



С.Б. Московский
А.Н. Сергеев

ОПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова
Кафедра микроэлектроники и общей физики

С.Б. Московский
А.Н. Сергеев

ОПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета для
студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки
физического факультета*

Ярославль
ЯрГУ
2019

УДК

ББК

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2019 года.*

Рецензент

доцент кафедры микроэлектроники и общей физики

ЯрГУ им. П.Г. Демидова В.А. Папорков

Московский, Сергей Борисович.

Оптические задачи на граничные условия:
учебно-методическое пособие / С.Б. Московский, А.Н. Сергеев; Яросл.
гос. ун-т им. П.Г. Демидова.– Ярославль: ЯрГУ, 2019. 31 с.

В пособии рассмотрены классические задачи на граничные условия в волновой оптике: доказательство закона отражения и преломления света, вывод формул Френеля для пропускания и отражения света на границе раздела полубесконечных сред, многолучевая интерференция в плоскопараллельном слое.

Основные результаты пригодны как для идеальных диэлектрических сред, так и для сред с поглощением. Случай идеальных диэлектриков анализируется отдельно. Приведены графики расчетных зависимостей для реальных значений оптических параметров.

Предназначено для студентов очной формы обучения всех направлений подготовки на физическом факультете (уровень бакалавриата, дисциплина в учебном плане "Оптика").

УДК

ББК

Содержание

1. Граничные условия в оптике	4
2. Закон отражения и преломления света	4
3. Формулы Френеля	8
4. Многолучевая интерференция света в плоскопараллельном слое	20
Список литературы	31

1. Граничные условия в оптике

Граничные условия в электродинамике могут быть получены непосредственно из уравнений Максвелла. Для решения оптических задач обычно используются условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2},$$

где $E_{\tau 1}$, $E_{\tau 2}$, $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$ — значения тангенциальных (касательных к границе раздела двух сред) составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе раздела со стороны первой ($E_{\tau 1}$, $H_{\tau 1}$) и второй ($E_{\tau 2}$, $H_{\tau 2}$) граничащих сред.

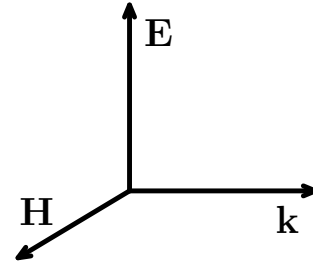


Рис. 1

Принимая во внимание соотношение $\mathbf{H} \sim [\mathbf{k} \mathbf{E}]$ (\mathbf{k} — волновой вектор), граничное условие для напряженности магнитного поля всегда можно представить через вектор \mathbf{E} и показатель преломления среды n с учетом направления волнового вектора. Модуль вектора \mathbf{H} в среде с показателем преломления n пропорционален nE , а его направление определяется направлением векторного произведения $[\mathbf{k} \mathbf{E}]$ (см. рис. 1).

2. Закон отражения и преломления света

Под *законом отражения и преломления света* понимается совокупность следующих утверждений:

1. частоты отраженного и преломленного света равны частоте падающего света;
2. падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости, перпендикулярной границе раздела сред;
3. угол падения равен углу отражения;
4. при переходе света через границу раздела из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 угол падения φ и угол преломления φ' находятся в следующем соотношении:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

(закон Снеллиуса).

Данный закон может быть получен из принципа Гюйгенса–Френеля или из вариационного принципа Ферма (принципа минимальности оптического пути между двумя заданными точками или, что то же самое, минимальности времени распространения света между двумя заданными точками). Здесь мы покажем, что закон отражения и преломления света можно независимым образом получить из граничных условий.

Рассмотрим падение света на границу раздела сред с показателями преломления n_1 и n_2 . Угол между падающим лучом и нормалью к границе раздела в точке падения (угол падения) обозначим φ , угол между нормалью и преломленным лучом (угол преломления) обозначим φ' , угол между нормалью и отраженным лучом обозначим φ'' (см. рис. 2).

Ось z декартовой системы координат направим вдоль пересекающей падающий луч нормали к границе раздела в направлении среды с показателем преломления n_1 , ось x — вдоль границы раздела в плоскости, содержащей падающий луч и ось z (плоскость падения), как показано на рис. 2. Волновой вектор падающего света \mathbf{k} имеет, таким образом, две составляющие: k_x и k_z ($k_y = 0$).

Вначале будем предполагать, что волновые вектора преломленного и отраженного света имеют все три составляющие: для преломленного света $\mathbf{k}' = \{k'_x, k'_y, k'_z\}$, для отраженного света $\mathbf{k}'' = \{k''_x, k''_y, k''_z\}$.

Вектор напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела представим в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (2)$$

где ω — частота падающей волны, t — время, \mathbf{r} — радиус-вектор. Начальную фазу полагаем равной нулю, что всегда можно сделать соответствующим выбором начала отсчета координат и времени.

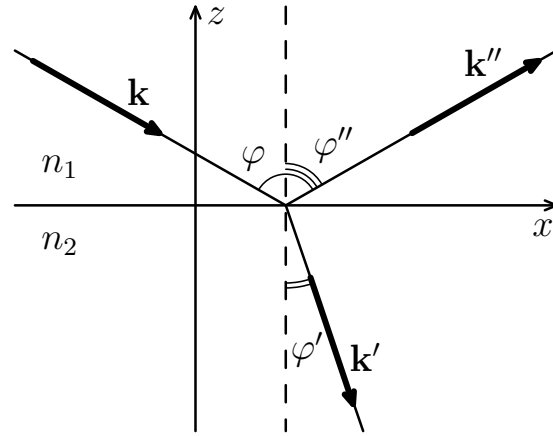


Рис. 2

Аналогично для векторов напряженности преломленной и отраженной волн на границе раздела соответственно имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{k}'\mathbf{r} + \delta')}, \\ \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}''\mathbf{r} + \delta'')}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ω' и ω'' — частоты преломленной и отраженной волн, δ' и δ'' — сдвиги фаз преломленной и отраженной волн по отношению к фазе падающей волны в точке деления лучей.

Тангенциальные составляющие амплитуд падающей, преломленной и отраженной волн на границе раздела обозначим соответственно $E_{0\tau}$, $E'_{0\tau}$ и $E''_{0\tau}$. Скалярные произведения волновых векторов на радиус-векторы на границе раздела ($z = 0$) равны

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x, \quad \mathbf{k}'\mathbf{r} = k'_x x + k'_y y, \quad \mathbf{k}''\mathbf{r} = k''_x x + k''_y y.$$

С учетом этого граничное условие непрерывности тангенциальной составляющей вектора электрической напряженности на границе раздела примет вид

$$E_{0\tau} e^{i(\omega t - k_x x)} + E_{0\tau}'' e^{i(\omega'' t - k_x'' x + k_y'' y + \delta'')} = E_{0\tau}' e^{i(\omega' t - k_x' x + k_y' y + \delta')} \quad (4)$$

Для того, чтобы данное равенство было выполнено во все моменты времени t , необходимо, чтобы $\omega = \omega' = \omega''$. Тем самым доказано первое утверждение закона об отражении и преломлении света.

Аналогично — для выполнения (4) при всех x и y необходимо, чтобы $k_x = k_x' = k_x''$ и $k_y' = k_y'' = 0$. Последнее равенство означает, что векторы \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' находятся в плоскости (x, z) — плоскости падения, что доказывает второе утверждение закона об отражении и преломлении света.

Для фазовой скорости v в среде с показателем преломления n , скорости света в вакууме c , частоты и модуля волнового вектора существуют следующие соотношения:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k},$$

откуда

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n. \quad (5)$$

Учитывая равенство частот падающей, преломленной и отраженной волн, получаем

$$k = k'', \quad \frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_2}.$$

Как видно из рис. 2, $k_x = k \sin \varphi$, $k_x' = k' \sin \varphi'$ и $k_x'' = k'' \sin \varphi''$. Отсюда с учетом того, что $k = k''$ и $k_x = k_x''$, имеем $\sin \varphi = \sin \varphi'' \Rightarrow \varphi = \varphi''$ — угол падения равен углу отражения.

Представляя равенство $k_x = k_x'$ в виде $k \sin \varphi = k' \sin \varphi'$ и учитывая, что $k/n_1 = k'/n_2$, получим $k \sin \varphi = (k n_2/n_1) \sin \varphi'$, что приводит к закону Снеллиуса: $\sin \varphi = (n_2/n_1) \sin \varphi'$.

Таким образом, мы доказали все четыре утверждения закона отражения и преломления света, используя только граничное условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля. Отметим, что такого же результата можно было достигнуть, рассматривая условие непрерывности тангенциальной составляющей магнитной напряженности.

Из закона Снеллиуса можно сделать важный вывод. При падении света из оптически менее плотной среды на границу с оптически более плотной средой (из среды с меньшим показателем преломления в среду с большим показателем преломления) $\sin \varphi' < \sin \varphi$ и $\varphi' < \varphi$. Это не накладывает никаких ограничений на возможные значения φ' , то есть

преломление света будет происходить при всех углах падения от 0 до 90° . В противном случае ($n_1 > n_2$) при увеличении угла падения соотношение (1) справедливо до тех пор, пока $\sin \varphi$ не достигнет значения $\sin \varphi = n_2/n_1$. При этом значении угла падения $\sin \varphi' = 1$, а $\varphi' = 90^\circ$. Дальнейшее увеличение угла падения делает невозможным выполнение соотношения (1), то есть свет не проникает в оптически менее плотную среду, а полностью отражается. Это явление называется явлением полного внутреннего отражения, а угол падения $\varphi_0 = \arcsin(n_2/n_1)$ называется предельным углом полного внутреннего отражения. При полном внутреннем отражении граница раздела является идеальным зеркалом. На явлении полного внутреннего отражения основан базовый физический принцип действия оптоволоконной техники.

Поскольку, как было доказано, для электромагнитных волн (2)–(3)

$$\omega = \omega' = \omega'',$$

кроме того, на границе раздела

$$\mathbf{k}\mathbf{r}|_{k_y=0, z=0} = k_x x,$$

$$\mathbf{k}'\mathbf{r}|_{k'_y=0, z=0, k'_x=k_x} = k_x x,$$

$$\mathbf{k}''\mathbf{r}|_{k''_y=0, z=0, k''_x=k_x} = k_x x,$$

множители, зависящие от координат и времени в (2)–(3), на границе раздела оказываются равными. Это позволяет упростить граничное условие (4) к виду

$$E_{0\tau} + E''_{0\tau} e^{i\delta''} = E'_{0\tau} e^{i\delta'}.$$

Аналогично для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на границе раздела

$$H_{0\tau} + H''_{0\tau} e^{i\delta''} = H'_{0\tau} e^{i\delta'},$$

причем сдвиги фаз δ' и δ'' такие же, как для электрической напряженности, поскольку фазы векторных функций \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне равны.

Переопределим значения амплитуд на границе раздела следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{пад}}|_{z=0} &= \mathbf{E}_0, & \mathbf{E}_{\text{пр}}|_{z=0} &= \mathbf{E}'_0 e^{i\delta'}, & \mathbf{E}_{\text{отр}}|_{z=0} &= \mathbf{E}''_0 e^{i\delta''}, \\ \mathbf{H}_{\text{пад}}|_{z=0} &= \mathbf{H}_0, & \mathbf{H}_{\text{пр}}|_{z=0} &= \mathbf{H}'_0 e^{i\delta'}, & \mathbf{H}_{\text{отр}}|_{z=0} &= \mathbf{H}''_0 e^{i\delta''}. \end{aligned} \quad (6)$$

В значениях новых, в общем случае комплексных амплитуд преломленной и отраженной волн уже учтены разности их фаз и фазы падающей волны в точке деления лучей на границе раздела. При этом их модули не изменяются, поскольку модуль комплексного числа типа $e^{i\delta}$ равен единице.

Теперь граничные условия можно задать в наиболее простом виде для тангенциальных составляющих соответствующих комплексных амплитуд

$$(E_{\text{пад}})_\tau + (E_{\text{отр}})_\tau = (E_{\text{пр}})_\tau, \quad (7)$$

$$(H_{\text{пад}})_\tau + (H_{\text{отр}})_\tau = (H_{\text{пр}})_\tau. \quad (8)$$

В дальнейшем мы будем использовать граничные условия в виде (7)–(8) для тангенциальных составляющих комплексных амплитуд векторов **E** и **H** на границе раздела.

Как будет видно ниже, для идеальных диэлектрических сред (за исключением случая полного внутреннего отражения) сдвиг фазы δ' преломленной волны по отношению к падающей волне на границе раздела всегда равен нулю. Для отраженной волны δ'' может принимать значения 0 или π . Это означает, что на границе раздела комплексные амплитуды преломленной и отраженной волн при вещественной амплитуде падающей волны также будут вещественными, так как $e^0 = 1$, а $e^{i\pi} = -1$.

В общем случае, когда в одной из сред или в обеих средах имеется поглощение, показатель преломления поглощающей среды и связанный с ним волновой вектор становятся комплексными. При этом амплитуды преломленной и отраженной волн при вещественной амплитуде падающей волны на границе раздела уже будут комплексными, а фазы δ' и δ'' могут принимать любые значения.

3. Формулы Френеля

С помощью граничных условий можно найти коэффициенты отражения и пропускания света на границе раздела сред. Амплитудными коэффициентами пропускания τ и отражения ρ называются отношения амплитуд соответственно прошедшего (преломленного) и отраженного света к падающему:

$$\tau = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}}, \quad \rho = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}}.$$

В общем случае, при наличии поглощения хотя бы в одной из сред, амплитудные коэффициенты τ и ρ являются комплексными.

Поставим задачу найти выражения для амплитудных коэффициентов пропускания и отражения через показатели преломления сред и угол падения.

Вначале рассмотрим наиболее простую геометрию нормального падения (угол падения $\varphi = 0$) линейно поляризованного света. Направления векторов **E** и **H** в этой геометрии представлены на рис. 3.

Направления векторов электрической напряженности в прошедшей и отраженной волнах полагаем совпадающими с направлением $\mathbf{E}_{\text{пад}}$. В случае, если какой-либо из этих векторов окажется направленным в противоположную сторону, соответствующий амплитудный коэффициент получится отрицательным. Граничное условие (7) в геометрии, представленной на рис. 3, принимает вид

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}} \quad \text{или} \quad 1 + \rho = \tau. \quad (9)$$

Направления векторов \mathbf{H} определяются направлениями соответствующих векторных произведений $[\mathbf{k} \mathbf{E}]$. Как видно из рисунка, напряженность магнитного поля в падающей и прошедшей волнах направлена перпендикулярно плоскости рисунка в сторону читателя, а для отраженной волны — в противоположную сторону. Учитывая также то, что модуль вектора \mathbf{H} пропорционален произведению nE , граничное условие (8) приведем к виду

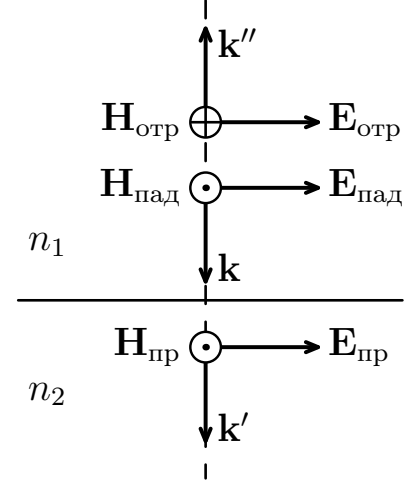


Рис. 3

$$n_1 E_{\text{пад}} - n_1 E_{\text{отр}} = n_2 E_{\text{пр}} \quad \text{или} \quad 1 - \rho = \frac{n_2}{n_1} \tau, \quad (10)$$

Введем относительный показатель преломления

$$n = \frac{n_2}{n_1}.$$

Система граничных условий (9)–(10)

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= \tau, \\ 1 - \rho &= n\tau \end{aligned}$$

представляет собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: τ и ρ . Решив эту систему, получим

$$\tau = \frac{2}{1 + n}, \quad \rho = \frac{1 - n}{1 + n}. \quad (11)$$

При отсутствии поглощения (вещественном значении n) оба амплитудных коэффициента являются вещественными. Коэффициент пропускания τ всегда положителен. Это означает, что падающая и прошедшая волны на границе раздела имеют одинаковую фазу (сдвиг фазы δ' в (4), (6) равен нулю). При $n > 1$ ($n_2 > n_1$) коэффициент отражения $\rho < 0$, то есть при отражении от оптически более плотной среды фаза отраженной волны сдвигается относительно фазы падающей волны на $\delta'' = \pi$.

Это явление называют потерей половины волны. При отражении от оптически менее плотной среды $n < 1$ и $\rho > 0$, то есть $\delta'' = 0$ — потери половины волны не происходит.

В эксперименте измеряются энергетические коэффициенты пропускания D и отражения R (отношения потоков энергии прошедшей и отраженной волн к потоку энергии падающей волны). Поскольку вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) равен $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$, поток энергии падающей волны $W_{\text{пад}} \sim n_1 E_{\text{пад}}^2$, для прошедшей и отраженной волн при нормальном падении света соответственно имеем

$$W_{\text{пр}} \sim n_2 |E_{\text{пр}}|^2 = n_2 \tau \tau^* E_{\text{пад}}^2 \quad \text{и} \quad W_{\text{отр}} \sim n_1 E_{\text{отр}}^2 = n_1 \rho \rho^* E_{\text{пад}}^2,$$

откуда

$$D = \frac{W_{\text{пр}}}{W_{\text{пад}}} = \frac{n_2}{n_1} \tau \tau^*, \quad R = \frac{W_{\text{отр}}}{W_{\text{пад}}} = \rho \rho^*. \quad (12)$$

Для вещественных τ и ρ комплексно сопряженные коэффициенты $\tau^* = \tau$, $\rho^* = \rho$. С учетом (11) энергетические коэффициенты D и R при нормальном падении равны

$$D = \frac{4n}{(1+n)^2}, \quad R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2.$$

Их сумма равна единице, как и должно быть в соответствии с законом сохранения энергии.

В наших рассуждениях мы предполагали, что векторы напряженности электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн лежат в одной плоскости. На самом деле граничное условие (7) допускает наличие поперечных по отношению к плоскости поляризации падающей волны составляющих векторов $\mathbf{E}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{E}_{\text{отр}}$, если эти составляющие равны. Но тогда не будет выполнено граничное условие (8), так как поперечные по отношению

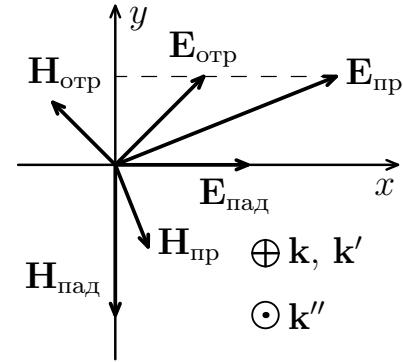


Рис. 4

к $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ составляющие $\mathbf{H}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{H}_{\text{отр}}$ будут иметь противоположные знаки. Данное обстоятельство иллюстрируется на рис. 4. Плоскость (x, y) — граница раздела (по сравнению с рис. 3 — вид сверху). Вектор $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ направлен по оси x , вектор $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ — в отрицательном направлении оси y . Если предположить, что $\mathbf{E}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{E}_{\text{отр}}$ имеют составляющие вдоль оси y , то для выполнения (7) достаточно, чтобы $E_{\text{пад}} + (E_{\text{отр}})_x = (E_{\text{пр}})_x$ и $(E_{\text{отр}})_y + (E_{\text{пр}})_y$, но тогда $(H_{\text{пр}})_x$ и $(H_{\text{отр}})_x$ имеют противоположные знаки, что делает невозможным выполнение условия (8). Таким образом, предположение о том, что все векторы \mathbf{E} на рис. 3 находятся в одной плоскости, подтверждается.

Рассмотрим теперь геометрию наклонного падения света, показанную на рис. 5. Векторы $\mathbf{E}_{\text{пад}}$, $\mathbf{E}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{E}_{\text{отр}}$ перпендикулярны плоскости падения, векторы $\mathbf{H}_{\text{пад}}$, $\mathbf{H}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{H}_{\text{отр}}$ лежат в плоскости падения. Линии векторов напряженности электрического поля прошедшей и отраженной волн в данной геометрии должны быть параллельны вектору $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ (соответственно, все векторы магнитной напряженности находятся в одной плоскости), в противном случае не будет выполнено граничное условие для магнитного поля. Действительно, иллюстрация на рис. 4 применима и к рассматриваемой геометрии, если под векторами \mathbf{H} на этом рисунке понимать их проекции на границу раздела. Геометрия наклонного падения, представленная на рис. 5, называется s -геометрией (s -поляризацией, s -компонентой).

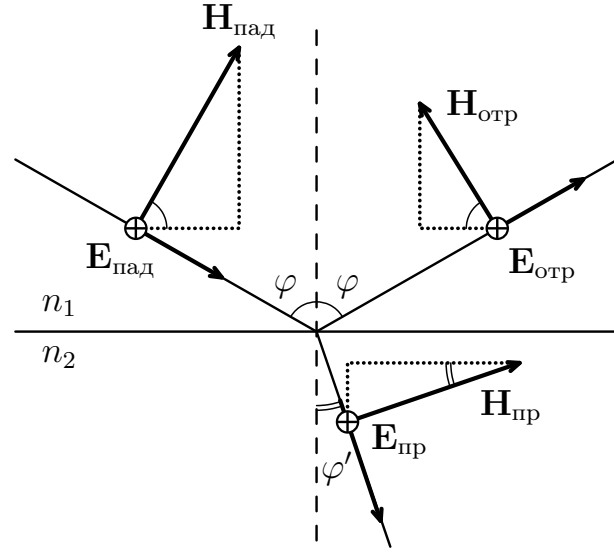


Рис. 5

Граничное условие для тангенциальных составляющих электрической напряженности имеет вид (9) — такой же, как при нормальном падении.

Тангенциальные составляющие амплитуд магнитной напряженности соответственно равны

$$(H_{\text{пад}})_{\tau} = H_{\text{пад}} \cos \varphi, \quad (H_{\text{отр}})_{\tau} = -H_{\text{отр}} \cos \varphi, \quad (H_{\text{пр}})_{\tau} = H_{\text{пр}} \cos \varphi'.$$

Выразим $\cos \varphi'$ через угол падения. В соответствии с законом Снеллиуса

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \varphi}{n},$$

где n , как и ранее, относительный показатель преломления: $n = n_2/n_1$. Тогда

$$\cos \varphi' = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi'} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{n}.$$

Далее мы будем использовать обозначение

$$Q \equiv \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}. \quad (13)$$

Тогда окончательно

$$\cos \varphi' = \frac{Q}{n} = \frac{n_1}{n_2} Q. \quad (14)$$

Граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля, выраженное через амплитуды электрической напряженности, с учетом (13)–(14) примет вид

$$n_1 \cos \varphi (E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}) = n_2 \cos \varphi' E_{\text{пр}} = n_1 Q E_{\text{пр}}.$$

Выражая граничные условия через амплитудные коэффициенты пропускания и отражения, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= \tau, \\ 1 - \rho &= \frac{Q}{\cos \varphi} \tau, \end{aligned} \quad (15)$$

которая отличается от аналогичной системы в случае нормального падения света заменой $n \rightarrow Q/\cos \varphi$. Решение данной системы имеет вид

$$\tau = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + Q}, \quad \rho = \frac{\cos \varphi - Q}{\cos \varphi + Q}. \quad (16)$$

Амплитудный коэффициент пропускания положителен при любых значениях n и φ , то есть прошедшая и падающая волны на границе раздела имеют одинаковые фазы. При отражении от оптически более плотной среды ($n > 1$, $\cos \varphi < \cos \varphi' < n \cos \varphi' = Q$) коэффициент ρ имеет отрицательное значение при всех углах падения, то есть отраженная и падающая волны находятся в противофазе. В случае отражения от оптически менее плотной среды ($n < 1$, $\cos \varphi > \cos \varphi' > n \cos \varphi' = Q$) амплитудный коэффициент отражения положителен — потери половины волны не происходит.

Следует отметить, что при $n < 1$ система (15) имеет вещественные решения (16) только для углов падения, не превышающих предельного угла полного внутреннего отражения $\varphi_0 = \arcsin n$. При $\varphi > \varphi_0$ подкоренное выражение в (13) становится отрицательным, то есть величина Q будет чисто мнимой: $Q = ib$, где $b = \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}$. Для этого диапазона углов падения система граничных условий (15) остается в силе, но ее решения становятся комплексными:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + ib} = \frac{2 \cos \varphi (\cos \varphi - ib)}{1 - n^2}, \\ \rho &= \frac{\cos \varphi - ib}{\cos \varphi + ib} = \frac{\cos^2 \varphi - b^2 - 2ib \cos \varphi}{1 - n^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение для энергетического коэффициента пропускания отличается от (12). Дело в том, что при нормальном падении света поперечные сечения падающего, прошедшего и отраженного пучков одинаковы, поэтому отношения потоков энергии в пучках равны отношениям модулей

векторов Пойнтинга (плотностей потоков). Для наклонного падения сечение отраженного пучка равно сечению падающего пучка, а сечение прошедшего пучка отличается от них. Поясним данное обстоятельство с помощью рис. 6, не рассматривая пока случай полного внутреннего отражения.

При угле падения φ , как видно из рисунка, сечения падающего и отраженного пучков $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$, а сечение прошедшего пучка $\sigma' = \sigma_0 \cos \varphi'$ (σ_0 — площадь границы раздела в пределах пучков). Отсюда получаем соотношение

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} = \frac{Q}{n \cos \varphi}.$$

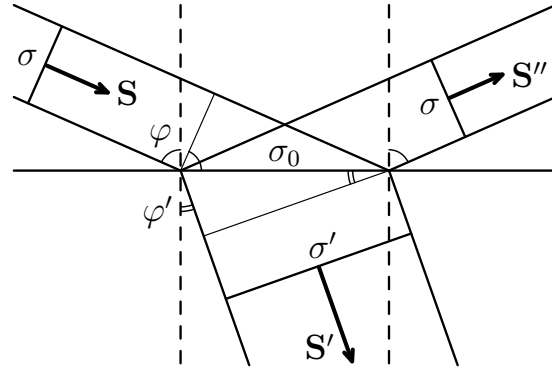


Рис. 6

Поток энергии в пучке равен произведению модуля вектора Пойнтинга на площадь поперечного сечения, поэтому

$$D = \frac{W_{\text{пр}}}{W_{\text{пад}}} = n \frac{\sigma'}{\sigma} \tau \tau^* = \frac{Q}{\cos \varphi} \tau \tau^*, \quad (18)$$

$$R = \frac{W_{\text{отр}}}{W_{\text{пад}}} = \rho \rho^*.$$

Подстановка амплитудных коэффициентов (16) для вещественных значений Q дает

$$D = \frac{4Q \cos \varphi}{(\cos \varphi + Q)^2}, \quad R = \left(\frac{\cos \varphi - Q}{\cos \varphi + Q} \right)^2. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что $D + R = 1$.

При предельном угле полного внутреннего отражения $Q = 0$, $\sigma' = 0$, выражения (18), (19), которые все еще остаются справедливыми, дают $D = 0$, $R = 1$.

Для $\varphi > \varphi_0$ теряет смысл сечение прошедшего пучка σ' и первая из формул (18), при этом выражение $R = \rho \rho^*$ остается в силе, так как сечения падающего и отраженного пучков по-прежнему равны. Подстановка амплитудного коэффициента отражения в виде (17) дает $R = 1$, тогда из закона сохранения энергии получим $D = 0$ — вся энергия падающей волны при $\varphi > \varphi_0$ отражается.

Геометрия наклонного падения, при которой вектор \mathbf{E} падающей волны лежит в плоскости падения, называется p -геометрией (p -компонентой, p -поляризацией). В данном случае (см. рис. 7) по сравнению с s -компонентой векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} меняются ролями. При этом линии векторов

магнитной напряженности прошедшей и отраженной волн параллельны вектору $\mathbf{H}_{\text{пад}}$, а векторы $\mathbf{E}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{E}_{\text{отр}}$ находятся в плоскости падения (в одной плоскости с $\mathbf{E}_{\text{пад}}$). Убедиться в этом можно рассуждая аналогично ранее рассмотренным случаям — если предположить, что векторы напряженности магнитного поля прошедшей и отраженной волн имеют поперечные по отношению к линии вектора $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ тангенциальные составляющие, которые взаимно компенсируются, то отсюда немедленно следует, что для векторов $\mathbf{E}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{E}_{\text{отр}}$ также появляются поперечные к плоскости падения составляющие противоположных знаков.

Граничные условия для p -компоненты, как видно из рис. 7, имеют вид

$$\cos \varphi (E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}) = \cos \varphi' E_{\text{пр}}, \quad n_1 (E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}) = n_2 E_{\text{пр}}.$$

Переходя от амплитуд к амплитудным коэффициентам τ и ρ и учитывая (14), получим линейную систему

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= \frac{Q}{n \cos \varphi} \tau, \\ 1 - \rho &= n \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Решением этой системы являются амплитудные коэффициенты пропускания и отражения в p -геометрии

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2n \cos \varphi}{Q + n^2 \cos \varphi}, \\ \rho &= \frac{Q - n^2 \cos \varphi}{Q + n^2 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (21)$$

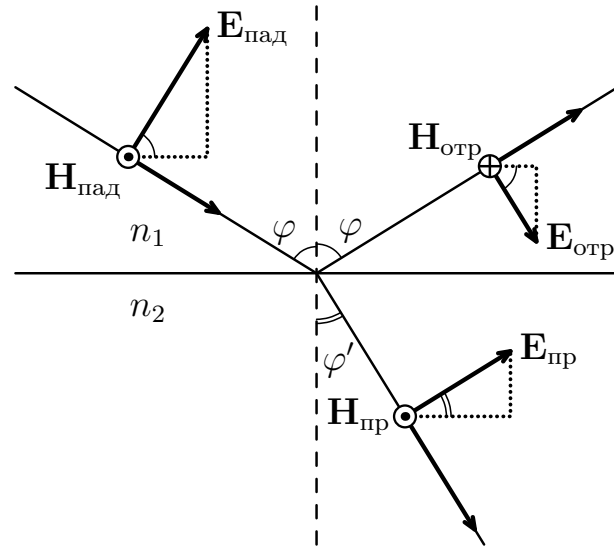


Рис. 7

Коэффициент пропускания τ вновь оказывается положительным при всех n и φ (за исключением $\varphi > \varphi_0 = \arcsin n$ при $n < 1$, когда τ становится комплексным), то есть сдвиг фазы между прошедшей и падающей волнами на границе раздела отсутствует.

Знак коэффициента отражения ρ определяется знаком разности $Q - n^2 \cos \varphi$. Функции $Q = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ и $\cos \varphi$ при $0 < \varphi < 90^\circ$ и $\sin \varphi < n$ являются монотонно убывающими функциями угла падения, поэтому их разность при возрастании φ может менять знак не более одного раза.

При $\varphi \rightarrow 0$ $Q \rightarrow n$, $\cos \varphi \rightarrow 1$, $Q - n^2 \cos \varphi \rightarrow n(1 - n)$. В случае отражения от оптически более плотной среды $n > 1$ и при малых углах падения $\rho < 0$. Для отражения от оптически менее плотной среды $n < 1$ и при малых φ $\rho > 0$.

При $n > 1$ формулы (21) справедливы для всех значений угла падения от 0 до 90° . В пределе $\varphi \rightarrow 90^\circ$ $Q \rightarrow \sqrt{n^2 - 1}$ $\cos \varphi \rightarrow 0$, то есть при больших углах падения $\rho > 0$.

Для $n < 1$ и $\varphi \leq \varphi_0$ в пределе $\varphi \rightarrow \varphi_0$ $Q \rightarrow 0$ и $\rho = -1 < 0$. Таким образом, амплитудный коэффициент отражения в (21) с возрастанием φ меняет знак — при отражении от оптически более плотной среды с отрицательного на положительный, при отражении от оптически менее плотной среды с положительного на отрицательный.

Найдем условие, при котором коэффициент отражения равен нулю. Возведя в квадрат равенство $Q = n^2 \cos \varphi$, получим

$$n^2 - \sin^2 \varphi = n^4 \cos^2 \varphi.$$

Заменяя $\sin^2 \varphi$ на $1 - \cos^2 \varphi$ и решая уравнение относительно $\cos^2 \varphi$, находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \sin \varphi = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \text{или} \quad \text{tg } \varphi = n. \quad (22)$$

Угол падения, при котором отражение света в p -компоненте отсутствует, называется углом Брюстера: $\varphi_{\text{Бр}} = \text{arctg } n$. При $\varphi = \varphi_{\text{Бр}}$ в соответствии с законом Снеллиуса и (22) $\sin \varphi' = \sin \varphi_{\text{Бр}} / n = \cos \varphi_{\text{Бр}}$, то есть угол падения и угол преломления в сумме дают 90° — отраженный и преломленный лучи находятся под прямым углом.

Обобщая вышесказанное отметим, что в случае отражения от оптически более плотной среды при $\varphi < \varphi_{\text{Бр}}$ $\rho < 0$ (потеря половины волны), при $\varphi > \varphi_{\text{Бр}}$ $\rho > 0$ (фазы падающего и отраженного света на границе раздела равны). Для отражения от оптически менее плотной среды все наоборот: при $\varphi < \varphi_{\text{Бр}}$ $\rho > 0$, при $\varphi > \varphi_{\text{Бр}}$ $\rho < 0$.

Отдельно рассмотрим случай полного внутреннего отражения ($n < 1$, $\varphi > \varphi_0$). В этой области углов падения, как и ранее для s -компоненты, $Q = ib = i\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}$. Соответствующая замена в решениях (21) системы уравнений (20) дает

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2n \cos \varphi}{n^2 \cos \varphi + ib} = \frac{2n \cos \varphi (n^2 \cos \varphi - ib)}{n^4 \cos^2 \varphi + b^2}, \\ \rho &= -\frac{n^2 \cos \varphi - ib}{n^2 \cos \varphi + ib} = \frac{b^2 - n^4 \cos^2 \varphi + 2ibn^2 \cos \varphi}{n^4 \cos^2 \varphi + b^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для энергетических коэффициентов пропускания и отражения при вещественном Q остаются справедливыми выражения (18), поскольку отношения сечений прошедшего и падающего пучков определяются только углом падения и относительным показателем преломления, который для изотропных сред не зависит от поляризации. Подставляя вещественные

амплитудные коэффициенты (21) в (18) получим для p -геометрии

$$D = \frac{4Qn^2 \cos \varphi}{(Q + n^2 \cos \varphi)^2}, \quad R = \left(\frac{Q - n^2 \cos \varphi}{Q + n^2 \cos \varphi} \right)^2. \quad (24)$$

Как и должно быть, $D + R = 1$. Данные выражения справедливы при $n > 1$ для всех углов падения, при $n < 1$ для $\varphi < \varphi_0 = \arcsin n$.

В случае полного внутреннего отражения формула (18) для D теряет смысл, а формула $R = \rho\rho^*$ остается в силе. Используя выражение (23) для ρ получим $R = 1$, следовательно, $D = 0$.

Формулы (16), (21) для амплитудных коэффициентов пропускания и отражения в s - и p -поляризациях называются *формулами Френеля*. При наличии поглощения хотя бы в одной из сред n и Q в (16), (21) становятся комплексными. Сдвиги фаз прошедшей волны δ' и отраженной волны δ'' в (6) в этом случае могут принимать любые значения в интервале $(-\pi, \pi)$.

Формулы Френеля в учебной литературе приводятся в различных видах, представленных в таблице 1.

Таблица 1

s -компонента	p -компонента
$\tau = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + Q},$ $\rho = \frac{\cos \varphi - Q}{\cos \varphi + Q}$	$\tau = \frac{2n \cos \varphi}{Q + n^2 \cos \varphi},$ $\rho = \frac{Q - n^2 \cos \varphi}{Q + n^2 \cos \varphi}$
$\tau = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + n \cos \varphi'},$ $\rho = \frac{\cos \varphi - n \cos \varphi'}{\cos \varphi + n \cos \varphi'}$	$\tau = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi' + n \cos \varphi},$ $\rho = \frac{\cos \varphi' - n \cos \varphi}{\cos \varphi' + n \cos \varphi}$
$\tau = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi'}{\sin(\varphi + \varphi')},$ $\rho = -\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}$	$\tau = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi'}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')},$ $\rho = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')}$

Первая строка таблицы соответствует формулам Френеля в виде (16), (21). Вторая строка отличается от первой заменой Q на $n \cos \varphi' = Q$ в соответствии с (14). Третья строка получается из второй подстановкой $n = \sin \varphi / \sin \varphi'$ в соответствии с законом Снеллиуса. При $\varphi \rightarrow 0$ все выражения в таблице переходят в (11), если в третьей строке учесть,

что при $\varphi \rightarrow 0$ $\cos \varphi \rightarrow 1$, $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\sin \varphi' = \sin \varphi/n \rightarrow \varphi'/n$, $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi' \rightarrow \sin \varphi' \rightarrow \varphi/n$, $\cos(\varphi \pm \varphi') \rightarrow 1$, тангенс и синус от $\varphi \pm \varphi'$ стремятся к $\varphi \pm \varphi'/n$.

Следует отметить, что в большинстве учебных пособий формулы для ρ в p -компоненте приведены с обратным знаком. Это обусловлено тем, что на рисунках, аналогичных рис. 7, направления векторов $H_{\text{пр}}$ и $H_{\text{отр}}$ выбраны сонаправленными вектору $H_{\text{пад}}$, то есть вектор $E_{\text{отр}}$, в отличие от рис. 7, направлен в противоположную сторону. В этом случае сдвиг фазы отраженной волны по отношению к падающей ($\pm\pi$) должен учитываться отдельно на основании рисунка (либо ρ определяется не как $E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}$, а как $H_{\text{отр}}/H_{\text{пад}}$). На наш взгляд это неудобно, так как из формул, приведенных в нашей таблице, сдвиг фазы отраженной волны, согласно (6) и определению ρ , получается автоматически.

Формулы Френеля в виде (16), (21) представляются более предпочтительными по следующим причинам.

1. При учете дисперсии показателя преломления $n = n(\omega)$ спектры $\tau(\omega)$ и $\rho(\omega)$ удобнее рассчитывать, используя только угол падения и функцию $Q = Q(n(\omega), \varphi)$ (13).
2. При наличии поглощения хотя бы в одной из сред показатель преломления n становится комплексным, следовательно, комплексными становятся $\sin \varphi'$ (1), $\cos \varphi'$ (14), $\sin(\varphi \pm \varphi')$, $\operatorname{tg}(\varphi \pm \varphi')$ и $\cos(\varphi \pm \varphi')$. В этой ситуации для вычисления τ и ρ удобнее использовать (16), (21), так как в них входят только косинус вещественного угла φ , и две комплексные величины: n и Q .

Поскольку коэффициенты пропускания и отражения в s - и p -компонентах отличаются, состояние поляризации наклонно падающего на границу раздела света сохраняется в отраженном и прошедшем пучках только при линейной поляризации для этих двух геометрий. Произвольно поляризованный падающий свет можно представить в виде суперпозиции двух когерентных линейно поляризованных волн, соответствующих s - и p -компонентам. Тогда отраженный и прошедший пучки будут представлять суперпозиции отраженных и прошедших линейно поляризованных волн в двух ортогональных плоскостях. Состояние поляризации каждого из этих пучков будет отличаться от состояния поляризации падающего света.

При наклонном падении на границу раздела естественного (неполяризованного) света отраженный и прошедший пучки будут частично поляризованными. В частности, при падении под углом Брюстера отраженный пучок будет полностью поляризован в s -компоненте ($\rho_p = 0$), а в прошедшем будет преобладать p -поляризация.

На рис. 8–11 представлены расчетные графики зависимостей коэффициентов пропускания τ , D и коэффициентов отражения ρ , R от угла падения в s -поляризации (рис. 8, 9) и p -поляризации (рис. 10, 11) для значений относительного показателя преломления $n = 1,5$ (рис. 8, 10) и $n = 0,67$ (рис. 9, 11). При $n = 0,67$ расчеты τ и ρ проведены для углов падения $\varphi \leq \varphi_0$ (для $n = 0,67$ предельный угол полного внутреннего отражения $\varphi_0 \approx 42,1^\circ$), то есть для области значений φ , в которой амплитудные коэффициенты (16), (21) являются вещественными.

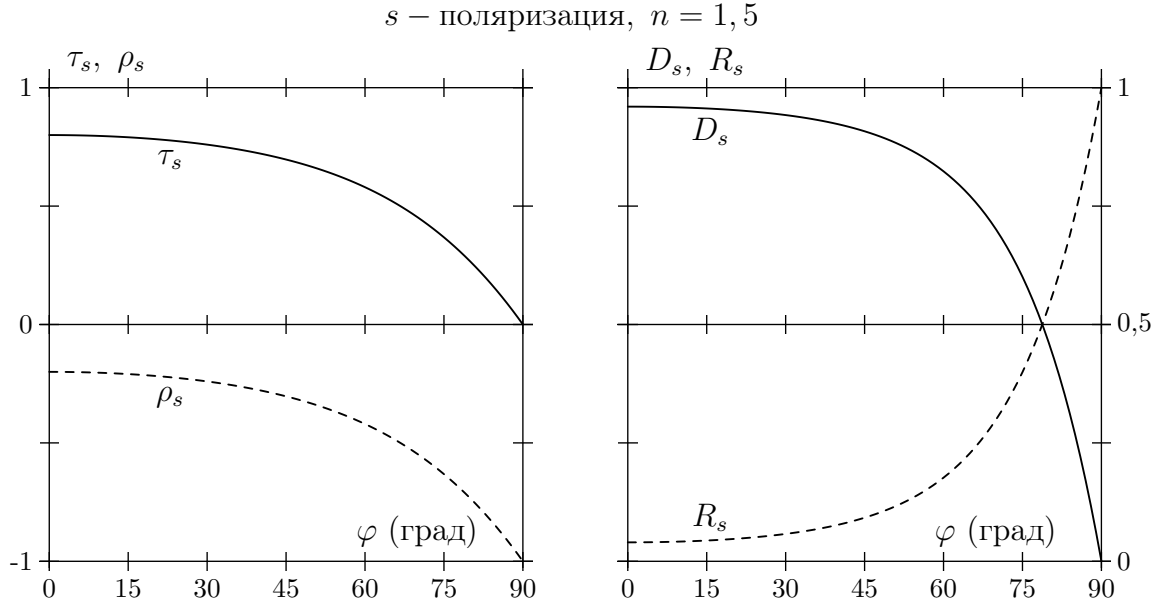


Рис. 8

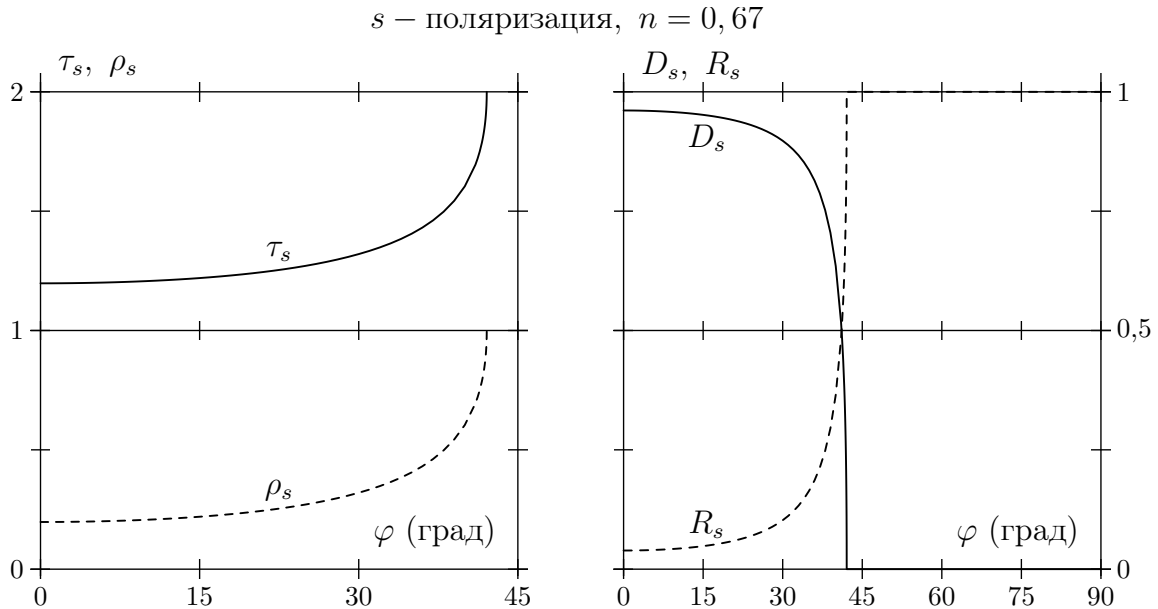


Рис. 9

Можно видеть, что результаты расчетов полностью соответствуют сделанным ранее на основании анализа формул (16), (21) выводам. В s -поляризации $\tau > 0$ и $\rho < 0$ при всех углах падения (для $n = 0,67$ при $\varphi < \varphi_0$). В p -поляризации коэффициент пропускания τ также положителен при всех φ для $n = 1,5$ и при $\varphi < \varphi_0$ для $n = 0,67$, а коэффициент отражения ρ с увеличением угла падения меняет знак с отрицательного на положительный при $n = 1,5$ ($\varphi_{\text{Бр}} \approx 56,3^\circ$), с положительного на отрицательный при $n = 0,67$ ($\varphi_{\text{Бр}} \approx 33,8^\circ$).

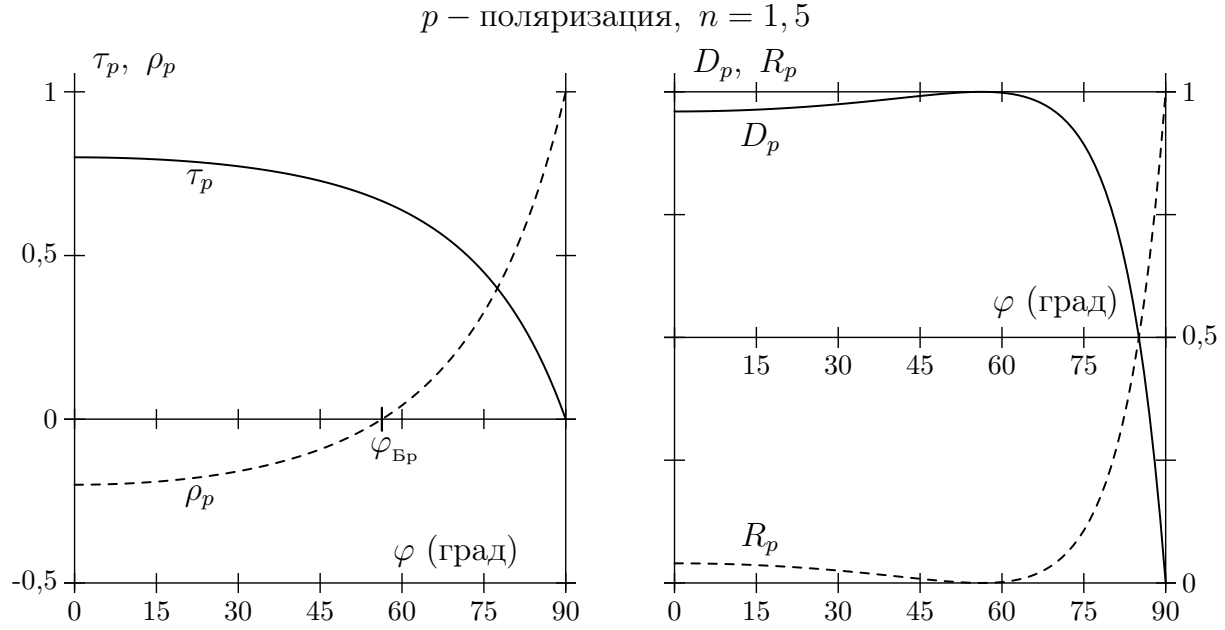


Рис. 10

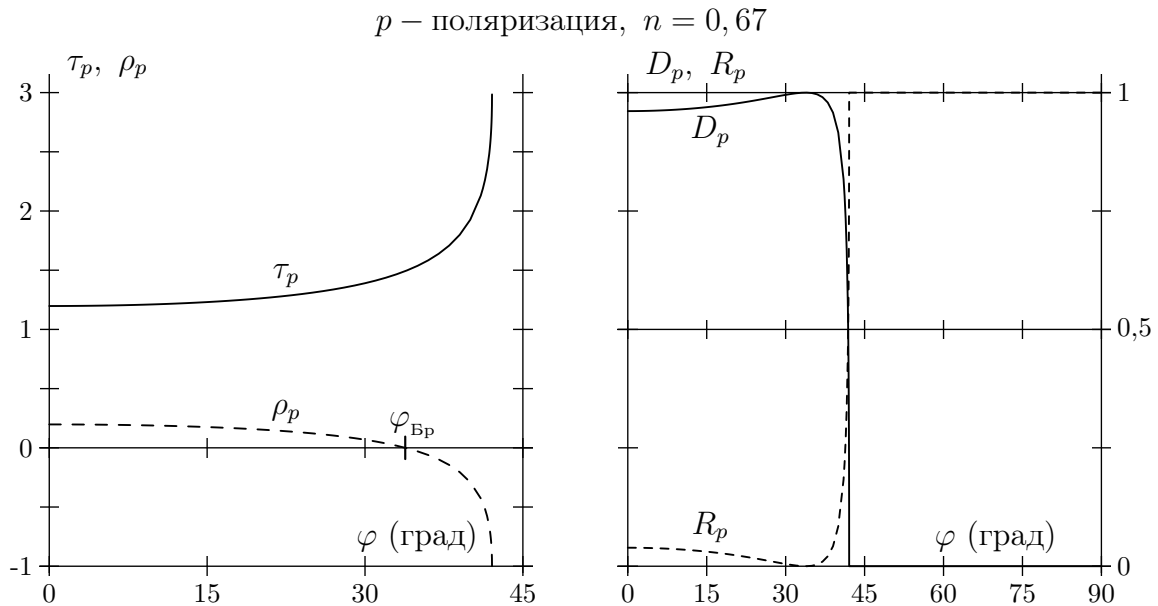


Рис. 11

Обратим внимание, что для s -компоненты (рис. 8, 9) кривая $\tau(\varphi)$ смещена относительно кривой $\rho(\varphi)$ на единицу вверх, что соответствует граничному условию (15) для амплитуды электрической напряженности. Еще одна интересная особенность приведенных графиков заключается в том, что кривые $D(\varphi)$ и $R(\varphi)$ во всех случаях симметричны относительно прямой, параллельной оси абсцисс и сдвинутой вверх на 0,5. Это является следствием закона сохранения энергии: $D(\varphi) + R(\varphi) = 1$ или $D(\varphi) - 0,5 = -(R(\varphi) - 0,5)$.

4. Многолучевая интерференция света в плоскопараллельном слое

При падении света на плоскопараллельный диэлектрический слой прошедшая и отраженная волны являются результатами интерференции многократно отраженных внутри слоя волн. Задача о многолучевом (интерференционном) пропускании и отражении света плоскопараллельным слоем имеет смысл только тогда, когда коэффициент пропускания на передней границе слоя отличен от нуля, поэтому случай полного внутреннего отражения на передней границе мы здесь рассматривать не будем.

Электромагнитное поле внутри слоя можно представить в виде двух волн, распространяющихся в глубину и из глубины слоя и представляющих собой суперпозиции волн соответствующего направления, многократно отраженных от внутренних поверхностей.

Граничные условия будем задавать на передней границе слоя в точке a с координатами $(0, 0, 0)$, на задней границе — в точке b с координатами $(0, 0, d)$ (d — толщина слоя, см. рис. 12).

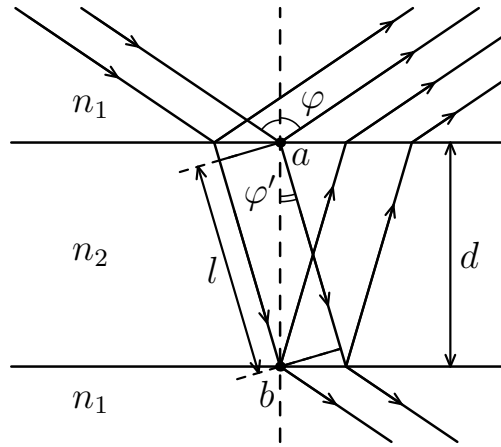


Рис. 12

Если амплитуду падающей волны в точке a принять за единицу, то амплитуда отраженной волны в этой точке будет равна ρ . Амплитуды волн, распространяющихся вглубь и из глубины слоя, в точке a обозначим соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Тогда в точке b комплексные амплитуды этих волн равны $\mathbf{E}_1 e^{i\delta_b}$ и $\mathbf{E}_2 e^{-i\delta_b}$, где δ_b — набег фазы между точками a и b . Геометрическая разность хода между волновыми поверхностями, проходящими через точки a и b , $l = d \cos \varphi' = n_1 Q d / n_2$ (см. рис. 12), следовательно,

$$\delta_b = \frac{\omega}{c} l n_2 = \frac{\omega n_1 Q d}{c} = k_1 Q d, \quad (25)$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления снаружи и внутри слоя, $k_1 = \omega n_1/c$ — модуль волнового вектора света в окружающей слой среде. Вычисление разности фаз между точками a и b не зависит от поляризации света, поэтому δ_b (25) будет одинаковым в s - и p -поляризациях (для изотропных сред). Наконец, амплитуду прошедшего света в точке b будем считать равной τ , то есть фазу прошедшей волны будем отсчитывать от точки b .

Выбор положения точки b для задания граничных условий на задней границе слоя, вообще говоря, произволен. При изменении положения этой точки решение системы граничных условий будет отличаться лишь постоянным сдвигом фазы комплексного коэффициента пропускания τ . Однако, как будет видно ниже, при размещении точек a и b на одной нормали к слою система граничных условий примет удобный для решения симметричный вид.

Для s -компоненты граничные условия непрерывности тангенциальной составляющей вектора электрической напряженности при единичной амплитуде падающей волны в точках a и b имеют вид (см. рис. 13)

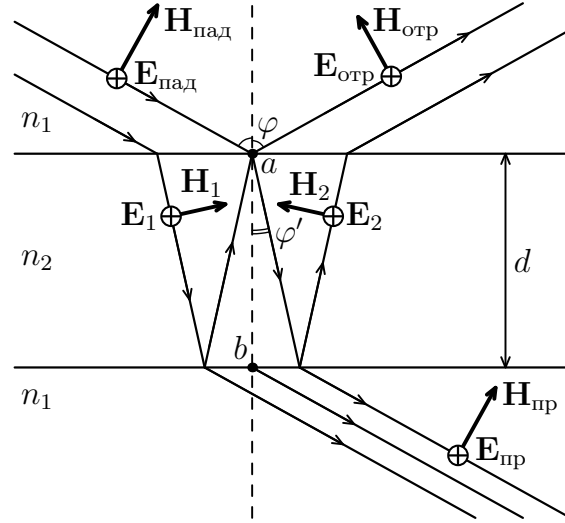


Рис. 13

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= E_1 + E_2, \\ \tau &= E_1 e^{i\delta_b} + E_2 e^{-i\delta_b}. \end{aligned} \quad (26)$$

Граничные условия для магнитной напряженности в тех же точках

$$\begin{aligned} 1 - \rho &= \frac{Q}{\cos \varphi} (E_1 - E_2), \\ \tau &= \frac{Q}{\cos \varphi} (E_1 e^{i\delta_b} - E_2 e^{-i\delta_b}). \end{aligned} \quad (27)$$

Система уравнений (26)–(27) представляет собой линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: τ , ρ , E_1 и E_2 . Домножим первое из уравнений (26) на $e^{-i\delta_b}$ и вычтем из него второе уравнение. В результате исключается неизвестная E_2

$$(1 + \rho) e^{-i\delta_b} - \tau = E_1 (e^{-i\delta_b} - e^{i\delta_b}) = -2i E_1 \sin \delta_b,$$

откуда

$$E_1 = \frac{i}{2 \sin \delta_b} \left[(1 + \rho) e^{-i\delta_b} - \tau \right].$$

Аналогично, домножая первое уравнение (26) на $e^{i\delta_b}$ и исключая E_1 , выразим

$$E_2 = -\frac{i}{2 \sin \delta_b} \left[(1 + \rho) e^{i\delta_b} - \tau \right].$$

Теперь, подставляя E_1 и E_2 в (27), мы полностью исключим эти неизвестные и получим систему двух уравнений с двумя неизвестными τ и ρ :

$$1 - \rho = \frac{ix}{2 \sin \delta_b} \left[(1 + \rho)(e^{-i\delta_b} + e^{i\delta_b}) - 2\tau \right] = \frac{ix}{\sin \delta_b} [(1 + \rho) \cos \delta_b - \tau],$$

$$\tau = \frac{ix}{2 \sin \delta_b} \left[2(1 + \rho) - \tau(e^{i\delta_b} + e^{-i\delta_b}) \right] = \frac{ix}{\sin \delta_b} (1 + \rho - \tau \cos \delta_b).$$

Здесь использовано обозначение

$$x \equiv \frac{Q}{\cos \varphi}. \quad (28)$$

Система граничных условий после исключения E_1 и E_2 приобретает, таким образом, вид

$$1 - \rho = \frac{ix}{\sin \delta_b} [(1 + \rho) \cos \delta_b - \tau],$$

$$\tau = \frac{ix}{\sin \delta_b} (1 + \rho - \tau \cos \delta_b). \quad (29)$$

Группируя слагаемые, содержащие τ и ρ , приведем систему уравнений к виду

$$\sin \delta_b - ix \cos \delta_b - \rho(\sin \delta_b + ix \cos \delta_b) = -ix\tau,$$

$$ix(1 + \rho) = \tau(\sin \delta_b + ix \cos \delta_b).$$

Почленным делением левых и правых частей данного уравнения исключаем τ

$$\frac{\sin \delta_b - ix \cos \delta_b - \rho(\sin \delta_b + ix \cos \delta_b)}{ix(1 + \rho)} = -\frac{ix}{\sin \delta_b + ix \cos \delta_b}$$

или

$$\sin^2 \delta_b + x^2 \cos^2 \delta_b - \rho(\sin \delta_b + ix \cos \delta_b)^2 = x^2(1 + \rho),$$

откуда

$$\rho = \frac{(1 - x^2) \sin \delta_b}{(1 + x^2) \sin \delta_b + 2ix \cos \delta_b}. \quad (30)$$

Подставив ρ в одно из уравнений (29), получим

$$\tau = \frac{2ix}{(1 + x^2) \sin \delta_b + 2ix \cos \delta_b}. \quad (31)$$

Амплитудные коэффициенты пропускания и отражения плоскопараллельного слоя, как видно из полученных выражений, являются комплексными даже при отсутствии поглощения (при вещественных n_1 , n_2 , δ_b , Q и x). Это означает, что прошедшая и отраженная волны будут иметь по отношению к падающей волне фазовый сдвиг не кратный π .

В случае p -поляризации (см. рис. 14) граничные условия для напряженности электрического поля в точках a и b при единичной амплитуде падающей волны выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} (1 + \rho) \cos \varphi &= \frac{Q}{n}(E_1 + E_2), \\ \tau \cos \varphi &= \frac{Q}{n} \left(E_1 e^{i\delta_b} + E_2 e^{-i\delta_b} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где, как и ранее, $n = n_2/n_1$. Для магнитной напряженности

$$\begin{aligned} 1 - \rho &= n(E_1 - E_2), \\ \tau &= n \left(E_1 e^{i\delta_b} - E_2 e^{-i\delta_b} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Введя обозначение

$$y \equiv \frac{Q}{n \cos \varphi},$$

перепишем (32) в виде

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= y(E_1 + E_2), \\ \tau &= y \left(E_1 e^{i\delta_b} + E_2 e^{-i\delta_b} \right). \end{aligned}$$

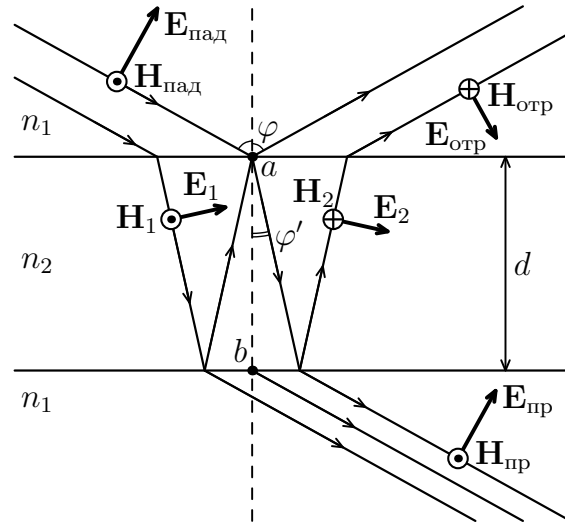


Рис. 14

Действуя по аналогии с предыдущей задачей, выразим E_1 и E_2 через τ и ρ

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{2y \sin \delta_b} \left[(1 + \rho) e^{-i\delta_b} - \tau \right], \\ E_2 &= -\frac{i}{2y \sin \delta_b} \left[(1 + \rho) e^{i\delta_b} - \tau \right] \end{aligned}$$

и подставим в (33). В результате получим систему

$$\begin{aligned} 1 - \rho &= \frac{in}{y \sin \delta_b} \left[(1 + \rho) \cos \delta_b - \tau \right], \\ \tau &= \frac{in}{y \sin \delta_b} (1 + \rho - \tau \cos \delta_b), \end{aligned}$$

которая сводится к (29) при

$$x = \frac{n}{y} = \frac{n^2 \cos \varphi}{Q}. \quad (34)$$

Таким образом, комплексные амплитудные коэффициенты пропускания и отражения для плоскопараллельного слоя с учетом многократных отражений внутри слоя в s - и p -компонентах выражаются одинаково — формулами (30), (31)

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2ix}{(1+x^2)\sin\delta_b + 2ix\cos\delta_b}, \\ \rho &= \frac{(1-x^2)\sin\delta_b}{(1+x^2)\sin\delta_b + 2ix\cos\delta_b},\end{aligned}\tag{35}$$

но для s -поляризации параметр x принимает значение (28), а для p -поляризации — значение (34).

При нормальном падении света $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $Q = n$ формулы (28) и (34) дают $x = n$, а выражения (35) стремятся к общему для s - и p -компонент пределу

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2in}{(1+n^2)\sin\delta_b + 2in\cos\delta_b}, \\ \rho &= \frac{(1-n^2)\sin\delta_b}{(1+n^2)\sin\delta_b + 2in\cos\delta_b}.\end{aligned}\tag{36}$$

Энергетические коэффициенты пропускания и отражения равны

$$D = \tau\tau^*, \quad R = \rho\rho^*,\tag{37}$$

так как равны показатели преломления в области распространения падающей, прошедшей и отраженной волн (n_1) и углы между нормалью к границе и направлениями всех трех пучков. Кроме того, квадраты модулей амплитудных коэффициентов τ и ρ при многолучевой интерференции характеризуют не плотности потоков, а потоки энергии.

Формулы (35), (37) применимы как при наличии поглощения в средах, то есть при комплексных n , δ_b , Q и x , так и в приближении идеальных диэлектриков — при вещественных значениях вышеуказанных величин.

Если коэффициент отражения от полубесконечной среды с показателем преломления n_2 при падении света из среды с показателем преломления n_1 обозначить ρ_0 , то в соответствии с формулами Френеля (16) и (21) выражения ρ_0 через параметр x для s - и p -компонент получатся одинаковыми:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{\cos\varphi - Q}{\cos\varphi + Q} = \frac{1-x}{1+x} & (s\text{-компонента}), \\ \rho_0 &= \frac{Q - n^2\cos\varphi}{Q + n^2\cos\varphi} = \frac{1-x}{1+x} & (p\text{-компонента}).\end{aligned}$$

Это позволяет представить параметр x в (35) в виде общего выражения для s - и p -компонент

$$x = \frac{1 - \rho_0}{1 + \rho_0}. \quad (38)$$

Рассмотрим выражения энергетических коэффициентов пропускания и отражения (37) в частном случае непоглощающих сред, когда ρ_0 , x и δ_b — вещественные числа. Это означает, что $xx^* = x^2$, $\rho_0\rho_0^* = \rho_0^2 = R_0$ (здесь R_0 — энергетический коэффициент отражения от полубесконечной среды в соответствующей поляризации: выражение (19) для s -поляризации, (24) для p -поляризации), $\sin \delta_b$ и $\cos \delta_b$ — вещественные величины.

В этом случае энергетический коэффициент пропускания

$$D = \tau\tau^* = \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2 \sin^2 \delta_b + 4x^2 \cos^2 \delta_b}.$$

Преобразуем знаменатель

$$\begin{aligned} (1 + x^2)^2 \sin^2 \delta_b + 4x^2 \cos^2 \delta_b &= (1 + x^2)^2 \sin^2 \delta_b + 4x^2 - 4x^2 \sin^2 \delta_b = \\ &= 4x^2 + (1 - x^2)^2 \sin^2 \delta_b. \end{aligned}$$

Тогда

$$D = \frac{4x^2}{4x^2 + (1 - x^2)^2 \sin^2 \delta_b} = \frac{1}{1 + F}, \quad (39)$$

где

$$F \equiv \frac{(1 - x^2)^2 \sin^2 \delta_b}{4x^2}. \quad (40)$$

Для энергетического коэффициента отражения получим

$$R = \rho\rho^* = \frac{(1 - x^2)^2 \sin^2 \delta_b}{(1 + x^2)^2 \sin^2 \delta_b + 4x^2 \cos^2 \delta_b}$$

или с учетом предыдущих преобразований

$$R = \frac{F}{1 + F}. \quad (41)$$

Как и должно быть для непоглощающих сред $D + R = 1$.

Преобразуем выражение (40) с помощью (38)

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^2 \sin^2 \delta_b &= \left(1 - \frac{(1 - \rho_0)^2}{(1 + \rho_0)^2}\right)^2 \sin^2 \delta_b = \frac{16\rho_0^2 \sin^2 \delta_b}{(1 + \rho_0)^4}, \\ F &= \frac{16\rho_0^2(1 + \rho_0)^2 \sin^2 \delta_b}{4(1 + \rho_0)^4(1 - \rho_0)^2} = \frac{4\rho_0^2 \sin^2 \delta_b}{(1 - \rho_0^2)^2} \end{aligned}$$

и окончательно

$$F = \frac{4R_0 \sin^2 \delta_b}{(1 - R_0)^2}. \quad (42)$$

Энергетические коэффициенты пропускания и отражения плоскопараллельного слоя в приближении идеальных диэлектриков (39), (41):

$$D = \frac{1}{1 + F}, \quad R = \frac{F}{1 + F},$$

где F выражается формулой (42), зависят, таким образом, только от коэффициента отражения R_0 полубесконечной среды с относительным показателем преломления $n = n_2/n_1$ в соответствующей геометрии и разности фаз δ_b (25) между волновыми поверхностями плоской волны внутри слоя, содержащими противостоящие точки a и b на поверхностях. Разность фаз

$$\delta_b = \frac{\omega n_1 Q d}{c} = \frac{\omega d}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi},$$

в свою очередь, определяется частотой световой волны ω , толщиной слоя d , показателями преломления слоя n_2 и окружающей среды n_1 , углом падения φ .

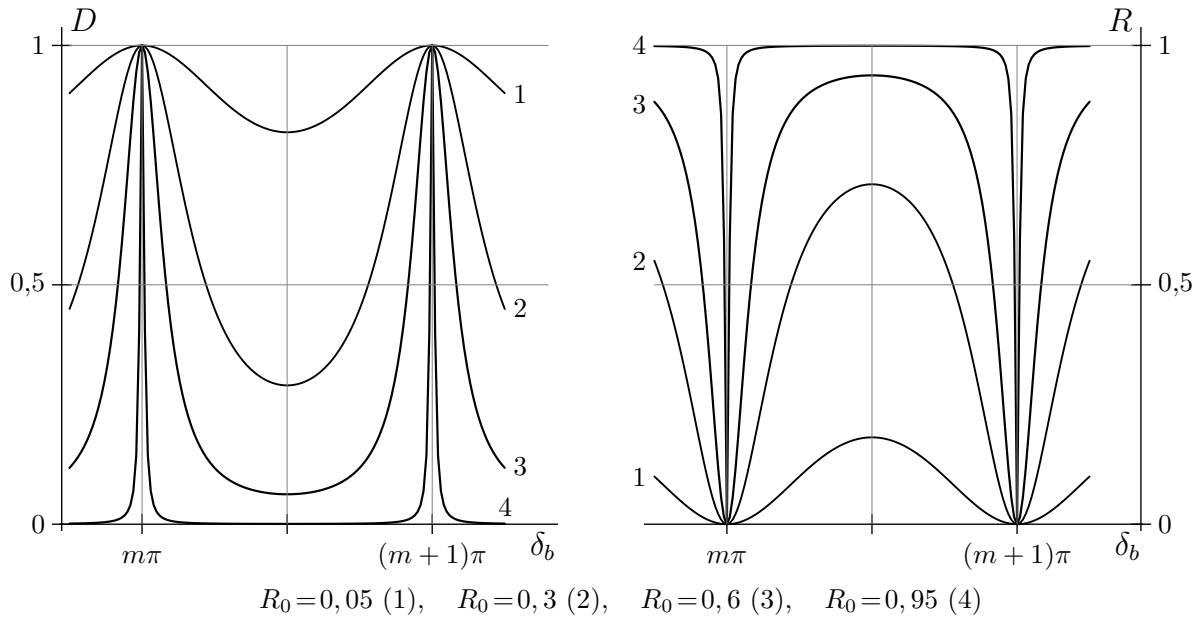


Рис. 15

На рис. 15 представлены расчетные энергетические коэффициенты пропускания и отражения как функции δ_b при четырех значениях R_0 : 0,05 (кривые 1), 0,3 (кривые 2), 0,6 (кривые 3) и 0,95 (кривые 4). При $\delta_b = m\pi$ (m — целое число) $F = 0$ и $D = 1$, $R = 0$ для всех R_0 .

Для малых R_0 ($R_0^2 \ll R_0$) роль многократных отражений внутри слоя становится несущественной. В этом случае интерференционная картина в пропускании и отражении близка к картине интерференции двух пучков, испытавших наименьшее число отражений, поскольку поток энергии

в каждом следующем пучке будет отличаться от предыдущего множителем $\sim R_0^2$. Этому приближению соответствуют кривые 1 на рис. 15.

По мере роста R_0 вклад многократных отражений становится все более существенным. Максимумы пропускания и минимумы отражения становятся все более узкими и контрастными, поскольку минимумы пропускания становятся глубже и шире, максимумы отражения также расширяются и становятся выше.

Многолучевая интерференция в плоскопараллельном слое рассмотрена здесь для случая плоской падающей волны. При этом интерференция в пропускании и отражении будет происходить в параллельных пучках, то есть интерференционные картины пропускания и отражения будут локализованы на бесконечности.

Для наблюдения на опыте, соответствующем рассмотренной задаче, источник света помещается в фокальную плоскость собирающей линзы, формирующей параллельный падающий пучок. На пути прошедшего и отраженного пучков также располагаются собирающие линзы, которые создают интерференционные картины пропускания и отражения в своих фокальных плоскостях.

Обсудим еще одно условие, которое в наших рассуждениях предполагалось выполненным. При каждом отражении от внутренней поверхности слоя энергия падающего пучка делится между прошедшим и отраженным пучками, поэтому интенсивность каждого следующего отраженного внутри слоя пучка меньше предыдущего. Для того, чтобы количество отражений можно было считать стремящимся к бесконечности, а именно это предполагалось в нашем решении, размеры слоя в направлении, перпендикулярном нормали, должны быть намного больше его толщины d , так как при наклонном падении света отраженные лучи смещаются в направлении тангенциальной составляющей волнового вектора падающей волны. При нормальном падении данное условие не играет роли, так как смещения отраженных пучков не происходит. Поэтому полученные здесь результаты при нормальном падении света (и близком к нормальному) применимы к слоям любой толщины, а при наклонном падении — только к тонким (по сравнению с поперечными размерами) слоям.

Малая ширина и контрастность интерференционных максимумов пропускания при больших коэффициентах отражения R_0 создают возможность практического использования многолучевой интерференции в плоскопараллельных слоях для спектральных исследований (интерференционная спектроскопия). Поскольку разность фаз δ_b (25) прямо пропорциональна частоте световой волны ω , условие интерференционного макси-

му пропускания для спектральных линий с разными частотами будет выполнено при разных углах падения. Если падающий пучок исследуемого излучения предварительно монохроматизирован, то есть содержит достаточно узкий спектральный участок, в котором находятся одна или несколько близких по частоте спектральных линий, то эти линии будут давать максимумы пропускания при разных углах падения. Таким образом, при больших R_0 в пропускании можно разрешать (наблюдать раздельно) близкие по частоте спектральные линии или изучать структуру одной линии. Предварительная монохроматизация достигается с помощью любого, в том числе достаточно грубого, монохроматора.

При малых углах падения коэффициент отражения на границе раздела диэлектрических сред невелик (см. рис. 8–11). В связи с этим в спектральных приборах, действие которых основано на принципе многолучевой интерференции при углах падения, близких к нулю, коэффициенты отражения на границах слоя увеличивают искусственно путем нанесения отражающих покрытий.

Такие приборы называются интерферометрами (эталоны) Фабри–Перо. Они представляют собой две параллельные стеклянные пластинки поверхности которых, обращенные друг к другу, покрыты тонкими отражающими пленками из металла (серебро, алюминий). В некоторых случаях используется многослойное диэлектрическое покрытие с высоким коэффициентом отражения (см. ниже). Роль плоскопараллельного диэлектрического слоя выполняет воздух между пластинами. Отражающие покрытия вносят постоянный сдвиг фазы, поэтому вид выражения δ_b отличается от (25) дополнительным постоянным слагаемым.

Требования к точности обработки и параллельности отражающих поверхностей очень высокие — отклонения поверхностей от идеальных плоскостей и нарушения параллельности допускаются в пределах сотых долей длины световой волны. Поэтому изменение разности фаз путем сокращения или увеличения расстояния между пластинами технически не обеспечивает требований к параллельности.

Расстояние между пластинами фиксируется с помощью распорного кольца, на торцах которого имеются по три одинаковых симметрично расположенных выступа с каждой стороны. Кольцо изготавливается с высокой точностью так, чтобы края выступов по обе стороны находились в параллельных плоскостях. Внутренние отражающие поверхности пластин интерферометра прижимаются к выступам распорного кольца пружинками, снабженными механизмом тонкой регулировки силы прижатия, что дает дополнительную возможность устранения малых отклонений от параллельности.

Внешние поверхности пластин, напротив, делаются несколько скошенными по отношению к внутренним, чтобы устранить блики, образующиеся в результате интерференции на слабо отражающих внешних поверхностях.

Толщина воздушного зазора между пластинами в эталонах Фабри–Перо обычно находится в пределах от одного до ста миллиметров, в уникальных приборах достигает метра. Падающий световой пучок делается слегка сходящимся, чтобы в нем присутствовали компоненты с разными углами падения в небольших пределах. В этом случае интерференционная картина в фокальной плоскости собирающей линзы для монохроматического излучения имеет вид тонких концентрических колец равного наклона, соответствующих интерференционным максимумам последовательных порядков ($\delta_b = m\pi$). При наличии в излучении нескольких спектральных компонент каждая компонента образует свою систему концентрических колец. Радиусы колец, соответствующие разным частотам будут отличаться, что позволяет изучать распределение энергии в рассматриваемом спектральном интервале.

По сравнению с дифракционными монохроматорами с такой же разрешающей способностью эталон Фабри–Перо обладает большей светосилой (отношением интенсивности полезного сигнала к интенсивности падающего света) и значительно меньшей стоимостью.

Оптический резонатор, построенный по принципу эталона Фабри–Перо, используется также в оптических квантовых генераторах (лазерах).

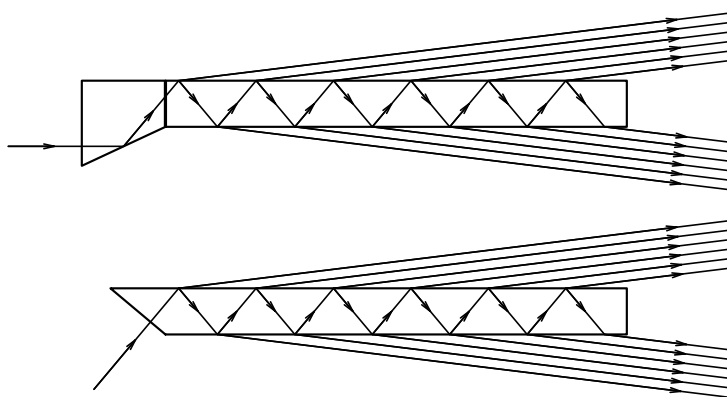


Рис. 16

Другой способ обеспечения большой отражающей способности на границах диэлектрического слоя основан на использовании длинных плоскопараллельных пластинок из однородного стекла или плавленого кварца, внутри которых свет многократно отражается при внутренних углах падения немного меньших предельного угла полного внутреннего отражения. В этом случае коэффициент внутреннего отражения R_0 приближается к единице (см. рис. 9, 11).

Такие приборы называются пластинками Луммера–Герке. Их длина обычно около 30 см, толщина в пределах 3 – 10 мм. Световой пучок вводится в пластинку либо с помощью дополнительной призмы, прикрепленной на оптическом контакте к одному из торцов, либо через скошенный торец (см. рис. 16). Это делается для того, чтобы на входе свет падал на поверхность стекла нормально, так как в этом случае потери на отражение будут минимальными.

Углы между пропускающими и отражающими плоскостями на входе в обоих случаях подбираются таким образом, чтобы на параллельные боковые плоскости пластинки свет изнутри падал под углом, близким к предельному углу полного внутреннего отражения.

Выходящие пучки с обеих сторон пластинки направлены почти касательно к ее боковым плоскостям, причем интенсивность каждого следующего пучка немного меньше интенсивности предыдущего. Это обеспечивает высокую контрастность картины многолучевой интерференции, которая формируется в фокальной плоскости собирающей линзы за пластинкой (на рисунке не показана).

При небольшом разбросе углов падения на входной плоскости интерференционная картина будет представлять собой семейство узких интерференционных максимумов равного наклона по обе стороны от пластинки. Это будут гиперболы в фокальной плоскости, вытянутые перпендикулярно плоскости падения.

В заключение отметим, что явление многолучевой интерференции используется также в так называемых многослойных диэлектрических покрытиях. Эти покрытия наносятся тонкими (микронными) слоями на прозрачную подложку путем напыления в высоком вакууме. Постоянство и величину толщины слоя можно контролировать с высокой точностью. Показатели преломления соседних слоев отличаются друг от друга, поэтому на их границах свет частично отражается. Поскольку коэффициенты отражения на границах диэлектриков невелики, все отраженные пучки сравнимы по интенсивности (то же относится к прошедшим пучкам). Интерференция большого количества сравнимых по интенсивности пучков при надлежащем подборе разностей фаз позволяет либо значительно ослабить отражение (просветляющие покрытия), либо, наоборот, усилить отражение и ослабить пропускание (отражающие многослойные покрытия). Подбор разностей фаз, в свою очередь, осуществляется подбором показателей преломления и толщин слоев. Именно такие многослойные диэлектрические покрытия могут использоваться в качестве отражающих поверхностей в эталонах Фабри–Перо.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. — 855 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учебное пособие для вузов. В 5 тт. Т. IV. Оптика. — 3-е изд., стер. — М.: Физматлит, МФТИ, 2002. — 792 с.
4. Савельев И.В. Курс физики: Учебное пособие. В 3-х тт. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. — 5-е изд., стер. — СПб.: Издательство "Лань", 2018. — 468 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Московский С.Б., Новиков А.Б., Соловьев Л.Е. Проявление пространственной дисперсии в интегральных соотношениях в спектральной области экситонного поглощения // ЖЭТФ, 1994, т. 105, вып. 4, с. 994-1004.
6. Москалев Ю.В., Московский С.Б., Соловьев Л.Е. Многолучевое отражение света плоскопараллельными кристаллическими пластинками в присутствии добавочных светоекситонных волн // Опт. и спектр., 2003, т. 94, вып. 2, с. 238-244.
7. Московский С.Б. Пропускание и отражение света тонкими полупроводниковыми пластинками в экситонной области спектра при наличии пространственной дисперсии и поверхностных безэкситонных слоев // Опт. и спектр., 2005, т. 98, вып. 3, с. 423-430.