

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Алгебра и геометрия

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и вычислительная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Алгебра и геометрия» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования и содействует формированию мировоззрения математика-прикладника.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основами алгебры и аналитической геометрии, их важнейшими понятиями, результатами и методами, а также подготовка студентов к изучению других дисциплин.

В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, и приобрести навыки исследования и решения задач алгебры и аналитической геометрии.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Номер в РУП – Б1.О.3.

Дисциплина относится к числу важнейших фундаментальных математических дисциплин в силу особой значимости её материала для подготовки бакалавра. Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Алгебра и геометрия», используются студентами в процессе изучения всех математических и компьютерных дисциплин.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИД_ОПК-1.1 Обладает основными фундаментальными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике их использования в профессиональной деятельности	<p>Знать основные понятия и результаты линейной алгебры, общей алгебры, аналитической геометрии, видеть связь вопросов алгебры и геометрии</p> <p>Уметь решать типовые вычислительные и аналитические задачи с применением аппарата линейной алгебры и аналитической геометрии</p> <p>Владеть навыками самостоятельного изучения вопросов алгебры и геометрии, в частности, в области разработки алгоритмов решения задач</p>

	ИД_ОПК-1.2 Умеет квалифицированно определять область фундаментальных знаний, относящихся к поставленной задаче	<p>Знать основные алгоритмические методы решения алгебраических и геометрических задач, их особенности</p> <p>Уметь выделять алгебраическую и геометрическую составляющие в поставленных задачах</p> <p>Владеть навыками численного решения геометрических задач с помощью метода координат, применения тех или иных алгоритмов линейной алгебры</p>
	ИД_ОПК-1.3 Имеет навыки аналитической работы, связанной с применением фундаментальных знаний на практике	<p>Уметь пользоваться аналитическим аппаратом алгебры и геометрии при применении компьютерных методов (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.)</p> <p>Владеть способностью совершенствовать свои знания по алгебре и геометрии</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единиц, 360 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
	1-й семестр								
1.	Введение	1	1					1	задания для самостоятельной работы

2.	Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса	1	2	10		2		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
3.	Матрицы и действия с ними	1	3	4		1		3	задания для самостоятельной работы, устный опрос
4.	Векторная алгебра и системы координат	1	5	10		1		5	задания для самостоятельной работы, устный опрос
5.	Уравнения линий и поверхностей.	1	2	2				2	задания для самостоятельной работы, устный опрос
6.	Линейные образы на плоскости и в пространстве.	1	5	16		2		7	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
7.	Линии и поверхности второго порядка.	1	6	12		2		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
8.	Понятие о группе, кольце, поле.	1	3	2				2	задания для самостоятельной работы, устный опрос
9	Комплексные числа и действия с ними.	1	3	6		2		4	коллоквиум
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>					2		4	Индивидуальное задание ЭУК в LMS Moodle
10.	Решение задач геометрии и алгебры с помощью систем компьютерной математики		2	2				2	задания для самостоятельной работы
						2	0,5	33,5	экзамен
	Всего часов за 1-й семестр		32	64		14	0,5	69,5	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>					2		4	
	2-й семестр								
11.	Многочлены	2	5	14		4		5	коллоквиум
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>					2		5	Индивидуальное задание ЭУК в LMS Moodle
12.	Определители	2	4	12		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
13.	Линейные пространства, подпространства и ранг	2	8	16		2		8	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа

14.	Линейные операторы	2	8	14		2		8	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
15.	Билинейные и квадратичные формы	2	3	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
16.	Линейные операторы в евклидовом пространстве	2		2		2		4	Устный опрос
						2	0,5	33,5	экзамен
	Всего часов за 2-й семестр		32	64		14	0,5	69,5	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>					2		5	
	Всего часов за год		64	128		28	1	139	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>					4		9	

Содержание разделов дисциплины

- 1. Введение.** Предмет и метод дисциплины «Геометрия и алгебра». Краткие исторические сведения. «Геометрия и алгебра» для математика-прикладника.
- 2. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса.** Общий вид системы линейных уравнений. Классификация. Элементарные ступенчатый вид. Решение преобразования. Ступенчатые и специальные ступенчатые матрицы. Анализ системы уравнений, имеющей систем методом Гаусса. Трудоёмкость метода Гаусса. Понятие о других методах решения линейных систем. Вычислительные особенности решения линейных систем.
- 3. Матрицы и действия с ними.** Пространство R_n . Действия с n -мерными векторами. Пространство матриц $M_{m,n}$. Простейшие операции с матрицами. Умножение матриц. Многочлен от матрицы. Важнейшие классы матриц.
- 4. Векторная алгебра и системы координат.** Понятие геометрического вектора. Коллинеарность и компланарность. Пространство V_n . Линейная зависимость векторов из V_n , $n = 1, 2, 3$, и R_n , $n \in N$. Свойства линейной зависимости. Решение задачи о линейной зависимости в R_n . Базис V_n . Характеризация базисов V_1, V_2, V_3 . Размерность. Координаты вектора. Действия в координатах. Изоморфизм V_n и R_n , $n = 1, 2, 3$. Аффинная и декартова системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Полярная система координат на плоскости. Другие системы координат. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства. Геометрический смысл декартовых координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства. Вычисление площадей и объёмов с помощью определителей 2 – 3 порядка.
- 5. Уравнения линий и поверхностей.** Преобразования аффинных координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Преобразования декартовых координат. Поворот и перенос. Различные виды уравнений линии и поверхности. Алгебраические и линии и поверхности. Независимость их порядка от выбора аффинной системы координат.
- 6. Линейные образы на плоскости и в пространстве.** Различные виды уравнений прямой на плоскости – векторное, каноническое, параметрические, общее. Неполные

уравнения. Уравнение в отрезках. Уравнение с угловым коэффициентом. Переход от одних уравнений к другим. Угол между двумя прямыми. Параллельность и перпендикулярность двух прямых. Нормальное уравнение. Отклонение точки от прямой. Расстояние от точки до прямой. Основные типы задач. Уравнение плоскости в векторной форме. Параметрические и общее уравнения. Неполные уравнения плоскости, уравнение в отрезках. Переход от одних уравнений к другим. Нормальное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями. Задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей. Системы линейных неравенств. Выпуклые множества.

7. **Линии и поверхности второго порядка.** Происхождение. Конические сечения. Исторические сведения. Определения, канонические уравнения, характеристики и свойства эллипса, гиперболы, параболы. Директрисы линий второго порядка, их свойство. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду при помощи поворота и переноса декартовой системы координат. Простейшие уравнения второго порядка и их геометрические образы. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей. Центральные поверхности. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Конус и цилиндры второго порядка. Канонические уравнения и основные свойства. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка. Понятие о методе собственных значений при приведении поверхностей второго порядка к главным осям.
8. **Понятие о группе, кольце, поле.** Бинарная операция, алгебраическая система. Полугруппа и группа. Терминология. Подгруппа. Теорема Лагранжа. Кольцо и поле, их разновидности. Примеры и свойства. Конечные структуры. Кольцо и поле вычетов. Другие конечные поля.
9. **Комплексные числа и действия с ними.** Определение и характеристики комплексных чисел. Действия в алгебраической и тригонометрической форме. Совокупность комплексных чисел как поле. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Корни из 1, их свойства.
10. **Решение задач геометрии и алгебры с помощью систем компьютерной математики.** Вычисления и графические построения с применением системы Wolfram Mathematica и других систем компьютерной математики.
11. **Многочлены.** Многочлены над R и над C . Другие кольца многочленов. Делимость. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых. Корни многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры многочленов. Локализация корней. Интерполяция многочленами. Формулы Лагранжа и Ньютона.
12. **Определители.** Перестановки и инверсии. Определитель порядка n . Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса. Разложение по строке (столбцу), теорема Лапласа. Определитель произведения двух матриц. Приложение к решению систем линейных уравнений. Критерий определённости, правило Крамера. Определитель Вандермонда и задача интерполяции многочленами. Обратная матрица и её вычисление. Обратимость и невырожденность матриц.
13. **Линейные пространства, подпространства и ранг.** Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Базис, размерность, координаты. Изоморфизм линейных пространств. Подпространства. Линейная оболочка. Ранг и база системы

векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Определение ранга матрицы как ранга системы столбцов. Теорема о ранге (о базисном миноре). Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. Определение размерности и базиса подпространства R^n , задаваемого системой линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

14. **Линейные операторы.** Определение и примеры линейных операторов в основных пространствах. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Ядро и образ, дефект и ранг оператора. Определение ранга и дефекта по матрице оператора. Обратимость и невырожденность. Изменение матрицы оператора при изменении базиса. Подобные матрицы. Инвариантные подпространства оператора. Определение, свойства и вычисление собственных значений и собственных векторов. Характеристический многочлен оператора. Собственные подпространства. Диагонализируемые операторы. Каноническая форма матрицы линейного оператора в комплексном линейном пространстве (жорданова нормальная форма матрицы).
15. **Билинейные и квадратичные формы.** Основные определения. Матрица билинейной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методами Лагранжа и Якоби. Положительная определённость квадратичной формы, критерий Сильвестра. Закон инерции квадратичных форм.
16. **Линейные операторы в евклидовом пространстве.** Сопряжённый оператор. Симметричные операторы и их свойства. Диагонализуемость симметричного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с использованием свойств симметричного оператора (метод собственных значений). Ортогональные операторы и их свойства. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

В рамках практических занятий возможно привлечения компьютерного практикума.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В рамках практических занятий возможно привлечения компьютерного практикума.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

- электронные учебные курсы «Алгебра и геометрия_ПМИ_1 сем_Невский» и «Алгебра и геометрия_ПМИ_2 сем_Невский» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ.

В этих электронных учебных курсах курсах:

- представлены различные материалы, необходимые обучающимся для изучения дисциплины (список рекомендуемой литературы, программы прохождения промежуточной аттестации по дисциплине, требования к практическим навыкам и умениям студентов, упражнения к лекциям по дисциплине и др.);
- представлены учебные пособия по дисциплине;
- представлена информация о форме и времени проведения занятий по дисциплине в режиме онлайн;
- обозначены темы дисциплины;
- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- при реализации дистанционного обучения – проводятся контрольные работы, а также мероприятия промежуточной аттестации (экзамены);
- содержатся некоторые дополнительные материалы (ссылки, комментарии, иллюстрации и др.).

Синхронное или асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины осуществляется посредством сообщений в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, а также электронной почты.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).

Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.

Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.

Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться):

- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронно-библиотечная система «Юрайт»

<https://www.biblio-online.ru/>

- Электронно-библиотечная система «Лань»

<http://e.lanbook.com/>

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU

<http://elibrary.ru/>

База научных статей Mathnet

База Scopus

База Web of Sciences

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003. 240 с.

http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=305620&cat_cd=YARSU

2. Невский М.В. Лекции по алгебре: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2002. 265 с.

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=295497&cat_cd=YARSU

Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:

<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

3. Невский М.В., Ухалов А.Ю. Элементы аналитической геометрии: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 112 с.

Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:

<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие для вузов. / И. В.Проскуряков; М-во общего и проф. образования РФ - 8-е изд. - М.;СПб.: Физматлит, 2001. - 382 с.

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=289985&cat_cd=YARSU

5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов. - СПб.: Лань, 2011. - 223 с.

http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=1378770&cat_cd=YARSU

6. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. ; Ижевск: Регулярная хаотическая динамика, 2002. 384 с.

http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=315440&cat_cd=YARSU

7. Невский М.В. Материалы по дисциплине «Алгебра и геометрия»: учебно-методическое пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2019. 52 с.

Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:
<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

б) дополнительная литература

8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2000. 272 с. http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=281406&cat_cd=YARSU

9. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2001. 367 с. http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=281395&cat_cd=YARSU

10. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина. М.: Физматлит, 2001. – 464 с. http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=301383&cat_cd=YARSU

11. Невский М.В. Элементы теории функций комплексного переменного: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 106 с.

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=1529217&cat_cd=YARSU

Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:
<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

12. Ухалов А.Ю. Практикум по Wolfram Mathematica: практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 40 с. Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:

<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

13. Климов В.С., Ухалов А.Ю. Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 96 с. Электронная версия (pdf-файл) доступна на сайте кафедры:

<https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;

- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Зав. кафедрой математического анализа,
доктор физ.-мат. наук, доцент

М.В. Невский

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы даются по задачникам [4], [5], [9], учебным пособиям [6], [10], практикуму [11], методическим указаниям [13]-[16]. Могут применяться и другие сборники задач.

Эти задания не оцениваются, но их выполнение контролируется на практических занятиях.

Контрольная работа № 1

1. Решите систему линейных уравнений (случай определенной системы).
2. Решите систему линейных уравнений (случай несовместной или неопределенной системы).
3. Решите матричное уравнение.
4. Найдите обратную матрицу.

Контрольная работа № 2.

1. Найдите ортогональную проекцию точки на плоскость.
2. Найдите ортогональную проекцию точки на прямую.
3. Определите взаимное расположение прямой и плоскости.
4. Напишите параметрические уравнения плоскости по общему уравнению.
5. Найдите расстояние между точкой и прямой.

Контрольная работа № 3.

1. Найдите фундаментальную систему решений для системы линейных уравнений.
2. Найдите ранг и базу системы n -мерных векторов.
3. Найдите размерность и базис данного подпространства.
4. Найдите ранг матрицы.
5. Вычислите определитель.

Контрольная работа № 4.

1. Выясните, является ли линейным данное отображение.
2. Найдите матрицу данного линейного оператора в данном базисе.
3. Найдите ранг и дефект данного оператора, базисы ядра и образа.
4. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Каждая задача оценивается в 25 баллов (полное решение).

Оценка «неудовлетворительно» - набрано менее 25 баллов.

Оценка «удовлетворительно» - набрано от 25 баллов до 59;

Оценка «хорошо» - набрано от 60 до 74 баллов;

Оценка «отлично» - набрано 75 баллов и выше.

В целях эффективного контроля знаний могут использоваться и другие задания.

Упражнения к лекциям могут даваться из учебно-методического пособия М.В. Невского «Материалы по дисциплине “Алгебра и геометрия”» (ЯрГУ, 2019 г.), \$7,8. В этом сборнике дается большое количество задач как обычного типа, так и повышенной трудности. Задачи разбиты по темам дисциплины. Обычно обязательного выполнения этих упражнений не требуется. Студенты могут представить преподавателю решения любых задач в любой форме (письменно, в разделе ЭУК в Moodle ЯрГУ и др.) в течение 2-3 недель после изучения данной темы. Результаты выполнения этих упражнений могут учитываться в положительную сторону при промежуточной аттестации.

При проверке каждое упражнение оценивается из 10 баллов. Общее число баллов, набранных студентом за семестр, и есть показатель активности обучающегося за эту форму работы.

Возможно и целесообразно проведение каких-то **самостоятельных (контрольных) работ смешанной тематики**. Такие задания могут выдаваться и для домашней работы. Приведем примеры подобных заданий .

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 1

1) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора x в этом базисе.

$$e_1 = (0, 1, -1), \quad e_2 = (1, 0, 1), \quad e_3 = (-1, 1, 0), \quad x = (1, 2, 3).$$

2) Найти все решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Найти значение выражений

$$\text{а) } \sqrt[4]{1+i}, \quad \text{б) } |6+8i|.$$

4) Выполнить указанные действия с комплексными числами

$$\text{а) } (-1+3i)(-2+i), \quad \text{б) } \frac{3-i}{2+i}.$$

5) Выразить $\cos 6x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

6) Представить $\cos^3 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x .

7) Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 2

1) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора x в этом базисе.

$$e_1 = (2, -3, 1), \quad e_2 = (0, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, 2), \quad x = (1, 2, 3).$$

2) Найти все решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) а) Найти значение выражения $\sqrt[4]{-1}$;

б) Найти вещественную часть выражения $\frac{1}{1+e^i} + \frac{1}{1+e^{-i}}$.

4) Выполнить указанные действия с комплексными числами

$$\text{а) } (e + \pi i)(\overline{e + \pi i}), \quad \text{б) } \frac{-i}{1+i}.$$

5) Выразить $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

6) Представить $\sin^5 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x .

7) Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 3

1) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора x в этом базисе.

$$e_1 = (0, 1, 1), \quad e_2 = (1, 0, 1), \quad e_3 = (1, 1, 0), \quad x = (4, 4, 2).$$

2) Найти все решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найти значение выражений

$$\text{а) } \operatorname{Im} \ln i, \quad \text{б) } \sqrt[3]{27}.$$

4) Выполнить указанные действия с комплексными числами

$$\text{а) } (2-i)(3+5i), \quad \text{б) } \frac{1+2i}{i}.$$

5) Выразить $\sin 8x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

6) Представить $\sin^6 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x .

7) Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 4

1) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора x в этом базисе.

$$e_1 = (-2, 0, 1), \quad e_2 = (1, 2, 1), \quad e_3 = (0, 1, 1), \quad x = (2, -1, 0).$$

2) Найти все решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) Найти значение выражений

$$\text{а) } \sqrt[3]{-27}, \quad \text{б) } \operatorname{Re} \frac{1}{1+i}.$$

4) Выполнить указанные действия с комплексными числами

$$\text{а) } |3 + 4i|, \quad \text{б) } \frac{i-1}{i+1}.$$

5) Выразить $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

6) Представить $\cos^4 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x .

7) Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 5

1) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора x в этом базисе.

$$e_1 = (1, -1, 0), \quad e_2 = (0, 1, 2), \quad e_3 = (1, 0, -2), \quad x = (0, 4, 4).$$

2) Найти все решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Найти значение выражений

$$\text{а) } \sqrt[5]{-1-i}, \quad \text{б) } \arg(\sqrt{3} + i).$$

4) Выполнить указанные действия с комплексными числами

$$\text{а) } (2+i)(3+i), \quad \text{б) } \frac{i^3}{1+i}.$$

5) Выразить $\cos 6x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

6) Представить $\sin^4 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x .

7) Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Методика оценки работ аналогична предыдущей. Общая трудоемкость задания считается равной 100 баллам. Оценка выставляется в соответствии с приведёнными выше критериями:

Оценка «неудовлетворительно» - набрано менее 25 баллов.

Оценка «удовлетворительно» - набрано от 25 баллов до 59;

Оценка «хорошо» - набрано от 60 до 74 баллов;

Оценка «отлично» - набрано 75 баллов и выше.

Вопросы к коллоквиуму по теме «Комплексные числа»

Определение комплексных чисел. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Действительная и мнимая части комплексного числа. Переход к алгебраической форме. Действия в алгебраической форме, их свойства. Совокупность комплексных чисел как поле. Сопряжённое число. Свойство операции сопряжения.

Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент. Свойства модуля. Тригонометрическая форма комплексного числа, связь с алгебраической. Умножение, деление, возведение в степень в тригонометрической форме. Извлечение корня натуральной степени в тригонометрической форме. Корни из 1 натуральной степени, их свойства.

Вопросы к коллоквиуму по теме «Многочлены»

Многочлены над R и над C . Действия с ними. Степень многочлена. Совокупность многочленов как кольцо. Делимость многочленов. Свойства делимости. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов. Существование, единственность, свойства. Алгоритм Евклида и его обоснование. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении в произведение неприводимых. Неприводимые многочлены над R и над C . Корень многочлена. Теорема Безу. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры (без доказательства). Локализация корней. Правило знаков Декарта, определение числа корней в данном интервале (без доказательств). Постановка задачи интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.

При проведении коллоквиума в устной форме студенту предлагается билет с теоретическим вопросом и двумя упражнениями. Оценка формируется так же, как и на устном экзамене (см. далее). При проведении контрольной работы вместо коллоквиума студенту предлагается вариант из 10 коротких заданий, теоретического плана или упражнений. Каждое задание оценивается из 10 баллов. Оценка выставляется также, как и за контрольные работы.

1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Экзамен по дисциплине «Алгебра и геометрия» может приниматься как в устной, так и письменной форме. В случае проведения письменного экзамена возможна

дополнительная устная беседа со студентом по материалу (вопросам) дисциплины. Ниже даются вопросы к экзамену, билеты для устного экзамена, примерный вариант для письменного экзамена (отдельно для 1 и 2 семестров).

Вопросы к экзамену в 1-м семестре

1. Пространство R^n . Пространство матриц $M_{m,n}$. Простейшие операции с матрицами и их свойства.
2. Умножение матриц и его свойства.
3. Пространство V_n , $n = 1, 2, 3$. Линейная зависимость векторов из V_n , $n = 1, 2, 3$, и R^n , $n \in N$. Свойства линейной зависимости.
4. Связь линейной зависимости в V_n , $n = 1, 2, 3$, с коллинеарностью и компланарностью. Решение задачи о линейной зависимости в R^n , $n \in N$.
5. Базис и координаты в V_n . Характеризация базисов в V_1, V_2, V_3 . Размерность.
6. Аффинная и декартова (прямоугольная) системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Вычисление длин и расстояний в декартовых координатах. Полярная система координат на плоскости.
7. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства. Геометрический смысл декартовых координат.
8. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Ортонормированный базис. Вычисление скалярного произведения, длин векторов и углов между ними в декартовых координатах.
9. Определение и свойства векторного произведения.
10. Определение, геометрический смысл и свойства смешанного произведения.
11. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве. Преобразование декартовых координат на плоскости. Сдвиг и поворот.
12. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Операции с комплексными числами, их свойства. Переход к алгебраической форме. Сопряжённое комплексное число, свойства сопряжения. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент.
13. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
14. Различные виды уравнений линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве. Алгебраические и трансцендентные линии (поверхности).
15. Различные виды уравнений прямой на плоскости: векторное, каноническое, параметрические, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках. Расстояние от точки до прямой.
16. Различные виды уравнений плоскости: в векторной форме, параметрические, общее, в отрезках. Расстояние от точки до плоскости.

17. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов уравнений. Переход от одних уравнений к другим.

18. Общее уравнение линии второго порядка. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства эллипса.

19. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства гиперболы.

20. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства параболы.

21. Общее уравнение поверхности второго порядка. Эллипсоид. Каноническое уравнение и свойства.

22. Гиперболоиды. Канонические уравнения и свойства.

23. Параболоиды. Канонические уравнения и свойства.

24. Конус и цилиндры второго порядка. Канонические уравнения и свойства.

25. Группа, кольцо, поле. Основные определения и примеры.

26. Кольцо и поле вычетов.

Билеты к устному экзамену в 1-м семестре

Билет № 1

1. Пространство R^n . Пространство матриц $M_{m,n}$. Простейшие операции с матрицами и их свойства.

2. Различные виды уравнений линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве. Алгебраические и трансцендентные линии (поверхности).

3. Задача

Билет № 2

1. Умножение матриц и его свойства.

2. Различные виды уравнений прямой на плоскости: векторное, каноническое, параметрические, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках. Расстояние от точки до прямой.

3. Задача

Билет № 3

1. Пространство V_n , $n = 1, 2, 3$. Линейная зависимость векторов из V_n , $n = 1, 2, 3$, и R^n , $n \in N$. Свойства линейной зависимости

2. Различные виды уравнений плоскости: в векторной форме, параметрические, общее, в отрезках. Расстояние от точки до плоскости.

3. Задача

Билет № 4

1. Связь линейной зависимости в V_n , $n = 1, 2, 3$, с коллинеарностью и компланарностью. Решение задачи о линейной зависимости в R^n , $n \in N$.

2. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов уравнений. Переход от одних уравнений к другим.

3. Задача

Билет № 5

1. Базис и координаты в V_n . Характеризация базисов в V_1, V_2, V_3 . Размерность.

2. Общее уравнение линии второго порядка. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства эллипса.

3. Задача

Билет № 6

1. Аффинная и декартова (прямоугольная) системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Вычисление длин и расстояний в декартовых координатах. Полярная система координат на плоскости.

2. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства гиперболы.

3. Задача

Билет № 7

1. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства. Геометрический смысл декартовых координат.

2. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства параболы.

3. Задача

Билет № 8

1. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Ортонормированный базис. Вычисление скалярного произведения, длин векторов и углов между ними в декартовых координатах.

2. Общее уравнение поверхности второго порядка. Эллипсоид. Каноническое уравнение и свойства.

3. Задача

Билет № 9

1. Определение и свойства векторного произведения.

2. Гиперболоиды. Канонические уравнения и свойства.

3. Задача

Билет № 10

1. Определение, геометрический смысл и свойства смешанного произведения.

2. Параболоиды. Канонические уравнения и свойства.

3. Задача

Билет № 11

1. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве. Преобразование декартовых координат на плоскости. Сдвиг и поворот.

2. Конус и цилиндры второго порядка. Канонические уравнения и свойства

3. Задача

Билет № 12

1. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Операции с комплексными числами, их свойства. Переход к алгебраической форме. Сопряжённое комплексное число, свойства сопряжения. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент.

2. Группа, кольцо, поле. Основные определения и примеры.

3. Задача

Билет № 13

1. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

2. Кольцо и поле вычетов.

3. Задача

Билет № 14

1. Комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Операции с комплексными числами, их свойства. Переход к алгебраической форме. Сопряжённое комплексное число, свойства сопряжения. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент.

2. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов уравнений. Переход от одних уравнений к другим.

3. Задача

Билет № 15

1. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

2. Общее уравнение линии второго порядка. Определение, каноническое уравнение, характеристики и свойства эллипса.

3. Задача

Примерный вариант для письменного экзамена в 1-м семестре

1. Даны векторы $\mathbf{a}=\{8,4,1\}$, $\mathbf{b}=\{2,-2,1\}$ и $\mathbf{c}=\{4,0,3\}$. Найдите вектор \mathbf{d} длины 1, перпендикулярный векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} и направленный так, чтобы тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ имели противоположную ориентацию. Координаты векторов даны в ортонормированном базисе.

2. Составьте каноническое и общее уравнения биссектрисы тупого угла между прямыми на плоскости

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-4}, \quad \frac{x-4}{12} = \frac{y}{5}.$$

Система координат декартова.

3. Найдите расстояние от точки (1,3,5) до прямой

$$2x + y + z - 1 = 0,$$

$$3x + y + 2z - 3 = 0.$$

Система координат декартова.

4. Найдите эксцентриситет эллипса, зная, что стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы.

5. Найдите все значения корня, выполняя действия в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{\frac{1 - i\sqrt{3}}{(-1 - i)}}$$

Вопросы к экзамену во 2-м семестре

1. Определитель порядка n . Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.
2. Правило Крамера.
3. Разложение определителя по строке (столбцу).
4. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления A^{-1} .
5. Многочлены и действия с ними. Теорема о делении с остатком.
6. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.
7. Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и над \mathbb{C} .
8. Корень многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры.
9. Задача интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.
10. Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость, их свойства.
11. Лемма о двух системах векторов. Базис, размерность, координаты. Понятие о бесконечномерных пространствах.
12. Действия с векторами в координатах. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфизме. Примеры изоморфных пространств.
13. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств.

14. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Методы вычисления ранга матрицы.
15. Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора, ее применение для нахождения координат образа вектора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.
16. Действия с линейными операторами. Матрицы соответствующих операторов.
17. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте. Определение ранга и дефекта по матрице оператора.
18. Обратный оператор, его линейность. Обратимость и невырожденность. Другие критерии невырожденности оператора.
19. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, независимость от базиса. Вычисление собственных значений и собственных векторов.
20. Определение и примеры евклидовых пространств. Линейная независимость ортогональной системы.
21. Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши – Буняковского.
22. Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Преимущества ортонормированного базиса. Ортогонализация Грама - Шмидта.
23. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства, его свойства. Две задачи о вычислении ортогонального дополнения в R^n .
24. Расстояние в евклидовом пространстве. Расстояние от точки до подпространства.
25. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

Билеты к устному экзамену во 2-м семестре

Билет № 1

1. Определитель порядка n . Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.
2. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств.
3. Задача

Билет № 2

1. Правило Крамера решения системы линейных уравнений.
2. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Методы вычисления ранга матрицы.
3. Задача

Билет № 3

1. Разложение определителя по строке (столбцу).

2. Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора, ее применение для нахождения координат образа вектора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.

3. Задача

Билет № 4

1. . Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления A^{-1} .

2. Действия с векторами в координатах. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфизме. Примеры изоморфных пространств.

3. Задача

Билет № 5

1. . Многочлены и действия с ними. Теорема о делении с остатком.

2. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте. Определение ранга и дефекта по матрице оператора.

3. Задача

Билет № 6

1. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида .

2. Обратный оператор, его линейность. Обратимость и невырожденность. Другие критерии невырожденности оператора.

3. Задача

Билет № 7

1. Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и над \mathbb{C} .

2. Определение и примеры евклидовых пространств. Линейная независимость ортогональной системы.

3. Задача

Билет № 8

1. Корень многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры.

2. Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши – Буняковского.

3. Задача

Билет № 9

1. Задача интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.

2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, независимость от базиса. Вычисление собственных значений и собственных векторов.

3. Задача

Билет № 10

1. Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость, их свойства.
2. Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Преимущества ортонормированного базиса. Ортогонализация Грама - Шмидта.
3. Задача

Билет № 11

1. Лемма о двух системах векторов. Базис, размерность, координаты. Понятие о бесконечномерных пространствах.
2. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства, его свойства. Две задачи о вычислении ортогонального дополнения в R^n .
3. Задача

Билет № 12

1. Действия с векторами в координатах. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфизме. Примеры изоморфных пространств.
2. Расстояние в евклидовом пространстве. Расстояние от точки до подпространства.
3. Задача

Билет № 13

1. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, независимость от базиса. Вычисление собственных значений и собственных векторов.
3. Задача

Примерный вариант для письменного экзамена во 2-м семестре

1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A: R^3 \rightarrow R^3$, матрица которого в каноническом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Применяя интерполяционную формулу Лагранжа, найдите многочлен $f(x)$ наименьшей степени по следующей таблице значений:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-2	5	6	7

3. Пусть $L = \text{lin}(a, b, c) \subset R^4$, где $a = (2, 1, 1, -1)$, $b = (1, 1, 3, 0)$, $c = (1, 2, 8, 1)$. Найдите ортогональную проекцию y вектора $x = (5, 2, -2, 2)$ на подпространство L и ортогональную составляющую z вектора x относительно L , а также расстояние $d(x; L)$ от x до L .

4. Дополните произведение элементов $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$ определителя седьмого порядка так, чтобы получить член этого определителя, входящий в него со знаком минус.

5. Пусть $A: R^2 \rightarrow R^2$ --- линейный оператор, x --- собственный вектор оператора A^2 . Верно ли, что x является собственным вектором оператора A ? Ответ обоснуйте.

Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + . (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + - (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости.

При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняется поставленные баллы за задания. Пусть k – число задач в предложенном варианте (например, $k=5$). Определяется общее число M баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения $r = \frac{M}{N}$, где $N=4k$ – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

$0.75 \leq r \leq 1$ - оценка «отлично»;

$0.60 \leq r < 0.75$ - оценка «хорошо»;

$0.26 \leq r \leq 0.59$ - оценка «удовлетворительно»;

$0 \leq r \leq 0.25$ - оценка «неудовлетворительно».

Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

1. Требования к практическим умениям и навыкам студента.

Тематика основных упражнений

Для успешной сдачи экзамена студент должен уметь решать задачи, которые соответствуют приведенной выше программе. Однако нам кажется полезным дополнительно выделить тематику основных задач.

В первом семестре студент прежде всего должен хорошо освоить метод Гаусса решения систем линейных уравнений; к этой процедуре сводятся многие задачи курса. Требуется, далее, освоить простейшие операции с матрицами, умножение матриц, вычисление многочлена от матрицы.

По темам векторной алгебры нужно уметь решать задачи на линейную зависимость и независимость векторов; на основные действия с векторами, в том числе в координатах; на вычисление проекций вектора на ось и на плоскость; на скалярное, векторное и смешанное произведения. В частности, надо уметь определять ориентацию пар и троек векторов, находить площади параллелограммов и объёмы параллелепипедов, натянутых на векторы, по их координатам. Уметь решать задачи, связанные с делением отрезка в данном отношении.

Студент должен уметь составить равенства, связывающие координаты одной и той же точки в двух декартовых системах координат на плоскости (предполагается, что одна из них получается из другой с помощью последовательных поворота и параллельного переноса).

По темам «Прямая на плоскости», «Плоскость и прямая в пространстве» прежде всего надо освоить все виды уравнений прямой и плоскости, знать геометрический смысл коэффициентов уравнений, уметь их составлять, переходить от одних уравнений к другим. Отметим также основные задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, задачи на вычисление проекций, расстояний и нахождение уравнений перпендикуляров. Следует обратить внимание на возможность решения этих задач с помощью компьютера.

По теме «Линии второго порядка» надо научиться составлять и использовать канонические и близкие к ним уравнения эллипса, гиперболы и параболы, определять характеристики этих линий.

Во втором семестре метод Гаусса надо уметь применять для вычисления определителей, нахождения ранга матрицы и ранга системы векторов, вычисления обратной матрицы.

Из задач второго семестра отметим задачи на нахождение базиса и размерности конкретного подпространства линейного пространства, в частности, линейной оболочки данных векторов или подпространства решений однородной системы линейных уравнений. Нужно уметь решать задачи на определение размерностей и базисов суммы и пересечения двух подпространств.

Для данного линейного оператора требуется уметь находить его матрицу в данном базисе, знать соответствие между действиями с операторами и их матрицами. Знать, что изменение матрицы при изменении базиса описывается преобразованием подобия и уметь применять свойства подобных матриц (например, для экономии вычислений). Требуется определять базисы и размерности ядра и образа оператора, находить собственные значения и собственные векторы

Надо знать, что такое билинейные и квадратичные формы, как они записываются в координатах, как меняются их матрицы при изменении базиса. Нужно уметь приводить квадратичную форму к каноническому виду и ответить на вопрос о её положительной определённости (или принадлежности к другим классам знаковой определённости). Знать, что такое индексы инерции, ранг и сигнатура квадратичной формы и уметь находить эти характеристики.

По теме «Евклидовы пространства» требуется освоить процесс ортогонализации, уметь находить ортонормированный базис подпространства и решать задачи в соответствующих координатах. Уметь находить базис ортогонального дополнения к подпространству, задавать ортогональное дополнение к подпространству как в виде множества решений системы линейных однородных уравнений, так и в виде линейной оболочки данных векторов. Для данного вектора требуется уметь находить его ортогональную проекцию на данное подпространство и ортогональную составляющую, а также вычислять расстояние до этого подпространства.

2. Первокурсникам математического факультета о самостоятельной работе

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением дисциплины «Алгебра и геометрия», других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Это означает, что в вашем дипломе будет обозначено, что вы являетесь бакалавром математического профиля. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, «чистое» знание определения

без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Например, студент может выучить и продемонстрировать определение матрицы линейного оператора в данном базисе: это матрица, k -й столбец которой содержит координаты образа k -го базисного вектора в этом базисе. Однако задача найти матрицу оператора дифференцирования $D : R_1[t] \rightarrow R_1[t]$ в базисе $1 + t, 1 - t$ оказывается для него непосильной. У автора накопилось много примеров такого сорта. Научитесь самостоятельно прогнозировать подобные ситуации. Научитесь задавать себе несложные, но разнообразные вопросы, связанные с определениями и теоремами, методами решения задач, алгоритмами. При определённой тренировке ваша подготовка значительно улучшится.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.

Самостоятельная работа по изучению математики, которая ожидает вас на математическом факультете, будет для вас трудной и, возможно, покажется вам временами скучной и однообразной. Но ведь вы хотите стать хорошими специалистами, не правда ли? Автору остаётся пожелать успехов и удачи на вашем нелёгком пути.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине «Алгебра и геометрия»

1. Невский М.В. Лекции по алгебре: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2002. 265 с.
2. Невский М.В., Ухалов А.Ю. Элементы аналитической геометрии: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 112 с.
3. Невский М.В. Материалы по дисциплине «Алгебра и геометрия»: учебно-методическое пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2019. 52 с.
4. Невский М.В. Элементы теории функций комплексного переменного: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 106 с.

5. Ухалов А.Ю. Практикум по Wolfram Mathematica: практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 40 с.
6. Климов В.С., Ухалов А.Ю. Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 96 с.
7. Невский М.В. Приведение к главным осям методом собственных значений: методические указания. Ярославль, 1997. 21 с.
8. Невский М.В. Линейные операторы в конечномерных пространствах. Основные понятия: методические указания. Ярославль, 1985. 29 с.
9. Невский М.В. Комплексные числа и действия с ними: методические указания. Ярославль, 1988. 23 с.
10. Невский М.В. Комплексные числа. Задачи: Ярославль, 1988. 24 с.