

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Дополнительные главы численных методов

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и вычислительная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы численных методов» являются овладение различными алгоритмами дискретного преобразования Фурье, применяемого при решении многих прикладных задач, и формирование практических навыков оценки сложности алгоритмов.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Дополнительные главы численных методов» является дисциплиной по выбору и относится к вариативной части Блока 1.

Для освоения данной дисциплиной студенты должны владеть математическим аппаратом тригонометрической интерполяции, основами прикладной и линейной алгебр, иметь представления об основных алгебраических структурах и владеть навыками их использования для построения алгоритмов, используемых при решении задач, возникающих в таких приложениях, как все виды связи, радиолокация, радиоастрономия, цифровая голография, медицинская электроника и др.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формулировка компетенции	Индикатор достижения компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ИД-ОПК-1_2 Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения ИД-ОПК-1_3 Применяет математический аппарат для решения прикладных и теоретических задач.	Знать: аппарат теории ДУ, формулировки утверждений, методы их доказательства. Уметь: решать задачи; применять понятия, результаты и методы теории ДУ. Владеть: математическим аппаратом теории ДУ, методами решения задач и доказательства утверждений.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетные единицы, 180 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Введение.	7	2	2				12	
2	Тригонометрическая интерполяция, дискретное преобразование Фурье.	7	6	6				15	
3	Основные алгебраические структуры, используемые при разработке алгоритмов	7	5	5		3		15	Самостоятельная работа № 1
4	Линейные и циклические свертки	7	5	5		3		15	Контрольная работа № 1
							0,3	8,7	Зачет
	Всего за 7 семестр		18	18		6	0,3	65,7	
5	Быстрые алгоритмы коротких сверток	8		2				2	
6	Сложность алгоритмов вычисления сверток	8		2				2	
7	БПФ-алгоритмы	8		6				2	
8	Алгоритмы Рейдера	8		6				3	
9	Алгоритмы Винограда	8		8				3	
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 8 семестр			24		2	0,5	45,5	
	Всего		18	42		8	0,8	111,2	

Содержание разделов дисциплины:

1. Введение.

- 1.1. Введение. Приближение функций и смежные вопросы.
- 1.2. История развития быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов.

2. Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.

- 2.1. Постановка задачи приближения функций.
- 2.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа..
- 2.3. Дискретное преобразование Фурье. Теорема о свертке. Вычисление циклической свертки с использованием теоремы о свертке и дискретного преобразования Фурье.
- 2.4. Вещественное преобразование Фурье.
- 2.5. Быстрое преобразование Фурье.

3. Основные алгебраические структуры, используемые при разработке быстрых алгоритмов.

- 3.1. Группа. Кольцо .Поле..
- 3.2. Кольцо целых чисел Характеристика кольца. Кольца многочленов.
- 3.3. Сравнения и их свойства. Мультипликативная группа кольца вычетов..
- 3.4. Поля Галуа. Расширения. Подполя. Характеристика поля. Существование примитивного элемента.

3.5. Китайская теорема об остатках для чисел..

3.6. Китайская теорема об остатках для многочленов..

3.7 Функция Эйлера и ее свойства.

4. Линейные и циклические свертки.

4.1. Определение линейной свертки. Запись через многочлены.

4.2. Циклическая свертка и ее связь с линейной. Запись через многочлены.

5. Быстрые алгоритмы коротких сверток.

5.1. Алгоритм Кука-Тоома. вычисления линейной свертки. Матричная форма записи алгоритма.

5.2. Алгоритмы Винограда вычисления коротких сверток. Алгоритм Винограда как обобщение метода вычисления сверток с помощью преобразования Фурье. Матричная форма записи алгоритма.

5.3. Обобщение алгоритма Винограда.

5.4. Сравнение сложности разных алгоритмов.

5.5. построение алгоритмов коротких циклических сверток. Матричная запись..

6. Сложность алгоритмов вычисления сверток..

6.1. Определение операций и вычислительного алгоритма.

6.2. Оценки числа умножений алгоритма с помощью рангов матрицы..

6.3. Теорема об оценке числа умножений алгоритма вычисления линейной свертки.

7. БПФ-алгоритмы.

7.1. Алгоритм Кули-Тьюки быстрого преобразования Фурье. Оценка сложности алгоритма.

7.2. БПФ- алгоритм Кули-Тьюки по основанию 2.

7.3. Алгоритм Кули-Тьюки по основанию 4..

7.4. Иллюстрация на примере 8 – точечного преобразования..

7.5. Оценка сложности этих алгоритмов...

8. Алгоритмы Рейдера.

8.1. Алгоритм Рейдера для простых чисел..

8.2. Построение 5 – точечного преобразования Фурье с помощью алгоритма Рейдера.

8.3. Алгоритм Рейдера для случая, когда длина преобразования равна степени двойки.

8.4. Иллюстрация на примере 16 – точечного преобразования Фурье.

9. Алгоритмы Винограда.

9.1. Алгоритм Винограда для быстрого преобразования Фурье для случая, когда длина – простое число.

9.2. Алгоритм Винограда при длине, равной степени простого числа..

9.3. Алгоритм Винограда при длине, равной степени двойки.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Формы преподавания дисциплины «Дополнительные главы численных методов» традиционны. Для передачи большого объема материала используются лекции, дополняемые практикой.

Цель занятий – формирование у студентов понимания теоретического материала, изложенного на лекции, и использование его при решении упражнений и задач.

Консультации проводятся перед контрольными мероприятиями.

Самостоятельная работа реализуется в процессе аудиторных занятий, в контакте с преподавателем вне рамок расписания (на консультациях по учебным вопросам, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий), в библиотеке и дома при выполнении студентом учебных задач.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

Электронный учебный курс «Дополнительные главы численных методов» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся;
- осуществляется текущий контроль успеваемости студентов;
- представлены тексты и видео лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В образовательном процессе по дисциплине используются:
для формирования материалов для контроля успеваемости и проведения аттестации:

- программы Microsoft Office и свободные аналоги;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:
– для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office, издательская система LaTeX;
– для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Бином, 2011.
2. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989.

б) дополнительная литература

1. Яблокова С.И. Введение в быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: учебное пособие. – Ярославль, ЯрГУ, 2009.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и текущего обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

доцент кафедры теории функций и функционального анализа Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова кандидат физ.-мат. наук

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Самостоятельная работа № 1

Построить быстрый алгоритм вычисления 5 – точечной циклической свертки над полем вещественных чисел. Записать алгоритм в матричной форме и оценить число умножений и сложений.

Построить быстрый алгоритм вычисления произведения двух многочленов по модулю многочлена $x^3 + x + 1$ над полем комплексных чисел
Записать алгоритм в матричной форме и оценить число умножений

Контрольная работа № 1

Пользуясь алгоритмом Кули – Тьюки, построить быстрый алгоритм вычисления 4 – точечного преобразования Фурье. Записать алгоритм в матричной форме и оценить сложность.

Пользуясь алгоритмом Рейдера, свести 7 – точечное преобразование Фурье к 6 – точечной циклической свертке. Оценить сложность вычисления.

1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету

1. Тригонометрическая интерполяция.
2. Дискретное преобразование Фурье. Теорема о свертке.
3. Линейная и циклическая свертки.
4. Алгоритм Винограда вычисления коротких сверток.
5. Построение алгоритмов коротких циклических сверток.
6. Дискретное преобразование и циклическая свертка.
7. Дискретное преобразование Фурье и многочлены.
8. Группа, кольцо, поле. Примеры конечных колец.
9. Кольцо целых чисел и кольцо многочленов.
10. Китайская теорема об остатках для чисел.
11. Китайская теорема об остатках для многочленов.
12. Построение алгоритмов коротких линейных сверток 3×3 , их сравнение.
13. Линейные свертки над полем комплексных чисел.
14. Построение алгоритмов коротких циклических сверток. Два способа решения.
15. Пример построения 4 – точечной циклической свертки.

Список вопросов к экзамену:

1. Алгоритм Кули – Тьюки по основанию два.

2. Алгоритм Кули – Тьюки по основанию четыре.
3. Алгоритм Гуда – Томаса быстрого преобразования Фурье (БПФ).
4. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна простому числу.
5. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна степени 2.
6. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна нечетному простому числу.
7. Алгоритм Винограда для БПФ в случае, когда длина преобразования равна простому числу.
8. Алгоритм Винограда БПФ в случае, когда длина преобразования равна есть степень простого числа.
9. Алгоритм Винограда БПФ в случае, когда длина преобразования есть степень 2.
10. Китайская теорема об остатках для чисел.
11. Китайская теорема об остатках для многочленов.
12. Оценка числа сложений и умножений в вещественном и комплексном полях.
13. Матричная запись алгоритмов. Примеры для $n = 5$ и $n = 7$.
14. Поля Галуа. Прimitивный элемент поля Галуа.
15. Алгоритм Винограда как обобщение метода вычисления сверток с помощью преобразования Фурье.
16. Алгоритм Винограда как метод разложения матриц.
17. Циклические и линейные свертки.
18. Алгоритм вычисления циклической свертки с помощью дискретного преобразования Фурье.

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.