

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Интегрируемые системы

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и вычислительная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 12 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Интегрируемые системы» являются изучение основ теории интегрируемых систем дифференциальных уравнений в частных производных, методы построения их решений, а также приобретение навыков использования пакетов программного обеспечения *Mathematica* и *Maple*. Также, целью данной дисциплины является привлечение студентов к научным исследованиям в области интегрируемых систем.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Интегрируемые системы» к вариативной части Блока 1 и является курсом по выбору.

Теория интегрируемых систем использует инструменты из всех классических областей математики. Поэтому, для освоения данной дисциплиной студенты должны иметь знания дисциплин «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики». Точнее, требуются знания анализа функций многих переменных и одной комплексной переменной, основные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, включая задачи Штурма—Лиувилля, методы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Полученные в курсе «Интегрируемые системы» знания необходимы для получения научных результатов в области интегрируемых систем.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ИД-ОПК-1_2 Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения	Знать: - основные определения интегрируемости и интегрируемые уравнения математической физики; - философию метода обратного рассеяния; - методы построения решений интегрируемых систем. Уметь: - воспроизводить математические приемы, используемые при построении решений нелинейных уравнений в частных производных; - определять интегрируемость нелинейных уравнений в частных производных по различным определениям интегрируемости;

	<p>ИД-ОПК-1_3 Применяет математический аппарат, и теории для решения прикладных и теоретических задач.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - строить солитонные решения для конкретных интегрируемых систем; - строить решения с помощью преобразований Бэклунда. - Дискретизировать интегрируемые системы в частных производных. <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> - построение солитонных решений для уравнения Кортевега—Де Фриза; - построение солитонных решений для нелинейного уравнения Шредингера; - практического применения метода обратного рассеяния для построения решений нелинейных уравнений математической физики; - работы с пакетом <i>Wolfram Mathematica</i>; - применять теорию дискретных решений интегрируемых систем для дискретизации и решения нелинейных уравнений математической физики.
--	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет ____ зачетных единиц, ____ акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение. Элементарные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ).	7	4	4		1		9	Задания для самостоятельной работы
2	Метод обратной задачи рассеяния для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное преобразование Фурье.	7	4	4		1		9	Задания для самостоятельной работы
3	Задача начального значения для уравнения КдФ.	7	4	4		1		9	Задания для самостоятельной работы
4	Законы сохранения. Лагранжиан. Гамильтониан.	7	4	4		1		8,7	Задания для самостоятельной работы
	Итого за 7 семестр 72 часа		16	16		4	0.3	35,7	
5	Пары Лакса.	8	3	3		0,4		3	Задания для самостоятельной работы
6	Метод Хироты: билинейная форма.	8	3	3		0,4		3	Задания для самостоятельной работы
7	Метод Ablowitz-Кауп-Newell-Segur (AKNS).	8	4	4		0,4		4	Задания для самостоятельной работы
8	Преобразование Дарбу и Бэклунда.	8	4	4		0,4		4	Задания для самостоятельной работы
9	Интегрируемые дискретизации нелинейных уравнений в частных производных.	8	2	2		0,4		4	Задания для самостоятельной работы

									Экзамен
	Всего за 8 семестр 72 часа		16	16		2	0,5	18	
	ИТОГО 144 часа								

Содержание разделов дисциплины:

1. Введение. Элементарные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ).

- 1.1. Волновой пакет.
- 1.2. Решения типа бегущей волны.
- 1.3. Уединенные волны, солитонные решения.
- 1.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

2. Метод обратной задачи рассеяния для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное преобразование Фурье.

- 2.1. Напоминание метода обратного преобразования Фурье для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.
- 2.2. Задача рассеяния. Примеры: функционал δ , функция $\text{sech}^2(x)$.
- 2.3. Обратная задача рассеяния.
- 2.4. Решение уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко. Коэффициенты отражения.
- 2.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

3. Задача начального значения для уравнения КдФ.

- 3.1. Задача обратного рассеяния для уравнения КдФ.
- 3.2. Эволюция данных рассеяния. Дискретный спектр. Непрерывный спектр.
- 3.3. Построение решения.
- 3.4. 1-солитонное, 2-солитонное и N-солитонное решение.
- 3.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

4. Законы сохранения. Лагранжиан. Гамильтониан. Пары Лакса.

- 4.1. Пара Лакса КдФ.
- 4.2. Иерархия Лакса КдФ.

5. Метод Хироты: билинейная форма.

- 5.1. Билинейный оператор.
- 5.2. Решение билинейного уравнения.

6. Метод Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS).

- 6.1. Пары Лакса типа AKNS.
- 6.2. Пара AKNS для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).
- 6.3. Метод Захарова-Шабата. НУШ. Уравнение \sin -Гордона.
- 6.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

7. Преобразование Дарбу.

7.1. Теорема Дарбу.

7.2. Солитонное решение КдФ с помощью преобразования Дарбу.

8. Преобразование Бэклунда.

8.1. Преобразование Бэклунда для потенциального уравнения КдФ.

8.2. Преобразование Бэклунда для уравнения sine -Гордона.

8.3. Диаграмма Бьянки.

9. Интегрируемые дискретизации нелинейных уравнений в частных производных.

9.1. Схема Дарбу-Лакса.

9.2. Преобразования Дарбу и Бэклунда для НУШ.

9.3. Дискретизации НУШ, производного НУШ и деформации производного НУШ.

9.4. Дискретная система Адлера-Ямилова.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- издательская система *LaTeX*;
- пакет программного обеспечения *Wolfram Mathematica*;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. P.G. Drazin, R.S. Johnson, "Solitons: an Introduction", Cambridge University Press (1989).

DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139172059.001>

2. Введение в теорию солитонов, Новокшенов В.Ю., 2002. ISBN: 5-93972-100-1.

б) дополнительная литература

1. S. Konstantinou-Rizos, «Darboux transformations, discrete integrable systems and related Yang-Baxter maps». PhD thesis. University of Leeds, UK (2014).

<https://arxiv.org/pdf/1410.5013.pdf> (электронный ресурс)

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica*, для проведения занятий лекционного типа;

- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica*, для проведения практических занятий (семинаров);

- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica*, для проведения групповых и индивидуальных консультаций;

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

- помещения для самостоятельной работы;

- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Автор:

Доцент кафедры
нелинейной динамики, к.ф.-м.н.

С. Константину Ризос

Приложение No. 1 к рабочей программе дисциплины

“Интегрируемые системы”

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы
(данные задания выполняются студентом самостоятельно
и проверяются преподавателем)

Задания по теме “Введение. Элементарные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ):”

- Найти дисперсионное соотношение для уравнения

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0.$$

- Сравните дисперсионные соотношения для уравнений

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0,$$

и

$$u_t + u_x - u_{xxt} = 0,$$

особенно в предельных случаях длинных и коротких волн.

- Найти решение уравнения

$$u_t + (1 + u)u_x = 0$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 x, & x \in [0, 1] \\ u_0(2 - x), & x \in [1, 2] \\ 0, & x \leq 0, x \geq 2 \end{cases}, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

- Общая нелинейная волна. Предположим, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

где $u(x, 0) = f(x)$, и $f(x)$ и $c(u)$ — дифференцируемы. Используйте метод характеристических кривых, чтобы найти неявное решение.

- Одинокая волна. Найти решение уединенной волны для уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

для волны амплитудой $-2/c_2$.

- Найти решения бегущей волны в виде $u(x, t) = f(x - ct)$ для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

Задания по теме “Метод обратной задачи рассеяния для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное преобразование Фурье.”

- Найти, если они существуют, собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$\psi''(x) + (\lambda - u(x))\psi(x) = 0$$

где U_0 — произвольная вещественная постоянная.

- (Классическая задача рассеяния) Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$\psi''(x) + (\lambda - u(x))\psi(x) = 0,$$

в случае, если

$$u(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases},$$

где U_0 — положительная постоянная.

- Пусть $u(x) = -U_0^2(x)$. То, задача Штурма–Лиувилля:

$$\psi''(x) + (\lambda + U_0^2(x))\psi(x) = 0.$$

Найти собственные значения и собственные функции.

- (Безотражательный потенциал) Найдите дискретные собственные функции задачи

$$\psi''(x) + (\lambda - u(x))\psi(x) = 0,$$

для $N = 3$, где $u(x) = -N(N+1)^2(x)$.

- (Интегральные уравнения) Найдите решения интегральных уравнений:

$$K(x, z) + e^{-(x+z)} + \int_x^\infty K(x, y) + e^{-(y+z)} dy = 0;$$

$$\phi(x, z)xz + \int_x^\infty \phi(x, y)yz dy = 0.$$

- Обратное рассеяние в $-\infty$. Найдите уравнение для $L(x, z)$, если

$$\psi_-(x; k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, z)e^{-ikz} dz = 0$$

удовлетворяет уравнению $\psi''(x) + (\lambda - u(x))\psi(x) = 0$. Каким условиям должна удовлетворять функция $L(x, z)$ краевым условиям?

Задания по теме “Задача начального значения для уравнения КдФ:”

- (Концентрическое уравнение КдФ) Доказать, что если $K(x, z; t)$ удовлетворяет уравнению Марченко

$$K(x, z; t) + F(x, z; t) + \int_x^\infty K(x, y; t) + F(y, z; t) dy = 0,$$

где F — решение системы

$$F_{xx} - F_{zz} = (x - z)F, 3tF_t - F + F_{xxx} + F_{zzz} = xF_x + zF_z,$$

то

$$u_t + \frac{u}{2t} - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

где $u(x, t) = -2 \frac{2}{(12t)^{2/3}} \frac{\partial}{\partial X} K(X, X; t)$, $X = \frac{x}{(12t)^{1/3}}$.

- (Двухсолитонное решение уравнения КдФ) Найти решение для $F(x, z; t)$, которое зависит от $x + z$ и является экспоненциальным как по $x + z$, так и по t . Поэтому, запишите решение для F , являющееся суммой двух экспоненциальных членов, и постройте двухсолитонное решение уравнения КдФ.
- (Некоторые проблемы с начальными значениями) Воспользуйтесь обратным преобразованием рассеяния, чтобы найти решение уравнения КдФ,

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

которое удовлетворяет условию $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где: (i) $f(x) = -\frac{9}{2}\text{sech}^2(\frac{3}{2}x)$, (ii) $f(x) = -12\text{sech}^2x$.

Задания по теме “Законы сохранения. Лагранжиан. Гамильтониан. Пары Лакса:”

- (Уравнение Бюргерса) Доказать, что если $u(x, t)$ является решением уравнения

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где ν — положительная постоянная, то u является законом сохранения.

- (Уравнение КдФ) Доказать, что $xu + 3tu^2$ является законом сохранения для уравнения КдФ

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

- (Модифицированное уравнение КдФ) Найти три закона сохранения для модифицированного уравнения КдФ

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

который зависит от u , u^2 и u^4 , соответственно.

- (Нелинейное уравнение Шредингера) Доказать, что если $u(x, t)$ является решением нелинейного уравнения Шредингера, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}u_x - u\bar{u}_x) dx$$

являются первыми интегралами (\bar{u} обозначает комплексное сопряжение u).

Задания по теме “Метод Хироты: билинейная форма:”

- Проверьте эти тождества для билинейного оператора:

$$ggD_xD_t(f \cdot f) - ffD_tD_x(g \cdot g) = 2D_x [\{D_t(f \cdot g)\} \cdot (fg)],$$

$$ggD_x^2(f \cdot f) - ffD_x^2(g \cdot g) = 2D_x [\{D_x(f \cdot g)\} \cdot (fg)].$$

- (Уравнение Буссинеска) Докажите, исходя из билинейной формы, что преобразованием Бэклунда для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

является:

$$(D_t + aD_x^2)(f_1 \cdot f_2) = 0,$$

$$(aD_tD_x + D_x + aD_x^3)(f_1 \cdot f_2) = 0,$$

где $u(x, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f$ и $a^2 = -3$.

Задания по теме “Метод Ablowitz–Kaup–Newell–Segur:”

- (НУШ) Покажите, что уравнение

$$iq_t + q_{xx} - q|q|^2 = 0$$

имеет решение в виде уединенной волны, для которого $|q|$ не стремится к 0 при $|x| \rightarrow +\infty$.

- (Солитонное решение НУШ) Построить 1-солитонное решение для уравнения

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0.$$

- (Уравнение синус-Гордон): Построить двухсолитонное решение уравнения синус-Гордона:

$$u_{xt} = \sin u,$$

в виде

$$u(x, t) = 4 \arctan \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right\},$$

$$\theta_i = x_i \lambda_i + t / \lambda_i + \mu_i, \quad i = 1, 2.$$

Задания по теме “Преобразование Дарбу:”

- Построить преобразование Дарбу для уравнения КдФ.
- Построить преобразование Дарбу для уравнения \sin -Гордона.
- Построить преобразование Дарбу для модифицированного уравнения КдФ.

Задания по теме “Преобразование Бэклунда:”

- Построить преобразование Бэклунда для уравнения КдФ.
- Построить преобразование Бэклунда для уравнения \sin -Гордона.
- Построить преобразование Бэклунда для модифицированного уравнения КдФ.

Задания по теме “Интегрируемые дискретизации нелинейных уравнений в частных производных:”

- Построить интегрируемую дискретизацию модифицированного уравнения КдФ через преобразования Дарбу.

Зачет

Зачет ставится студентам, набравшим 40 и более баллов по каждой самостоятельной работе.

Экзамен

Экзамен проводится в письменной форме. На экзамене проверяется понимание основных основных концепций дисциплины, определений и теорем. Также, проверяются вычислительные навыки студентов в конкретных задачах, а также навыки с использованием пакета программного обеспечения Wolfram Mathematica. Продолжительность экзамена — 4 часа.

Вопросы к экзамену:

- Что такое интегрируемая система дифференциальных уравнений в частных производных.
- Определение пары Лакса. Условие нулевой кривизны и представление Лакса.
- Построение пары Лакса для уравнений КдФ и нелинейного уравнения Шредингера.
- Солитонные решения для уравнения КдФ: 1-soliton, 2-soliton.
- Симметрии, законы сохранения и первые интегралы в качестве определения интегрируемости.
- Основные шаги метода обратного рассеяния.
- Построение солитонных решений для уравнения \sin -Гордона.
- Определение преобразования Бэклунда.
- Преобразование Бэклунда для уравнений: дискретное потенциальное уравнение КдФ, \sin -Гордона. Построение решения типа кинк.
- Диаграмма Бьянки. Коммутативность преобразований Бэклунда.
- Доказательство теоремы Дарбу.
- Применение теоремы Дарбу к уравнению КдФ. Построение n -солитонного решения КдФ.
- Схема Дарбу–Лакса. Применение к нелинейным уравнениям типа Шредингера (НУШ).
- Преобразования Дарбу для НУШ, производного НУШ и деформации производного НУШ. Построение соответствующих преобразований Бэклунда.
- Определение точной интегрируемой дискретизации нелинейного интегрируемого уравнения с частными производными.
- Уравнения в квад-графах и их интегрируемость. Пара Лакса для систем уравнений в квад-графах.
- Дискретизация через преобразования Дарбу. Построение систем: Адлер–Ямилова и Тоды.

- С помощью Mathematica: проверять условие нулевой кривизны для конкретных уравнений, строить солитонных решений, рисовать вольны, солитоны, кинки и антикинки, строить преобразования Дарбу и Бэклунда для конкретных уравнений, строить решения с помощью преобразование Дарбу и Бэклунда, дискретизировать через схему Дарбу–Лакса.

Система оценивания

Самостоятельные работы являются обязательными. Каждая работа проверяется и студенты получают с 0 до 100 баллов по каждой работе. Итоговая оценка по этой дисциплине вычисляется по формуле:

Итоговая оценка = $0.4 \times$ средний балл по самост. работам + $0.4 \times$ итоговый балл экзамена

- <60 — неудовлетворительно.
- 61–70 — удовлетворительно (3).
- 71–90 — хорошо (4).
- 91–100 — отлично (5).

Поскольку одной из основных целей этого предмета является привлечение студентов к научным исследованиям, студенты, которые во время семестра получили оригинальные научные результаты, получают автоматически оценку отлично (5).