll 1$. Точнее говоря, вопрос о бифурцирующих из нуля автоколебаниях этого уравнения будем изучать при дополнительных условиях

$$\mu = \mu_0 \varepsilon^4, \quad h = 1 + \nu_0 \varepsilon^2, \quad \mu_0, \nu_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (2.174)$$

смысл которых прояснится в последующем.

2.3.2. Метод квазинормальных форм

Проблему аттракторов уравнения (2.172), расположенных в малой окрестности нуля фазового пространства $C[-1, 0]$, позволяет решить так

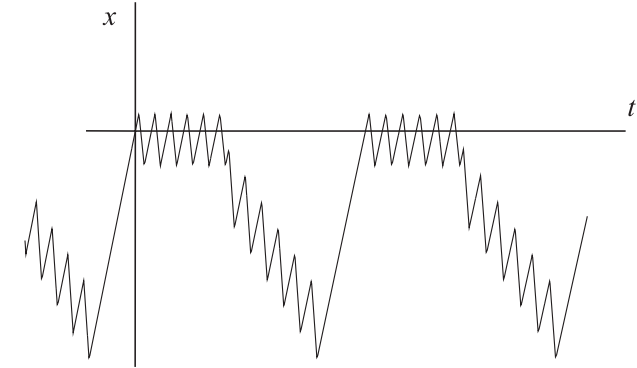


Рис. 2.3.

Затем для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$ уравнения (2.4) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ с номером $2n + 2$ (в предположении, что это уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n + 2)$ -х корней, занумерованных в порядке возрастания). И наконец, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.25)$$

Дальнейший план действий стандартен (см. аналогичные места в работах [18], [20]). Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (2.25) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

2.1.3. Доказательство существования bursting-цикла

Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq -1 - \sigma_0$. Опираясь на неравенства из (2.24) и свойства функции $g(u)$ (см. (2.2)), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, -1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$G(\varphi(t - 1), \varepsilon) = O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (2.26)$$

Формула (2.26), в свою очередь, позволяет отбросить соответствующее слагаемое в правой части из (2.4) и перейти к исследованию аналогичного (2.11) вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon), \quad (2.27)$$

которое к настоящему времени уже изучено (см. [18]).

Для того чтобы воспользоваться асимптотическими равенствами, полученными в работе [18] для решений уравнения (2.27), сначала уточним выбор параметра σ_0 . Следуя [18], будем считать, что он удовлетворяет условию (более сильному, чем (2.21))

$$2\sigma_0 < \min(h, a_0h). \quad (2.28)$$

Кроме того, предполагаем дополнительно, что

$$2\sigma_0 < \min(1 - nT_0 - t_0 - h, 2((n+1)T_0 - 1)). \quad (2.29)$$

Итак, обратимся непосредственно к асимптотическому анализу интересующего нас решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (2.4). Объединяя равенство (2.26) с известными асимптотическими формулами из [18], приходим к следующим фактам.

1) На промежутках $-\sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ справедливы асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - kT_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.30)$$

где здесь и далее через Δ_φ обозначаются различные остатки, модули которых имеют экспоненциальный порядок малости (т. е. порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) равномерно по φ, t .

2) На отрезках времени $h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h + \varepsilon v_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.31)$$

где функция $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ задается равенством

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1] ds \quad (2.32)$$

и обладает свойствами [18]:

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_0(\tau) &= -a_0\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $c_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a_0}{u} du$.

При сформулированных ограничениях поставим вопрос об автоколебательных режимах уравнения (2.163), бифурцирующих из состояния равновесия $u = u_0(a, b)$ при изменении параметров b, h . В связи с этим рассмотрим выбор указанных параметров таким образом, чтобы в задаче об устойчивости интересующего нас положения равновесия реализовывался случай, близкий к максимальному вырождению. Подчеркнем, что именно в окрестности максимальной особенности соответствующий локальный анализ может дать наиболее полную информацию об аттракторах исходного уравнения.

Остановимся сначала на выборе параметра b . Будем считать, что он меняется в малой окрестности критического значения $b = b_*$, о котором говорится в условии 2.2. Точнее говоря, положим

$$b = b_* + \alpha(\mu), \quad |\mu| \ll 1, \quad (2.170)$$

где μ – вспомогательный малый параметр, а функция $\alpha(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, определяется из уравнения

$$\psi(\alpha, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1+a)f'(u)}{(b_* + \alpha)g'(u)} \Big|_{u=u_0(a, b_* + \alpha)} + \frac{1-2\mu}{1+2\mu} = 0. \quad (2.171)$$

Остается заметить, что в силу условия 2.2

$$\psi(0, 0) = 0, \quad \psi'_\alpha(0, 0) = \varphi'(b_*)/[b_*g'(u_0(a, b_*))] > 0$$

и, следовательно, к уравнению (2.171) в точке $(\alpha, \mu) = (0, 0)$ применима теорема о неявной функции по переменной α .

Опишем теперь способ выбора параметра h . В связи с этим подставим в уравнение (2.163) соотношение (2.170) и перейдем к новой переменной v , полагая $u = u_*(\mu)(1+v)$, где $u_*(\mu) = u_0(a_0, b_* + \alpha(\mu))$. В результате после нормировок

$$\varepsilon/\varkappa_*(\mu) \rightarrow \varepsilon, \quad h\varkappa_*(\mu) \rightarrow h, \quad \varkappa_*(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} -2(1+a)f'(u_*(\mu))/(1-2\mu) > 0$$

рассматриваемое уравнение преобразуется к более удобному для последующего анализа виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} = & -[(1/2 - \mu)v(t - \varepsilon h) + (1/2 + \mu)v(t - 1) + \\ & + \Delta_1(v(t - \varepsilon h), \mu) + \Delta_2(v(t - 1), \mu)](1+v), \end{aligned} \quad (2.172)$$

где $\Delta_j = (1 - 2\mu)V_j(v, b_* + \alpha(\mu))$, $j = 1, 2$ (см. (2.166), (2.167)).

единственность решения $u = u_0(a, b) > 0$ уравнения $(a + 1)f(u) - a - b g(u) = 0$. Далее, считая параметр $a > 0$ фиксированным, введем в рассмотрение функцию $\psi(b)$, $b \in \mathbb{R}_+$, задающуюся равенством

$$\psi(b) = (a + 1)f'(u)|_{u=u_0(a,b)} + b g'(u)|_{u=u_0(a,b)}. \quad (2.164)$$

Условие 2.2. Предполагаем, что уравнение $\psi(b) = 0$ имеет на полуоси $b \in \mathbb{R}_+$ единственное решение $b = b_* > 0$ и $\psi'(b_*) > 0$.

Остановимся на связи между условиями 2.1 и 2.2. Несложный подсчет показывает, что функция $u_0(a, b)$ по переменной b обладает свойствами

$$u_0(a, 0) = u_{0,0} > 0, \quad u_0(a, b) = 1/(g'(0)b) + O(1/b^2) \quad \text{при } b \rightarrow +\infty, \quad (2.165)$$

где $u_{0,0}$ – корень уравнения $f(u) = a/(a + 1)$, который в силу условия 2.1 определяется однозначно. Учитывая затем соотношения (2.165) в (2.164), приходим к выводу, что $\psi(0) < 0$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \psi(b) = +\infty$. Таким образом, условие 2.1 гарантирует существование у функции (2.164) хотя бы одного корня $b = b_* > 0$, $\psi'(b_*) \geq 0$, а условие 2.2 содержит вполне естественные требования о единственности этого корня и о выполнении неравенства $\psi'(b_*) > 0$, характеризующего некоторую общность положения.

Для формулировки последнего условия нам потребуются функции

$$V_1(v, b) = \frac{1}{2f'(u)}[f(u(1 + v)) - f(u) - f'(u)uv]|_{u=u_0(a,b)}, \quad (2.166)$$

$$V_2(v, b) = -\frac{b}{2(a + 1)f'(u)}[g(u(1 + v)) - g(u) - g'(u)uv]|_{u=u_0(a,b)}. \quad (2.167)$$

Нетрудно убедиться, что их тейлоровские разложения в точке $v = 0$ начинаются с квадратичных слагаемых. В частности, справедливы равенства

$$V_1(v, b_*) = c_1 v^2 + c_2 v^3 + O(v^4), \quad V_2(v, b_*) = d_1 v^2 + d_2 v^3 + O(v^4). \quad (2.168)$$

Условие 2.3. Считаем, что $d \stackrel{\text{def}}{=} 4(c_1^2 - d_1^2) + 2(d_2 - c_2) < 0$.

Все перечисленные условия выполняются, например, для функций

$$f(u) = 1/(1 + u), \quad g(u) = 1 - 1/\sqrt{1 + u}. \quad (2.169)$$

В симметричном же случае, когда $g(u) = 1 - f(u)$, с необходимостью имеем $d = 0$.

3) При $h + \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ имеют место формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h - a_0(t - h - kT_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (2.34)$$

4) На отрезках $t_0 + h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ получаются аналогичные (2.31) асимптотические равенства

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -a_0 h + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-t_0-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= -a_0 \tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp(-a_0 s + c_0)) + a_0] ds, \\ w_0(\tau) &= -a_0 \tau + c_0 + O(\exp(a_0 \tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ w_0(\tau) &= \tau + O(\exp(-a_0 \tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.36)$$

5) При $t_0 + h + \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq (k + 1)T_0 - \sigma_0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ задается соотношениями

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (k + 1)T_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.37)$$

а на отрезке $t_0 + h + \sigma_0 + nT_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ (длина которого в силу (2.29) положительна) справедливо равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n + 1)T_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (2.38)$$

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$. Будем считать, что при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t - h, \varepsilon) \leq -q, \quad (2.39)$$

где $q > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от t, ε, φ) постоянная. В этом случае в силу свойств (2.2) равномерно по t, φ

$$F(x_\varphi(t - h, \varepsilon), \varepsilon) - 1 = O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.40)$$

Что же касается функции $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$, то для нее при $t \in [1 - \sigma_0, 2 - \sigma_0]$ справедлива серия асимптотических равенств (2.30) – (2.38), в которых необходимо заменить t на $t - 1$.

Итак, на интересующем нас промежутке времени согласно (2.4), (2.40) исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 1 - G(x_\varphi(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \quad (2.41)$$

правая часть которого фактически уже известна. Точнее говоря, добавка (2.40), естественно, обновляется по прошествии каждого отрезка времени длины h . Но поскольку при интегрировании уравнения (2.41) методом шагов мы последовательно рассматриваем именно такие промежутки, то при каждом конкретном $t \in [1 - \sigma_0, 2 - \sigma_0]$ левая часть формулы (2.40) уже известна из предыдущего шага. Впрочем, ее явный вид несущественен. Важно лишь, что она экспоненциально мала.

Асимптотическое исследование уравнения (2.41) проведем с помощью метода математической индукции. Для этого нам понадобятся отрезки

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= [t_0 + h + nT_0 + \sigma_0, 1 - \sigma_0]; \\ \Lambda_k &= [1 + t_0 + (k - 1)T_0 + \sigma_0, 1 + kT_0 - \sigma_0], \quad k = 1, \dots, n; \\ \Lambda_{n+1} &= [1 + t_0 + nT_0 + \sigma_0, 2 - \sigma_0],\end{aligned}$$

а шаг индукции будет состоять в переходе с отрезка Λ_k на Λ_{k+1} .

Фиксируем некоторый номер k , $0 \leq k \leq n$ и предположим, что на отрезке Λ_k уже получено асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n + 1)T_0 - kb_0t_0 + \varepsilon\alpha_k + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.42)$$

где α_k – некоторая константа. Подчеркнем, что при $k = 0$ равенство вида (2.42) имеет место (см. (2.38)) и в этом случае $\alpha_0 = 0$. Таким образом, остается убедиться в справедливости аналогичного (2.42) представления при $t \in \Lambda_{k+1}$.

Рассмотрим сначала отрезок $1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0$, длина которого в силу (2.28) меньше h . А поскольку длина отрезка Λ_k больше h (что также следует из условия (2.28)), то согласно (2.42) функция $x_\varphi(t - h, \varepsilon)$ при указанных t нам известна. Известной является и функция $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ (для нее выполняется равенство (2.30) при замене t на $t - 1$). Таким образом, в данном случае решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - G(t - 1 - kT_0 + \omega_1(t, \varepsilon), \varepsilon) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1+kT_0-\sigma_0} &= 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) - \sigma_0 + \varepsilon\alpha_k + \omega_3(\varepsilon),\end{aligned} \quad (2.43)$$

где ω_j , $j = 1, 2, 3$ – известные экспоненциально малые по модулю добавки.

Решение задачи (2.43) будем искать в виде

$$\begin{aligned}x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) + \varepsilon\alpha_k + \\ &+ \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad 1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0,\end{aligned} \quad (2.44)$$

В заключение остановимся на некоторых нерешенных проблемах. Представляет интерес рассмотрение цепочки осцилляторов (2.85) при других граничных условиях. Например, можно считать, что $u_0 = u_{m+1} = 0$ (условия типа Дирихле) или $u_0 = u_m$, $u_{m+1} = u_1$ (условия периодичности). Интересен также вопрос об автоволновых режимах двумерных решеток диффузионно связанных осцилляторов вида (2.1). И наконец, остается открытым вопрос о сохранении феномена буферности при переходе от дискретных цепочек (2.85) к соответствующей распределенной модели, т. е. при $d = m^2D$, $D = \text{const} > 0$ и при $m \rightarrow \infty$.

2.3. Буферность в нейронных системах

В третьем разделе данной главы для сингулярно возмущенного дифференциально-разностного уравнения с двумя запаздываниями (2.1) устанавливается, что при подходящем выборе параметров в его фазовом пространстве может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений, т. е. наблюдается хорошо известное явление буферности (см. [15, 16]).

2.3.1. Локальная постановка задачи

Несколько модифицируем уравнение (2.1) и рассмотрим следующий его вариант:

$$\varepsilon \dot{u} = [(a + 1)f(u(t - \varepsilon h)) - a - b g(u(t - 1))]u. \quad (2.163)$$

Здесь, как и ранее, $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda = 1/\varepsilon > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, а положительные параметры h , a , b имеют порядок единицы. Что же касается функций $f(u)$, $g(u) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, то они выбираются несколько иначе, чем в двух предыдущих пунктах и удовлетворяют следующим трем условиям.

Условие 2.1. Считаем, что $f'(u) < 0$, $g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того, выполняются равенства $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1$.

Перед формулировкой второго условия обратим внимание, что перечисленные ограничения на $f(u)$, $g(u)$ обеспечивают существование и

Здесь, подчеркнем, компоненты $w_j^{(n+1)}$ вычисляются по рекуррентным формулам (2.152), (2.158) и не зависят от $v \in \Omega$, а остаток имеет указанный порядок малости в метрике $C^1(\Omega)$. Далее, предположим, что вектор $w^{(n+1)}$ является внутренней точкой множества Ω (в силу произвольности Ω данное требование не ограничивает общности). Тогда, очевидно, отображение (2.161) при всех достаточно малых $d > 0$ допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$v(d) = w^{(n+1)} + O(d^{\kappa_2}), \quad d \rightarrow 0. \quad (2.162)$$

И наконец, объединяя равенства (2.160), (2.162), приходим к требуемым соотношениям (2.103), (2.104). Теорема 2.4 доказана.

2.2.4. Заключение

Теорема 2.2 о соответствии и проделанный выше асимптотический анализ отображения (2.94) (см. теоремы 2.3, 2.4) приводят к следующему утверждению, являющемуся основным результатом данного раздела.

Теорема 2.5. Пусть параметры h, a_0, b_0 фиксированы и удовлетворяют требованиям (2.7), (2.102). Тогда для любых достаточно малых $d_2 > d_1 > 0$ найдется такое достаточно большое $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$, что при всех $d_1 \leq d \leq d_2$, $\lambda \geq \lambda_0$ система (2.85) будет иметь не менее m экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов, сосуществующих с устойчивым однородным циклом (2.86).

Из сформулированной теоремы следует, что при согласованном уменьшении d и увеличении параметров λ, m в системе (2.85) наблюдается феномен буферности, а точнее, происходит неограниченное накопление сосуществующих устойчивых циклов. Добавим еще, что все эти циклы демонстрируют bursting-эффект. Действительно, для компонент u_j , $j = 1, \dots, m$ каждого из упомянутых циклов в силу свойств (2.93) справедливы равномерные по $t \in [0, T(\varepsilon)]$ асимптотические представления $u_j = \exp(\lambda x_*(t) + O(1))$, $\lambda \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$, где $x_*(t)$ – функция (2.22). А отсюда следует, что графики u_j имеют вид, подобный показанному на рис. 2.1, т.е. допускают $n + 1$ подряд идущих асимптотически высоких всплесков. Что же касается натурального n , то оно определяется выбором параметров h, a_0, b_0 и может быть любым.

где

$$v_1(\tau) = \tau - \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (2.45)$$

а Δ_φ – подлежащий определению остаток. Подставляя, далее, выражения (2.44), (2.45) в (2.43), для Δ_φ приходим к задаче Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (2.46)$$

где

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon) \quad \text{при} \quad (2.47)$$

$$x_1 = \exp[(t - 1 - kT_0)/\varepsilon], \quad x_2 = \exp[(t - 1 - kT_0)/\varepsilon + \omega_1(t, \varepsilon)/\varepsilon];$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (2.48)$$

Таким образом, доказательство равномерной по φ, t экспоненциальной малости Δ_φ сводится к проверке аналогичных свойств для функции (2.47) и начального условия (2.48).

Обратимся сначала к анализу $g_\varphi(\varepsilon)$. Опираясь на свойства (2.2) функции $g(u)$, из (2.45) выводим, что

$$v_1(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.49)$$

и, следовательно,

$$-\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-\sigma_0/\varepsilon)).$$

А отсюда и из известных свойств $\omega_3(\varepsilon)$ вытекает требуемая экспоненциальная малость величины (2.48).

Для оценки функции (2.47) снова привлечем свойства (2.2), из которых заключаем, что

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1 + x^2) |g'(x)| < \infty.$$

Далее, используя этот факт, нетрудно увидеть, что

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (2.50)$$

Применяя затем свойство (2.50) к правой части из (2.47), получаем неравенство

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-|t - 1 - kT_0|/\varepsilon) |\omega_1(t, \varepsilon)| + |\omega_2(t, \varepsilon)|, \quad (2.51)$$

$$1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0,$$

где M_2 – некоторая универсальная положительная константа. Остается заметить, что из (2.51) равномерная по t , φ экспоненциальная малость $G_\varphi(t, \varepsilon)$ следует уже очевидным образом.

Перейдем теперь к отрезку $1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0$. Здесь имеем дело с уравнением (2.41), в котором $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ задается соответствующими формулами (2.30), (2.31) или (2.34) (при замене в них t на $t - 1$). Во всех случаях, однако, справедлива оценка вида

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq q, \quad (2.52)$$

где в качестве q можно взять любое число из интервала $(0, \min(\sigma_0, a_0\sigma_0))$.

Отмеченное выше неравенство (2.52) и свойства (2.2) приводят к асимптотическому представлению

$$G(x_\varphi(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) = b_0 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \quad (2.53)$$

которое, как и аналогичное ему соотношение (2.40), справедливо равномерно по φ , t . Последующий же способ действий стандартен: подставляем (2.53) в (2.41), дополняем получившееся уравнение начальным условием $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $1 + kT_0 + \sigma_0 - h \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0$ и применяем уже упоминавшийся выше метод шагов (т.е. рассматриваем последовательные отрезки времени длины h). В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) = & 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) + \varepsilon\alpha_k + \varepsilon v_1(\tau) \Big|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} - \\ & - (b_0 - 1)(t - 1 - kT_0 - \sigma_0) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ & 1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Для дальнейшего упрощения формулы (2.54) необходимо знать поведение функции (2.45) при $\tau \rightarrow +\infty$. Несложный подсчет показывает, что

$$v_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau - d_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (2.55)$$

где

$$d_0 = \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - b_0}{u} du. \quad (2.56)$$

Учитывая затем соотношения (2.55), (2.56) в (2.54), окончательно получаем

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) = & 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) - (b_0 - 1)(t - 1 - kT_0) + \\ & + \varepsilon(\alpha_k - d_0) + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad 1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Перейдем к рассмотрению отрезка $t \in \Gamma_{k+1}$. В данном случае в силу равенств (2.145), (2.156) и импульсных соотношений в точке $t = 1 + t_0 + kT_0$ исследованию подлежит система (2.89) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=1+t_0+kT_0} &= -\frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=1+t_0+kT_0} &= \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.157)$$

где

$$w_j^{(k+1)} = w_j^0(t_0, w^{(k)} - b_0v^{(k)}) - \frac{b_0}{a_0} w_j^0(t_0 - h, -a_0v^{(k)}), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.158)$$

Что же касается задачи Коши (2.89), (2.157), то после замены (2.108) она принимает вид (2.109), где начальный момент времени $t = 0$ заменяется на $t = 1 + t_0 + kT_0$, а начальный вектор v – на вектор с компонентами $w_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_2})$, $j = 1, \dots, m-1$. Тем самым мы в очередной раз находимся в рамках применимости леммы 2.1, из которой заключаем, что равномерно по $t \in \Gamma_{k+1}$, $v \in \Omega$ справедливы аналогичные (2.154) асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_2}), \quad j, s = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Подведем итог. Соотношения (2.159) свидетельствуют о том, что сделан шаг индукции, а значит, асимптотические формулы (2.154) обретают законную силу при всех $k = 1, \dots, n+1$. В частности, привлекая равенства (2.154) при $k = n+1$, $t = T_*$, убеждаемся, что после выполнения в отображении (2.94) замены

$$\begin{aligned} z_j &= -\frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ z_j &= \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.160)$$

оно преобразуется к виду

$$v \rightarrow w^{(n+1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad w^{(n+1)} = (w_1^{(n+1)}, \dots, w_{m-1}^{(n+1)})^T. \quad (2.161)$$

асимптотические равенства вида

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= \frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_2}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (2.154)$$

где $w_j^{(k)}$ – некоторые постоянные. Отметим, что при $k = 1$ эти равенства заведомо выполняются (см. (2.152), (2.153)).

Для того чтобы сделать шаг индукции, обратимся к отрезку $1 + kT_0 \leq t \leq 1 + t_0 + kT_0$, являющемуся связующим звеном между Γ_k и Γ_{k+1} . Объединяя формулы (2.140), (2.154) с импульсными соотношениями в точке $t = 1 + kT_0$, приходим к задаче Коши для системы (2.89) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=1+kT_0+0} &= \ln \frac{1}{d} + w_j^{(k)} - b_0 v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=1+kT_0+0} &= -\ln \frac{1}{d} + w_j^{(k)} - b_0 v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_2}), \\ j &= r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Последняя же после замены (2.142) преобразуется к задаче (2.143), в которой начальный момент времени $t = h + kT_0$ следует заменить на $t = 1 + kT_0$, а начальный вектор $-a_0 v^{(k)} + O(d^{\varkappa_1})$ на вектор $w^{(k)} - b_0 v^{(k)} + O(d^{\varkappa_2})$, где $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, \dots, w_{m-1}^{(k)})^T$. А отсюда, в свою очередь, вытекает, что для компонент исходной задачи (2.89), (2.155) равномерно по $t \in [1 + kT_0, 1 + t_0 + kT_0]$, $v \in \Omega$ имеют место аналогичные (2.145) асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= \ln \frac{1}{d} + w_j^0(t - 1 - kT_0, w^{(k)} - b_0 v^{(k)}) + O(d^{\varkappa_2}), \\ j &= 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + w_j^0(t - 1 - kT_0, w^{(k)} - b_0 v^{(k)}) + O(d^{\varkappa_2}), \\ j &= r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_2}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.156)$$

На очередном отрезке $1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 + \sigma_0$ функция $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ задается формулой, получающейся из (2.34) при замене, как обычно, t на $t - 1$. А отсюда и из (2.41), (2.57) для нахождения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к аналогичной (2.43) задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - G(-a_0(t - 1 - kT_0 - t_0) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon), \varepsilon) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0} &= 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) + \\ &\quad + \varepsilon(\alpha_k - d_0) - (b_0 - 1)(t_0 - \sigma_0) + \omega_3(\varepsilon), \end{aligned}$$

где, как и ранее, через ω_j , $j = 1, 2, 3$ обозначены некоторые уже известные экспоненциально малые добавки.

Решение получившейся задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n + 1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) + \varepsilon(\alpha_k - d_0) - \\ &\quad - (b_0 - 1)t_0 + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0-t_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \\ 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0 &\leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 + \sigma_0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где

$$w_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau - \int_{-\infty}^{\tau} [g(\exp(-a_0 s + c_0)) - b_0] ds. \quad (2.59)$$

В результате для фигурирующего в (2.58) остатка Δ_φ выходит аналогичная (2.46) задача Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (2.60)$$

где теперь $G_\varphi(t, \varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon)$ при

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp[-a_0(t - 1 - kT_0 - t_0)/\varepsilon + c_0], \\ x_2 &= \exp[-a_0(t - 1 - kT_0 - t_0)/\varepsilon + c_0 + \omega_1(t, \varepsilon)/\varepsilon]; \\ g_\varphi(\varepsilon) &= (b_0 - 1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

Оценка правых частей из (2.60) проводится по той же схеме, что и в случае (2.47), (2.48). Действительно, привлекая вытекающее из (2.59) асимптотическое равенство

$$w_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau + O(\exp(a_0 \tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.61)$$

приходим к выводу, что

$$(b_0 - 1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-a_0 \sigma_0/\varepsilon)).$$

А отсюда следует экспоненциальная малость начального условия $g_\varphi(\varepsilon)$. Что же касается неоднородности $G_\varphi(t, \varepsilon)$, то проверка ее равномерной по t , φ экспоненциальной малости базируется на неравенстве (2.50) (см. аналогичное место выше).

Проделанные построения являются связующим звеном между отрезками Λ_k и Λ_{k+1} . Обратимся теперь непосредственно к Λ_{k+1} и заметим, что при $t \in \Lambda_{k+1}$ функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ определяется равенствами (2.34), (2.35), (2.37) или (2.38), в которых, как и во всех остальных подобных случаях, следует заменить t на $t-1$. Из упомянутых равенств, в свою очередь, заключаем, что при указанных t имеет место оценка

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q, \quad (2.62)$$

где $q = \text{const} \in (0, \min(a_0\sigma_0, (n+1)T_0 - 1))$. А отсюда и из свойств (2.2) вытекает справедливость равномерного по t , φ асимптотического представления

$$G(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.63)$$

Итак, подставим соотношение (2.63) в (2.41) и дополним получившееся дифференциально-разностное уравнение начальной функцией $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени $1+t_0+kT_0+\sigma_0-h \leq t \leq 1+t_0+kT_0+\sigma_0$, асимптотика которой уже построена (см. (2.57), (2.58), (2.59)). Далее, разобьем, как обычно, отрезок Λ_{k+1} на части длины, не большей h , и будем последовательно интегрировать упомянутое уравнение, имеющее вид

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \quad (2.64)$$

на соответствующих промежутках. В результате приходим к выводу, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n+1)T_0 - (k+1)b_0t_0 - \sigma_0 + \varepsilon(\alpha_k - d_0) + \\ + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad t \in \Lambda_{k+1}. \quad (2.65)$$

Как и в случае (2.54), формула (2.65) допускает дальнейшее упрощение. Для этого, однако, необходимо выяснить поведение при $\tau \rightarrow +\infty$ функции (2.59). Соответствующую асимптотическую формулу легко вывести, исходя из представления

$$w_1(\tau) = \tau - c_0b_0/a_0 - \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0))ds - \\ - \int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0s + c_0)) - b_0]ds + \int_{\tau}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0))ds. \quad (2.66)$$

Обратимся теперь к отрезку $1+t_0 \leq t \leq 1+T_0$. Учитывая соотношения (2.135), (2.150) и правила пересчета начальных условий при $t = 1+t_0$, здесь имеем дело с системой (2.89), дополненной начальными условиями

$$y_j|_{t=1+t_0+0} = -\frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=1+t_0+0} = \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = r_0+1, \dots, m-1, \quad (2.151)$$

где

$$w_j^{(1)} = -\ln t_0 + \frac{b_0}{a_0} \ln(t_0 - h) - \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln(r_0+1-j), \\ j = 1, \dots, r_0; \\ w_j^{(1)} = \ln t_0 - \frac{b_0}{a_0} \ln(t_0 - h) + \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln(j-r_0), \\ j = r_0+1, \dots, m-1. \quad (2.152)$$

Далее, сравнивая формулы (2.106) и (2.151), (2.152), приходим к выводу, что анализ задачи (2.89), (2.151) идентичен случаю отрезка $0 \leq t \leq h$. Поэтому приведем сразу окончательный результат:

$$y_j(t, v, d) = -\frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) = \frac{b_0-a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_2}), \quad j = r_0+1, \dots, m-1; \quad (2.153) \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) = O(d^{\varkappa_2}), \quad j, s = 1, \dots, m-1,$$

где остатки равномерны по $t \in [1+t_0, 1+T_0]$, $v \in \Omega$.

На завершающем этапе доказательства рассмотрим отрезок времени $1+T_0 \leq t \leq T_*$. Как и в случае $t \in [T_0+h, 1]$, анализ здесь базируется на методе математической индукции. В связи с этим положим

$$\Gamma_k = [1+t_0 + (k-1)T_0, 1+kT_0], \quad k = 1, \dots, n; \quad \Gamma_{n+1} = [1+t_0 + nT_0, T_*].$$

Что же касается шага индукции, то он будет заключаться в переходе с отрезка Γ_k на Γ_{k+1} .

Как и выше, фиксируем номер k , $1 \leq k \leq n$, и предположим, что на отрезке Γ_k нами уже установлены равномерные по $t \in \Gamma_k$, $v \in \Omega$

импульсные соотношения в точке $t = 1$, на данном отрезке приходим к задаче Коши для системы (2.89) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=1+0} &= \frac{1}{a_0}(b_0(b_0 - a_0) - 1) \ln \frac{1}{d} + v_j^{(n+1)} - b_0 v_j + O(d^{\varkappa_1}), \\ j &= 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=1+0} &= -\frac{1}{a_0}(b_0(b_0 - a_0) - 1) \ln \frac{1}{d} + v_j^{(n+1)} - b_0 v_j + O(d^{\varkappa_1}), \\ j &= r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Далее, выполним в получившейся задаче (2.89), (2.149) аналогичные (2.115) замены

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{1}{a_0}(b_0(b_0 - a_0) - 1) \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j &= -\frac{1}{a_0}(b_0(b_0 - a_0) - 1) \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \tau &= d^{-\delta_3}(t - 1), \quad \delta_3 = \frac{1}{a_0}(b_0(b_0 - a_0) - 1) - 1 > 0. \end{aligned}$$

В результате для $w = (w_1, \dots, w_{m-1})^T$ получаем аналогичную (2.116) задачу Коши, в которой величину δ_1 следует заменить на δ_3 , а вектор \tilde{v} – на вектор $v^{(n+1)} - b_0 v + O(d^{\varkappa_1})$, где $v^{(n+1)} = (v_1^{(n+1)}, \dots, v_{m-1}^{(n+1)})^T$. Как и (2.116), данная задача рассматривается на асимптотически большом отрезке $J = [0, t_0 d^{-\delta_3}]$.

Из сказанного чуть выше следует, что при $t \in [1, 1 + t_0]$ мы находимся в рамках применимости леммы 2.2. Таким образом, повторяя практически дословно соответствующие рассуждения, предшествующие формулам (2.135), в данном случае имеем равенства

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= \ln \frac{1}{d} - \ln(t - 1) + \ln(r_0 + 1 - j) + O(d^{\varkappa_2}), \\ j &= 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln(t - 1) - \ln(j - r_0) + O(d^{\varkappa_2}), \\ j &= r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_2}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1, \quad \varkappa_2 = \min(\varkappa_1, \delta_3), \end{aligned} \quad (2.150)$$

справедливые равномерно по $v \in \Omega$, $t \in \Lambda$, где Λ – произвольный компакт из $(1, 1 + t_0]$.

Для этого достаточно заметить, что последнее слагаемое в (2.66) при $\tau \rightarrow +\infty$ имеет порядок $\exp(-a_0 \tau)$, а сумма двух других интегралов преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0 s + c_0)) - b_0] ds + \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0 s + c_0)) ds = d_0/a_0,$$

где, напомним, d_0 – постоянная (2.56). Таким образом, окончательно получаем

$$w_1(\tau) = \tau - (c_0 b_0 + d_0)/a_0 + O(\exp(-a_0 \tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.67)$$

Возвратимся к равенству (2.65) и учтем в нем соотношение (2.67). В результате приходим к аналогичному (2.42) асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n + 1)T - (k + 1)b_0 t_0 + \varepsilon \alpha_{k+1} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad t \in \Lambda_{k+1}, \quad (2.68)$$

где

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - c_0 b_0/a_0 - (1 + 1/a_0)d_0. \quad (2.69)$$

А это означает, что сделан шаг индукции, который состоял в переходе от отрезка Λ_k к Λ_{k+1} . Что же касается постоянных α_k , $k = 0, 1, \dots, n + 1$, то для них из (2.69) и из того факта, что $\alpha_0 = 0$, вытекают явные формулы

$$\alpha_k = -k(c_0 b_0/a_0 + (1 + 1/a_0)d_0), \quad k = 0, 1, \dots, n + 1. \quad (2.70)$$

Обоснованный выше индуктивный процесс позволяет за конечное число шагов добраться до последнего отрезка Λ_{n+1} и попутно установить требуемые асимптотические формулы для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на всем промежутке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$. Следует, однако, напомнить, что пока наши построения, связанные с данным отрезком времени, носят условный характер, поскольку они были выполнены при априорном предположении (2.39). Но полученные на этом пути асимптотические формулы свидетельствуют о том, что при любом фиксированном $q \in (0, \min(a_0 \sigma_0, (n + 1)T_0 - 1))$ требуемое неравенство (2.39) действительно выполняется. Таким образом, все наши условные конструкции обретают законную силу.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ рассмотрим отрезок времени $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$ и предположим, что на нем имеют место априорные оценки (2.39), (2.62). В этом случае в силу условий (2.2) уравнение (2.4) примет вид (2.64). Дополним его начальным условием $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$, известным из предыдущих

построений. Интегрируя затем получившуюся задачу Коши методом шагов, приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_* + \varepsilon \alpha_{n+1} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad 2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2, \quad (2.71)$$

где постоянная α_{n+1} задается формулой (2.70) при $k = n + 1$.

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что из самого равенства (2.71) и из установленных ранее асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$ вытекает справедливость априорных предположений (2.39), (2.62). А именно, несложная проверка показывает, что эти неравенства действительно выполняются на отрезке $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$, если в качестве константы q в них взять любое число из интервала $(0, \sigma_0/2)$.

Подведем некоторый итог. Из полученных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (2.30) – (2.38), (2.42), (2.44), (2.45), (2.49), (2.55) – (2.59), (2.61), (2.67) – (2.71)) заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad (2.72)$$

где $x_*(t)$ – функция (2.22), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Далее, опираясь на (2.72) и учитывая оценки (2.28), (2.29), наложенные на параметр σ_0 , приходим к выводу, что интересующий нас $(2n + 2)$ -ой по счету положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ принадлежит отрезку $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$. А отсюда из формул (2.64), (2.71) очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_* - \varepsilon \alpha_{n+1} + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.73)$$

Формулы (2.72), (2.73) свидетельствуют о том, что оператор (2.25) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (2.74)$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (2.74) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (2.75)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.24) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что

получаются равномерные по t, v асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= \ln \frac{1}{d} + w_j^0(t - h - kT_0, -a_0 v^{(k)}) + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + w_j^0(t - h - kT_0, -a_0 v^{(k)}) + O(d^{\varkappa_1}), \\ j &= r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_1}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Перейдем теперь к отрезку $t \in \Lambda_{k+1}$. Уже установленные формулы (2.145) и импульсные соотношения в точке $t = t_0 + h + kT_0$ приводят к выводу, что

$$\begin{aligned} y_j|_{t=t_0+h+kT_0+0} &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=t_0+h+kT_0+0} &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (2.146)$$

где

$$\begin{aligned} v_j^{(k+1)} &= w_j^0(t_0, -a_0 v^{(k)}) - (1 + 1/a_0) w_j^0(t_0 - h, -a_0 v^{(k)}), \\ j &= 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Далее, после выполнения в задаче (2.89), (2.146) замены (2.138) приходим в очередной раз к аналогичной (2.109) регулярно зависящей от d задаче Коши, анализ которой тривиален. Таким образом, в данном случае имеем равномерные по $t \in \Lambda_{k+1}$, $v \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k+1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_1}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Итак, сделан шаг индукции, который состоял в переходе от отрезка Λ_k к Λ_{k+1} . В результате обоснованы асимптотические формулы (2.148) при $k = 0, \dots, n$, а для постоянных $v_j^{(k+1)}$ получены рекуррентные соотношения (2.137), (2.147).

Следующий этап доказательства связан с рассмотрением отрезка $1 \leq t \leq 1 + t_0$. Опираясь на равенства (2.106), (2.140) (при $k = n + 1$) и

где $v_j^{(k)}$ – некоторые константы. Подчеркнем, что при $k = 1$ соотношения вида (2.140) имеют место (см. (2.139)) и в этом случае $v_j^{(1)}$ задаются формулами (2.137).

Рассмотрим сначала отрезок $kT_0 + h \leq t \leq t_0 + h + kT_0$. Согласно равенствам (2.140) и правилам пересчета начальных данных в точке $t = kT_0 + h$ (см. (2.90)) здесь изучению подлежит система (2.89) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=h+kT_0+0} &= \ln \frac{1}{d} - a_0 v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=h+kT_0+0} &= -\ln \frac{1}{d} - a_0 v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.141)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что после выполнения в (2.89) замены

$$\begin{aligned} y_j &= \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j &= -\ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1 \end{aligned} \quad (2.142)$$

для $w = (w_1, \dots, w_{m-1})^T$ получается задача Коши вида

$$\dot{w} = H_1(w) + d^2 H_2(w) + d H_3, \quad w|_{t=h+kT_0} = -a_0 v^{(k)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad (2.143)$$

где $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_{m-1}^{(k)})^T$, а вектор-функции H_r , $r = 1, 2, 3$ по-прежнему задаются равенствами (2.110) – (2.112).

Исследование задачи (2.143) не вызывает затруднений, поскольку она регулярно зависит от d и рассматривается на конечном отрезке изменения t . Поэтому для компонент $w_j(t, v, d)$, $j = 1, \dots, m - 1$ ее решения имеют место равномерные по $t \in [kT_0 + h, t_0 + h + kT_0]$, $v \in \Omega$ асимптотические формулы

$$\begin{aligned} w_j(t, v, d) &= w_j^0(t - h - kT_0, -a_0 v^{(k)}) + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial w_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_1}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (2.144)$$

где $w_j^0(t - h - kT_0, -a_0 v^{(k)})$ – функции, получающиеся из (2.120) при замене τ на $t - h - kT_0$, \tilde{v} – на вектор $-a_0 v^{(k)}$. Что же касается исходной задачи (2.89), (2.141), то в силу (2.142), (2.144) для компонент ее решения

на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (2.21), обеспечивающее свойства $x_*(-\sigma_0) = -\sigma_0$ и $x_*(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Поэтому справедливости включения (2.75) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t). \quad (2.76)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (2.21), (2.28), (2.29), (2.76) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (2.4) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (2.72) – (2.74) удовлетворяет требуемым свойствам (2.23).

2.1.4. Анализ свойств устойчивости

Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 2.1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (2.22). Из явной формулы (2.25) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 &= g(t + T_\varphi, \varepsilon) - \\ &- \frac{g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad g_0(-\sigma_0) = 0\},$$

а через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A(t, \varepsilon)g(t - h) + B(t, \varepsilon)g(t - 1), \\ A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} (f'(\exp x) \exp x)|_{x=x_\varphi(t-h, \varepsilon)/\varepsilon}, \\ B(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} (g'(\exp x) \exp x)|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.78)$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Из явной формулы (2.77) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (2.78). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\| \quad (2.79)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , g_0) постоянными $M, q > 0$.

Обратимся сначала к отрезку $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$, на котором из (2.78) для $g(t, \varepsilon)$ имеем явную формулу

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t A(s, \varepsilon) g_0(s - h) ds + \int_{-\sigma_0}^t B(s, \varepsilon) g_0(s - 1) ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0. \quad (2.80)$$

Напомним, далее, что при рассматриваемых t функция $x_\varphi(t - h, \varepsilon)$ совпадает с функцией $\varphi(t - h)$, а для $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ равенство $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ имеет место даже на более широком отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Объединяя эти соотношения с фигурирующими в (2.24) оценками и свойствами функций $f(u)$, $g(u)$ (см. (2.2)), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| &\leq M \exp(-q/\varepsilon), \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| &\leq M \exp(-q/\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.81)$$

И наконец, учитывая (2.81) в (2.80), убеждаемся, что при $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$

$$\max_t |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\|. \quad (2.82)$$

Для распространения оценки (2.82) на оставшийся отрезок $[h - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем указанный промежуток времени на отрезки $[(k + 1)h - \sigma_0, (k + 2)h - \sigma_0]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$ и $[(k_0 + 2)h - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor (T_\varphi - 2h)/h \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические формулы

$$\max_{h - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| = O(1/\varepsilon), \quad \max_{1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| = O(1/\varepsilon)$$

Равенства (2.136), (2.137) наводят на мысль о целесообразности выполнения в (2.89) замены переменных

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Действительно, после указанной замены для вектор-функции $w = (w_1, \dots, w_{m-1})^T$ приходим к регулярно зависящей от d задаче Коши вида (2.109), где величину δ_0 следует заменить на $\delta_2 = 1/a_0 < 1$, начальный момент времени $t = 0$ – на $t = t_0 + h$, а начальный вектор v – на вектор с компонентами $v_j^{(1)} + O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)})$, $j = 1, \dots, m - 1$ (см. (2.136), (2.137)). Таким образом, здесь справедлив аналог леммы 2.1, а точнее говоря, равномерно по $t \in [t_0 + h, T_0 + h]$, $v \in \Omega$ выполняются асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(1)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_1}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1, \\ \varkappa_1 &= \min(1 - \delta_0, \delta_1, 1 - \delta_2). \end{aligned} \quad (2.139)$$

Асимптотическое исследование решения (2.107) при $T_0 + h \leq t \leq 1$ проведем с помощью метода математической индукции. Для этого нам понадобятся отрезки

$$\Lambda_k = [t_0 + h + (k - 1)T_0, kT_0 + h], \quad k = 1, \dots, n; \quad \Lambda_{n+1} = [t_0 + h + nT_0, 1],$$

а шаг индукции будет состоять в переходе с отрезка Λ_k на Λ_{k+1} .

Фиксируем номер k , $1 \leq k \leq n$, и предположим, что на отрезке Λ_k уже получены равномерные по $t \in \Lambda_k$, $v \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(k)} + O(d^{\varkappa_1}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\varkappa_1}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (2.140)$$

Проделанные построения позволяют получить интересующую нас информацию об асимптотическом поведении компонент вектор-функции (2.107) на полуинтервале $t \in (h, t_0 + h]$. Действительно, в силу произвольности множества $\tilde{\Omega}$ будем считать, что имеет место включение $\tilde{v} \in \tilde{\Omega}$, где \tilde{v} – вектор с координатами (2.117). Далее, фиксируем произвольно $t \in (h, t_0 + h]$ и подставим соотношения (2.117), (2.121) в (2.115). В результате после некоторых преобразований с учетом свойств (2.124), (2.134) для компонент решения задачи Коши (2.89), (2.114) приходим к асимптотическим представлениям

$$\begin{aligned} y_j(t, v, d) &= \ln \frac{1}{d} - \ln(t - h) + \ln(r_0 + 1 - j) + O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)}), \\ &\quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j(t, v, d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln(t - h) - \ln(j - r_0) + O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)}), \\ &\quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t, v, d) &= O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)}), \quad j, s = 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Отметим еще, что остатки в (2.135) имеют указанный порядок малости равномерно по t из любого компактного подмножества $\Lambda \subset (h, t_0 + h]$.

На очередном отрезке $t_0 + h \leq t \leq T_0 + h$ в силу равенств (2.135) и импульсных соотношений в точке $t = t_0 + h$ (см. (2.90)) исследованию подлежит система (2.89) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=t_0+h+0} &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(1)} + O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=t_0+h+0} &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j^{(1)} + O(d^{\min(1-\delta_0, \delta_1)}), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (2.136)$$

где

$$\begin{aligned} v_j^{(1)} &= (1 + 1/a_0) \ln(t_0 - h) - \ln t_0 - (1/a_0) \ln(r_0 + 1 - j), \\ &\quad j = 1, \dots, r_0; \\ v_j^{(1)} &= -(1 + 1/a_0) \ln(t_0 - h) + \ln t_0 + (1/a_0) \ln(j - r_0), \\ &\quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.137)$$

и свойства (2.81), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |g(t, \varepsilon)| &\leq |g((k+1)h - \sigma_0, \varepsilon)| + \int_{(k+1)h - \sigma_0}^t |A(s, \varepsilon)| \cdot |g(s - h, \varepsilon)| ds + \\ &\quad + \int_{(k+1)h - \sigma_0}^t |B(s, \varepsilon)| \cdot |g(s - 1, \varepsilon)| ds, \quad t \geq (k+1)h - \sigma_0 \end{aligned}$$

и из уже полученных оценок вида (2.82) на отрезках с номерами $j = 0, 1, \dots, k - 1$ вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая установленное выше неравенство (2.79) в (2.77), приходим к оценке

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon).$$

Остается добавить, что эта оценка обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Теорема 2.1 полностью доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что релаксационный цикл

$$u_*(t, \lambda) = \exp(x_*(t, \varepsilon)/\varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (2.83)$$

исходного уравнения (2.1) обладает требуемыми асимптотическими характеристиками, т.е. является bursting-циклом. Действительно, для его периода $T_*(\lambda)$ справедлива вытекающая из (2.73) формула

$$T_*(\lambda) = T_0 - \alpha_{n+1}/\lambda + O(\exp(-q\lambda)), \quad q = \text{const} > 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, на отрезке времени $0 \leq t \leq T_*(\lambda)$ цикл (2.83) допускает $n + 1$ подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплеска. Этим всплескам соответствуют интервалы $kT_0 < t < t_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ положительности функции (2.22). Если же t фиксировано и принадлежит множеству $[0, T_*] \setminus \bigcup_{k=0}^n [kT_0, t_0 + kT_0]$, то в указанный момент времени функция $u_*(t, \lambda)$ имеет порядок $\exp(-\lambda q)$, $q = \text{const} > 0$.

В заключение раздела добавим, что при уменьшении запаздывания h для справедливости теоремы 2.1 необходимо надлежащим образом увеличивать параметр λ (связано это с тем, что в рамках нашей асимптотической теории должно выполняться условие $\lambda h \gg 1$). Если же, напротив,

$h = h_0/\lambda$, $h_0 = \text{const} > 0$, то ситуация принципиально меняется. Например, в этом случае может оказаться устойчивым состояние равновесия $u = u_0 > 0$ уравнения (2.1) (существование такого состояния равновесия обеспечивают условия (2.2), а при вполне естественных требованиях $f'(u) < 0$, $g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$ оно единственно). Кроме того, используя так называемый метод квазинормальных форм (см. [24], [25]), можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях из состояния равновесия $u = u_0$ бифурцирует любое наперед заданное число сосуществующих устойчивых циклов, т.е. реализуется хорошо известный феномен буферности. Соответствующий анализ изложен в разделе 2.3 данного пособия.

2.2. Дискретные автоволны в нейронных системах

Во второй части второй главы рассматривается одномерная цепочка диффузионно связанных осцилляторов, каждый из которых представляет собой сингулярно возмущенное скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями (2.1). Устанавливается, что в системах такого типа наблюдается известное явление буферности. А именно, при согласованном увеличении числа звеньев цепочки и уменьшении коэффициента диффузии происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений.

2.2.1. Введение

Как известно, автоколебательным процессам в нейронных системах присущи две характерные особенности, получившие специальные названия: bursting-эффект и феномен буферности. Первая из указанных особенностей заключается в чередовании пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с относительно спокойными участками изменения мембранных потенциалов. О второй же принято говорить в случае, когда в некоторой динамической системе при подходящем выборе параметров реализуется любое наперед заданное конечное число сосуществующих аттракторов.

Исследованию "bursting behavior" посвящена достаточно обширная литература (см., например, работы [21] – [23] и имеющуюся в них библиографию). Как правило, для математического моделирования этого эффек-

и обозначим через Π оператор, порожденный его правой частью в пространстве $C(J; \mathbb{R}^{m-1})$ непрерывных вектор-функций $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in J$ с нормой $\|\tilde{w}\|_C = \max_{\tau \in J} \|\tilde{w}(\tau)\|$. Из оценок (2.125), (2.129) вытекает, что этот оператор преобразует в себя некоторый замкнутый шар пространства $C(J; \mathbb{R}^{m-1})$ с центром в нуле радиуса $r = M_1 d$ и является в нем сжимающим с константой сжатия $q = M_2 d$, где $M_1, M_2 = \text{const} > 0$. А отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (2.130) имеет в упомянутом шаре единственное решение. Таким образом, установлена первая группа асимптотических равенств из (2.121).

Для доказательства второй группы асимптотических формул (2.121) фиксируем натуральное s , $1 \leq s \leq m-1$, и продифференцируем задачу (2.116) по компоненте \tilde{v}_s . В результате для $\omega = (\partial w_1 / \partial \tilde{v}_s, \dots, \partial w_{m-1} / \partial \tilde{v}_s)^T$ получаем задачу Коши

$$\frac{d\omega}{d\tau} = A(\tau, d)\omega, \quad \omega|_{\tau=0} = e_s, \quad (2.131)$$

где e_s – единичный орт с номером s , а матрица $A(\tau, d)$ в силу (2.110) – (2.112) и уже установленных асимптотических формул для $w_j(\tau, \tilde{v}, d)$, $j = 1, \dots, m-1$ допускает асимптотическое представление

$$A(\tau, d) = A(\tau) + d B(\tau, d), \quad \|B(\tau, d)\| \leq \frac{M}{\tau + 1}, \quad \tau \in J. \quad (2.132)$$

Далее, положим в (2.131) $\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}$, где $\omega_0 = (\partial w_1^0 / \partial \tilde{v}_s, \dots, \partial w_{m-1}^0 / \partial \tilde{v}_s)^T$ – решение задачи Коши, получающейся из (2.131) при $d = 0$, и перейдем к аналогичному (2.130) линейному неоднородному интегральному уравнению

$$\tilde{\omega}(\tau) = d \int_0^\tau K(\tau, \theta) B(\theta, d) (\omega_0(\theta, \tilde{v}) + \tilde{\omega}(\theta)) d\theta. \quad (2.133)$$

Анализ уравнения (2.133) опирается на неравенство (2.129), оценку из (2.132) и вытекающие из (2.120) асимптотические формулы (равномерные по $\tilde{v} \in \tilde{\Omega}$)

$$\frac{\partial w_j^0}{\partial \tilde{v}_s}(\tau, \tilde{v}) = O(1/\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad j, s = 1, \dots, m-1. \quad (2.134)$$

Объединяя перечисленные факты и проводя те же рассуждения, что и в нелинейном случае (2.130), убеждаемся, что это уравнение имеет единственное решение $\tilde{\omega}(\tau, \tilde{v}, d) \in C(J; \mathbb{R}^{m-1})$, $\|\tilde{\omega}\|_C \leq M d$. Лемма 2.2 полностью доказана.

где $A_0 = \text{diag}\{A_0^{(1)}, A_0^{(2)}\}$, $A_0^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)})_{i,j=1,\dots,r_0}$, $A_0^{(2)} = (a_{i,j}^{(2)})_{i,j=1,\dots,m-1-r_0}$,

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(1)} &= 0 \text{ при } j < i \text{ и } j > i+2, \quad a_{i,i}^{(1)} = -(r_0+1-i), \quad a_{i,i+1}^{(1)} = r_0-i; \\ a_{i,j}^{(2)} &= 0 \text{ при } j > i \text{ и } j < i-2, \quad a_{i,i}^{(2)} = -i, \quad a_{i,i-1}^{(2)} = i-1, \end{aligned} \quad (2.127)$$

а буквами M , M_1 и т. д. здесь и ниже обозначаем некоторые универсальные (не зависящие от τ и \tilde{v}) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Опираясь на представление (2.126), для $K(\tau, \theta)$ получаем интегральное уравнение

$$K(\tau, \theta) = \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{\theta+1}\right) + \int_{\theta}^{\tau} \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{\sigma+1}\right) \Delta(\sigma) K(\sigma, \theta) d\sigma. \quad (2.128)$$

Учитывая, далее, в (2.128) неравенство для $\Delta(\tau)$ из (2.126) и вытекающую из (2.127) оценку

$$\left\| \exp\left(A_0 \ln \frac{\tau+1}{\theta+1}\right) \right\| \leq M \frac{\theta+1}{\tau+1}, \quad \tau \geq \theta \geq 0,$$

для функции $\gamma(\tau, \theta) = ((\tau+1)/(\theta+1)) \|K(\tau, \theta)\|$ приходим к интегральному неравенству вида

$$\gamma(\tau, \theta) \leq M_1 + M_2 \int_{\theta}^{\tau} \frac{\gamma(\sigma, \theta)}{1+\sigma^2} d\sigma,$$

из которого, в свою очередь, в силу леммы Гронуолла-Беллмана имеем

$$\gamma(\tau, \theta) \leq M_1 \exp\left\{ \int_{\theta}^{\tau} \frac{M_2}{1+\sigma^2} d\sigma \right\} \leq M_3.$$

Что же касается исходной матрицы $K(\tau, \theta)$, то для нее на этом пути выходит оценка

$$\|K(\tau, \theta)\| \leq M \frac{\theta+1}{\tau+1}, \quad \tau \geq \theta \geq 0. \quad (2.129)$$

Последующий способ действий стандартен. Перейдем от (2.122) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\tilde{w}(\tau) = \int_0^{\tau} K(\tau, \theta) \{ \Psi_0(\theta, \tilde{w}(\theta)) + d^{2+2\delta_1} \Psi_1(\theta, \tilde{w}(\theta)) + d^{1+\delta_1} \Psi_2 \} d\theta \quad (2.130)$$

та привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными, в которых при определенных условиях могут существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). Однако возможен и другой подход к решению данной проблемы, связанный с учетом запаздываний по времени.

В случае феномена буферности ситуация несколько иная. Несмотря на то что данное явление представляет собой один из фундаментальных законов функционирования нелинейных систем из различных областей естествознания [15], [16], оно до сих пор не получило должного освещения в нейродинамической литературе. В то же время достаточно ясно, что буферность весьма актуальна именно для нейронной тематики. Действительно, она отражает конкурентное взаимодействие различных концепций и идей в неокортексе человеческого мозга, а также может быть использована для объяснения механизма работы ассоциативной памяти.

Итак, возникает проблема одновременной реализуемости описанных феноменов в рамках некой единой математической модели. Одна из таких моделей предлагается в настоящей статье.

Следуя методике из [14], будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона описывается дифференциально-разностным уравнением (2.1). В этом разделе нам потребуется большая гладкость функций $f(u)$, $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, в связи с этим заменим условия (2.2) на следующие:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad g(u) = b_0 + O(1/u), \\ u f'(u) &= O(1/u), \quad u g'(u) = O(1/u), \\ u^2 f''(u) &= O(1/u), \quad u^2 g''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где a_0, b_0 – положительные константы. Типовые примеры таких функций дают формулы (2.3). Как показано в предыдущем пункте, по любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (2.1), (2.84) параметры h, a_0, b_0 , что при всех достаточно больших λ уравнение (2.1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала. Иными словами, при указанном выборе параметров $u_*(t, \lambda)$ является bursting-циклом.

Наглядное представление о релаксационных свойствах bursting-цикла $u_*(t, \lambda)$ дает его график на плоскости (t, u) (см. рис. 2.1), построенный в масштабе 25 : 1 для случая $h = 1/26$, $\lambda = 130$ и для функций (2.3) при $c_1 = 0.5$, $c_2 = 4$.

Как уже было сказано выше, уравнение (2.1) служит математической моделью изолированного нейрона. Предположим теперь, что рассматривается одномерная цепочка из m , $m \geq 2$, таких нейронов, каждый из которых взаимодействует с двумя ближайшими своими соседями. В этом случае вместо (2.1) имеем дело с системой вида

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))]u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.85)$$

где $u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$, а параметр $d > 0$ порядка единицы характеризует глубину связи между нейронами.

Система (2.85) допускает, очевидно, так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (2.86)$$

где $u_*(t, \lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения (2.1). Наш основной результат состоит в том, что при подходящем уменьшении d и при всех $\lambda \gg 1$ у этой системы наряду с устойчивым циклом (2.86) существует не менее m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений. Последние будем называть дискретными автоволновыми процессами или просто автоволнами.

Забегая вперед, отметим, что система (2.85) и является интересующей нас математической моделью, в которой одновременно наблюдаются феномен буферности и bursting-эффект. Действительно, как показывается ниже, все ее устойчивые автоволны, обнаруженные аналитическими методами, представляют собой bursting-циклы. Это означает, напомним, что на отрезке времени длины периода их компоненты u_j , $j = 1, \dots, m$ демонстрируют то же самое асимптотическое поведение, что и функция $u_*(t, \lambda)$, а именно, допускают ровно n асимптотически высоких всплесков, где натуральное n зависит от выбора параметров a_0 , b_0 , h и в принципе может быть любым.

2.2.2. Основные результаты

Обратимся теперь к системе (2.85), считая, что параметры a_0 , b_0 , h по-прежнему удовлетворяют условиям (2.7), (2.8). Ее анализ будем проводить

$\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{m-1})^T$ приходим к задаче Коши

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tau} = A(\tau)\tilde{w} + \Psi_0(\tau, \tilde{w}) + d^{2+2\delta_1}\Psi_1(\tau, \tilde{w}) + d^{1+\delta_1}\Psi_2, \quad \tilde{w}|_{\tau=0} = 0, \quad (2.122)$$

где

$$\begin{aligned} A(\tau) &= H'_1(w)|_{w=w^0(\tau, \tilde{v})}, \\ \Psi_0(\tau, \tilde{w}) &= H_1(w^0(\tau, \tilde{v}) + \tilde{w}) - H_1(w^0(\tau, \tilde{v})) - A(\tau)\tilde{w}, \\ \Psi_1(\tau, \tilde{w}) &= H_2(w^0(\tau, \tilde{v}) + \tilde{w}), \quad \Psi_2 = H_3. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Обратим внимание, что задача (2.122) сингулярна в том смысле, что ее приходится рассматривать на асимптотически большом промежутке времени $\tau \in J$. Тем самым необходимо знать поведение при $\tau \rightarrow +\infty$ матрицы $A(\tau)$ и вектор-функций Ψ_0 , Ψ_1 . При решении этой проблемы нам потребуются вытекающие из (2.120) асимптотические представления (равномерные по $\tilde{v} \in \tilde{\Omega}$)

$$\begin{aligned} w_j^0(\tau, \tilde{v}) &= -\ln \tau + \ln(r_0 + 1 - j) + O(1/\tau), \\ \tau &\rightarrow +\infty, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ w_j^0(\tau, \tilde{v}) &= \ln \tau - \ln(j - r_0) + O(1/\tau), \\ \tau &\rightarrow +\infty, \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Действительно, учитывая соотношения (2.124) в явных формулах (2.110) – (2.112) и (2.123), приходим к выводу о существовании таких непрерывных на полуоси $r \geq 0$ функций $M_s = M_s(r) > 0$, $s = 1, 2, 3$, что для любых векторов $\tilde{w}^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)}$, $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{m-1}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\tilde{w}^{(1)}\|, \|\tilde{w}^{(2)}\|, \|\tilde{w}\| \leq r$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^{m-1} или индуцированная ей матричная норма), и для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\Psi_0(\tau, \tilde{w}^{(1)}) - \Psi_0(\tau, \tilde{w}^{(2)})\| &\leq \frac{rM_1(r)}{\tau + 1} \|\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}\|, \\ \|\Psi_1(\tau, \tilde{w}^{(1)}) - \Psi_1(\tau, \tilde{w}^{(2)})\| &\leq (\tau + 1)M_2(r) \|\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}\|, \\ \|\Psi_1(\tau, \tilde{w})\| &\leq (\tau + 1)M_3(r). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Обратимся теперь к линейной системе $d\tilde{w}/d\tau = A(\tau)\tilde{w}$ и обозначим через $K(\tau, \theta)$, $K(\theta, \theta) = I$, $\tau \geq \theta \geq 0$ ее матрицу Коши. Из асимптотических равенств (2.124) и из явных формул (2.110), (2.123) вытекает, что

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\tau + 1} + \Delta(\tau), \quad \|\Delta(\tau)\| \leq \frac{M}{\tau^2 + 1}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad (2.126)$$

допускающие дифференцирование по v . Добавим еще, что переменная τ в (2.116) меняется на асимптотически большом отрезке $J = [0, t_0 d^{-\delta_1}]$.

Для удобства последующего анализа будем считать, что вектор \tilde{v} в (2.116) не зависит от d и пробегает некоторое компактное множество $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m-1}$, а компоненты решения получившейся задачи Коши обозначим через $w_j(\tau, \tilde{v}, d)$, $j = 1, \dots, m-1$. Далее, положим в (2.116) $d = 0$. В результате приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw_j}{d\tau} &= \exp w_{j+1} - \exp w_j, \quad j = 1, \dots, r_0 - 1; \\ \frac{dw_{r_0}}{d\tau} &= -\exp w_{r_0}; \\ \frac{dw_{r_0+1}}{d\tau} &= \exp(-w_{r_0+1}), \\ \frac{dw_j}{d\tau} &= \exp(-w_j) - \exp(-w_{j-1}), \quad j = r_0 + 2, \dots, m-1; \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$w_j|_{\tau=0} = \tilde{v}_j, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.119)$$

Что же касается решения получившейся задачи (2.118), (2.119), то, как показывает несложная проверка, для его компонент $w_j^0(\tau, \tilde{v})$, $j = 1, \dots, m-1$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s w_{r_0+r}^0(\tau, \tilde{v}) &= \ln \left\{ \frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-\ell} \tilde{v}_{r_0+j} \right) \right\}, \quad s = 1, \dots, m-1-r_0; \\ \sum_{r=0}^{s-1} w_{r_0-r}^0(\tau, \tilde{v}) &= -\ln \left\{ \frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp \left(-\sum_{j=1}^{s-\ell} \tilde{v}_{r_0-j+1} \right) \right\}, \quad s = 1, \dots, r_0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Строгий смысл описанным построениям придает следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Равномерно по $\tau \in J$, $\tilde{v} \in \tilde{\Omega}$ справедливы асимптотические представления*

$$\begin{aligned} w_j(\tau, \tilde{v}, d) &= w_j^0(\tau, \tilde{v}) + O(d), \\ \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{v}_s}(\tau, \tilde{v}, d) &= \frac{\partial w_j^0}{\partial \tilde{v}_s}(\tau, \tilde{v}) + O(d), \quad j, s = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Доказательство. Выполним в системе (2.116) замену $w = w^0(\tau, \tilde{v}) + \tilde{w}$, где $w^0(\tau, \tilde{v}) = (w_1^0(\tau, \tilde{v}), \dots, w_{m-1}^0(\tau, \tilde{v}))^T$. В результате для вектор-функции

в новых переменных x, y_1, \dots, y_{m-1} , где

$$u_1 = \exp(x/\varepsilon), \quad u_j = \exp \left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k \right), \quad j = 2, \dots, m, \quad \varepsilon = 1/\lambda \ll 1. \quad (2.87)$$

Подставляя, далее, соотношения (2.87) в (2.85), приходим к релаксационной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d (\exp y_1 - 1) + F(x(t-h), \varepsilon) - G(x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] + \\ &\quad + F_j(x(t-h), y_1(t-h), \dots, y_j(t-h), \varepsilon) - \\ &\quad - G_j(x(t-1), y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \\ &\quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.88)$$

где $y_0 = y_m = 0$, функции F, G те же самые, что и в (2.1), а функции F_j, G_j имеют вид

$$\begin{aligned} F_j(x, y_1, \dots, y_j) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[f \left(\exp \left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^j y_k \right) \right) - f \left(\exp \left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k \right) \right) \right], \\ G_j(x, y_1, \dots, y_j) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[g \left(\exp \left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^j y_k \right) \right) - g \left(\exp \left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, фиксируем постоянную $\sigma_0 > 0$, подчиненную условию (2.21). Далее, на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0$, где T_* – величина из (2.20), обозначим через $y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z)$, $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, компоненты решения импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ j &= 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0; \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} y_j(h + kT_0 + 0) &= y_j(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)y_j(kT_0), \\ y_j(t_0 + h + kT_0 + 0) &= y_j(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\ y_j(1 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + kT_0 - 0) - b_0 y_j(kT_0), \\ y_j(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.90)$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \quad (2.91)$$

И наконец, рассмотрим отображение

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_*-\sigma_0}, \quad (2.92)$$

действующее из \mathbb{R}^{m-1} в \mathbb{R}^{m-1} . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (2.92), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (2.88) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл $(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon))$, $x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) &= T_*, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| &= 0, \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |y_j(t, \varepsilon)| &\leq M, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.93)$$

где $x_*(t)$ – функция (2.22), $M = \text{const} > 0$, а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T(\varepsilon) - \sigma_0]$ с выброшенными интервалами

$$\begin{aligned} (h + kT_0 - \varepsilon^\delta, h + kT_0 + \varepsilon^\delta), \quad (t_0 + h + kT_0 - \varepsilon^\delta, t_0 + h + kT_0 + \varepsilon^\delta), \\ (1 + kT_0 - \varepsilon^\delta, 1 + kT_0 + \varepsilon^\delta), \quad (1 + t_0 + kT_0 - \varepsilon^\delta, 1 + t_0 + kT_0 + \varepsilon^\delta), \\ k = 0, 1, \dots, n, \quad \delta = \text{const} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено во второй части первой главы (см. также статью [26]).

Теорема 2.2 носит базовый характер, так как она сводит интересующую нас проблему нахождения дискретных автоволновых процессов системы (2.85) к поиску устойчивых неподвижных точек отображения (2.92). Последнее же для удобства дальнейшего анализа перепишем в инвариантной форме, не зависящей от выбора параметра σ_0 . С этой целью обозначим через $P^t(z)$, $z \in \mathbb{R}^{m-1}$, $P^0(z) = z$ оператор сдвига по траекториям системы (2.89). Нетрудно убедиться, что после замены $P^{\sigma_0}(z) \rightarrow z$ интересующее нас отображение принимает требуемый инвариантный вид

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_*}, \quad (2.94)$$

$$H_{1,3} = -1, \quad H_{j,3} = 0, \quad j = 2, \dots, m-2; \quad H_{m-1,3} = 1. \quad (2.112)$$

Анализ получившейся задачи (2.109) тривиален. Действительно, так как уравнение для w регулярно зависит от малого параметра d и рассматривается на конечном отрезке $0 \leq t \leq h$, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Равномерно по $t \in [0, h]$, $v \in \Omega$ для решения $w = w(t, v, d)$ задачи Коши (2.109) имеют место асимптотические представления

$$w(t, v, d) = v + O(d^{1-\delta_0}), \quad \frac{\partial w}{\partial v}(t, v, d) = I + O(d^{1-\delta_0}), \quad (2.113)$$

где I – единичная матрица.

Перейдем к рассмотрению отрезка $h \leq t \leq t_0 + h$. Привлекая равенства (2.113) и правила пересчета начальных условий в точке $t = h$ (см. (2.90)), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} y_j|_{t=h+0} &= (b_0 - a_0) \ln \frac{1}{d} - a_0 v_j + O(d^{1-\delta_0}), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=h+0} &= -(b_0 - a_0) \ln \frac{1}{d} - a_0 v_j + O(d^{1-\delta_0}), \quad j = r_0+1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Таким образом, в данном случае после выполнения аналогичных (2.108) замен переменных

$$\begin{aligned} y_j &= (b_0 - a_0) \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j &= -(b_0 - a_0) \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = r_0+1, \dots, m-1, \\ \tau &= d^{-\delta_1}(t - h), \quad \delta_1 = b_0 - a_0 - 1 > 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

получается задача Коши

$$\frac{dw}{d\tau} = H_1(w) + d^{2+2\delta_1} H_2(w) + d^{1+\delta_1} H_3, \quad w|_{\tau=0} = \tilde{w}. \quad (2.116)$$

Здесь, как и в (2.109), $w = (w_1, \dots, w_{m-1})^T$, функции H_k , $k = 1, 2, 3$ задаются равенствами (2.110) – (2.112), а для компонент \tilde{v}_j , $j = 1, \dots, m-1$ начального вектора \tilde{v} справедливы формулы

$$\tilde{v}_j = -a_0 v_j + O(d^{1-\delta_0}), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (2.117)$$

2.2.3. Доказательство теоремы 2.4

Итак, предположим, что $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1$. Выберем затем некоторое целое r_0 , $0 \leq r_0 \leq m-1$, и в соответствии с ожидаемыми равенствами (2.104) дополним систему (2.89), (2.90) начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=0} &= -\frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j|_{t=0} &= \frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.106)$$

где $v_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m-1$. Далее, фиксируем произвольно компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и обозначим через

$$(y_1(t, v, d), \dots, y_{m-1}(t, v, d))^T, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad v = (v_1, \dots, v_{m-1})^T \in \Omega \quad (2.107)$$

решение получившейся задачи Коши (2.89), (2.90), (2.106) (здесь и ниже через $(*, \dots, *)^T$ обозначается операция транспонирования).

Согласно равенствам (2.106) на отрезке $0 \leq t \leq h$ после перехода к новым переменным $w_j(t)$, $j = 1, \dots, m-1$ посредством формул

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = 1, \dots, r_0; \\ y_j &= \frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + w_j, \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.108)$$

имеем дело с задачей Коши

$$\dot{w} = d^{1+\delta_0} H_1(w) + d^{1-\delta_0} H_2(w) + d H_3, \quad w|_{t=0} = v. \quad (2.109)$$

Здесь $w = (w_1, \dots, w_{m-1})^T$, $\delta_0 = (b_0 - a_0)/a_0 < 1$ (в силу предполагаемого условия $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1$), $H_k = (H_{1,k}, \dots, H_{m-1,k})^T$, $k = 1, 2, 3$, а компоненты $H_{j,k}$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} H_{j,1} &= \exp w_{j+1} - \exp w_j, \quad j = 1, \dots, r_0 - 1; \\ H_{r_0,1} &= -\exp w_{r_0}, \quad H_{r_0+1,1} = \exp(-w_{r_0+1}); \\ H_{j,1} &= \exp(-w_j) - \exp(-w_{j-1}), \quad j = r_0 + 2, \dots, m-1; \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= \exp(-w_1), \quad H_{j,2} = \exp(-w_j) - \exp(-w_{j-1}), \quad j = 2, \dots, r_0 - 1; \\ H_{r_0,2} &= \exp w_{r_0+1} + \exp(-w_{r_0}) - \exp(-w_{r_0-1}), \\ H_{r_0+1,2} &= \exp w_{r_0+2} - \exp w_{r_0+1} - \exp(-w_{r_0}), \\ H_{j,2} &= \exp w_{j+1} - \exp w_j, \quad j = r_0 + 2, \dots, m-2; \\ H_{m-1,2} &= -\exp w_{m-1}; \end{aligned} \quad (2.111)$$

где $(y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))$ – решение импульсной системы (2.89), (2.90) с аналогичным (2.91) начальным условием (z_1, \dots, z_{m-1}) , заданным при $t = 0$.

Исследование аттракторов отображения (2.94) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

Теорема 2.3. *Найдется такое достаточно малое $d_0 > 0$, что при всех $d \in (0, d_0]$ нулевая неподвижная точка отображения (2.94) экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Несложный подсчет показывает, что отвечающая точке $z = 0$ матрица Якоби $\Phi'_0(0)$ есть оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\dot{h}_j = d(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}), \quad h_0 = h_m = 0, \quad j = 1, \dots, m-1; \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} h_j(h + kT_0 + 0) &= h_j(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)h_j(kT_0), \\ h_j(t_0 + h + kT_0 + 0) &= h_j(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)h_j(t_0 + kT_0), \\ h_j(1 + kT_0 + 0) &= h_j(1 + kT_0 - 0) - b_0 h_j(kT_0), \\ h_j(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= h_j(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)h_j(t_0 + kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.96)$$

за время от $t = 0$ до $t = T_*$. Далее, применим к (2.95), (2.96) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, а точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{r=1}^{m-1} g_r(t) \sin\left(\frac{\pi r}{m} j\right), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.97)$$

В результате убеждаемся, что компоненты $g_r(t)$, $r = 1, \dots, m-1$ из (2.97) являются решениями импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{g} &= -s g, \quad g(h + kT_0 + 0) = g(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)g(kT_0), \\ g(t_0 + h + kT_0 + 0) &= g(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)g(t_0 + kT_0), \\ g(1 + kT_0 + 0) &= g(1 + kT_0 - 0) - b_0 g(kT_0), \\ g(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= g(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)g(t_0 + kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.98)$$

при $0 \leq t \leq T_*$, $s = s_r$, где

$$s_r = 4d \sin^2\left(\frac{\pi r}{2m}\right), \quad r = 1, \dots, m-1. \quad (2.99)$$

На следующем этапе дополним (2.98) начальным условием $g|_{t=0} = 1$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_r = g|_{t=T_*, s=s_r}$, где s_r – дискретные значения (2.99) параметра s . В итоге получаем набор чисел μ_r , $r = 1, \dots, m-1$, который, как нетрудно увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi'_0(0)$. Более того, справедливы соотношения

$$\mu_r = \mu_*(s)|_{s=s_r}, \quad r = 1, \dots, m-1, \quad (2.100)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_*(s) &= U(\mu, s)|_{\mu=\mu_0(s)}, \\ \mu_0(s) &= ((1+a_0)\exp(sh) - 1)((1+1/a_0)\exp(sh) - 1)\exp(-sT_0), \\ U(\mu, s) &= \left[\mu^{n+1}\exp(-s(1-T_0)) + \right. \\ &\quad \left. + b_0(1+1/a_0)(\exp(sh) - 1) \sum_{k=0}^n \mu^k \exp(-s(n-k)T_0) \right] \exp(-s(T_* - 1 - nT_0)). \end{aligned}$$

Остановимся на некоторых свойствах функций $\mu_0(s)$ и $U(\mu, s)$. Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} \mu_0(0) &= 1, \quad \mu'_0(0) = 0, \quad \mu''_0(0) < 0, \quad U(1, 0) = 1, \quad U'_s(1, 0) = 0, \\ U''_{ss}(1, 0) &< 0, \quad U'_\mu(1, 0) > 0. \end{aligned}$$

А отсюда очевидным образом имеем

$$\mu_*(0) = 1, \quad \mu'_*(0) = 0, \quad \mu''_*(0) = U''_{ss}(1, 0) + U'_\mu(1, 0)\mu''_0(0) < 0. \quad (2.101)$$

И наконец, объединяя соотношения (2.99) – (2.101), приходим к выводу, что при $\forall d \in (0, d_0]$, где $d_0 > 0$ достаточно мало, справедливы включения $\mu_r \in (0, 1)$, $r = 1, \dots, m-1$. Теорема 2.3 доказана.

В системе (2.88) неподвижной точке $z = 0$ отвечает цикл с компонентами $x = x_*(t, \varepsilon)$, $y_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, m-1$, где $x_*(t, \varepsilon)$ – периодическое решение уравнения (2.1), доставляемое теоремой 2.1. В системе же (2.85) ей соответствует однородный цикл (2.86), где $u_*(t, \lambda)$ – функция (2.83). Теоремы 2.2, 2.3 приводят к выводу, что этот цикл является экспоненциально орбитально устойчивым при любом фиксированном значении $d \in (0, d_0]$ и при всех достаточно больших λ .

Как и выше, отыскание ненулевых устойчивых неподвижных точек отображения (2.94) будем проводить в предположении о малости d . В этом случае удастся асимптотически проинтегрировать систему (2.89), (2.90) при $0 \leq t \leq T_*$ и при

$$(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3, \quad (2.102)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{(a_0, b_0) : a_0 > 1, a_0 + 1 < b_0 < 2a_0\}, \quad \mathcal{U}_2 = \{(a_0, b_0) : a_0 > 1, b_0 > 2a_0\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{(a_0, b_0) : 0 < a_0 < 1, b_0 > a_0 + 1\}. \end{aligned}$$

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.4. Пусть параметры h , a_0 , b_0 фиксированы и удовлетворяют условиям (2.7), (2.102). Тогда при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (2.94) имеет m экспоненциально устойчивых неподвижных точек

$$O_{r_0}(d) = (z_{1,r_0}(d), z_{2,r_0}(d), \dots, z_{m-1,r_0}(d)), \quad r_0 = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.103)$$

компоненты которых при $d \rightarrow 0$ в случае $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1$ допускают асимптотику

$$\begin{aligned} z_{j,r_0} &= -\frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ z_{j,r_0} &= \frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.104)$$

а в случае $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$ – асимптотику

$$\begin{aligned} z_{j,r_0} &= -\ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ z_{j,r_0} &= \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = r_0 + 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Доказательству этой теоремы посвятим следующий раздел, причем ограничимся случаем (2.104) (асимптотические равенства (2.105) обосновываются аналогично). Здесь же отметим, что в совокупности теоремы 2.2 – 2.4 гарантируют наличие у исходной системы (2.85) не менее m устойчивых дискретных автоволновых периодических режимов, сосуществующих с устойчивым однородным циклом (2.86) (строгая формулировка соответствующего утверждения будет приведена в п. 2.2.4).