


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

«18» мая 2020 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
«Математический анализ»

**Направление подготовки**  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Направленность (профиль)**  
«Прикладная математика и информатика»

**Квалификация выпускника**  
Бакалавр

**Форма обучения**  
очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 13 апреля 2020 г., протокол № 4

Программа одобрена НМК  
факультета ИВТ  
протокол № 7 от 17 мая 2020 г.

Ярославль

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Математический анализ» являются изучение основ математического анализа, объединяющих теорию действительного числа, теорию пределов, теорию рядов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, а также приобретение знаний и умений в соответствии с государственным стандартом, формирование мировоззрения и развитие способности понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат.

В задачи курса математического анализа входят: развитие алгоритмического и логического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части ОП бакалавриата.

Основу курса составляют дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, а также дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных, теория числовых и функциональных рядов, в том числе рядов Фурье. Поэтому математический анализ необходим при изучении дисциплин: «Теория вероятностей», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Численные методы». Также она предоставляет методы исследования, которые используются в таких дисциплинах как «Математические методы в компьютерных технологиях», «Доп. главы математической статистики», «Концепции современного естествознания», «Цифровая обработка сигналов».

Студент первого курса, приступая к изучению математического анализа, должен иметь вполне определенную базовую подготовку по курсу математики за среднюю школу, и, в частности, хорошие знания по теме «Элементарные функции, их свойства и графики». Вместе с тем такие личностные характеристики как общая образованность, организованность и трудолюбие, самостоятельность, настойчивость в достижении цели необходимы при освоении дисциплины.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)                                                                                                                   | Индикатор достижения<br>компетенции<br>(код и формулировка)                                                                                                                                                                                             | Перечень<br>планируемых результатов<br>обучения                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Общепрофессиональные компетенции</b>                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                          |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК – 1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по дисциплине<br>ОПК – 1.2 Демонстрирует навыки решения типовых задач, выполнения стандартных действий<br>ОПК – 1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, концепций, фактов, | <b>Знать:</b><br>– постановки задач математического анализа;<br>– основные понятия и формулировки теорем математического анализа.<br><b>Уметь:</b><br>– решать задачи по математическому анализу;<br>– доказывать основные и вспомогательные утверждения |

|  |                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>принципов математики и естественных наук для решения практических задач</p> | <p>и теоремы из курса математического анализа.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– математическим аппаратом анализа;</li> <li>– навыками использования аппарата математического анализа при решении конкретных задач.</li> </ul> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 12 зач. ед., 432 акад. час.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание                 | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |                           | Формы текущего<br>контроля<br>успеваемости<br><br>Форма<br>промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |  |
|----------|----------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|          |                                                                |         | Контактная работа                                                                                                     |              |              |              |                             |                           |                                                                                                          |  |
|          |                                                                |         | лекции                                                                                                                | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания | самостоятельная<br>работа |                                                                                                          |  |
| 1.       | Аксиоматика множества действительных чисел                     | 1       | 4                                                                                                                     |              |              |              |                             | 4                         |                                                                                                          |  |
| 2.       | Числовые последовательности. Предел последовательности         | 1       | 16                                                                                                                    |              |              | 1            |                             | 8                         | опрос по теории№1                                                                                        |  |
| 3.       | Предел функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке. | 1       | 18                                                                                                                    |              |              | 1            |                             | 8                         | коллоквиум                                                                                               |  |
| 4.       | Производные и дифференциалы                                    | 1       | 18                                                                                                                    |              |              | 1            |                             | 8                         |                                                                                                          |  |
| 5.       | Исследование функции с помощью производных.                    | 1       | 16                                                                                                                    |              |              | 1            |                             | 8                         | опрос по теории№2                                                                                        |  |
|          | Всего за 1 семестр                                             |         | 68                                                                                                                    |              |              | 4            |                             | 36                        | Экзамен                                                                                                  |  |
|          |                                                                |         |                                                                                                                       |              |              |              |                             |                           |                                                                                                          |  |
| 6.       | Интегральное исчисление функции одной переменной.              | 2       | 12                                                                                                                    |              |              | 1            |                             | 6                         | опрос по теории №3                                                                                       |  |

|     |                                                                                               |   |            |  |  |           |  |            |                    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------|--|--|-----------|--|------------|--------------------|
|     | Неопределенный интеграл.                                                                      |   |            |  |  |           |  |            |                    |
| 7.  | Интегральное исчисление функции одной переменной. Интеграл Римана..                           | 2 | 12         |  |  | 1         |  | 6          |                    |
| 8.  | Числовые ряды.                                                                                | 2 | 12         |  |  | 1         |  | 6          |                    |
| 9.  | Функциональные ряды                                                                           | 2 | 12         |  |  |           |  | 6          |                    |
| 10. | Степенные ряды                                                                                | 2 | 12         |  |  |           |  | 6          |                    |
| 11. | Функции многих переменных                                                                     | 2 | 8          |  |  | 1         |  | 6          | Коллоквиум         |
|     |                                                                                               |   |            |  |  |           |  |            |                    |
|     | <b>Всего за 2 семестр</b>                                                                     |   | <b>68</b>  |  |  | <b>4</b>  |  | <b>36</b>  | <b>Экзамен</b>     |
| 12. | Функциональные последовательности и ряды                                                      | 3 | 18         |  |  | 1         |  | 8          | опрос по теории №4 |
| 13. | Ряды Фурье.                                                                                   | 3 | 10         |  |  |           |  | 7          |                    |
| 14. | Интегралы, зависящие от параметра                                                             | 3 | 10         |  |  | 1         |  | 7          |                    |
| 15. | Кратные интегралы                                                                             |   | 14         |  |  | 1         |  | 7          |                    |
| 16. | Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля |   | 16         |  |  | 1         |  | 7          | опрос по теории №5 |
|     |                                                                                               |   |            |  |  |           |  |            |                    |
|     | <b>Всего за 3 семестр</b>                                                                     |   | <b>68</b>  |  |  | <b>4</b>  |  | <b>36</b>  | <b>Экзамен</b>     |
|     | <b>Всего</b>                                                                                  |   | <b>272</b> |  |  | <b>16</b> |  | <b>144</b> |                    |

### Содержание разделов дисциплины:

#### Раздел 1. Аксиоматика множества действительных чисел

Аксиоматическое определение действительного числа. Понятие сечения. Упорядочение множества действительных чисел. Свойство плотности. Основная теорема Дедекинда. Арифметические действия над действительными числами. Абсолютные величины. Представление десятичного числа бесконечной десятичной дробью. Существование корня  $n$ -степени из действительного числа. Границы числовых множеств. Теорема о существовании точной верхней и нижней границ. Архимедово свойство действительных чисел.

#### Раздел 2 Числовые последовательности. Предел последовательности

Числовые последовательности. Определение предела последовательности, примеры. Теорема о единственности предела. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число  $e$ . Теоремы об арифметических операциях над сходящимися последовательностями. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Частичные последовательности и частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса (лемма Кантора).

### **Раздел 3. Функции одной переменной и их пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке**

Функции одной переменной. Общее определение предела функции в точке и определение на языке последовательностей. Односторонние пределы, предел на бесконечности, бесконечный предел. Первый и второй замечательные пределы. Следствия. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых. Теорема о существовании предела монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Непрерывность обратной функции. Свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса. Теоремы Больцано- Коши. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора.

### **Раздел 4. Производные и дифференциалы**

Дифференцируемость функции. Определение производной функции в точке. Геометрический и физический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцирование показательных-степенных выражений. Определение дифференциала функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Формула Тейлора. Разложение функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Другие формы остаточного члена формулы Тейлора. Примеры.

### **Раздел 5. Исследование функции с помощью производных**

Исследование функции с помощью производных. Условие монотонности функции. Условие строгой монотонности функции. Экстремумы функции, определения, необходимые и достаточные условия. Наибольшие и наименьшие значения функции. Выпуклые и вогнутые функции. Определения. Необходимые и достаточные условия выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графика функции. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Приближенное решение уравнений. Кривые на плоскости. Параметрическое дифференцирование.

### **Раздел 6. Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл**

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Метод замены переменной. Примеры. Метод интегрирования по частям. Примеры. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей. Теорема о разложении дроби в сумму простейших дробей. Определений коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование выражений, содержащих радикалы. Интеграл от дифференциального бинома. Подстановки Эйлера. Примеры.

Интегрирование выражений, содержащих рациональные функции от  $\sin x$ ;  $\cos x$ . Универсальная тригонометрическая подстановка.

### **Раздел 7. Интегральное исчисление функции одной переменной. Интеграл Римана**

Определенный интеграл Римана, определение, необходимое условие интегрируемости. Интегральные суммы Дарбу. определение, свойства. Критерий интегрируемости. Основные классы интегрируемых функций. Свойства интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Интеграл с переменным верхним пределом. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости. Формула Ньютона - Лейбница. Формула замены переменной в определенном интеграле. Метод интегрирования по частям.

Применение определенного интеграла. Задача вычисления площади. Задача определения объема тела вращения. Вычисление длины кривой. Приближенное вычисление определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение. Свойства. Основной критерий сходимости (критерий Коши). Сходимость интегралов в случае положительных функций (теоремы сравнения). Признак Абеля – Дирихле. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение. Примеры.

## **Раздел 8. Числовые ряды**

Сходимость числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Интегральный признак сходимости числового ряда. Теоремы сравнения. Признаки Коши, Даламбера сходимости числового ряда. Признак Дирихле сходимости числового ряда. Признак Лейбница сходимости числового ряда. Оценка остатка ряда Лейбница.

## **Раздел 9. Функциональные ряды.**

Начальные понятия и определения.

## **Раздел 10. Степенные ряды**

Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости. Формула Коши-Адамара. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Ряд Тейлора Основные разложения в ряд Тейлора.

## **Раздел 11. Функции многих переменных**

Линейное нормированное пространство. Определение, примеры. Эквивалентность норм в пространстве  $R^n$ . Сходимость последовательностей в  $R^n$ . Открытые и замкнутые множества. Компактные множества. Функции многих переменных. Определения, примеры. Предел функции. Повторные пределы. Непрерывные функции нескольких переменных. Теоремы Вейерштрасса. Равномерная непрерывность. Непрерывность сложной функции. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Частные производные. Геометрическая иллюстрация для случая функции двух переменных. Производная сложной функции, Производная по направлению. Градиент. Полный дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о смешанных производных. Формула Тейлора. Экстремумы функции нескольких переменных. Определение. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума

## **Раздел 12. Функциональные последовательности и ряды**

Понятие функционального ряда, сходимость. Соотношение между сходимостью рядов и последовательностей. Основные нормы. Пространство  $C[a,b]$ . Основные виды сходимости рядов и последовательностей непрерывных функций. Соотношение между равномерной сходимостью и другими видами. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

## **Раздел 13. Ряды Фурье**

Скалярное произведение в линейных пространствах. Ортогональность. Линейная независимость ортогональных систем. Тригонометрическая система - пример системы ортогональных функций. Свойство минимальности коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Коэффициенты Фурье по тригонометрической системе. Ряд Фурье. Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Ядро Дирихле. Свойства коэффициентов Фурье четных-нечетных функций.

Теорема Фейера. Равномерное приближение периодических непрерывных функций тригонометрическими многочленами и равномерное приближение непрерывных функций алгебраическими многочленами. Теорема о полноте тригонометрической системы в классе интегрируемых функций. Понятие преобразования Фурье.

#### **Раздел 14. Интегралы, зависящие от параметра**

Понятие интеграла, зависящего от параметра. Свойства (теоремы о непрерывности, дифференцируемости, о повторном интегрировании). Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Дифференцируемость и интегрируемость интеграла по параметру. Эйлеровы интегралы. Определение и свойства. Связь между гамма - и бета - функциями.

#### **Раздел 15. Кратные интегралы**

Множества, измеримые по Жордану. Критерий измеримости. Свойства измеримых множеств. Многомерный интеграл Римана. Интегрируемость непрерывных функций. Свойства кратных интегралов. Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты в  $R^3$ .

#### **Раздел 16. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля**

Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства и вычисление. Криволинейный интеграл второго рода. Его свойства, связь с криволинейным интегралом первого рода и вычисление. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы. Их свойства. Формула Стокса. Формула Гаусса - Остроградского. Элементы теории векторного поля.

### **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Для оценивания работы студента используется балльно-рейтинговая система. **Учет индивидуальных достижений за время обучения представляется очень важной формой работы со студентами.**

По математическому анализу студенты изучают (формально) две дисциплины: математический анализ – лекционный курс и практикум по математическому анализу. На деле разрывать эти две дисциплины нельзя. Поэтому достижения студентов на практикуме учитываются при подведении итогов по математическому анализу.

На Google Диск для группы студентов мы создаем таблицу в формате Excel, в которой ведется учет по контрольным мероприятиям каждой темы (контрольная работа,

опросы по теории и т.д.). Определенная сумма баллов за семестр дает право сдавать экзамен (допуск к экзамену) и получить зачет по практикуму. Сумма баллов, полученных студентом на экзамене, добавляется к семестровой сумме, и делается перевод в обычную пятибалльную шкалу оценок. Таким образом, экзаменационная отметка во многом определяется оценками, полученными студентом в течение семестра. Это заставляет студента работать в течение всего семестра. Выполнение заданий, связанных с простым воспроизведением лекционного материала + работа в семестре, позволяющая перейти пороговый рубеж усвоения, дает возможность получения удовлетворительной оценки. Решение усложненных задач на основе приобретенных знаний, умений и навыков с их применением в нетипичных ситуациях, позволяет студенту получить хорошую или отличную оценку.

Экзамен проводится в письменной форме, способствующей выставлению более объективной отметке по сравнению с устной формой.

Для каждой академической группы составляется комплект вопросов, равномерно покрывающих весь материал курса. Примерные комплекты вопросов приведены в приложении.

Описанная система оценивания обладает очевидными достоинствами. Все студенты поставлены в одинаковые условия, причем на экзамене им предлагается большое число одних и тех же для данной группы вопросов. Это позволяет адекватно оценить уровень подготовки каждого студента, и объективность оценки знаний каждого студента не подвергается сомнению.

#### **6 . Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются: для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами

OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232

LibreOffice (свободное)

издательская система LaTeX;

для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next")

#### **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 1. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 703с
2. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 2. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 720с
3. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 3. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 351с

б) дополнительная:

1. Бондаренко, В. А., Математический анализ. Предел и непрерывность [Электронный ресурс] : текст лекций / В. А. Бондаренко, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2003, 74с <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20030272.pdf>
2. Математический анализ [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / М. В. Ануфриенко, В. А. Бондаренко, А. В. Зафиевский, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2010, 137с <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100355.pdf>



3. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.1. - 7-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 607с
4. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов. В 3 т. Т.1. - 8-е изд., М., Физматлит, 2003, 679с
5. Шилов, Г. Е., Математический анализ : функции одного переменного : учеб. пособие для ун-тов. Ч.1, М., Наука, 1969, 588с
6. Шилов, Г. Е., Математический анализ : функции одного переменного : учеб. пособие для ун-тов. Ч.2, М., Наука, 1969, 528
7. Рудин, У., Основы математического анализа : пер. с англ. / У. Рудин. - 2-е изд., стереотип., М., Мир, 1976, 319с.
8. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.2. - 7-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 800с.
9. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.3. - 5-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 656с
10. Бондаренко, В. А., Методические указания по подготовке к экзамену по математическому анализу / В. А. Бондаренко, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2001, 15с.
11. Демидович, Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, М., Астрель, 2005, 558с.

- в) ресурсы сети «Интернет»
1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).
3. Электронно-библиотечная система «Юрайт»(<https://urait.ru/>).
4. Электронно-библиотечная система «Лань»(<https://e.lanbook.com/>).

#### **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, хранящиеся на электронных носителях и обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочим программам дисциплин.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

**Авторы:**

Зав. кафедрой дискретного анализа, д.ф.-м.н. В.А. Бондаренко

Доцент кафедры дискретного анализа, к.ф.-м.н. Г.В. Шабаршина

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Математический анализ»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки  
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы  
формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Работы по теории**

**1 семестр**

**Опрос по теории №1**

1. а) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности  
б) Сформулируйте определение: последовательность не является фундаментальной
2. а) Известно, что последовательность  $a_n$  имеет конечный предел, а последовательность  $b_n$  не имеет конечного предела. Что можно сказать про последовательность  $a_n + b_n$ ?  
б) Известно, что последовательности  $a_n$  и  $b_n$  не имеют конечного предела. Что можно сказать про последовательность  $a_n + b_n$ ?
3. а) Известно, что последовательность  $a_n$  имеет конечный предел, а последовательность  $b_n$  не имеет конечного предела. Что можно сказать про последовательность  $a_n + b_n$ ?  
б) Известно, что последовательности  $a_n$  и  $b_n$  не имеют конечного предела. Что можно сказать про последовательность  $a_n + b_n$ ?
4. Сформулируйте теорему о трёх последовательностях («о двух милиционерах»).

**Коллоквиум**

**Предел и непрерывность функции.**

**Определения. Сформулируйте определение:**

1. неограниченной на множестве  $X$  функции;
2. монотонной на промежутке функции;
3. Записать определения для всевозможных комбинаций:

|                      |                   |
|----------------------|-------------------|
| $f(x)$ неогр         | $x$ неогр         |
| $f(x)$ неогр         | $x$ неогр         |
| $f(x)$ неогр + неогр | $x$ неогр + неогр |
| $f(x)$ неогр неогр   | $x$ неогр неогр   |
| $f(x)$ неогр неогр   | $x$ неогр неогр   |
| $f(x)$ неогр неогр   | $x$ неогр неогр   |

4. функции, непрерывной в точке по Коши и по Гейне;

**Основные теоремы (без доказательства).**

1. Сформулируйте теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций;
2. Сформулируйте теорему о первом замечательном пределе;
3. Сформулируйте теорему о втором замечательном пределе;
4. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции;
5. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса для функций, непрерывных на отрезке.
6. Сформулируйте теоремы Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.

#### Опрос по теории №2

1. Сформулируйте определение:
  1. дифференцируемой в данной точке функции.
  2. геометрический смысл дифференцируемости функции в точке
  3. точки локального максимума (минимума) функции  $f(x)$ .
2. Основные теоремы и формулы (без доказательства)
  4. сформулируйте теорему Ферма.
  5. сформулируйте теорему Ролля.
  6. сформулируйте теорему о формуле конечных приращений Лагранжа.
  7. запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

### 2 семестр

#### Опрос по теории №3

1. Запишите (с необходимыми условиями) формулу интегрирования по частям (для неопределенного интеграла).
2. Запишите (с необходимыми условиями) формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
3. Сформулируйте определение верхней и нижней суммы Дарбу (со всеми необходимыми пояснениями и обозначениями).
4. Сформулируйте определение определенного интеграла Римана (со всеми необходимыми пояснениями и обозначениями).
5. Докажите (по определению или свойствам интегрируемости), что функция  $y = x$  интегрируема на отрезке  $[1, 3]$ .
6. Докажите (по определению или свойствам интегрируемости), что функция  $y = 2-x$  интегрируема на отрезке  $[0, 2]$ .
7. Приведите пример такой функции  $f(x)$  и параметра  $a$ , что  
 функция  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  – возрастающая, а функция  $G(x) = \int_x^a (f(x) - a) dx$  – убывающая.
8. Приведите пример такой функции  $f(x)$  и параметра  $a$ , что  
 функция  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  – убывающая, а функция  $G(x) = \int_x^a (f(x) - a) dx$  – возрастающая.

#### Коллоквиум

1. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства  $R^m$ .
2. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции  $u(M)$  в точке..
3. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции  $u(M)$  при  $M \rightarrow \infty$ .

4. Сформулируйте определение дифференцируемой функции  $f(x,y)$  в точке  $M(x_0,y_0)$ .  
Геометрический смысл.

5. Сформулируйте теоремы о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции  $f(x,y)$  в точке  $M(x_0, y_0)$ .
6. Пусть функция  $f$  непрерывна. Доказать, что множество  $D$  точек пространства  $R^n$ , для которых  $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0\}$  открыто. (Можно считать, что  $D$  множество на плоскости:  $D = \{(x, y) | f(x, y) > 0\}$ )
7. Доказать, что если числовые последовательности  $x_n$  и  $y_n$  являются фундаментальными, то последовательность точек  $(x_n, y_n)$  является фундаментальной.

### 3 семестр

Опрос по теории №4

1. а) Сформулируйте определение поточечной сходимости функциональной последовательности  $f_n(x)$  на множестве  $X$ .  
 б) Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности  $f_n(x)$  на множестве  $X$ .
2. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенного ряда.
3. Сформулируйте теорему о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.
4. Запишите любой (на Ваш выбор) признак равномерной сходимости функционального ряда.

Опрос по теории №5

1. Сформулируйте определение измеримого (по Жордану) множества  $A \subset R^n$  со всеми необходимыми подробностями (обозначениями).
2. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
3. Сформулируйте определение криволинейного интеграла первого рода и запишите формулы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
4. Напишите формулу Грина и сформулируйте условия, при которых она верна.

**Показатели и критерии, используемые при оценивании коллоквиумов и опросов по теории:**  
**Замечание.**

Курс математического анализа разделен две части: лекционная часть под названием «Математический анализ» и практическая под названием «Практикум по математическому анализу». Лекция в вузе представляет собой систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем-лектором учебного материала. Причем этот материал, как правило, теоретического характера. Цель лекции – организация учебной деятельности студентов по формированию системы знаний. (Когда отдельные разделы и темы очень сложны для самостоятельного изучения, лекция выполняет функцию основного источника информации.) Лекция призвана также формировать умение аргументировано излагать научный материал. Навыки решения практических задач математического анализа формируются в большей степени на практикуме. Здесь они могут быть проверены добавлением к теоретическому вопросу примера на приложение теоремы, формулы и т.д.

Подробное описание показателей и критериев оценивания приведено в таблице пункта 2.2.

При проверке ответов на задания используются следующие положения:

полный балл выставляется, если студент полно и правильно сформулировал теоретический материал, понял смысл текста вопроса/задачи, полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Балл понижается, если студент (не допуская ошибок) правильно сформулировал теоретический материал, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений; студент понял смысл текста вопроса/задачи, предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Выставляется не более половины от заявленной суммы баллов, если студент смог воспроизвести (с ошибками) основные определения и формулировки; на поставленные вопросы ответил не вполне правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

Ответ не засчитывается, если студент не смог воспроизвести или воспроизвел с очень грубыми ошибками основные определения и формулировки; студент не понял смысла текста вопроса/задачи, не смог выполнить задания. На заданные вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Полученные в течение семестра баллы учитываются при выставлении итоговой оценки за семестр.

### **Вопросы для подготовки к экзамену за первый семестр**

Аксиомы множества действительных чисел. Точная верхняя грань.

Теорема о точной нижней грани.

Принцип Архимеда

Числовая последовательность, предел.

Теоремы об ограниченности сходящейся последовательности и о единственности предела

Теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.

Число « $e$ ».

Бесконечно малые последовательности, свойства

Арифметические операции со сходящимися последовательностями.

Критерий Коши сходимости последовательности.

Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теоремы о верхнем и нижнем пределах.

Бесконечно большие последовательности.

Предельная точка множества, два определения, эквивалентность.

Определения по Коши и по Гейне предела функции в точке, теорема об эквивалентности.

Арифметические операции и предел функции.

Критерий Коши существования предела функции.

Расширение понятия предела функции, односторонние пределы.

Первый замечательный предел.

Второй замечательный предел. Следствия.

Пределы монотонных функций.

Непрерывность функции в точке. Арифметические операции и непрерывность.

Непрерывность сложной функции.

Первая теорема Вейерштрасса  
Вторая теорема Вейерштрасса  
Теорема Больцано-Коши.  
Равномерная непрерывность. Теорема Кантора  
Непрерывность и точки разрыва монотонных функций.  
Обратная функция. Теорема о существовании и непрерывности.  
Элементарные функции. Теорема о непрерывности.  
Сравнение бесконечно малых.  
Дифференцируемость функции в точке. Производная. Дифференциал.  
Графический смысл дифференцируемости. Касательная к графику, уравнение.  
Связь «дифференцируемость - непрерывность».  
Правила дифференцирования. Таблица производных.  
Старшие производные и дифференциалы. Формула Лейбница  
Точки возрастания, убывания, экстремума Теорема Ферма  
Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.  
Правило Лопиталя.  
Формула Тейлора-Пеано.  
Формула Тейлора-Лагранжа  
Основные разложения.  
Условия монотонности.  
Условия экстремума  
Выпуклые функции, условия выпуклости. Точки перегиба.  
Асимптоты.  
Построение графиков функций.  
Параметрически заданные кривые и функции. Построение кривых.  
Приближенное решение уравнений.

### **Вопросы для подготовки к экзамену за второй семестр**

Первообразная, неопределенный интеграл. Простейшие свойства.  
Интегрирование подстановкой и по частям.  
Интегрирование рациональных функций.  
Интегрирование иррациональных функций.  
Интегрируемость функции по Риману: основные свойства.  
Ограниченность интегрируемой по Риману функции.  
Суммы Дарбу, свойства.  
Критерий интегрируемости по Риману.  
Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.  
Оценки определенного интеграла, теоремы о среднем.  
Классы интегрируемых функций.  
Интеграл с переменным верхним пределом, свойства.  
Формула Ньютона – Лейбница.  
Замена переменной и интегрирование по частям для определенного интеграла.  
Приложения определенного интеграла. Длина кривой.  
Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.  
Понятие несобственного интеграла, основные варианты. Сходимость. Критерий Коши.  
Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла.  
Интегралы от неотрицательных функций. Теоремы сравнения.  
Признак Абеля – Дирихле сходимости несобственного интеграла.  
Понятие числового ряда, сходимость, сумма ряда.  
Простейшие свойства числовых рядов. Критерий Коши.  
Абсолютная и условная сходимость ряда.  
Положительные ряды. Теоремы сравнения.



Интегральный признак Коши – Маклорена.  
 Признаки Даламбера, Коши, Раабе.  
 Признак Абеля – Дирихле.  
 Сочетательное свойство числового ряда.  
 Перестановка числового ряда. Теоремы Коши и Римана.  
 Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.  
 Ряд Тейлора. Основные разложения.  
 Формула Валлиса. Формула Стирлинга.  
 Бесконечные произведения.  
 Пространство  $R^m$ , линейность, скалярное произведение, неравенство Шварца, норма.  
 Последовательности в  $R^m$ , сходимость, критерий Коши, теорема Больцано – Вейерштрасса.  
 Множества в  $R^m$ , основные примеры.  
 Классификация точек. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества.  
 Функция нескольких переменных, основные понятия.  
 Предел в точке, свойства. Непрерывность.  
 Теоремы Вейерштрасса и Кантора о непрерывных на компактах функциях.  
 Дифференцируемость в точке. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости. Непрерывная дифференцируемость. Дифференциал.  
 Геометрический смысл дифференцируемости, касательная плоскость.  
 Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала.  
 Производная по направлению, градиент, свойства.  
 Старшие производные, теорема о смешанных производных.  
 Старшие дифференциалы, определение, вычисление.  
 Формула Тейлора.  
 Точки экстремума, теорема Ферма. Условия второго порядка.  
 Теорема об обратной функции.  
 Теорема о неявной функции.

### **Вопросы для подготовки к экзамену за 3 семестр**

Функциональные последовательности. Сходимость в точке, на множестве, равномерно, в среднем квадратичном.  
 Критерий Коши равномерной сходимости.  
 Равномерная сходимость и непрерывность.  
 Равномерная сходимость и интегрирование.  
 Равномерная сходимость и дифференцирование.  
 Функциональные ряды. Варианты сходимости.  
 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.  
 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.  
 Степенные ряды. Теорема Абеля.  
 Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.  
 Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.  
 Ряд Тейлора.  
 Основные разложения в степенные ряды.  
 Тригонометрическая система. Свойства. Ряд Фурье.  
 Евклидово пространство. Основной пример. Ортонормированные системы.  
 Минимальное свойство коэффициентов Фурье.  
 Неравенство Бесселя. Следствие.  
 Преобразование частичных сумм ряда Фурье. Ядра Дирихле, свойства.  
 Теорема локализации.  
 Теорема о сходимости ряда Фурье для кусочно - дифференцируемой функции.  
 Ядра Фейера, свойства. Теорема Фейера.  
 Теорема Вейерштрасса.  
 Полнота тригонометрической системы. Равенство Парсеваля.  
 Интегралы с параметром. Теоремы о непрерывности.  
 Дифференцирование интеграла по параметру.  
 Теорема о повторном интегрировании.  
 Несобственные интегралы с параметром. Основные понятия.

Признаки равномерной сходимости интеграла.  
 Связь интегралов с функциональными последовательностями.  
 Теоремы о непрерывности, дифференцировании и повторном интегрировании.  
 Г-функция и В-функция, свойства  
 Мера Жордана - схема определения.  
 Критерий измеримости.  
 Аддитивность меры Жордана.  
 Теорема о мере графика непрерывной функции.  
 Примеры измеримых и неизмеримых множеств.  
 Кратные интегралы; определение, свойства.  
 Сведение кратного интегрирования к повторному.  
 Замена переменных в кратных интегралах. Примеры.  
 Кривые на плоскости и в пространстве. Основные понятия и факты,  
 Криволинейные интегралы 1-го типа. Свойства  
 Криволинейные интегралы 2-го типа Свойства  
 Формула Грина  
 Независимость криволинейного интеграла от пути.  
 Поверхности, способы задания. Нормаль, касательная плоскость.  
 Площадь поверхности.  
 Поверхностные интегралы 1 -го типа Свойства.  
 Поверхностные интегралы 2-го типа Свойства.  
 Элементы теории поля.

### Типовые варианты экзаменационной работы за 1 семестр

#### Тема 1. Числовые множества и последовательности

1. Сформулируйте со всеми необходимыми определениями аксиому о существовании точной верхней грани для числового множества.
2. Сформулируйте теорему о вложенных отрезках.
3. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.
4. Доказать, что если у последовательности  $\{x_n\}$  нет конечных частичных пределов, то  $|x_n| \rightarrow +\infty$ .

#### Тема 2. Предел и непрерывность функции.

5. Сформулируйте отрицание к определению предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  по Коши.
6. Сформулируйте и докажите первую теорему Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  если  $x$  рациональное,

7. Докажите, что функция Дирихле  $D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррациональное} \end{cases}$

разрывна в каждой точке.

8. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и не принимает на нем нулевого значения. Докажите, что существует  $m > 0$  такое, что для всех  $x$  из отрезка  $[a, b]$   $|f(x)| \geq m$ .

#### Тема 3. Производные и дифференциалы функции.

9. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.
10. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке.
11. Сформулируйте определение выпуклой на промежутке функции. Сформулируйте теорему о достаточном условии выпуклости дифференцируемой функции.

12. Сформулируйте понятие точки устранимого разрыва функции  $f(x)$ ; доопределите функцию  $f(x) \propto \frac{\ln(2x+3) + \ln 5}{x+4}$  по непрерывности в точке устранимого разрыва и вычислите, используя определение, первую производную в этой точке.
13. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[0,1]$ , дифференцируема на  $(0,1)$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f'(x) \geq 2$ . Приведите обоснованное доказательство, что  $f(x)$  – линейная функция.

## Второй вариант

### Тема 1. Числовые множества и последовательности

1. Сформулируйте со всеми необходимыми определениями теорему о существовании точной нижней грани.
2. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно большой последовательности.
3. Сформулируйте и докажите теорему о трех последовательностях (лемму «о двух милиционерах»).
4. Доказать, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.

### Тема 2. Предел и непрерывность функции

5. Сформулируйте определение предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a - 0$  по Коши.
6. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса для функций, непрерывных на отрезке.
7. Приведите пример функции, разрывной в каждой точке, квадрат которой есть функция непрерывная. Объясните выбор функции.
8. Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на  $[0,1]$  и  $E(f) = [0,1]$ . Докажите, что существует точка  $x_0 \in [0,1]$ , такая, что  $f(x) = x_0$ . Ответ обосновать.

### Тема 3. Производные и дифференциалы функции

9. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
10. Сформулируйте определение выпуклой на промежутке функции. Сформулируйте достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
11. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии монотонности функции на промежутке.
12. Сформулируйте понятие точки устранимого разрыва функции  $f(x)$ ; доопределите функцию  $f(x) \propto \frac{\ln(1+3x)}{2x}$  по непрерывности в точке устранимого разрыва и вычислите, используя определение, первую производную в этой точке.
13. Про функцию  $f$  известно, что она определена и имеет производную  $f^{(5)}(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , на интервале  $(a, b)$  имеет производную  $f^{(6)}(x)$ , причем  $f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = 0$ ,  $f(b) = f'(b) = f^{(2)}(b) = f^{(3)}(b) = 0$ . Докажите, что существует точка  $c \in (a, b)$ :  $f^{(6)}(c) = 0$ .

**Критерии оценивания  
(Проверка ОПК-1)**

|    | <i>Тема 1. Числовые множества и последовательности</i>                                                                                                                                                                                    | <i>балл</i> |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 1  | Знать аксиоматику множества действительных чисел; уметь сформулировать и переформулировать основные понятия.                                                                                                                              | 1           |
| 2  | Знать основные определения и утверждения по теме последовательности; уметь сформулировать отрицание; владеть навыками работы с кванторами.                                                                                                | 1           |
| 3  | Знать основные определения и утверждения по теме последовательности, понимать логическую взаимосвязь основных теорем курса; уметь четко сформулировать утверждения и необходимые определения. Владеть навыками проведения доказательства. | 2           |
| 4  | Владеть навыками проведения доказательства. Знать основные доказательства по теме последовательности, уметь применить знания для доказательства утверждений.                                                                              | 2           |
|    |                                                                                                                                                                                                                                           | Сумма=6     |
|    | <i>Тема 2. Предел и непрерывность функции.</i>                                                                                                                                                                                            |             |
| 5  | Знать определение предела функции в точке. Уметь формулировать на языке Коши и Гейне. Владеть навыками построения определения в различных вариантах.                                                                                      | 1,5         |
| 6  | Знать основные определения и утверждения по теме непрерывность функции, знать понятие сложной функции. Уметь построить сложную функцию. Владеть навыками установления факта непрерывности функции.                                        | 1,5         |
| 7  | Знать основные определения и утверждения по теме непрерывность функции, знать понятие сложной функции. Уметь построить сложную функцию. Владеть навыками установления факта непрерывности функции.                                        | 2           |
| 8  | Знать основные определения и утверждения по теме свойства непрерывной на множестве функции. Уметь использовать эти знания, построив цепочку рассуждений, основанных на стандартных теоремах.                                              | 2           |
|    |                                                                                                                                                                                                                                           | Сумма=7     |
|    | <i>Тема 3. Производные и дифференциалы функции.</i>                                                                                                                                                                                       |             |
| 9  | Знать основные формулы дифференцирования. Уметь вычислить производную сложной функции.                                                                                                                                                    | 1,5         |
| 10 | Знать формулировки основных теорем дифференциального исчисления по исследованию функции. Уметь привести необходимые формулировки и провести грамотные рассуждения для доказательства.                                                     | 1           |
| 11 | Знать формулировки основных теорем дифференциального исчисления по исследованию функции. Уметь привести необходимые формулировки и провести грамотные рассуждения для доказательства.                                                     | 1,5         |
| 12 | Уметь понять смысл задачи, составить план решения, знать и уметь привести необходимые формулировки определений и теорем для задачи.                                                                                                       | 2           |
| 13 | Уметь привести необходимые формулировки определений и теорем для задачи. Уметь выстроить цепочку рассуждений                                                                                                                              | 2           |
|    |                                                                                                                                                                                                                                           | Сумма=10    |

### Общая сумма за экзамен – 23 балла.

Оценка проставляется по количеству набранных баллов:

менее 11 баллов - неудовлетворительно,

11-17 баллов - удовлетворительно,

17-20 баллов - хорошо,

Более 20 баллов – отлично.

При выставлении итоговой оценки учитывается работа студента в течение семестра.

При проверке ответов на задания экзамена используются следующие положения:

полный балл выставляется, если студент полно и правильно изложил теоретический материал, привел обоснования, правильно раскрывающие те или иные положения, сделал обоснованный вывод; студент понял смысл текста задачи, полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Балл понижается, если студент (не допуская ошибок) правильно изложил теоретический материал, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений; студент понял смысл текста задачи, предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Выставляется не более половины от заявленной суммы баллов, если студент смог воспроизвести формально основные определения и формулировки; на поставленные вопросы ответил не вполне правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

Ответ не засчитывается, если студент не раскрыл теоретический вопрос, на поставленные вопросы не смог дать удовлетворительный ответ, студент не понял смысла текста задачи, не смог выполнить задания. На заданные вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

### Типовой вариант экзаменационной работы за 2 семестр

*Тема Неопределенный интеграл, интеграл Римана.*

1. Сформулировать определение первообразной.

2. Пусть  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x) \propto \frac{1}{1 + \cos x}$ , причем  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

Найдите  $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ .

3. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ .

4. Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что функция  $|f|$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Верно ли обратное утверждение?

*Тема Определенный интеграл Римана. Несобственные интегралы*

5. Сформулировать и доказать формулу Ньютона-Лейбница.

6. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsin t \, dt}{x^2}$ .

7. Сформулировать определение несобственного интеграла от неограниченной функции.  
 8. Сформулировать и доказать первый признак сравнения для несобственных интегралов от неограниченных на промежутке функций, т.е. для интегралов 2 рода.

Тема Числовые ряды.

9. Сформулировать и доказать признак Дирихле сходимости числового ряда.  
 10. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \neq 0$ , то можно ли утверждать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится?

11. Можно ли переставить слагаемые числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ , чтобы сумма полученного ряда равнялась 10?

Тема Функции многих переменных

12. Пусть функция  $f$  непрерывна. Доказать, что множество  $D$  точек пространства  $R^n$ , для которых  $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0\}$  открыто. (Можно считать, что  $D$  множество на плоскости:  $D = \{(x, y) | f(x, y) > 0\}$ )  
 13. Доказать, что если числовые последовательности  $x_n$  и  $y_n$  являются фундаментальными, то последовательность точек  $(x_n, y_n)$  является фундаментальной.  
 14. Записать определение дифференцируемости функции двух переменных. Привести геометрическую иллюстрацию понятия дифференцируемости для случая функции двух переменных.

### Показатели оценивания (Проверка ОПК-1)

15.

15.

|   | Тема Неопределенный интеграл, интеграл Римана.                                                                                                                                    | баллы   |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1 | Знать определение и свойства первообразной.                                                                                                                                       | 1       |
| 2 | Знать определение и свойства первообразной; уметь находить первообразную.                                                                                                         | 1,5     |
| 3 | Знать определение и свойства интегральных сумм Римана и Дарбу; знать определение и свойства определенного интеграла; уметь по определению найти значение определенного интеграла. | 1       |
| 4 | Знать формулировки теорем о вычислении и свойствах определенного интеграла; уметь доказывать теоремы.                                                                             | 1,5     |
|   |                                                                                                                                                                                   | Сумма=5 |
|   | Тема Интеграл с переменным верхним пределом. Несобственные интегралы. Числовые ряды.                                                                                              |         |

|    |                                                                                                                                                                                  |         |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 6  | Знать определение интеграла с переменным верхним пределом, знать формулировки теорем о непрерывности и дифференцируемости интеграла; уметь доказывать.                           | 2       |
| 7  | Знать формулировки теорем о непрерывности и дифференцируемости интеграла; уметь применить теоремы для решения задач.                                                             | 2       |
| 7  | Знать определение интеграла с бесконечным верхним пределом и от неограниченной на промежутке функции.                                                                            | 1       |
| 8  | Знать определение интеграла с бесконечным верхним пределом и от неограниченной на промежутке функции; уметь формулировать и применять на практике условия сходимости интегралов. | 2       |
|    |                                                                                                                                                                                  | Сумма=6 |
|    | <b>Тема Числовые ряды.</b>                                                                                                                                                       |         |
| 9  | Уметь формулировать и доказывать признаки сходимости числовых рядов; уметь применять на практике признаки сходимости числовых рядов.                                             | 1,5     |
| 10 | Уметь применять на практике признаки сходимости числовых рядов.                                                                                                                  | 1,5     |
| 11 | Знать свойства суммы абсолютно и условно сходящихся числовых рядов. Уметь проверить условия сходимости рядов для ответа на вопросы о свойствах суммы ряда.                       | 2       |
|    |                                                                                                                                                                                  | Сумма=5 |
|    | <b>Тема Функции многих переменных</b>                                                                                                                                            |         |
| 12 | Знать классификацию точек и множеств на плоскости. Знать основные определения по теме непрерывность функции двух переменных. Уметь провести рассуждение.                         | 1       |
| 13 | Знать определение сходящейся последовательности точек на плоскости; знать свойства сходящихся последовательностей; уметь доказывать основные утверждения.                        | 1,5     |
| 14 | Знать определение дифференцируемости функции двух переменных, геометрический смысл понятия дифференцируемости для случая функции двух переменных.                                | 1,5     |
|    |                                                                                                                                                                                  | Сумма=5 |

16.

16.

**Общая сумма за экзамен –21 балл.**

Оценка проставляется по количеству набранных баллов:

менее 11 баллов - неудовлетворительно,

11-16 баллов - удовлетворительно,

16-19 баллов - хорошо,

Более 19 баллов – отлично.

При выставлении итоговой оценки учитывается работа студента в течение семестра.

При проверке ответов на задания экзамена используются следующие положения:

полный балл выставляется, если студент полно и правильно изложил теоретический материал, привел обоснования, правильно раскрывающие те или иные положения, сделал обоснованный вывод; студент понял смысл текста задачи, полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Балл понижается, если студент (не допуская ошибок) правильно изложил теоретический материал, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений; студент понял смысл текста задачи,

предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений. Выставляется не более половины от заявленной суммы баллов, если студент смог воспроизвести формально основные определения и формулировки; на поставленные вопросы ответил не вполне правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

Ответ не засчитывается, если студент не раскрыл теоретический вопрос, на поставленные вопросы не смог дать удовлетворительный ответ, студент не понял смысла текста задачи, не смог выполнить задания. На заданные вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

### Типовой вариант экзаменационной работы за 3 семестр

#### Блок 1

1. Если числовая последовательность  $\alpha_n$  сходится, а функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$  к ограниченной функции  $f(x)$ , то произведение этих последовательностей сходится равномерно на  $X$ .
2. Сформулировать и доказать теорему о равномерной сходимости и непрерывности для функционального ряда.

3. Найти область  $E$  существования суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  и исследовать ее на дифференцируемость.

4. Вычислить  $\int_0^1 \ln 3 \cdot \arctan \frac{nx}{n^2+1} dx$ , сформулировав необходимые теоремы.

#### Блок 2

5. Сформулировать и доказать теорему о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра.
6. Разложить  $f(x) = (x^2 + 1) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} x\right)$  в степенной ряд в окрестности  $x_0 = -1$ . Найти интервал сходимости полученного ряда.
7. Сформулировать и доказать теорему Фейера. Сформулировать следствия из нее.
8. Написать в общем виде ряд Фурье функции по тригонометрической системе с формулами для коэффициентов. Найти коэффициент  $a_2$  ряда Фурье функции  $f(x) = 2|x|, x \in [-1, 2]$

#### Блок 3

9. Сформулировать теорему о замене переменных для двойного интеграла. Перейти к полярным координатам в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , где область  $D$  определяется

$D$

неравенствами:

$0 \leq y \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 1.$   
 $0 \leq x \leq 2,$



10. Записать формулу Грина и условия ее применимости.
11. Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в области  $G$ . Если для любых двух фиксированных точек  $A$  и  $B \in G$  криволинейный интеграл  $\int Pdx + Qdy$  не зависит от

пути интегрирования, то существует функция  $u(x, y)$ , такая, что  $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ .

12. Пусть  $l(t)$  – длина кривой на плоскости, заданной уравнением  $y = x^2/2$ ,  $0 \leq x \leq t$ .  
Найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t)}{t^2}$

**Показатели оценивания**  
**(Проверка ОПК-1)**

17.

|   | <b>Блок 1</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>баллы</b> |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1 | Знать определение и свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей. Уметь привести обоснованный ответ, опирающийся на указанные определения и теоремы.                                                                                                                                                                                    | 1,5          |
| 2 | Знать свойства теоремы о равномерной сходимости и непрерывности, о равномерной сходимости и интегрировании, о равномерной сходимости и дифференцируемости предельной функции для функциональных последовательностей. Знать признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Знать свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Уметь применить. | 1,5          |
| 3 | Знать свойства теоремы о равномерной сходимости и непрерывности, о равномерной сходимости и интегрировании, о равномерной сходимости и дифференцируемости предельной функции для функциональных последовательностей. Знать признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Знать свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Уметь применить. | 1,5          |
| 4 | Знать свойства теоремы о равномерной сходимости и непрерывности, о равномерной сходимости и интегрировании, о равномерной сходимости и дифференцируемости предельной функции для функциональных последовательностей. Знать признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Знать свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Уметь применить. | 1,5          |
|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Сумма=6      |
|   | <b>Блок 2</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |              |
| 5 | Знать определение интеграла с параметром. Знать формулировки теорем о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости интеграла; уметь доказывать; уметь проверить выполнимость условий теорем в конкретном случае.                                                                                                                                      | 2            |
| 6 | Знать основные формулировки теорем по теории степенных рядов; уметь найти область сходимости ряда, сумму ряда, уметь разложить функцию с степенной ряд.                                                                                                                                                                                                      | 1,5          |
| 7 | Знать основные формулировки теорем по теории рядов Фурье, уметь доказывать базовый набор утверждений.                                                                                                                                                                                                                                                        | 2            |
| 8 | Знать определение ряда Фурье, уметь раскладывать функцию 2l-периодическую, четную, нечетную, на конечном промежутке - в ряд Фурье.                                                                                                                                                                                                                           | 1,5          |
|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Сумма=7      |
|   | <b>Блок 3</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |              |

|    |                                                                                                                                                                                                                                        |         |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 9  | Знать определение, свойства кратных интегралов; знать теорему о сведении кратного интегрирования к повторному; знать и уметь доказывать теорему о замене переменных в кратных интегралах. Уметь на примерах продемонстрировать знания. | 2       |
| 10 | Знать теоремы о связи интеграла по множеству с интегралом по границе этого множества                                                                                                                                                   | 1       |
| 11 | Знать и уметь доказывать теорему о независимости криволинейного интеграла от пути.                                                                                                                                                     | 1,5     |
| 12 | Знать геометрический и физический смысл кратных и криволинейных интегралов; уметь вычислить площади, объемы, длины.                                                                                                                    | 1,5     |
|    |                                                                                                                                                                                                                                        | Сумма=6 |

18.

### **Общая сумма за экзамен –19 балл.**

Оценка проставляется по количеству набранных баллов:

менее 9 баллов - неудовлетворительно,

9-13 баллов - удовлетворительно,

13-17 баллов - хорошо,

Более 17 баллов – отлично.

При выставлении итоговой оценки учитывается работа студента в течение семестра.

При проверке ответов на задания экзамена используются следующие положения:

полный балл выставляется, если студент полно и правильно изложил теоретический материал, привел обоснования, правильно раскрывающие те или иные положения, сделал обоснованный вывод; студент понял смысл текста задачи, полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Балл понижается, если студент (не допуская ошибок) правильно изложил теоретический материал, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений; студент понял смысл текста задачи, предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Выставляется не более половины от заявленной суммы баллов, если студент смог воспроизвести формально основные определения и формулировки; на поставленные вопросы ответил не вполне правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

Ответ не засчитывается, если студент не раскрыл теоретический вопрос, на поставленные вопросы не смог дать удовлетворительный ответ, студент не понял смысла текста задачи, не смог выполнить задания. На заданные вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных

студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

*Продвинутый уровень* - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

*Высокий уровень* - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

## 2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

| Код компетенции                  | Форма контроля                              | Этапы формирования (№ темы (раздела)) | Показатели оценивания                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                  |                                             |                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Пороговый уровень                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Продвинутый уровень                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Высокий уровень                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Общепрофессиональные компетенции |                                             |                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| ОПК-1                            | Опрос по теории 1,2, коллоквиум. Экзамен 1. | 1-5                                   | <p><b>Знать:</b><br/>постановки задач математического анализа для функции одной переменной, связанные с такими понятиями как пределы, непрерывность, производные и дифференциалы, исследование функций с помощью производных;</p> <p><b>Уметь:</b><br/>вычислять пределы элементарных функций; находить производные элементарных функций одной переменных; находить экстремумы функций;</p> <p><b>Владеть:</b><br/>навыками решения практических задач математического анализа.</p> | <p>Воспроизведение основных определений и формулировок теорем курса. Умение корректно использовать математическую символику. Умение решать задачи, требующие применения <b>в элементарных задачах стандартных приемов.</b> Вычисление пределов элементарных функций одной переменной непосредственно, замечательных пределов и их следствий, правила Лопиталя; Умение применять известные алгоритмы и технические навыки: знание таблицы производных и правил дифференцирования, умение находить производные элементарных функций одной переменной.</p> | <p>Воспроизведение основных теорем курса. Умение провести <b>основную часть доказательства</b> утверждений и корректно использовать математическую символику .Понимание сути методов решения задач, <b>которые не являются типичными, но или знакомы студентам или отличаются от известных лишь в небольшой степени</b>, умение определить тип задачи, возможные методы ее решения. Умение вычислять пределы последовательностей, находить пределы функций непосредственно, с помощью основных эквивалентностей, правила Лопиталя и формулы Тейлора; находить точки разрыва функции и определять их тип; Владение техникой дифференцирования функций одной переменной,</p> | <p>Выполнение <b>в полном объеме всех выкладок, обоснование рассуждений в процессе их вывода.</b> Умение выделять главные смысловые аспекты в доказательствах. Понимание сути теоретических положений и выводов, сути методов решения задач, умение самостоятельно провести рассуждения при решении задач, <b>для решения которых требуются размышления и самостоятельная разработка алгоритма действий.</b> Умение применить теоретические знания для вычисления пределов, исследования функции на непрерывность, умение классифицировать точки разрыва. Умение вычислить производные функции, заданной явно и параметрически, умение вычислять производные и дифференциалы высших порядков. Умение применять методы дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков. Умение</p> |

|                                           |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                          |                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                           |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Умение находить экстремумы функций и строить графики элементарных функций.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Умение исследовать функции с помощью производных и построить их графики. | применить теоретические знания для решения практических задач, связанных с приближенными вычислениями и решением оптимизационных задач |
| Опрос по теории 3, коллоквиум. Экзамен 2. | 6–11 | <p><b>Знать:</b><br/>постановки задач математического анализа; функции одной переменной, связанные с интегральным исчислением; постановки задач математического анализа для функции двух и более переменных, связанные с такими понятиями как пределы, непрерывность, дифференцируемость, исследование функций</p> <p><b>Уметь:</b><br/>вычислять пределы элементарных функций нескольких переменных; находить производные элементарных функций нескольких переменных; находить экстремумы функций; вычислять элементарные интегралы; применять интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач; исследовать числовые ряды на сходимость;</p> | <p><b>Воспроизведение основных определений и формулировок теорем курса.</b> Умение корректно использовать математическую символику.</p> <p>Умение решать задачи, требующие применения в элементарных задачах стандартных приемов.</p> <p>Знание таблицы интегралов и основных методов интегрирования, умение вычислить интегралы в элементарных случаях. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических задач. Умение разложить функцию в степенной ряд, пользуясь стандартными разложениями. Владение техникой исследования функции многих переменных.</p> | <p>Воспроизведение основных теорем курса. Умение провести основную часть доказательства утверждений и корректно использовать математическую символику</p> <p>Понимание сути методов решения задач, которые не являются типичными, но или знакомы студентам или отличаются от известных лишь в небольшой степени, умение определить тип задачи, возможные методы ее решения.</p> <p>Знание основных методов интегрирования, умение вычислить интегралы, требующие применения комбинации нескольких приемов. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач. Умение разложить функцию в степенной ряд, знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные ряды для приближенных вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения.</p> |                                                                          |                                                                                                                                        |

|       |                                 |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------|---------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |                                 |       | <p><b>Владеть:</b><br/>навыками решения практических задач математического анализа.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| ОПК-1 | Опрос по теории 4,5. Экзамен 3. | 12-16 | <p><b>Знать:</b><br/>постановки задач математического анализа, связанные с интегральным исчислением функции нескольких переменных; теорию функциональных последовательностей и рядов, рядов Фурье;<br/><b>Уметь:</b><br/>вычислять элементарные кратные и криволинейные интегралы; применять интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач; исследовать ряды на сходимость; разложить функцию в степенной ряд, в ряд Фурье;<br/><b>Владеть:</b><br/>навыками решения практических задач математического анализа.</p> | <p>Воспроизведение основных определений и формулировок теорем курса. Умение решать задачи, требующие применения в элементарных задачах стандартных приемов. Знания носят фрагментарный, разрозненный характер, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом <b>есть представления об основных разделах учебной программы, которые необходимы для дальнейшего обучения.</b> Знание основных теорем и определений, относящихся к кратным, криволинейным и поверхностным интегралам. В частности, знать определение</p> | <p>Твердые знания материала, грамотное и по существу изложение его, воспроизведение основных теорем курса. <b>Умение провести основную часть доказательства утверждений.</b> Понимание сути методов решения задач, которые не являются типичными, но или знакомы студентам или отличаются от известных лишь в небольшой степени, умение определить тип задачи, возможные методы ее решения. Умение применять полученные знания на практике, но при решении задач допускаются некоторые неточности. Знание основных теорем и определений, относящихся к кратным, криволинейным и поверхностным интегралам. В частности, знать определение и геометрический смысл двойного и тройного интегралов.</p> | <p>Воспроизведение основных теорем курса. <b>Выполнение в полном объеме всех выкладок, обоснование рассуждений в процессе их вывода. Умение выделять главные смысловые аспекты в доказательствах.</b> Понимание сути теоретических положений и выводов, сути методов решения задач, умение самостоятельно провести рассуждения при решении задач, для решения которых требуются размышления и самостоятельная разработка алгоритма действий. Знание основных теорем и определений, относящихся к кратным, криволинейным и поверхностным интегралам. В частности, знать определение и геометрический смысл двойного и тройного интегралов. Знание основных теорем и определений, относящихся к кратным, криволинейным и поверхностным интегралам. В частности, знать определение и геометрический смысл двойного и тройного интегралов. Знание основных теорем и определений, относящихся к криволинейным и поверхностным</p> |

|  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  | <p>геометрический смысл двойного и тройного интегралов. Знание основных теорем и определений, относящихся к криволинейным и поверхностным интегралам. Иметь навыки самостоятельного применения интегралов для решения задач физики и геометрии. Знать элементы теории поля (градиент, поток, дивергенция, циркуляция и ротор.) Умение разложить функцию в степенной ряд Знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные ряды для приближенных вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения. Знание рядов Фурье.</p> | <p>Знание основных теорем и определений, относящихся к криволинейным и поверхностным интегралам. Иметь навыки самостоятельного применения интегралов для решения задач физики и геометрии. Знать элементы теории поля (градиент, поток, дивергенция, циркуляция и ротор.) Умение разложить функцию в степенной ряд Знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные ряды для приближенных вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения. Знание рядов Фурье.</p> | <p>интегралам. Иметь навыки самостоятельного применения интегралов для решения задач физики и геометрии. Знать элементы теории поля (градиент, поток, дивергенция, циркуляция и ротор.) Умение разложить функцию в степенной ряд Знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные ряды для приближенных вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения. Знание рядов Фурье.</p> |
|--|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки, подробно описаны в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций». Высокий уровень формирования компетенции соответствует оценке «отлично» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу. Продвинутый уровень формирования компетенций соответствует оценке «хорошо» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу. Пороговый уровень формирования компетенций соответствует оценке «удовлетворительно» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Математический анализ»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Математический анализ» являются лекции. В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращая внимание на формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, на последовательность выводов, использование при доказательстве тех или иных фактов. Можно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать различного рода пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал лекции, а также вопросы с целью уяснения теоретических выводов. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам. Практические занятия проводятся для выработки навыков решения практических задач и лучшего усвоения учебного материала. В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не понятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их. Преподаватель может выборочно проверить записи с самостоятельно решенными задачами. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. В ходе подготовки к практическому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При подготовке к лекциям, занятиям, коллоквиуму, экзамену необходимо делать записи. Записи помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику. Вообще, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиумов. В конце каждого семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет по практической части курса и экзамен.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Математический анализ» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала, высокой степенью абстракции, большим объемом курса. На первом курсе все осложняется неумением первокурсника самостоятельно получать информацию из книг и конспектов. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

#### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать **учебную литературу с подробно разобранными решениями задач:**

Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пос. - 2-е изд., перер. и доп. / Кудрявцев Л.Д. и др. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-496с.

Сборник задач по математическому анализу. Том2. Интегралы. Ряды: учеб. пос. - 2-е изд., перер. и доп. / Кудрявцев Л.Д. и др. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-504с.

Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: учеб. пос. - 2-е изд., перер. и доп. / Кудрявцев Л.Д. и др. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-472с.

Математический анализ [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / М. В. Ануфриенко, В. А. Бондаренко, А. В. Зафиевский, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2010, 137с

Бондаренко, В. А., Методические указания по подготовке к экзамену по математическому анализу / В. А. Бондаренко, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2001, 15с.

Ануфриенко М.В., Методические указания по подготовке к экзамену по математическому анализу / В. А. Бондаренко,; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2001, 16с. Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

2. [Электронная библиотека издательства «Лань»](#) – это ресурс, содержащий электронные версии книг ведущих издательств учебной, научной литературы и периодических изданий по различным областям знаний. ЭБС издательства «Лань» предоставляет доступ к коллекциям: Математика – издательство «Лань»; Информатика – издательство «Лань».

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

3. Личный кабинет ([http://lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

4. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/пароллю.