

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Кафедра микроэлектроники и общей физики

**И. А. Кузнецова, С. Б. Московский, Д. Н. Романов,
А. Н. Сергеев**

Электромагнетизм. Избранные главы. Примеры и задачи

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2021

УДК 537.8(075.8)

ББК В33я73

К89

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2021 года.*

Рецензент

кафедра микроэлектроники и общей физики ЯрГУ

Кузнецова, Ирина Александровна.

К89 Электромагнетизм. Избранные главы. Примеры и задачи : учебно-методическое пособие / И. А. Кузнецова, С. Б. Московский, Д. Н. Романов, А. Н. Сергеев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2021. – 128 с.

В пособии рассмотрены базовые понятия курса “Электричество и магнетизм” для инженерно-физических специальностей классических и технических университетов, а также постановка и решение типичных задач по законам электромагнетизма.

Пособие содержит главы, каждая из которых включает в себя теоретический материал, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по курсу “Электричество и магнетизм”.

УДК 537.8(075.8)

ББК В33я73

© ЯрГУ, 2021

1. Электростатическое поле в вакууме

1.1. Теоретический материал

Электрический заряд частицы является одной из её основных характеристик. Ему присущи следующие фундаментальные свойства:

- 1) заряд существует в двух видах: как положительный, так и отрицательный;
- 2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется, это утверждение выражает закон сохранения заряда;
- 3) заряд является релятивистски инвариантным: его величина не зависит от системы отсчёта, а значит, не зависит от того, движется он или покоится;
- 4) заряд дискретен, т. е. заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного заряда e ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Электрон и протон являются носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов, соответственно.

Единицей заряда является кулон (Кл).

Точечным называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует.

Закон Кулона: модуль силы взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорционален зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорционален квадрату расстояния r между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

где $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ – электрическая постоянная.

В векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{F}_{12} – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; \mathbf{r}_{12} – радиус-вектор, проведённый от заряда q_2 к заряду q_1 , $r = |\mathbf{r}_{12}|$ (рис. 1.1).

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать сила, следовательно, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует силовое поле. В данном случае говорят об электрическом поле – поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды. В данной главе будем рассматривать электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются электростатическими. Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используют пробный заряд q_0 – малый точечный положительный заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределение зарядов, создающих поле).

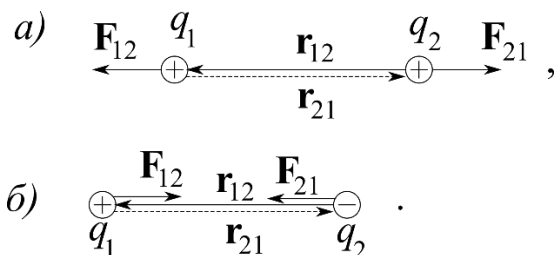


Рис. 1.1. Направление сил Кулона в случае одноимённых (а) и разноимённых (б) точечных зарядов q_1 и q_2

Для описания поля вводят силовую и энергетическую характеристики электростатического поля. В качестве силовой характеристики используют напряжённость электростатического поля. Напряжённость электростатического поля \mathbf{E} в данной точке (точке наблюдения) с радиус-вектором \mathbf{r} – отношение силы Кулона \mathbf{F} (1.1), действующей на неподвижный пробный заряд q_0 , помещённый в данную точку, к величине этого заряда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0}. \quad (1.2)$$

Единицей измерения напряжённости является вольт на метр (В/м). Электростатическое поле является потенциальным, а сила Кулона \mathbf{F} – консервативной. Следовательно, заряды в электростатическом поле обладают потенциальной энергией U , а само поле – потенциалом φ (энергетическая характеристика). Потенциал электростатического поля φ в данной точке (точке наблюдения) с радиус-вектором \mathbf{r} – отношение

потенциальной энергии U неподвижного пробного заряда q_0 в поле сил Кулона (1.1), помещённого в данную точку с радиус-вектором \mathbf{r} , к величине этого заряда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q_0}. \quad (1.3)$$

Единица измерения потенциала - вольт (В): 1 В – потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Согласно связи консервативной силы \mathbf{F} и потенциальной энергии поля U , известной из механики, и условию нормировки связь напряжённости \mathbf{E} и потенциала φ электростатического поля с учётом (1.2, 1.3) имеет вид

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (1.4)$$

$$\varphi = -\int \mathbf{E}d\mathbf{l} + C, \quad (1.5)$$

где $d\mathbf{l}$ – элементарное перемещение заряда. Потенциал, как и потенциальная энергия, определяется с точностью до произвольной постоянной C , которую можно задать, если потенциалу произвольной точки поля приписать конкретное значение. В теоретической физике за нулевой потенциал удобно принимать потенциал бесконечно удалённой точки пространства. На практике за нулевой потенциал обычно принимают потенциал Земли. Потенциал поля – непрерывная функция координат.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 равна

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.6)$$

Графически электростатическое поле изображают с помощью линий напряжённости и эквипотенциальных поверхностей.

Линии напряжённости – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором \mathbf{E} (рис. 1.2). Направление линий напряжённости совпадает с направлением вектора \mathbf{E} в рассматриваемой точке. Силовые линии напряжённости электростатического поля всегда начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах. Чтобы с помощью линий напряжённости можно было характеризовать не только направление, но и значение напряжённости электростатического поля, условились их проводить с определённой густотой: число линий напряжённости, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряжённости, должно быть равно модулю вектора E . На рис. 1.2 показано, что при перемещении поверхности площадью S , которая перпендикулярна линиям напряжённости в каждой её точке, из положения 1 в положение 2 число линий напряжённости, пронизывающих данную поверхность, возрастает, следовательно, увеличивается и напряжённость электростатического поля.

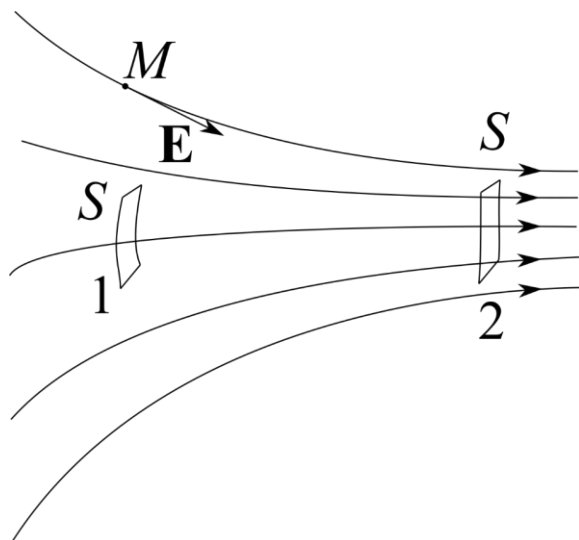


Рис. 1.2. Линии напряжённости (сплошные линии со стрелками), S – площадка, перпендикулярная линиям напряжённости в каждой её точке

Однородным называется такое электростатическое поле, в котором вектор напряжённости поля в любой точке постоянен по модулю и направлению. В противном случае, поле называется неоднородным.

Эквипотенциальные поверхности – поверхности, во всех точках которых потенциал φ имеет одно и то же значение (рис. 1.3). Линии напряженности поля перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала (рис. 1.3). Данные поверхности рисуют так, чтобы разность потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. По густоте эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризуют величину напряжённости поля

в разных точках: чем гуще расположены данные поверхности, тем больше по модулю напряжённость поля.

Вектор напряжённости и потенциал электрического поля в точке наблюдения с радиус-вектором \mathbf{r} точечного заряда q , положение которого определяется радиус-вектором \mathbf{r}' , равны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.7)$$

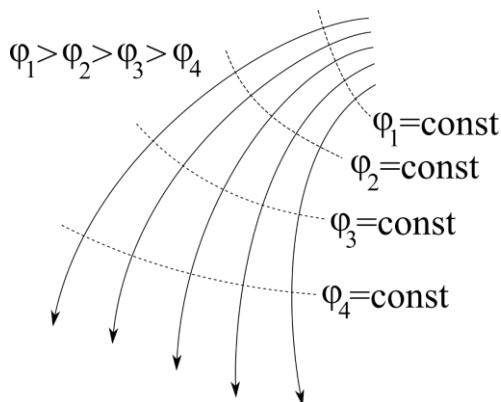


Рис. 1.3. Линии напряжённости (сплошные линии со стрелками) и поперечное сечение эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии)

Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: напряжённость \mathbf{E} результирующего поля, создаваемого системой зарядов, в точке наблюдения с радиус-вектором \mathbf{r} равна геометрической (векторной) сумме напряжённостей полей \mathbf{E}_i

($i = \overline{1, n}$), создаваемых в данной точке с радиус-вектором \mathbf{r} каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Из (1.5) и (1.8) следует, что потенциал поля φ системы зарядов в точке наблюдения с радиус-вектором \mathbf{r} равен алгебраической сумме потенциалов полей φ_i , создаваемых в данной точке с радиус-вектором \mathbf{r} каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

Напряжённость и потенциал электростатического поля системы точечных зарядов q_i ($i = \overline{1, n}$) в точке наблюдения с радиусом-вектором \mathbf{r} согласно (1.7-1.9) равны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3}, \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}, \quad (1.10)$$

где \mathbf{r}'_i – радиус-вектор положения заряда q_i .

Для упрощения математических расчётов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, протоны и так далее), и считать, что они «размазаны» в пространстве или на заряженном теле. Другими словами, удобно заменить истинное распределение дискретных зарядов фиктивным

непрерывным распределением, что значительно упростит расчёты без внесения значительных ошибок.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие плотности зарядов – объёмной ρ , поверхностной σ и линейной λ . По определению:

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad (1.11)$$

где dq – заряд, заключённый соответственно в объёме dV , находящийся на поверхности dS и на длине dl .

Напряжённость и потенциал электростатического поля зарядов, распределённых непрерывно, в точке наблюдения с радиусом-вектором \mathbf{r} равны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.12)$$

где интегрирование происходит по всей области расположения заряда, dq' – элементарный заряд, положение которого характеризуется радиусом вектором \mathbf{r}' (рис. 1.4).

Интегральная форма теоремы Гаусса в вакууме: поток вектора напряжённости электрического поля \mathbf{E} через замкнутую поверхность равен заключённому внутри этой поверхности электрическому заряду q , делённому на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Определение потока смотри в приложении 1.
 Преобразование левой части уравнения теоремы Гаусса
 в случае определённой симметрии смотри в приложении 2.

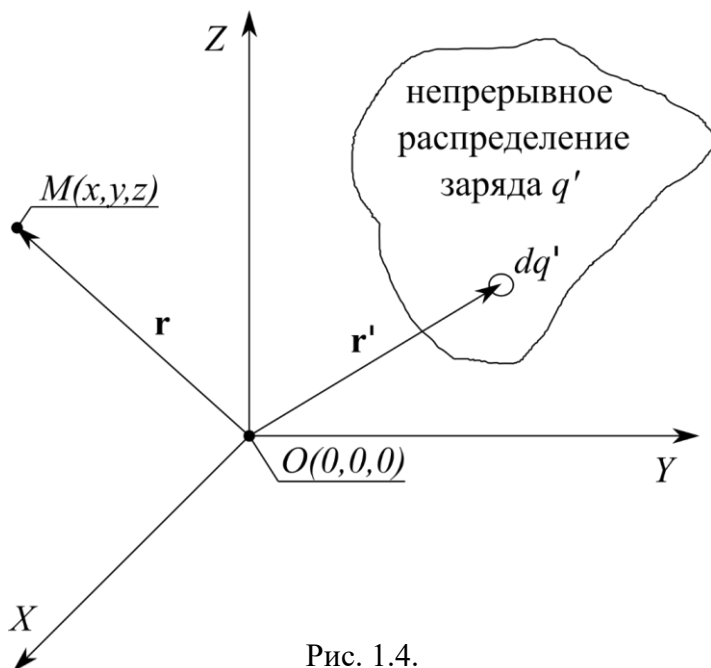


Рис. 1.4.

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.1. Определить положение точки, в которой напряженность равна нулю вблизи двух неодинаковых одноимённых зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии x .

Решение. Напряжённость электрического поля от двух

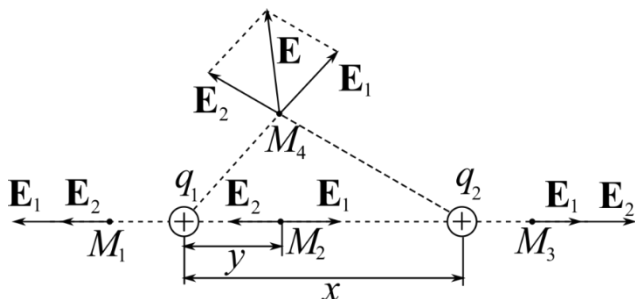


Рис. 1.5.

точечных зарядов q_1 и q_2 согласно (1.10) может быть равна нулю в точке M_2 , находящейся между зарядами и лежащей на прямой (рис. 1.5), так как в этой точке вектора напряжённостей от двух точечных зарядов противоположно направлены и могут быть скомпенсированы.

Из определения напряжённости точечных зарядов (1.12) и из рис. 1.5 следует, что в точке M_2

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 y^2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (x-y)^2}, \quad y = x \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

Ответ: напряжённость электростатического поля равна нулю в точке, лежащей на прямой, проходящей через два точечных заряда q_1 и q_2 , между этими зарядами на расстоянии $y = x\sqrt{q_1}/(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})$ от первого заряда q_1 .

Пример 1.2. Полубесконечная прямая, равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда λ . Найти модуль и направление напряжённости поля в точке, которая отстоит от нити на расстоянии a и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через её конец.

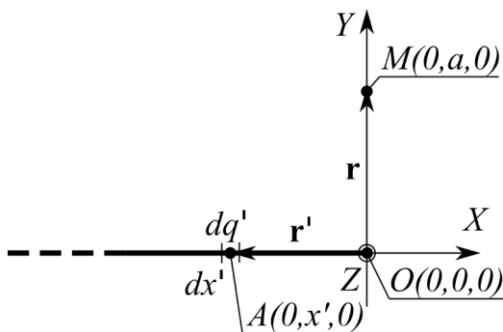


Рис. 1.6.

Решение. На рис. 1.6 показана равномерно полубесконечная прямая равномерно заряженная нить в декартовой системе координат с векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Радиус-вектор точки наблюдения M

равен $\mathbf{r} = (0, a, 0)$. Радиус вектор элементарного заряда dq' в точке A заряженной нити равен $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$. Согласно (1.11) следует, что $dq' = \lambda dl' = \lambda dx'$, где линейная плотность заряда $\lambda = \text{const}$ от координат не зависит по условию задачи. Радиус-вектор точки наблюдения M равен $\mathbf{r} = (0, a, 0)$. Радиус вектор элементарного заряда dq' в точке A заряженной нити равен $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$. Согласно (1.11) следует, что $dq' = \lambda dl' = \lambda dx'$, где линейная плотность заряда $\lambda = \text{const}$ от координат не зависит по условию задачи. Подставляем все выраженные нами величины в формулы для напряжённости поля непрерывного распределения заряда (1.12) и получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \frac{(-x', a, 0)\lambda dx'}{((x')^2 + a^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (I_1 \mathbf{e}_x + I_2 \mathbf{e}_y), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$I_1 = - \int_{-\infty}^0 \frac{x' dx'}{((x')^2 + a^2)^{3/2}}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{a dx'}{((x')^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Интеграл I_1 можно рассчитать, если занести x' под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{-\infty}^0 \frac{x' dx'}{((x')^2 + a^2)^{3/2}} = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{d((x')^2 + a^2)}{((x')^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Интеграл I_2 можно преобразовать с помощью замены переменных:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^0 \frac{a dx'}{((x')^2 + a^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x' = a \operatorname{tg} \varphi' \\ dx' = \frac{a d\varphi'}{\cos^2 \varphi'} \\ x' \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \varphi' = -\pi/2 \\ x' = 0 \Leftrightarrow \varphi' = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\pi/2}^0 \cos \varphi' d\varphi' = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) и (1.15) в выражение в (1.13), получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda(1,1,0)}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

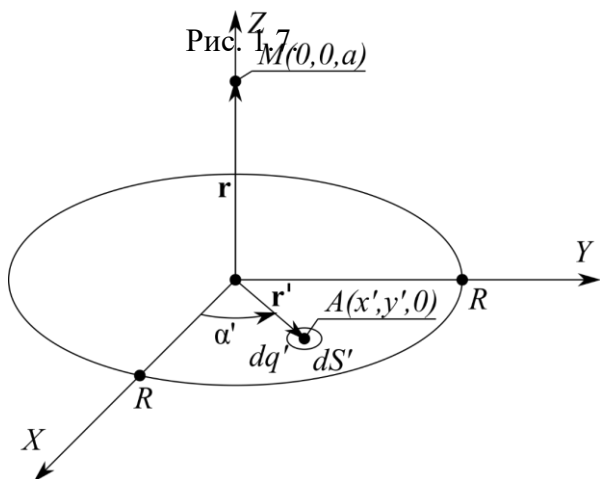
Следовательно, вектор напряжённости поля ориентирован под углом 45° к нити, а модуль напряжённости равен $E = \lambda\sqrt{2}/(4\pi\epsilon_0 a)$.

Ответ: $E = \lambda\sqrt{2}/(4\pi\epsilon_0 a)$, вектор напряжённости поля ориентирован под углом 45° к нити.

Пример 1.3. Найти напряженность и потенциал поля равномерно заряженного тонкого диска радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ в точке, расположенной на оси диска на расстоянии a от него.

Решение. На рис. 1.7 изображён равномерно заряженный диск в декартовой системе координат с векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Радиус-вектор точки наблюдения M равен $\mathbf{r} = (0,0,a)$. Радиус вектор точечного заряда dq' в точке A заряженного диска равен $\mathbf{r}' = (x',y',0)$. Согласно (1.11) следует, что $dq' = \sigma dS' = \sigma dx' dy'$, где поверхностная плотность заряда $\sigma = \text{const}$ от координат не зависит по условию задачи. Подставляем все выраженные нами величины в формулы для напряжённости и потенциала поля непрерывного распределения заряда (1.12) и получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-(y')^2}}^{+\sqrt{R^2-(y')^2}} \frac{(-x', -y', a)\sigma dx' dy'}{((x')^2 + (y')^2 + a^2)^{3/2}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{l} x' = r' \cos \alpha' \\ y' = r' \sin \alpha' \\ dx' dy' = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(r', \alpha')} \right| dr' d\alpha' \\ \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(r', \alpha')} \right| = r' \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-r' \cos \alpha', -r' \sin \alpha', a) r' dr' d\alpha'}{((r')^2 + a^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/a)^2}} \right), \\
 &\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-(y')^2}}^{+\sqrt{R^2-(y')^2}} \frac{\sigma dx' dy'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + z^2}} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x' = r' \cos \alpha' \\ y' = r' \sin \alpha' \\ dx' dy' = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(r', \alpha')} \right| dr' d\alpha' \\ \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(r', \alpha')} \right| = r' \end{array} \right\} = \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r' dr' d\alpha'}{\sqrt{(r')^2 + a^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + R^2} - a).
\end{aligned}$$

Ответ: $E = (\sigma/(2\epsilon_0)) (1 - 1/\sqrt{1 + (R/a)^2}),$
 $\varphi = (\sigma/(2\epsilon_0)) (\sqrt{a^2 + R^2} - a).$

Пример 1.4. Найти во всех точках пространства напряжённость и потенциал заряда с объёмной плотностью

$$\rho = \begin{cases} \alpha r^2, & \alpha = \text{const}, a < r < b, \\ 0, & 0 < r < a, b < r < \infty, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние между началом координат и данной точки пространства.

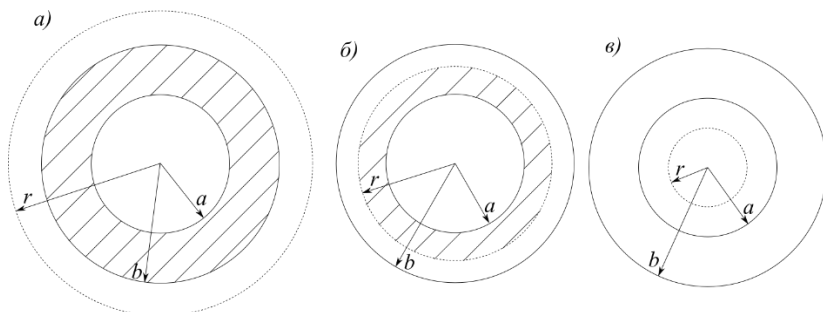


Рис. 1.8. Поперечное сечение произвольной замкнутой сферической поверхности (точечная линия) радиусом r , проходящее через центр сферы: данная сфера радиуса r окружает непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область), расположенный между сферами с радиусами a и b , в случаях: а) $r > b$, б) $a < r < b$, в) $r < a$

Решение. Задача обладает сферической симметрией. При повороте на произвольный угол относительно центра симметрии (центр шара) распределение зарядов не меняется. Следовательно, задачу надо решать в сферических координатах (r, θ, φ) и использовать в качестве замкнутой поверхности из интегральной формы теоремы Гаусса в вакууме (1.13) – сферу, центр симметрии которой совпадает с центром шара (рис. 1.8). В каждой точке замкнутой сферической поверхности модуль напряжённости электростатического поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости перпендикулярен этой поверхности. Левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) в случае сферической симметрии имеет вид (П.2.3) (смотри приложение 2).

Заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.13) согласно (1.11) определяется через интеграл

$$\begin{aligned}
q &= \iiint \rho dV = \iiint \rho dx' dy' dz' = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y' = r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ z' = r' \cos \theta' \\ I = \left| \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(r', \theta', \varphi')} \right| = (r')^2 \sin \theta' \\ dx' dy' dz' = I dr' d\theta' d\varphi' \end{array} \right\} = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho(r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' = \\
&= \int_0^r \rho(r')^2 dr' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' = 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr', \quad (1.16)
\end{aligned}$$

где интегрирование происходит по объёму, в котором расположен заряд. Объёмная плотность заряда ρ зависит от координаты r' , но не зависит от θ' и φ' согласно условию задачи.

При $r < a$ (рис. 1.8в) произвольная замкнутая поверхность не окружает непрерывно распределённый заряд. Следовательно, заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.13) равен нулю:

$$q = 0. \quad (1.17)$$

При $a < r < b$ (рис. 1.8б) произвольная замкнутая поверхность окружает частично непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область). Следовательно, с учётом

(1.16) заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.13) равен:

$$\begin{aligned}
 q &= 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr' = 4\pi \int_0^a 0(r')^2 dr' + 4\pi \int_a^r \alpha(r')^4 dr' = \\
 &= 0 + 4\pi\alpha_0 \int_a^r (r')^4 dr' = \frac{4\pi\alpha_0}{5} (r^5 - a^5). \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

При $r > b$ (рис. 1.8а) произвольная замкнутая поверхность окружает весь непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область). Следовательно, с учётом (1.16) заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.16) равен:

$$\begin{aligned}
 q &= 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr' = \\
 &= 4\pi \int_0^a 0(r')^2 dr' + 4\pi \int_a^b \alpha(r')^4 dr' + 4\pi \int_b^r 0(r')^2 dr' = \\
 &= 0 + 4\pi\alpha_0 \int_a^b (r')^4 dr' + 0 = \frac{4\pi\alpha_0}{5} (b^5 - a^5). \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в зависимости от радиуса r сферической поверхности заряд, находящийся внутри этой поверхности, из выражений (1.17–1.19) равен

$$q = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{4\pi\alpha_0}{5}(r^5 - a^5), & a < r < b, \\ \frac{4\pi\alpha_0}{5}(b^5 - a^5), & r > b. \end{cases} \quad (1.20)$$

Подставляем (П.2.3, 1.20) в теорему Гаусса в интегральном виде (1.13) с учётом ортогональности вектора напряжённости электростатического поля к произвольной сферической поверхности получаем выражение для напряжённости:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{\alpha_0 r^2 \mathbf{r}}{5\epsilon_0} - \frac{\alpha_0 a^5 \mathbf{r}}{5\epsilon_0 r^3}, & a < r < b, \\ \frac{\alpha_0 (b^5 - a^5) \mathbf{r}}{5\epsilon_0 r^3}, & r > b, \end{cases} \quad (1.21)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, проведённый из начала координат в данную точку пространства.

Перед вычислением потенциала (1.5) преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = E \frac{\mathbf{r} d\mathbf{l}}{r} = E \frac{r dr}{r} = E dr. \quad (1.22)$$

Согласно выражению (1.5) с учётом (1.21, 1.22) потенциал равен

$$\varphi(r) = - \int \mathbf{E} d\mathbf{l} + C = - \int E(r) dr + C =$$

$$= \begin{cases} \varphi_1(r) = C_1, & r < a, \\ \varphi_2(r) = -\frac{\alpha_0 r^4}{20\varepsilon_0} - \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 r} + C_2, & a < r < b, \\ \varphi_3(r) = \frac{\alpha_0(b^5 - a^5)}{5\varepsilon_0 r} + C_3, & r > b. \end{cases} \quad (1.23)$$

Постоянные C_1 , C_2 и C_3 в выражении (1.23) находятся из условий нормировки $\left(\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_3(r) = 0\right)$ и непрерывности потенциала $(\varphi_2(b) = \varphi_3(b), \varphi_1(a) = \varphi_2(a))$:

$$\begin{cases} C_3 = 0, \\ C_2 = \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 b} + \frac{\alpha_0 b^4}{20\varepsilon_0}, \\ C_1 = -\frac{\alpha_0 a^4}{4\varepsilon_0} + \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 b} + \frac{\alpha_0 b^4}{20\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23), получаем окончательное выражение для потенциала:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\alpha_0 a^4}{4\varepsilon_0} + \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 b} + \frac{\alpha_0 b^4}{20\varepsilon_0}, & r < a, \\ \frac{\alpha_0(b^4 - r^4)}{20\varepsilon_0} - \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 r} + \frac{\alpha_0 a^5}{5\varepsilon_0 b}, & a < r < b, \\ \frac{\alpha_0(b^5 - a^5)}{5\varepsilon_0 r}, & r > b. \end{cases} \quad (1.25)$$

Ответ: смотри выражения (1.21) и (1.25).

Пример 1.5. Найти напряжённость во всех точках пространства, в котором находится заряд с поверхностной плотностью

$$\sigma = \begin{cases} \alpha, & \rho = R, \\ 0, & \rho \neq R, \end{cases}$$

где $\alpha = \text{const}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние между осью симметрии (ось Z) и данной точкой пространства.

Решение. Задача обладает цилиндрической симметрией. Поворот непрерывного распределения заряда относительно оси симметрии (ось Z) на произвольный угол и перенос данного распределения заряда вдоль этой оси не меняет плотность распределения зарядов. Следовательно, задачу надо решать в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) и использовать в качестве замкнутой поверхности из интегральной формы теоремы Гаусса в вакууме (1.13) – цилиндр, ось симметрии которого совпадает с осью Z (рис. 1.9). В каждой точке боковой цилиндрической поверхности модуль напряжённости электростатического поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости перпендикулярен этой поверхности. Левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.17) в случае цилиндрической симметрии имеет вид (П.2.7) (смотри приложение 2).

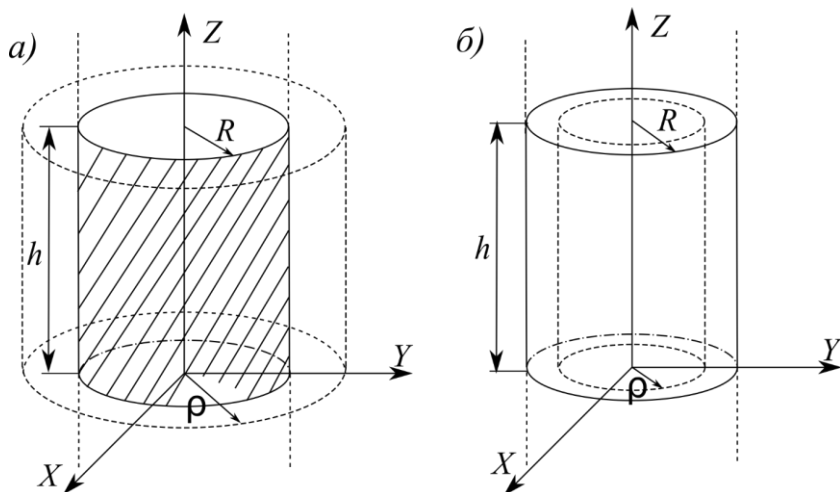


Рис. 1.9. Произвольная замкнутая радиусом ρ цилиндрическая поверхность (пунктирная линия), окружающая непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область), расположенный на цилиндрической поверхности радиуса R , в случаях:
а) $\rho > R$, б) $\rho < R$

При $\rho < R$ (рис. 1.9а) произвольная замкнутая поверхность не окружает непрерывно распределённый заряд. Следовательно, заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.13) равен нулю:

$$q = 0. \quad (1.26)$$

При $\rho > R$ (рис. 1.9б) произвольная замкнутая поверхность окружает полностью непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область). Следовательно, с учётом (1.11) заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (1.13) равен

$$q = \sigma S = 2\pi R h \alpha. \quad (1.27)$$

Таким образом, в зависимости от радиуса ρ боковой поверхности произвольного цилиндра заряд, находящийся внутри этого цилиндра, из выражений (1.26, 1.27) равен

$$q = \begin{cases} 0, & \rho < R, \\ 2\pi R h \alpha, & \rho > R. \end{cases} \quad (1.28)$$

Подставляя (П.2.7, 1.28) в теорему Гаусса в интегральном виде (1.13) с учётом ортогональности напряженности электростатического поля к основаниям произвольного цилиндра, получаем выражение для напряжённости:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & \rho < R, \\ \alpha \mathbf{\rho} / \rho, & \rho > R, \end{cases} \quad (1.29)$$

где $\mathbf{\rho} = (x, y, 0)$ – полярный радиус-вектор, проведённый от оси симметрии (ось Z) в данную точку пространства.

Ответ: смотри выражение (1.29).

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определить положение точки, в которой напряженность равна нулю вблизи двух неодинаковых разноимённых зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии x .

Ответ: если $|q_1| < |q_2|$, то напряжённость равна нулю в точке M_1 ; если $|q_1| > |q_2|$, то напряжённость равна нулю в точке M_2 (рис. 1.10).

$$y_1 = x \frac{\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_2|} - \sqrt{|q_1|}}, \quad y_2 = x \frac{\sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_1|} - \sqrt{|q_2|}}.$$

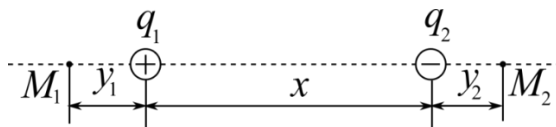


Рис. 1.10.

1.2. Три одинаковых точечных заряда величиной q каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Найти величину точечного заряда Q , который следует поместить в центр масс треугольника, чтобы вся система находилась в равновесии.

Указание к решению: при решении воспользоваться векторной формой закона Кулона (1.1).

Ответ: $Q = -q/\sqrt{3}$.

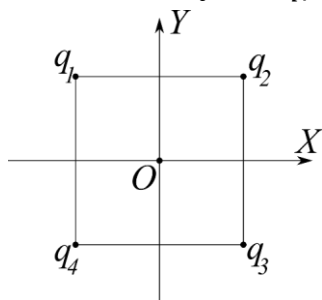


Рис. 1.11.

1.3. В вершинах квадрата со стороной a находятся точечные заряды q_1, q_2, q_3, q_4 (рис. 1.11). Определите напряжённость электростатического поля в центре квадрата в следующих случаях:

- а) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$;
- б) $q_1 = q_3 = q, q_2 = q_4 = -q$;
- в) $q_1 = q_2 = -q, q_3 = q_4 = q$.

Ответ: а) $E_x = E_y = 0$; б) $E_x = E_y = 0$;

в) $E_x = 0, E_y = \sqrt{2}q/(\pi\epsilon_0 a^2)$.

1.4. Тонкое кольцо радиуса R имеет заряд q , неравномерно распределённый по кольцу. Найти работу сил Кулона при перемещении точечного заряда q' из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии l от его центра.

Указание к решению: вычисление потенциала электростатического поля неравномерно заряженного кольца вычисляется по формуле (1.12). В этом случае заряды будут находиться на равном расстоянии от точки наблюдения, поэтому суммарный заряд можно будет вынести за знак интеграла (1.12). Работа сил Кулона рассчитывается по формуле (1.6).

Ответ: $A = \left(1 - 1/\sqrt{1 + (l/R)^2}\right) qq'/4\pi\epsilon_0 R$.

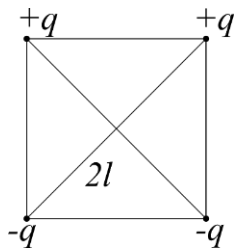


Рис. 1.12.

1.5. В вершинах квадрата с диагональю $2l$ находятся точечные заряды q и $-q$, как показано на рис. 1.12. Найти модуль напряжённости электростатического поля в точке, отстоящей на расстоянии x от центра квадрата и расположенной симметрично относительно вершин квадрата.

Ответ: $E = ql/[\sqrt{2}\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{3/2}]$.

1.6. Равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда λ имеет конфигурации, показанные на рис. 1.13. Радиус закругления R значительно меньше длины нити. Найти модуль напряжённости электрического поля в точке O для конфигураций (а) и (б).

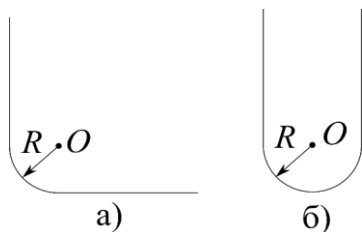


Рис. 1.13.

Указание к решению: при расчёте напряжённости электростатического поля заряженной дуги бесконечно малый заряд лучше представить в виде $dq' = \lambda dl' = \lambda R d\alpha'$, где R – радиус дуги, $d\alpha'$ – бесконечно малый угол, опирающийся

на бесконечно малую дугу dl' . Значение напряжённости заряженной полубесконечной нити было получено в примере 1.2.

Ответ: а) $E = \lambda\sqrt{2}/4\pi\epsilon_0 R$; б) $E = 0$.

1.7. Вычислить потенциал и напряжённость электростатического поля в начале координат от непрерывного распределённого заряда с объёмной плотностью $\rho = \alpha(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $\alpha = \text{const}$, ограниченный плоскостями $6x + 3y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

Указание к решению: при решении появится трёхкратный интеграл. Рассмотрим трёхмерную область V . Снизу и сверху (то есть по высоте) эта область ограничена плоскостями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$. С боковых сторон проекция области V на плоскость XY ограничена кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. И, наконец, по глубине проекция области V на оси X ограничена точками $x = a$ и $x = b$. В этом случае интеграл неизвестной функции $f(x, y, z)$ по области V равен

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz f(x, y, z).$$

В нашем случае объём V ограничен плоскостями $6x + 3y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 1.14) (прямоугольная пирамида). Координаты точек A , B и C на осях находятся из уравнения плоскости $6x + 3y + 2z = 6$. К примеру, точка A лежит на оси X , следовательно, $y = z = 0$, подставляем данные значения в уравнение плоскости, получаем, что $x = 1$, поэтому координаты точки A равны $(1,0,0)$.

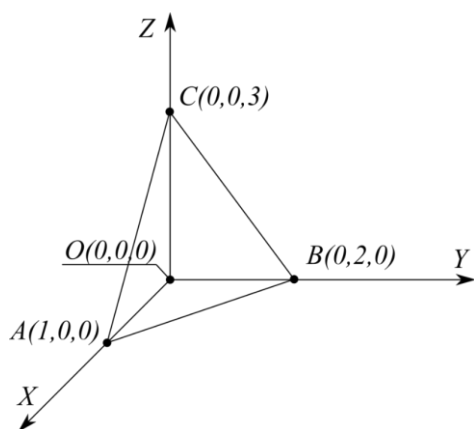


Рис. 1.14.

Область V снизу и сверху (вдоль оси Z) ограничена плоскостями $z_1(x, y) = 0$ и $z_2(x, y) = 3 - 3x - 3y/2$. Поверхность $z_1(x, y)$ соответствует плоскости XY (OAB), а поверхность $z_2(x, y)$ – плоскости $6x + 3y + 2z = 6$ (ABC).

Проекция области V на плоскость XY есть треугольник OAB . Данный треугольник ограничен по бокам линиями $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = 2 - 2x$. Кривая $y_1(x)$ соответствует оси X , а кривая $y_2(x)$ – прямой, определяемой из уравнения плоскости $6x + 3y + 2z = 6$ при $z = 0$.

Проекция области V на ось X лежит между точками O ($x = 0$) и A ($x = 1$). Таким образом, в нашем случае интеграл некоторой функции $f(x, y, z)$ по области V равен

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-3y/2} dz f(x, y, z).$$

Ответ: $\mathbf{E} = \alpha(-1/4, -1/2, -3/4)$, $\varphi = 7\alpha/5$.

1.8. Тонкое заряженное кольцо имеет радиус R . Линейная плотность заряда кольца равна $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$, где φ – азимутальный угол. Найти модуль напряжённости электростатического поля на оси кольца на расстоянии h до его центра.

Ответ: $E = \lambda_0 R^2 / 4\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}$.

1.9. Заряд с поверхностной плотностью $\sigma = \beta z^2 \rho \cos \varphi$, где $\beta = \text{const} > 0$ и (ρ, φ, z) – цилиндрические координаты, расположен на фрагменте конической поверхности, описываемой уравнением $z^2 = x^2 + y^2$, заключённым между плоскостями $z = 1$ и $z = 2$. Определить модуль напряжённости электростатического поля в начале координат.

Указание к решению: перейдём к цилиндрическим координатам (ρ', φ', z') . Для положения точки A на конической поверхности достаточно двух координат: φ' и z' (рис. 1.15). Координату ρ' можно определить из уравнения конической поверхности $((z')^2 = (x')^2 + (y')^2)$ с учётом $x' = \rho' \cos \varphi'$, $y' = \rho' \sin \varphi'$: $\rho' = z'$.

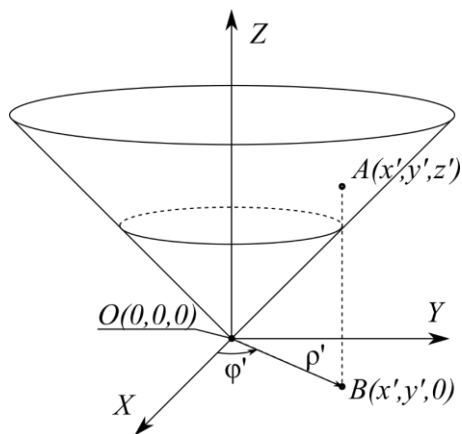


Рис. 1.15.

Напряжённость и потенциал вычисляются с помощью поверхностного интеграла первого рода и перехода к новым координатам. По определению поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S равен двойному интегралу от функции $f(u, v)$

в некоторой области определения $D(u, v)$:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{D(u, v)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv, \end{aligned}$$

где u, v – это новые координаты интегрирования; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор.

В нашем случае старые координаты (x, y, z) – это (x', y', z') ; новые координаты (u, v) – это (φ', z') ; радиус-вектор элементарного заряда $\mathbf{r}' = (x', y', z') = (z' \cos \varphi', z' \sin \varphi', z')$.

Ответ: $E = 7\beta/24\epsilon_0$.

1.10. Шар радиусом R имеет заряд, распределенный с объёмной плотностью $\rho = \mathbf{a}\mathbf{r}$, где \mathbf{a} – постоянный вектор, \mathbf{r}

– радиус-вектор, проведённый из центра шара. Найти напряжённость электростатического поля в центре шара.

Указание к решению: постоянный вектор \mathbf{a} лучше направить вдоль оси Z . При переходе к сферической системе координат (r', θ', φ') объёмная плотность заряда будет равна $\rho = \mathbf{a}\mathbf{r}' = ar' \cos \theta'$.

Ответ: $\mathbf{E} = -\mathbf{a}R^2/6\epsilon_0$.

1.11. Найти модуль напряжённости электростатического поля непрерывно распределённого заряда с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$, где ρ_0 и α – положительные постоянные, r – расстояние от центра системы.

Ответ: $E = \rho_0(1 - \exp(-\alpha r^3))/(3\alpha\epsilon_0 r^2)$.

1.12. Найти напряжённость во всех точках пространства, в котором находится заряд, распределённый с объёмной плотностью

$$\rho = \begin{cases} \alpha r^2, & \alpha = \text{const} > 0, \quad 0 \leq r < a, \\ \beta/r, & \beta = \text{const} > 0, \quad a \leq r < b, \\ 0, & b \leq r < \infty, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние между осью симметрии (ось Z) и данной точкой пространства.

Ответ:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} (\alpha a^4/4 + \beta(b-a))\mathbf{r}/r^2\epsilon_0, & r > b, \\ (\alpha a^4/4 - \beta a)\mathbf{r}/(r^2\epsilon_0) + \beta\mathbf{r}/(r\epsilon_0), & a < r < b, \\ \alpha r^2\mathbf{r}/(4\epsilon_0), & r < a, \end{cases}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ – полярный радиус-вектор, проведённый от оси симметрии (ось Z) в данную точку пространства.

1.13. Найти модуль напряжённости во всех точках пространства, в котором находится заряд, распределенный с поверхностной плотностью

$$\sigma = \begin{cases} \alpha, & \alpha = \text{const} > 0, \quad r = R, \\ 0, & r \neq R, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние между началом координат и данной точкой пространства, и заряд с линейной плотностью

$$\lambda = \begin{cases} \beta, & \beta = \text{const} > 0, \quad \rho = 0, \\ 0, & \rho \neq 0, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние между осью симметрии (ось Z) и данной точкой пространства.

Ответ:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0 r} \sqrt{\alpha^2 R^4 + \frac{\beta^2}{4\pi^2 \sin^2 \theta} + \frac{\alpha \beta R^2}{\pi}}, & r \geq R, \\ \frac{\beta}{2\pi \varepsilon_0 r \sin \theta}, & 0 \leq r < R, \end{cases}$$

где $\theta = \arcsin(\rho/r)$ – угол между осью Z и радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

1.14. Найти в области $r > R$ модуль напряжённости электростатического поля заряда с объёмной плотностью

$$\rho = \begin{cases} \alpha, & \alpha = \text{const} > 0, & r \leq R, \\ \beta/r, & \beta = \text{const} > 0, & r > R, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние между началом координат и данной точкой пространства. Найти постоянную α , при которой модуль напряжённости электростатического поля в области $r > R$ не зависит от r .

$$\text{Ответ: } E = \beta/2\varepsilon_0 + (2\alpha R^3/3 - \beta R^2)/2\varepsilon_0 r^2, \\ \alpha = 3\beta/2R.$$

1.15. Найти напряжённость электростатического поля во всех точках пространства, в котором заряд распределён с объёмной плотностью

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - r/R), & \rho_0 = \text{const} > 0, & r \leq R, \\ 0, & & r > R, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние между началом координат и данной точкой пространства. Найти максимальное значение модуля напряжённости E_{\max} и соответствующее ему значение r_{\max} .

Указание к решению: условием максимума является выполнение следующих условий

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_{\max}} = 0, \quad \left. \frac{d^2E}{dr^2} \right|_{r=r_{\max}} < 0.$$

Ответ:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R} \right), & 0 \leq r < R, \\ \frac{\rho_0 R^3 \mathbf{r}}{12\varepsilon_0 r^3}, & r \geq R, \end{cases} \\ E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}, \quad r_{\max} = \frac{2R}{3},$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, проведённый из начала координат в данную точку пространства.

2. Электростатическое поле при наличии проводников

2.1. Теоретический материал

Вещество состоит из положительно заряженных атомных ядер и отрицательно заряженных электронов. Заряды этих частиц возбуждают электромагнитные поля, накладывающиеся на внешнее поле, в которое внесено вещество. Наложением таких полей и определяется электромагнитное поле в веществе. Поле в промежутках между атомами и электронами, а также внутри частиц необычно сложно меняется в пространстве и во времени. Такое поле называется микроскопическим, или, короче, микрополем. Такое поле нельзя измерить путём внесения в вещество пробного заряда, так как наименьший элементарный заряд (заряд электрона) существенно исказил бы микрополе и распределение электричества в атомной системе. Таким образом, определение напряжённостей микрополей встречает определённую трудность. Более того, для решения макроскопических задач такое поле и вовсе не нужно. На практике используется макрополе – усреднённое в пространстве микрополе. Усреднение происходит по физически бесконечно малому объёму – объёму, содержащему большое число атомов, но имеющему размеры во много раз меньше, чем те расстояния, на которых макрополе меняется заметно. Усреднение по таким объёмам сглаживает быстро меняющиеся изменения макрополя на расстояниях порядка атомных, но сохраняет плавные изменения макрополя на макроскопических расстояниях.

Все проводники (например, металлы) хорошо проводят электрический ток, так как в них имеются свободные

носители заряда, которые могут перемещаться в пределах тела на какие угодно расстояния, но не могут покидать поверхность тела. Во внешнем электростатическом поле внутри проводника макроскопическое результирующее электростатическое поле равно нулю. Из теоремы Гаусса (1.13) следует, что заряд может располагаться только на поверхности, а не внутри проводника. Данные поверхностные заряды называются индуцированными. Явление, при котором возникают на поверхности индуцированные заряды при внесении проводника во внешнее электростатическое поле, называется электростатической индукцией. Согласно связи напряжённости и потенциала электростатического поля (1.4) потенциал во всех точках проводника принимает одно и то же значение, поэтому поверхность проводника является эквипотенциальной. Следовательно, линии напряжённости направлены по нормали к поверхности проводника.

В некоторых случаях удобнее поверхность проводника с заданным потенциалом заменить системой фиктивных зарядов – “изображений”, поле которых имеет эквипотенциальную поверхность, совпадающую с поверхностью данного проводника. В области вне проводника поле фиктивных зарядов полностью моделирует поле, создаваемое поверхностными зарядами, расположенными на проводнике, так что поле вне проводника полностью совпадает с полем исходной системы. В этом заключается суть метода изображения (или метода зеркальных отображений). Применение метода изображения разобрано в примерах 2.2 и 2.3.

Снаружи проводника вблизи какой-то точки его поверхности напряжённость электростатического поля E связана с поверхностной плотностью заряда σ в данной точке поверхности проводника следующим соотношением:

$$E = \sigma \mathbf{n} / \varepsilon_0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности проводника в данной точке, проведённая наружу проводника.

Уединённый проводник – это проводник, который удалён от других проводников, тел и зарядов. Электроёмкость (ёмкость) C уединённого проводника определяется зарядом q , сообщение которого проводнику изменяет его потенциал φ на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.2)$$

Ёмкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Ёмкость также не зависит от заряда проводника и его потенциала.

Единица электроёмкости – фарад (Ф): 1 Ф – ёмкость такого уединённого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Из формул (1.3) и (2.2) следует, что единица электрической постоянной ε_0 – фарад на метр (Ф/м).

Уединённые проводники обладают малой ёмкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет ёмкость всего

700 мкФ. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливали бы на себе заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых конденсаторами, положен тот факт, что ёмкость проводника возрастает при приближении к нему другого проводника. Действительно, под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесённом к нему другом проводнике возникают индуцированные заряды. Заряды противоположного знака располагаются ближе к проводнику, чем одноимённые, и, следовательно, потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле (2.2) это означает увеличение ёмкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называются обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали воздействия на ёмкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было полностью сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы.

Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии напряжённости начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, свободные заряды, возникающие на разных обкладках, имеют

одинаковую величину и различны по знаку. Под ёмкостью конденсатора C понимается физическая величина, пропорциональная заряду q и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками $\Delta\varphi$ (падение напряжения или напряжение на конденсаторе $U = \Delta\varphi$):

$$C = \frac{q}{U}. \quad (2.3)$$

Величина ёмкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок, величиной зазора между ними), а также средой, заполняющей пространство между обкладками.

Энергия заряженного конденсатора равна

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}, \quad (2.4)$$

где C – ёмкость конденсатора, U – разность потенциалов между обкладками конденсатора или напряжение на конденсаторе, q – заряд конденсатора.

Потенциальная энергия взаимодействия системы неподвижных точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i, \quad (2.5)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда q_i всеми зарядами, кроме i -го.

Если заряды распределены неравномерно, то, разлагая систему зарядов на совокупность элементарных зарядов dq

и переходя от суммирования (2.5) к интегрированию, получаем:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq, \quad (2.6)$$

где φ – потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в месторасположении заряда dq .

Выражение (2.6) описывает полную энергию всех зарядов, которая равна сумме собственных энергий и энергий взаимодействий. Собственная энергия заряженного тела – это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом. Энергия взаимодействия двух заряженных тел – это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

2.2. Примеры решения задач

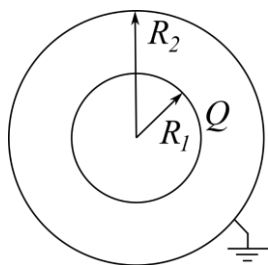


Рис. 2.1.

Пример 2.1. Из двух концентрических металлических сфер с радиусами $R_1 < R_2$. Внешняя сфера заземлена, а внутренней сообщён заряд Q (рис. 2.1). Найти напряжённость электростатического поля во всём пространстве.

Решение. Под действием электростатического поля заряда Q , расположенного на внешней поверхности сферы радиуса R_1 , на сферу с радиусом R_2 из Земли перетекает Q_2 таким образом, что потенциал сферы с радиусом R_2 стал равен нулю.

Напряжённость электростатического поля от двух концентрических металлических сфер, которую можно получить из теоремы Гаусса (1.17) в случае сферической симметрии (П.2.3), равна

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ Q, & R_1 < r < R_2, \\ Q + Q_2, & r > R_2, \end{cases} \quad (2.7)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведённый от центра концентрических сфер до данной точки пространства.

Выражение для потенциала можно определить с помощью формул (1.5, 1.22, 2.7) и условий непрерывности и нормировки:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right), & r < R_1, \\ \varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right), & R_1 < r < R_2, \\ \varphi_3(r) = \frac{Q + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R_2. \end{cases}$$

Неизвестный заряд Q_2 найдём из равенства нулю потенциала сферы с радиусом R_2 ($\varphi_2(R_2) = \varphi_3(R_2) = 0$): $Q_2 = -Q$. Выражение для напряжённости электростатического поля (2.7) с учётом $Q_2 = -Q$ равно

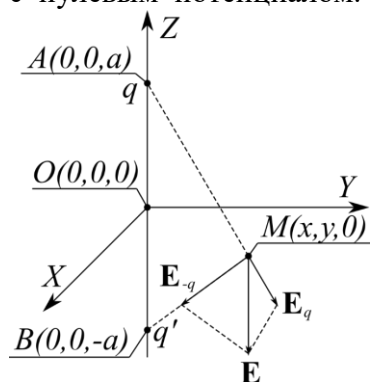
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ Q, & R_1 < r < R_2, \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ответ: смотри выражение (2.8).

Пример 2.2. Точечный заряд q находится на расстоянии a от заземлённой проводящей плоскости. Определите напряжённость поля, создаваемого зарядом q и индуцированными на проводнике зарядами, поверхностную плотность индуцированных зарядов σ и модуль силы взаимодействия заряда q с проводящей плоскостью.

Решение. Под действием электростатического поля точечного заряда q на заземлённой проводящей плоскости будет индуцироваться поверхностный заряд σ . Потенциал проводящей плоскости равен нулю, так как по условию задачи она заземлена. Заряды будут течь (или стекать) на поверхность проводника из Земли.

Легко придумать другую задачу, в которой будет присутствовать плоская эквипотенциальная поверхность с нулевым потенциалом. Действительно, рассмотрим поле, создаваемое двумя точечными зарядами q и $q' = -q$, находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 2.2). В произвольной точке плоскости (точка M на плоскости XY) потенциал равен нулю, так как эта точка находится на равном расстоянии от двух зарядов равных по величине и противоположных по



знаку, согласно принципу суперпозиции для точечных зарядов (1.11). Таким образом, с помощью метода изображений

Рис. 2.2.

заземлённую проводящую плоскую поверхность можно заменить точечным фиктивным зарядом $q' = -q$, который находится на прямой, проходящей через точечный заряд q и перпендикулярной проводящей плоской поверхности, на таком же расстоянии от поверхности, что и точечный заряд q .

Напряжённость электрического поля в точке наблюдения $\mathbf{r} = (x, y, z)$, находящейся в пространстве над проводящей плоскостью, от двух точечных зарядов (рис. 2.2), с учётом принципа суперпозиции для точечных зарядов (1.10), равна

$$\mathbf{E} = \frac{q(x, y, z - a)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{3/2}} - \frac{q(x, y, z + a)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + (z + a)^2)^{3/2}}. \quad (2.9)$$

Снаружи проводника вблизи точки $M(x, y, 0)$ (рис. 2.2) его поверхности напряжённость электрического поля равна

$$\mathbf{E} = -\frac{q(0, 0, a)}{2\pi\epsilon_0(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.10)$$

Согласно (2.1) и (2.10) поверхностная плотность заряда на проводящей поверхности равна

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Модуль силы взаимодействия заряда q с проводящей плоскостью равен модулю силы Кулона (1.1) взаимодействия между зарядом q и его изображением q' :

$$F = \frac{|qq'|}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}. \quad (2.12)$$

Ответ: смотри выражения (2.10-2.12).

Пример 2.3. Точечный заряд q находится на расстоянии b от центра заземлённой проводящей сферы радиуса $r < b$. Определите модуль силы взаимодействия точечного заряда q с проводящей сферой.

Решение. Прежде чем приступить к рассмотрению следующей группы задач, связанных с описанием взаимодействия точечного заряда и проводящей сферы, решим одну вспомогательную задачу. Пусть электростатическое поле создается двумя точечными зарядами, находящимися на расстоянии L друг от друга. Величины и знаки зарядов различны и равны $-q_1$ и q_2 ($q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 < q_2$). Покажем, что поверхность нулевого потенциала этого поля представляет собой сферу.

Если положение первого заряда $-q_1$ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_1 = (0,0,0)$ (точка O), а положение второго заряда q_2 – радиус-вектором $\mathbf{r}_2 = (0, L, 0)$ (точка B) (рис. 2.3), то потенциал от этих двух зарядов в произвольной точке наблюдения $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (точка M) согласно принципу суперпозиции для точечных зарядов (1.11), равен

$$\varphi = \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + (y-L)^2 + z^2}}. \quad (2.13)$$

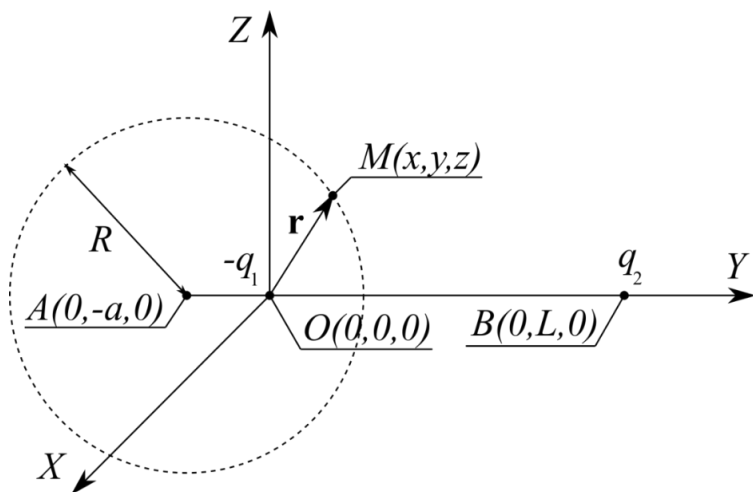


Рис. 2.3.

Пусть $\varphi = 0$. Тогда выражение (2.13) преобразуется в уравнение

$$x^2 + \left(y + \frac{q_1^2 L}{q_2^2 - q_1^2}\right)^2 + z^2 = \frac{q_1^2 q_2^2 L^2}{(q_2^2 - q_1^2)^2}.$$

Получили уравнение сферы с центром в точке $A(0, -a, 0)$, где $a = q_1^2 L / (q_2^2 - q_1^2)$, и радиусом $R = q_1 q_2 L / (q_2^2 - q_1^2)$ (рис. 2.3). Таким образом, существует эквипотенциальная поверхность нулевого потенциала в виде сферы от двух точечных разных по знаку и модулю зарядов. Согласно методу изображения, если данную эквипотенциальную поверхность заменить заземлённой

проводящей сферой, то электрическое поле снаружи проводящей сферы не изменится. По условию задачи известно только расстояние от точечного заряда $q = q_2$ до центра сферы $b = L + a$ и радиус сферы $r = R$. Выразим через данные параметры величину заряда-изображения $q' = -q_1$ и расстояние a :

$$q' = -\frac{qr}{b}, \quad a = \frac{r^2}{b}.$$

Модуль силы взаимодействия заряда q с проводящей сферой равен модулю силы Кулона (1.1) взаимодействия между зарядом q и его изображением q' :

$$F = \frac{|qq'|}{4\pi\epsilon_0(b-a)^2} = \frac{q^2rb}{4\pi\epsilon_0(b^2-r^2)^2}.$$

Ответ: $F = q^2rb/4\pi\epsilon_0(b^2 - r^2)^2$.

Пример 2.4. Два параллельных провода одинаковых радиусов сечения расположены в вакууме. Радиус много меньше длины провода и в η раз меньше расстояния между проводами. Найти ёмкость проводов на единицу их длины при условии, что $\eta \gg 1$.

Решение. Зарядим мысленно оба провода одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами так, чтобы на единицу длины приходился заряд λ . Тогда, по определению (2.3), ёмкость параллельных проводов в вакууме на единицу длины (удельная ёмкость) равна

$$C_{\text{ед}} = \frac{\lambda}{\Delta\varphi}, \quad (2.14)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между проводами.

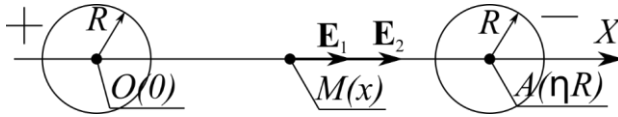


Рис. 2.4.

Введём декартовую систему координат, ось X которой направим вдоль прямой, соединяющей точки на осях проводов, которые лежат в плоскости, перпендикулярной осям этих проводов (рис. 2.4). Из теоремы Гаусса (1.13) следует, что напряжённость электростатического поля от равномерно заряженной бесконечной цилиндрической поверхности радиусом R с учётом (П.4.7) равна

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\lambda \mathbf{\rho}}{2\pi\epsilon_0 \rho^2}, & \rho > R, \\ 0, & \rho < R, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\mathbf{\rho}$ – полярный радиус-вектор, проведённый от оси симметрии (ось Z) в данную точку пространства и направленный перпендикулярно данной оси симметрии, λ – заряд на единицу длины вдоль оси симметрии заряженной поверхности. В этом случае результирующая напряжённость электростатического поля в точке M (рис. 2.4), согласно принципу суперпозиции (1.8), равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda \mathbf{e}_x}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda \mathbf{e}_x}{2\pi\epsilon_0(\eta R - x)},$$

где \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 – напряжённость от левого (положительного) и правого (отрицательного) проводов соответственно, которые определяются по формуле (2.15), \mathbf{e}_x – единичный вектор вдоль оси X .

Следовательно, разность потенциалов, согласно (1.5), определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \int \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_R^{(\eta-1)R} E dx = \\ &= \int_R^{(\eta-1)R} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(\eta R - x)} \right) dx = \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln(\eta - 1) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\eta.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Из (2.14) и (2.16) следует, что $C_{\text{ед}} = \pi\epsilon_0/\ln\eta$.

Ответ: $C_{\text{ед}} = \pi\epsilon_0/\ln\eta$.

Пример 2.5. Имеется проводящий шар радиуса r_1 и концентрическая с ним сферическая проводящая оболочка, внутренняя поверхность которой имеет радиус r_2 ($r_2 > r_1$), а внешняя – радиус r_3 ($r_3 > r_1$). Заряды шара и оболочки равны соответственно q_1 и q_2 . Найти энергию этой системы

зарядов и потенциальную энергию взаимодействия проводящего шара со сферической оболочкой.

Решение. Заряд шара q_1 располагается на поверхности, так как внутри проводника избыточных зарядов в электростатическом поле нет. Заряд на сферической оболочке разделяется на два заряда: заряд на внутренней поверхности, который равен $-q_1$ согласно теореме Гаусса (1.13); заряд на внешней поверхности, который равен $q_1 + q_2$, согласно закону сохранения заряда. Из теоремы Гаусса (1.13) для сферической симметрии (П.2.3) следует, что

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < r_1, \\ \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, & r_1 < r < r_2, \\ 0, & r_2 < r < r_3, \\ \frac{(q_1 + q_2) \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, & r > r_3, \end{cases} \quad (2.17)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый от центра шара до данной точки пространства.

Выражение для потенциала можно определить с помощью формул (1.5, 1.22, 2.17) и условий непрерывности и нормировки:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_1 + q_2}{r_3} - \frac{q_1}{r_2} \right), & r < r_1, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_1 + q_2}{r_3} - \frac{q_1}{r_2} \right), & r_1 < r < r_2, \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3}, & r_2 < r < r_3, \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > r_3. \end{cases} \quad (2.18)$$

Полная энергия, согласно (2.6) и с учётом (2.18), равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{q_1} \varphi(r_1) dq' + \frac{1}{2} \int_{-q_1} \varphi(r_2) dq' + \frac{1}{2} \int_{q_1+q_2} \varphi(r_3) dq' = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(q_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(q_1 + q_2)^2}{r_3} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для того чтобы вычислить собственную энергию проводящего шара, нужно рассчитать энергию (2.6) без сферической проводящей оболочки:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{q_1} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} dq' = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (2.20)$$

Аналогично вычисляется собственная энергия сферической проводящей оболочки без проводящей сферы:

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{-q_1} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3} dq' + \frac{1}{2} \int_{q_1+q_2} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3} dq' = \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 r_3}. \quad (2.21)$$

Потенциальная энергия взаимодействия системы проводников равна полной энергии системы (2.19) минус собственной энергии всех проводников (2.20) и (2.21):

$$W_{12} = W - W_1 - W_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(q_1^2 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{2q_1 q_2}{r_3} \right). \quad (2.22)$$

Ответ: смотри выражения (2.19) и (2.22).

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра незаряженного проводящего шара. Найти потенциал данного шара.

Ответ: $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$.

2.2. Найти потенциал в центре незаряженной проводящей оболочки, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно a и b , если от центра оболочки на расстоянии $r < a$ находится точечный заряд q .

Ответ: $\varphi = (q/(4\pi\epsilon_0))(1/r - 1/a + 1/b)$.

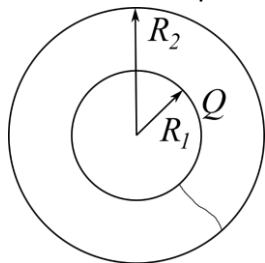


Рис. 2.5.

2.3. Имеются две концентрические сферы с радиусами $R_1 < R_2$ (рис. 2.5). Внутренней сфере сообщили заряд Q , после чего данную сферу соединили проводником с внешней сферой. Найти напряжённость электростатического поля во всём пространстве.

Ответ:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{cases} 0, & r < R_2, \\ Q, & r > R_2, \end{cases}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый от центра концентрических сфер до данной точки пространства.

2.4. В центре двух концентрических равномерно заряженных сфер с радиусами R_1 и R_2 потенциал равен φ_0 . Поверхностные плотности зарядов на обеих сферах равны. Найти данную поверхностную плотность заряда.

Ответ: $\sigma = \epsilon_0 \varphi_0 / (R_1 + R_2)$.

2.5. Две концентрические проводящие сферы с радиусами R и $2R$ заряжены так, что на внутренней сфере – заряд q , а на внешней – $2q$. На расстоянии $3R$ от центра сфер потенциал равен φ . Найти R .

Ответ: $R = q / (4\pi\epsilon_0 \varphi)$.

2.6. Над проводящей плоскостью на расстоянии l расположены два точечных заряда, q и $-q$, расстояние между которыми равно l . Найти действующий на заряд q модуль силы Кулона.

Ответ: $F = (2\sqrt{2} - 1)q^2 / (32\pi\epsilon_0 l^2)$.

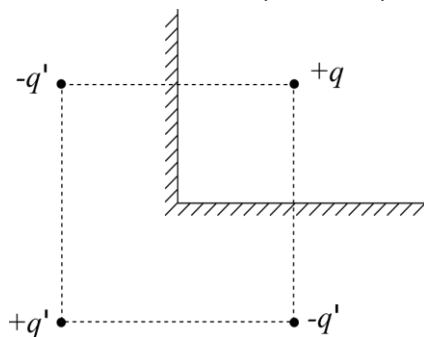


Рис. 2.6.

2.7. Между двумя заземлёнными проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями на расстоянии l от каждой полуплоскости расположен точечный заряд q . Найти модуль силы Кулона, действующей на заряд q .

Указание к решению: две заземлённые проводящие взаимно перпендикулярные полуплоскости совпадают с эквипотенциальными поверхностями от четырёх зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной $2l$ (рис. 2.6), где $q' = q$ – модуль фиктивного заряда (или заряда-изображения). Потенциал в каждой точке полуплоскости равен нулю, так как заряды противоположных знаков находятся на равном расстоянии от данной точки согласно (1.10).

Ответ: $F = (2\sqrt{2} - 1)q^2 / (32\pi\epsilon_0 l^2)$.

2.8. Точечный заряд q находится на расстоянии b от центра изолированной незаряженной проводящей сферы радиуса $r < b$. Определите модуль силы взаимодействия заряда q с проводящей сферой.

Указание к решению: если шар изолирован, то его потенциал равен $q / (4\pi\epsilon_0 b)$. Поскольку заряд-изображение $q' = -qr/b$ обеспечивает равенство потенциала сферы нулю, то для увеличения её потенциала до нужного значения надо добавить в центр шара точечный заряд q'' такой, чтобы потенциал сферы стал равен $q / (4\pi\epsilon_0 b)$.

Ответ: $F = (rq^2 / (4\pi\epsilon_0))(b / (b^2 - r^2)^2 - 1 / b^3)$.

2.9. Точечный заряд q находится на расстоянии b от центра изолированной заряженной проводящей сферы радиуса $r < b$. Заряд сферы равен Q . Определите модуль силы взаимодействия заряда q с проводящей сферой.

Ответ: $F = (rq / (4\pi\epsilon_0))(qb / (b^2 - r^2)^2 - Q / b^3)$.

2.10. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной заземлённой проводящей плоскости. Найти работу, которую совершит сила Кулона, действующая

на заряд q при его медленном удалении на очень большое расстояние от плоскости.

Ответ: $A = -q^2/(16\pi\epsilon_0 l)$.

2.11. Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно d .

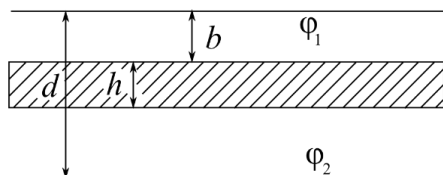


Рис. 2.7.

В пространство между обкладками конденсатора вносится металлическая пластина толщиной h , поверхность которой параллельна обкладкам и находится на расстоянии

b от одной из обкладок (рис. 2.7). Пластины конденсатора имеют потенциалы φ_1 и $\varphi_2 < \varphi_1$. Найти потенциал φ металлической пластины.

Ответ: $\varphi = \varphi_1 - b(\varphi_1 - \varphi_2)/(d - h)$.

2.12. Из трёх параллельных металлических пластинок A ,

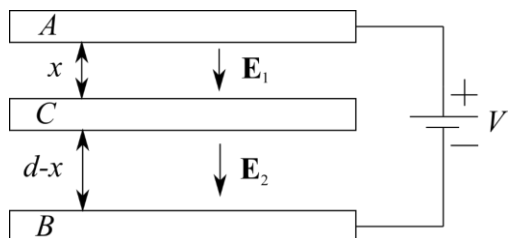


Рис. 2.8.

B и C (рис. 2.8) крайние A и B неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов V между ними

постоянной.

Средняя пластинка C сначала находится в контакте с верхней пластинкой A . Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке.

Пренебрегая краевыми эффектами, найти модули напряжённости полей E_1 и E_2 в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния x .

Указание к решению: для расчёта напряжённостей E_1 и E_2 необходимо составить два уравнения. Первое уравнение связывает E_1 и E_2 с напряжением батареи V через разности потенциалов с помощью выражения (1.5) между металлическими пластинами. Второе уравнение связывает E_1 и E_2 через теорему Гаусса (1.13). Для теоремы Гаусса в качестве замкнутой поверхности взять цилиндр, торцы которого параллельны металлическим плоскостям. Верхний торец цилиндра расположен между пластинами A и C , нижний торец цилиндра – между пластинами C и B .

Ответ: $E_1 = Vx/d^2$, $E_2 = V(x + d)/d^2$.

2.13. Найти взаимную ёмкость системы из двух одинаковых металлических шаров радиуса a , центры которых находятся на расстоянии b .

Ответ: $C = 2\pi\epsilon_0 a(b - a)/(b - 2a)$.

2.14. Найти взаимную ёмкость системы из металлического шара радиуса a и безграничной проводящей плоскости, отстоящей от центра шарика на расстоянии b .

Ответ: $C = 2\pi\epsilon_0 a(b - a)/(b - 2a)$.

2.15. Длинный прямой провод с радиусом сечения a расположен параллельно проводящей плоскости на расстоянии b . Найти ёмкость системы на единицу их длины.

Ответ: $C_{\text{ед}} = 2\pi\epsilon_0 / \ln((2b - a)/a)$.

2.16. Заряд q распределён равномерно по поверхности сферы радиуса R . Найти собственную электрическую энергию системы.

Ответ: $W = q^2 / (8\pi\epsilon_0 R)$.

2.17. В вершинах квадрата со стороной a находятся точечные заряды q_1, q_2, q_3, q_4 . Найти потенциальную энергию этой системы зарядов.

Указание к решению: при решении воспользоваться формулой потенциальной энергии точечных зарядов (2.5).

Ответ: $W = (1/(4\pi\epsilon_0 a))(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + (q_1 q_3 + q_2 q_4)/\sqrt{2})$.

2.18. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесграничной проводящей плоскости. Найти полную энергию этой системы.

Ответ: $W = -q^2 / (16\pi\epsilon_0 h)$.

2.19. Равномерно заряженная зарядом q сферическая оболочка расширяется от радиуса R_1 до радиуса R_2 . Найти работу сил Кулона.

Ответ: $A = (q^2 / (8\pi\epsilon_0))(1/R_1 - 1/R_2)$.

2.20. Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью S и расстоянием между ними d заряжен до разности потенциалов U и отключён от батареи. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между его пластинами на Δx ?

Указание к решению: при решении воспользоваться формулой энергии заряженного конденсатора (2.4).

Ответ: $A = \epsilon_0 S \Delta x U^2 / (2d^2)$.

3. Электростатическое поле при наличии диэлектриков

3.1. Теоретический материал

Диэлектриками (или изоляторами) называют вещества, практически не проводящие электрического тока. Это значит, что в диэлектриках в отличие, например, от проводников нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток. Под действием внешнего электростатического поля происходит поляризация диэлектрика – смещение положительных и отрицательных зарядов диэлектрика по полю и против поля соответственно. В результате поляризации на поверхности диэлектрика и в его объёме появляются не скомпенсированные заряды – поляризационные или связанные заряды, которые входят в состав диэлектрика. Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, называются сторонними. Эти заряды могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика. Таким образом, напряжённость электростатического поля при наличии диэлектриков равна суперпозиции полей сторонних и связанных зарядов в вакууме. Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются вектором поляризации \mathbf{P} – дипольный момент единицы объёма диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора поляризации: дивергенция вектора поляризации \mathbf{P} в точке наблюдения равна с обратным знаком объёмной плотности связанных зарядов ρ' в данной точке:

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho'. \quad (3.1)$$

Граничные условия для вектора поляризации: связь между векторами поляризации по разные стороны от границы раздела двух диэлектриков определяется следующим образом:

$$\mathbf{n}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \sigma', \quad (3.2)$$

где \mathbf{P}_1 – вектор поляризации в первом диэлектрике, \mathbf{P}_2 – вектор поляризации во втором диэлектрике, \mathbf{n} – нормаль к границе раздела, направленный от первого диэлектрика во второй диэлектрик, σ' – поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела двух диэлектриков.

Вектор электрической индукции \mathbf{D} (вектор электрического смещения) определяется по формуле

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.3)$$

где \mathbf{E} – напряжённость электростатического поля сторонних и связанных зарядов. Вектор \mathbf{D} является вспомогательным вектором, не имеющим какого-либо глубокого физического смысла.

Интегральная форма теоремы Гаусса при наличии диэлектриков: поток вектора электрической индукции \mathbf{D} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен электрическому стороннему заряду q в объёме, охватываемом данной поверхностью S :

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q. \quad (3.4)$$

Преобразование левой части уравнения теоремы Гаусса для вектора **D** (3.6) аналогично преобразованию левой части уравнения теоремы Гаусса для вектора **E** (1.13).

В случаях: 1) слабого внешнего электростатического поля, напряжённость которого очень мала по сравнению с напряжённостью поля внутри атома ($E_{\text{ат}} \sim 10^{10}$ В/м); 2) изотропного диэлектрика; 3) не электрета (электрет — диэлектрик, длительное время сохраняющий поляризованное состояние после снятия внешнего электрического поля) — связь между векторами напряженности **E** и электрической индукции **D** имеет вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, которая показывает во сколько раз напряжённость электростатического поля в вакууме больше напряжённости электростатического поля в диэлектрике.

Граничные условия для векторов напряженности и электрического смещения:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{n}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (3.6)$$

где **E**₁ и **D**₁ — соответственно вектора напряжённости и электрической индукции в первом диэлектрике, **E**₂ и **D**₂ — соответственно вектора напряжённости и электрической индукции во втором диэлектрике, **τ** — вектор касательной, лежащий на границе раздела между двумя диэлектриками, **n** — единичный вектор нормали к границе раздела, направленный от первого диэлектрика во второй диэлектрик, σ — поверхностная плотность сторонних зарядов на границе раздела.

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.1. Диэлектрик имеет вид сферической оболочки, внутренний и внешний радиусы которого равны a и b . Диэлектрик заряжен сторонними зарядами с объёмной плотностью $\rho = \alpha r$, $\alpha = \text{const}$. Диэлектрическая проницаемость среды равна $\varepsilon = \beta r$, $\beta = \text{const}$. Найти поверхностную и объёмную плотности связанных зарядов.

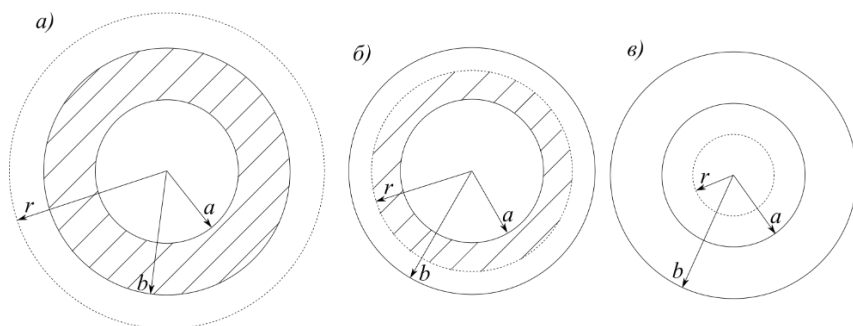


Рис. 3.1. Поперечное сечение произвольной замкнутой сферической поверхности (точечная линия) радиусом r , проходящее через центр сферы: сфера радиуса r окружает непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область), расположенный между сферами с радиусами a и b , в случаях: а) $r > b$, б) $a < r < b$, в) $r < a$

Решение. Задача обладает сферической симметрией. При повороте на произвольный угол относительно центра симметрии (центр сферической оболочки) распределение зарядов не меняется. Следовательно, задачу надо решать в сферических координатах (r, θ, φ) и использовать в качестве замкнутой поверхности из интегральной формы теоремы Гаусса при наличии диэлектриков (3.4) сферу, центр симметрии которой совпадает с центром сферической

оболочки (рис. 3.1). В каждой точке замкнутой сферической поверхности модуль электрической индукции принимает постоянное значение, а вектор электрической индукции перпендикулярен этой поверхности. Левая часть уравнения теоремы Гаусса (3.4) в случае сферической симметрии имеет вид (П.2.3) (смотри приложение 2) при замене вектора **E** на вектор **D**.

Заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (3.4), согласно (1.11), определяется через интеграл

$$\begin{aligned}
 q &= \iiint \rho dV = \iiint \rho dx' dy' dz' = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} x' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y' = r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ z' = r' \cos \theta' \\ I = \left| \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(r', \theta', \varphi')} \right| = (r')^2 \sin \theta' \\ dx' dy' dz' = I dr' d\theta' d\varphi' \end{array} \right\} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho(r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' = \\
 &= \int_0^r \rho(r')^2 dr' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' = 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr', \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

где интегрирование происходит по объёму, в котором расположен заряд. Объёмная плотность ρ зависит от координаты r' , но не зависит от θ' и φ' согласно условию задачи.

При $r < a$ (рис. 3.1в) произвольная замкнутая поверхность не окружает непрерывно распределённый заряд. Следовательно, заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (3.4) равен нулю:

$$q = 0. \quad (3.8)$$

При $a < r < b$ (рис. 3.1б) произвольная замкнутая поверхность окружает частично непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область). Следовательно, с учётом (3.7) заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (3.4) равен:

$$\begin{aligned} q &= 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr' = 4\pi \int_0^{R_1} 0(r')^2 dr' + 4\pi \int_{R_1}^r \alpha r' dr' = \\ &= 0 + 4\pi \alpha \int_{R_1}^r r' dr' = 2\pi \alpha (r^2 - a^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При $r > b$ (рис. 3.1а) произвольная замкнутая поверхность окружает весь непрерывно распределённый заряд (заштрихованная область). Следовательно, с учётом (3.7) заряд в правой части уравнения теоремы Гаусса (3.4) равен:

$$q = 4\pi \int_0^r \rho(r')^2 dr' =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^{R_1} 0(r')^2 dr' + 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \alpha r' dr' + 4\pi \int_{R_2}^r 0(r')^2 dr' = \\
&= 0 + 4\pi\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' + 0 = 2\pi\alpha(b^2 - a^2). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Таким образом, в зависимости от радиуса r произвольной сферической поверхности заряд, находящийся внутри этой поверхности, из выражений (3.8–3.10) равен:

$$q = \begin{cases} 0, & r < a, \\ 2\pi\alpha(r^2 - a^2), & a < r < b, \\ 2\pi\alpha(b^2 - a^2), & r > b. \end{cases} \quad (3.11)$$

Подставляем (3.11) и (П.2.3) при замене вектора \mathbf{E} на вектор \mathbf{D} в интегральную форму теоремы Гаусса при наличии диэлектриков (3.4) с учётом ортогональности вектора индукции электростатического поля к произвольной сферической поверхности и получаем выражение для вектора индукции:

$$\mathbf{D} = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{\alpha \mathbf{r}}{2r} - \frac{\alpha a^2 \mathbf{r}}{2r^3}, & a < r < b, \\ \frac{\alpha(b^2 - a^2) \mathbf{r}}{2r^3}, & r > b, \end{cases} \quad (3.12)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый из центра сферической оболочки в данную точку пространства.

Используя связь (3.5), (3.12) и выражение для диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \beta r$, $\beta = \text{const}$, $a < r < b$, из условия задачи, получаем выражение для напряжённости электростатического поля

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{\alpha \mathbf{r}}{2\beta r^2 \varepsilon_0} - \frac{\alpha a^2 \mathbf{r}}{2\beta r^4 \varepsilon_0}, & a < r < b, \\ \frac{\alpha(b^2 - a^2) \mathbf{r}}{2r^3 \varepsilon_0}, & r > b. \end{cases} \quad (3.13)$$

Вектор поляризации определим из определения вектора электрической индукции (смещения) (3.3) с учётом (3.12) и (3.13)

$$\mathbf{P} = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{\alpha \mathbf{r}}{2r} - \frac{\alpha \mathbf{r}}{2\beta r^2} - \frac{\alpha a^2 \mathbf{r}}{2r^3} + \frac{\alpha a^2 \mathbf{r}}{2\beta r^4}, & a < r < b, \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (3.14)$$

Связанные заряды могут находиться только на диэлектрике, следовательно, объёмная плотность связанных зарядов ρ' определяется из выражения (3.1) с учётом (3.14):

$$\begin{aligned} \rho' &= -\text{div} \mathbf{P} = -\text{div}(\mathbf{P}(a < r < b)) = \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P(a < r < b)) = \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha r^2}{2} - \frac{\alpha r}{2\beta} - \frac{\alpha a^2}{2} + \frac{\alpha a^2}{2\beta r} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2\beta r^2} + \frac{\alpha a^2}{2\beta r^4}. \quad (3.15)$$

Поверхностная плотность зарядов (3.2) на внутренней поверхности сферической оболочки (радиуса a) с учётом (3.14):

$$\begin{aligned} \sigma'(a) &= P_{1n}(a) - P_{2n}(a) = P(a-0) - P(a+0) = \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2\beta a} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\beta a}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где под цифрой 1 подразумевается вакуум, а под цифрой 2 – диэлектрик.

Поверхностная плотность зарядов (3.2) на внешней поверхности сферической оболочки (радиуса b) с учётом (3.14):

$$\begin{aligned} \sigma'(b) &= P_{1n}(b) - P_{2n}(b) = P(b-0) - P(b+0) = \\ &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\beta b} - \frac{\alpha a^2}{2b^2} + \frac{\alpha a^2}{2\beta b^3}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где под цифрой 1 подразумевается диэлектрик, а под цифрой 2 – вакуум.

Ответ: смотри выражения (3.15–3.17).

Пример 3.2. Найти потенциал и напряжённость электростатического поля во всех точках пространства от равномерно поляризованного диэлектрического шара с радиусом R и вектором поляризации \mathbf{P} .

Решение. Связанный заряд равномерно поляризованного шара ($\mathbf{P} = \text{const}$) возникает только на поверхности шара, так как в объёме диэлектрика, согласно формуле (3.1), объёмная плотность равна нулю

$$\rho' = -\text{div}\mathbf{P} = -\text{div}(\text{const}) = 0.$$

Поверхностный связанный заряд (3.2) равен

$$\sigma' = \mathbf{n}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = P_{1n} - P_{2n} = P_n - 0 = P_n, \quad (3.18)$$

где под цифрой 1 подразумевается поляризованный шар, а под цифрой 2 – вакуум.

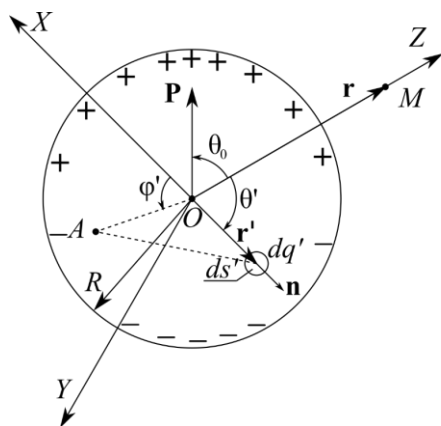


Рис. 3.2.

Введём декартовую систему координат (рис. 3.2). Ось Z направим вдоль радиус-вектора \mathbf{r} точки наблюдения M . Вектор поляризации \mathbf{P} лежит в плоскости XZ . OA – проекция радиус-вектора \mathbf{r}' связанного заряда на плоскость XY . Радиус-вектор точки наблюдения M равен $\mathbf{r} = (0, 0, r)$. Радиус вектор связанного

заряда dq' заряженной сферы равен $\mathbf{r}' = (R\sin\theta'\cos\varphi', R\sin\theta'\sin\varphi', R\cos\theta')$. Из соотношения (1.11) следует, что $dq' = \sigma' dS'$, где поверхностная плотность заряда $\sigma' = P_n$ согласно (3.18). Данное расположение осей декартовой системы координат обусловлено тем,

что необходимо облегчить расчёт потенциала. Подставляем все выраженные нами величины в формулу (1.12) для потенциала и получаем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P_n dS'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}}. \quad (3.19)$$

Нормальная составляющая вектора поляризации P_n из рис. 3.2 равна

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbf{Pn} = \mathbf{P} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{P} \frac{\mathbf{r}'}{R} = \\ &= \frac{P\sin\theta_0 \cdot R\sin\theta' \cos\varphi' + 0 \cdot R\sin\theta' \sin\varphi' + P\cos\theta_0 \cdot R\cos\theta'}{R} = \\ &= P(\sin\theta_0 \sin\theta' \cos\varphi' + \cos\theta_0 \cos\theta'). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Элемент поверхности сферы в сферической системе координат равен

$$dS' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'. \quad (3.21)$$

Потенциал (3.19) с учётом (3.20) и (3.21) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P(\sin\theta_0 \sin\theta' \cos\varphi' + \cos\theta_0 \cos\theta') R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}} = \\ &= \{\xi = \cos\theta'\} = \frac{PR^2 \cos\theta_0}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\xi}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{PR^2 \cos \theta_0}{2\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{2R}{3r^2}, & r > R, \\ \frac{2r}{3R^2}, & r < R, \end{cases} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{\mathbf{Pr}}{r^3}, & r > R, \\ \frac{\mathbf{Pr}}{R^3}, & r < R, \end{cases} \quad (3.22)$$

где $\cos \theta_0 = \mathbf{Pr}/Pr$. Зная потенциал (3.22), можно определить напряжённость электростатического поля с помощью связи (1.4)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{R^3}{3\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{\mathbf{Pr}^2 - 3\mathbf{r}(\mathbf{Pr})}{r^5}, & r > R, \\ \frac{\mathbf{P}}{R^3}, & r < R. \end{cases} \quad (3.23)$$

Ответ: смотри выражения (3.22, 3.23).

Пример 3.3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по линейному закону от значения ε_1 у одной обкладки до значения ε_2 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) у другой. Расстояние между обкладками – d , площадь каждой обкладки равна S . Найти ёмкость C конденсатора.

Решение. Введём декартовую систему координат, направив ось X перпендикулярно плоскости конденсатора (рис. 3.4), обкладки которого лежат в плоскостях $x = 0$ и $x = d$.

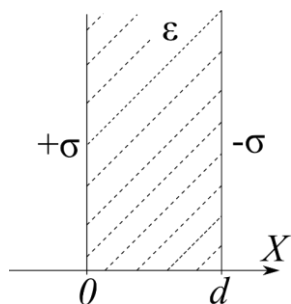


Рис. 3.4.

Диэлектрическая проницаемость среды в конденсаторе, согласно условию задачи, изменяется по линейному закону: $\varepsilon(x) = a + bx$, где коэффициенты a и b находятся из граничных условий $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$, $\varepsilon(d) = \varepsilon_2$. В итоге получаем следующую зависимость диэлектрической проницаемости от координаты x

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x. \quad (3.24)$$

Напряжённость электростатического поля между двумя бесконечными противоположно заряженными плоскостями находится из выражения (1.11), теоремы Гаусса при наличии диэлектриков (3.4) для плоской симметрии (П.2.10) при замене вектора \mathbf{E} на вектор \mathbf{D} и из связи (3.5):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3.25)$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора, согласно (1.5) и с учётом (1.11), (3.24) и (3.25), равна

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \int_0^d \frac{q}{\varepsilon(x)\varepsilon_0 S} dx = \\ &= \int_0^d \frac{qd}{(\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x)\varepsilon_0 S} dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Ёмкость конденсатора (2.3) равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}. \quad (3.26)$$

Ответ: смотри выражение (3.26).

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Металлическая сфера радиуса R , несущая заряд q , расположена в безграничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε . Определить поверхностную и объёмную плотности связанных зарядов в диэлектрике.

Ответ: $\rho' = 0$, $\sigma' = -q(\varepsilon - 1)/(4\pi\varepsilon R^2)$.

3.2. Определить плотность поверхностных и объёмных связанных зарядов в диэлектрической пластинке, находящейся между обкладками конденсатора параллельно данным обкладкам. Заряд конденсатора равен q , площадь пластинок – S .

Ответ: $\rho' = 0$, $\sigma' = q(\varepsilon - 1)/(S\varepsilon)$ на поверхности пластинки у отрицательно заряженной обкладки конденсатора, $\sigma' = -q(\varepsilon - 1)/(S\varepsilon)$ на поверхности пластинки у положительно заряженной обкладки конденсатора.

3.3. Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр с проницаемостью $\varepsilon = \beta r$, $\beta = \text{const}$ заряжен равномерно по объёму зарядом q и находится в вакууме. Радиус цилиндра равен R . Определить поверхностную и объёмную плотности связанных зарядов в диэлектрике.

Ответ: $\rho' = -q/(2\pi r^3 h \beta)$, $\sigma' = (q/(2\pi h R))(1 - 1/(\beta R))$.

3.4. Точечный заряд q находится в центре шара радиуса R из диэлектрика с проницаемостью ϵ_1 . Шар окружён безграничным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Определить поверхностную и объёмную плотности связанных зарядов в диэлектрике.

Ответ: $\rho' = 0$, $\sigma' = (q/(4\pi R^2))(1/\epsilon_1 - 1/\epsilon_2)$.

3.5. Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластинки, проницаемости которых равны ϵ_1 и ϵ_2 . На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$. Определить модуль поверхностной плотности связанных зарядов на границе раздела двух диэлектриков.

Ответ: $\sigma' = \sigma|1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1|$.

3.6. Определить напряжённость электростатического поля внутри и вне пластинки из электроета, вектор поляризации которой направлен по нормали к её плоскости.

Ответ: $E_{\text{внутри}} = P/\epsilon_0$, $E_{\text{снаружи}} = 0$.

3.7. Найти напряжённость электростатического поля в центре прямого круглого цилиндра длиной h и радиусом R , вектор поляризации $\mathbf{P} = \text{const}$ которого параллелен его оси.

Ответ: $\mathbf{E} = -(\mathbf{P}/\epsilon_0)(1 - h/\sqrt{h^2 + 4R^2})$.

3.8. Найти напряжённость электростатического поля в центре прямого круглого цилиндра длиной h и радиусом R , вектор поляризации $\mathbf{P} = \text{const}$ которого перпендикулярен его оси.

Ответ: $\mathbf{E} = -\mathbf{P}h/(2\epsilon_0\sqrt{h^2 + 4R^2})$.

3.9. Точечный заряд q находится в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 на расстоянии l от плоской границы с другой средой с диэлектрической

проницаемостью ϵ_2 . Определить силу взаимодействия данного заряда с границей раздела.

Указание к решению: под действием электростатического поля точечного заряда q диэлектрики поляризуются. Связанные заряды возникают только на границе раздела двух диэлектриков, так как диэлектрики однородные. Следовательно, напряжённость электростатического поля в каждом диэлектрике можно рассматривать как суперпозицию двух напряжённостей электростатических полей в вакууме: поля точечного заряда q и поля заряженной плоскости. Далее есть два способа решения задачи. В первом способе вектор напряжённости электростатического поля равен сумме векторов напряженностей электростатических полей точечного заряда q и заряженной плоскости из связанных зарядов. Используя связь (3.5) и граничное условие (3.6) для вектора \mathbf{D} , получаем выражение для поверхностной плотности связанных зарядов на границе раздела диэлектриков, с помощью которой находится напряжённость (1.12), и, как следствие, сила Кулона (1.1). Во втором способе используется метод изображения, согласно которому связанные заряды на границе раздела диэлектриков заменяются фиктивным точечным зарядом q' . Напряженность электростатического поля в первом диэлектрике, в котором находится точечный заряд, равна суперпозиции полей точечного заряда q и заряда-изображения q' , расположенного зеркально симметрично относительно границы раздела диэлектриков по отношению к точечному заряду q , в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Во втором диэлектрике напряженность электростатического поля равна напряжённости точечного фиктивного заряда q'' , которым заменили точечный заряд q

и связанные заряды на границе раздела диэлектриков и который расположен в той же точке, что и точечный заряд q , в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 . С помощью граничных условий (3.6) находятся величины зарядов q' и q'' и по закону Кулона (1.1) определяется сила.

Ответ: $F = q^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(16\pi\varepsilon_0 h^2 \varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2))$.

3.10. Бесконечный длинный цилиндр радиуса R из однородного диэлектрика с проницаемостью ε поместили в однородное электростатическое поле напряжённостью \mathbf{E}_0 , которое перпендикулярно оси цилиндра. Найти вектор поляризации диэлектрика.

Ответ: $\mathbf{P} = -2\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$.

3.11. Между обкладками сферического конденсатора находится среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \alpha/r^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$, r – расстояние от центра шара до точки наблюдения. Найти ёмкость конденсатора, если радиусы его обкладок равны a и b ($a < b$).

Ответ: $C = 4\pi\varepsilon_0 \alpha(b - a)$.

3.12. Конденсатор ёмкости C_1 , предварительно заряженный до напряжения U , подключили параллельно к незаряженному конденсатору ёмкости C_2 . Найти приращение электрической энергии этой системы к моменту установления равновесия.

Ответ: $\Delta W = -U^2 C_1 C_2 / (2(C_1 + C_2))$.

3.13. Диэлектрическая пластинка с проницаемостью ε целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, ёмкость которого в отсутствие пластинки равна C . Конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения U . Пластинку медленно (без трения) извлекли из зазора. Найти приращение энергии конденсатора

и механическую работу, совершённую против электрических сил при извлечении пластинки.

Ответ: $\Delta W = -(\varepsilon - 1)CU^2/2$, $A = (\varepsilon - 1)CU^2/2$.

3.14. Первоначально в плоском воздушном конденсаторе, заряженном и отсоединённом от источника ЭДС, напряжённость поля равна E_0 . Затем половину пространства между пластинками конденсатора заполняют однородным диэлектриком с проницаемостью ε так, что плоская граница диэлектрика параллельна пластинам конденсатора. Найти модули векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} внутри и вне диэлектрика.

Ответ: $E_1 = 2\varepsilon E_0/(\varepsilon + 1)$, $E_2 = 2E_0/(\varepsilon + 1)$,
 $D_1 = D_2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon + 1)$, где под цифрой 1 понимается воздух, а под цифрой 2 – диэлектрик.

3.15. Решить предыдущую задачу, считая, что конденсатор с самого начала подключён к источнику ЭДС и разность потенциалов между обкладками не меняется.

Ответ: $E_1 = E_0$, $E_2 = E_0/\varepsilon$, $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$, где под цифрой 1 понимается воздух, а под цифрой 2 – диэлектрик.

4. Постоянное магнитное поле в вакууме

4.1. Теоретический материал

Рассмотрим понятие электрического тока, который является источником магнитного поля. Электрическим током называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: положительные – по полю,

отрицательные – против поля, т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый током проводимости. За направление тока условно принимают направление положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока I – скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени: $I = dq/dt$. Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется плотностью тока: $j = dI/dS_{\perp}$. Единица плотности тока – ампер на метр в квадрате (A/m^2).

Сила тока сквозь произвольную поверхность S определяется как поток вектора \mathbf{j} , т. е.

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (4.1)$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ (\mathbf{n} – единичный вектор нормали к площадке dS).

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется постоянным. Для постоянного тока $I = q/t$, где q – электрический заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника. Единица силы тока – ампер (A): 1 А – сила неизменяемого тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 м один от друга, создаёт между этими

проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Подобно тому как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электрическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое магнитным. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесённые в него проводники с током или постоянные магниты.

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нём электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в нём электрические заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течёт ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определённый ток.

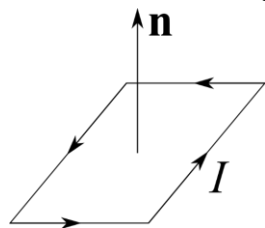


Рис. 4.1.

Подобно тому как при изучении электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля пользуются плоским контуром с током I (рамка с током), линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, создающих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали **n** к контуру, связанной

с направлением тока правилом правого винта (рис. 4.1). Такая нормаль называется положительной.

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая её определённым образом. Этот результат используется для выбора направления магнитного поля. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого рассматривается положительная нормаль к рамке.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на неё в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки и определяется по формуле: $\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}]$, где \mathbf{m} – вектор магнитного момента рамки с током; \mathbf{B} – вектор магнитной индукции (количественная характеристика магнитного поля). Для плоского контура с током I $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$, где S – площадь поверхности контура (рамки), \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение M_{max}/m (M_{max} – максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить количественной характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией: $B = M_{max}/m$.

Магнитная индукция в данной точке магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным

единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля. Магнитное поле называют однородным, если во всех его точках магнитная индукция одинакова как по направлению, так и по значению. Единица магнитной индукции – тесла (Тл): 1 Тл – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику течёт ток 1 А.

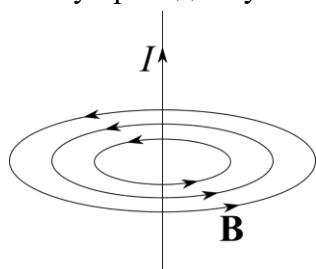


Рис. 4.2.

Так как магнитное поле является силовым, то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью линий магнитной индукции – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора **B**. Их направление задаётся

правилом правого винта (рис. 4.2). Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводник с током.

Индукция магнитного поля обладает принципом суперпозиции: вектор результирующей индукции магнитного поля от системы движущихся зарядов равен векторной сумме индукций магнитных полей от каждого отдельного движущегося заряда:

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i. \quad (4.2)$$

Закон Био-Савара-Лапласа: вектор индукции магнитного поля **B**, порождаемое постоянным электрическим

током I вдоль произвольной кривой Γ , в точке наблюдения, положение которой определяется радиус-вектором \mathbf{r} , равен

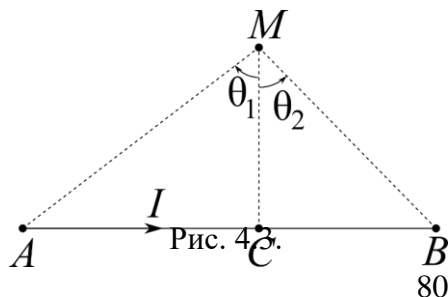
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{I[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (4.3)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл·м/А – магнитная постоянная, \mathbf{r}' – радиус-вектор положения вектора элемента $d\mathbf{l}$ кривой Γ (направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока I в точке с радиус-вектором \mathbf{r}'); интегрирование происходит по всей кривой Γ . Направления тока I на участке $d\mathbf{l}$ и индукции магнитного поля \mathbf{B} от этого тока связаны правилом правого винта.

Модуль индукции магнитного поля отрезка AB (рис. 4.3) прямого тока I в точке наблюдения M равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1), \quad (4.4)$$

где индукция магнитного поля \mathbf{B} в точке наблюдения M направлена перпендикулярно рисунку на нас; r – расстояние от точки наблюдения M до отрезка с током (это длина отрезка CM на рис. 4.3); θ_1 и θ_2 – это углы между отрезком CM



(перпендикуляр, опущенный на отрезок AB) и отрезками MA и MB соответственно, которые соединяют точку наблюдения M с концами

отрезка AB ; углы θ_1 и θ_2 отсчитываются от перпендикуляра CM , данные углы берутся со знаком плюс, если углы отсчитываются против часовой стрелки, и со знаком минус, если углы отсчитываются по часовой стрелки.

Модуль индукции магнитного поля отрезка дуги AB (рис. 4.3) кругового тока I в точке наблюдения M (центр дуги AB) равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \varphi, \quad (4.5)$$

где индукция магнитного поля \mathbf{B} в точке наблюдения M направлена перпендикулярно рисунку на нас; R – радиус дуги AB ; φ – это центральный угол, который опирается на дугу AB .

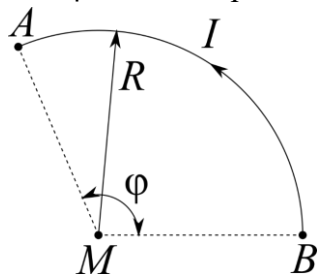


Рис. 4.4.

Выражения для индукции магнитных полей прямого (4.4) и кругового (4.5) токов получены из закона Био-Савара-Лапласа (4.3). В примере 4.1 рассмотрен вывод индукции отрезка тока из данного закона.

Интегральная теорема о циркуляции в вакууме: циркуляция вектора \mathbf{B} по произвольному замкнутому контуру Γ равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Γ :

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (4.6)$$

где $I = \sum I_k$, причём I_k – величины алгебраические. Ток считается положительным, если его направление связано

с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным (рис. 4.5). Определение циркуляции в приложении 1.

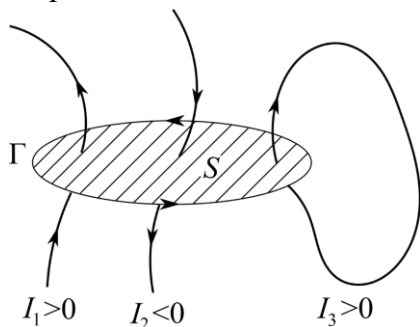


Рис. 4.5.

Закон Ампера: сила $d\mathbf{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент $d\mathbf{l}$ проводника с током, находящимся в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению элемента длины $d\mathbf{l}$ проводника на магнитную индукцию \mathbf{B} :

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (4.7)$$

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi = \mathbf{B}d\mathbf{S}, \quad (4.8)$$

где \mathbf{B} – вектор индукции внешнего магнитного поля; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$; dS – элементарная площадь контура; \mathbf{n} – нормаль к площадке dS .

Магнитный поток может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от выбора положительного направления нормали \mathbf{n} . Магнитный поток связывают

с контуром, по которому течёт ток. Положительное направление нормали к контуру связано с током в контуре правилом правого винта. Следовательно, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции Φ через произвольную поверхность S получается с помощью интегрирования потока (4.8) по этой поверхности

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (4.9)$$

Единицей магнитного потока является вебер (Вб): 1 Вб — магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл.

4.2. Примеры решения задач

Пример 4.1. Найти модуль индукции магнитного поля отрезка провода AB с однородным током I в произвольной точке пространства (рис. 4.3).

Решение. На рис. 4.6 показан отрезок провода с однородным током I в декартовой системе координат с векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Ток I не зависит от точки отрезка провода по условию задачи. Радиус-вектор точки наблюдения M равен $\mathbf{r} = (0, \rho, 0)$. Радиус-вектор элемента провода с током $d\mathbf{l} = (dx', 0, 0)$ в точке C равен $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$. Векторное

произведение $[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad \quad \quad$ раскрывается
 через определитель:

$$[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ dx' & 0 & 0 \\ -x' & \rho & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \rho dx'.$$

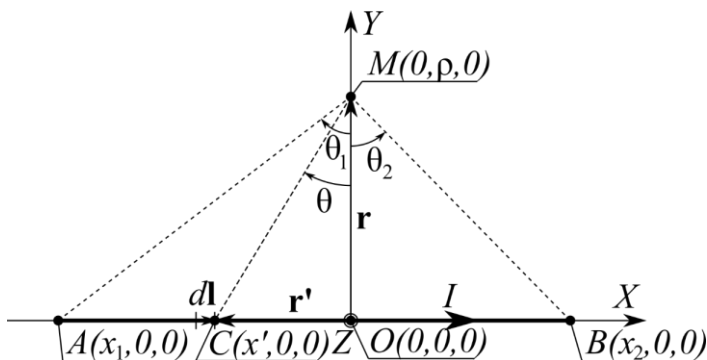


Рис. 4.6.

Подставляем данные значения величин в закон Био-Савара-Лапласа (4.3) и получаем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{I[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_z \rho}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{((x')^2 + \rho^2)^{3/2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x' = \rho \operatorname{tg} \theta \\ dx' = \frac{\rho d\theta}{\cos^2 \theta} \\ x' = x_1 \Leftrightarrow \theta = -\theta_1 \\ x' = x_2 \Leftrightarrow \theta = \theta_2 \end{array} \right\} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_z}{4\pi \rho} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_z}{4\pi\rho} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

Углы θ_1, θ_2 (рис. 4.6) берутся со знаком плюс, если они отсчитываются против часовой стрелки, и со знаком минус, если – по часовой стрелки.

Ответ: $B = \mu_0 I (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) / (4\pi\rho)$.

Пример 4.2. В вакууме задан ток с плотностью

$$j = \begin{cases} \alpha\rho^2, & \alpha = \text{const}, & \rho < R, \\ 0, & & \rho > R, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние между осью симметрии (ось Z) и данной точкой пространства. Определить индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

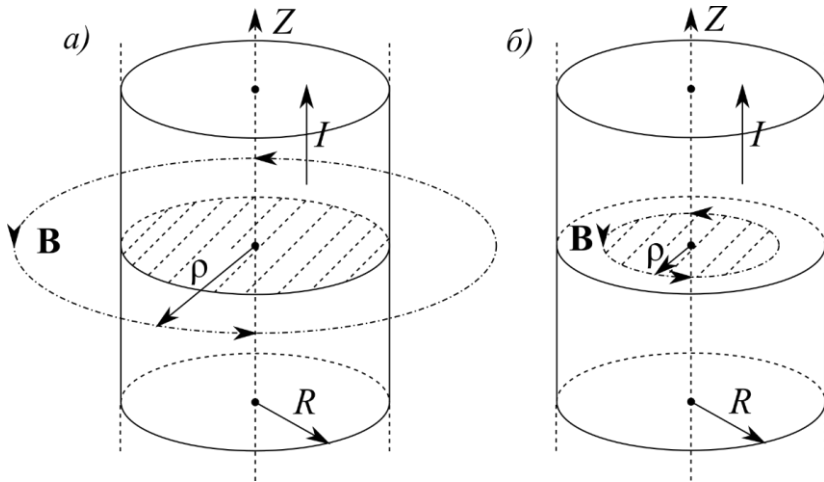


Рис. 4.7. Произвольный контур (штрихпунктирная линия) в форме окружности радиусом ρ , окружающая ток, проходящий через площадь контура (заштрихованная область), в случаях: а) $\rho > R$, б) $\rho < R$

Решение. Как и теорема Гаусса, теорема о циркуляции (4.6) применяется в случае специальной симметрии. Задача обладает цилиндрической симметрией. Поворот непрерывного распределения тока относительно оси симметрии (ось Z) на произвольные углы и перенос данного распределения тока вдоль этой оси не меняет плотность тока. Следовательно, задачу надо решать в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) и использовать в качестве контура из интегральной формы теоремы о циркуляции в вакууме (4.6) – окружность, центр которой лежит на оси Z (рис. 4.7). Докажем, что в каждой точке контура модуль индукции магнитного поля принимает постоянное значение, а вектор индукции магнитного поля направлен по касательной к этому контуру.

Направление индукции магнитного поля по касательной к произвольной окружности (контур) следует из симметрии задачи (рис. 4.8): для каждого произвольного элементарного тока dI_1 существует такой же симметрично

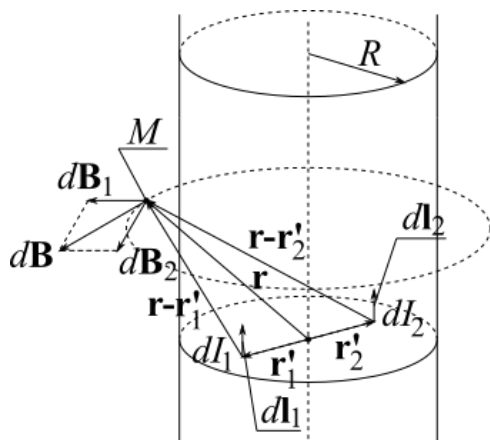


Рис. 4.8.

расположенный относительно оси симметрии заряд dI_2 , что сумма индукций магнитного поля, от которых dB_1 и dB_2 в точке наблюдения M , лежащей на произвольной окружности радиуса ρ (произвольный контур, на рис. 4.8 это пунктирная линия),

равна индукции – $d\mathbf{B}$, которая направлена по касательной к данной окружности. Направление индукций $d\mathbf{B}_1$ и $d\mathbf{B}_2$ определяется из закона Био-Савара-Лапласа (4.3).

Модуль индукции сохраняется при переходе к другой точке наблюдения на произвольной окружности радиуса ρ , так как в новой точке наблюдения распределение тока относительно новой точки наблюдения не изменится, следовательно, величина индукции магнитного поля, согласно (4.3), останется прежней.

Следовательно, левая часть теоремы (4.3) равна:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi\rho. \quad (4.10)$$

Ток в правой части теоремы (4.3) определяется с помощью плотности тока по формуле (4.1)

$$I = \iint_{S_\rho} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} j dS = \int_{S_\rho} j dx' dy' = \left\{ \begin{array}{l} x' = \rho' \cos \varphi' \\ y' = \rho' \sin \varphi' \\ I = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(\rho', \varphi')} \right| = \rho' \\ dx' dy' = I d\rho' d\varphi' \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho j(\rho') \rho' d\rho' d\varphi' = 2\pi \int_0^\rho j(\rho') \rho' d\rho' =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2\pi\alpha \int_0^{\rho} (\rho')^3 d\rho', & \rho < R, \\ 2\pi\alpha \int_0^R (\rho')^3 d\rho' + 2\pi \int_R^{\rho} 0 \cdot \rho' d\rho', & \rho > R, \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \pi\alpha\rho^4/2, & \rho < R, \\ \pi\alpha R^4/2, & \rho > R, \end{cases} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

где S_ρ – площадь круга радиуса ρ .

Подставляя (4.10) и (4.11) в теорему (4.3), с учётом направления индукции магнитного поля по касательной к произвольной окружности (контура), получаем выражение для индукции магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\alpha\rho^3}{4} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < R, \\ \frac{\alpha R^4}{4\rho} \mathbf{e}_\varphi, & \rho > R, \end{cases} \quad (4.12)$$

где \mathbf{e}_φ – единичный орт цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) .

Ответ: смотри выражение (4.12).

Пример 4.3. Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током I в точке O , если проводник изогнут, как показано на рис. 4.9.

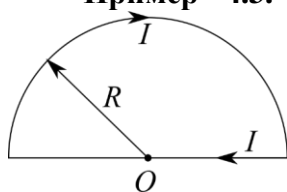


Рис. 4.9.

Решение. Согласно принципу суперпозиции (4.2): результирующая индукция магнитного поля в точке O равна сумме индукций магнитного поля от дуги с током и отрезка с током. Индукция магнитного поля от отрезка с током равна нулю согласно (4.3), так как точка наблюдения лежит на отрезке с током, т. е. $d\mathbf{l} \parallel (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Следовательно, вклад в магнитное поле даёт только ток в дуге (4.5)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \pi = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно рисунку от нас согласно правилу правой руки. Согласно закону Ампера (4.7) сила, действующая на единицу длины в точке O , будет направлена вниз и по модулю равна

$$f = \frac{dF}{dl} = IB = \frac{\mu_0 I^2}{4R}.$$

Ответ: $f = \mu_0 I^2 / (4R)$, сила направлена вниз.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1. По круговому витку радиуса R из тонкого провода циркулирует ток I . Пользуясь законом Био-Савара-Лапласа (4.3), найти индукцию на оси витка в точке, отстоящей от его центра на расстояние z .

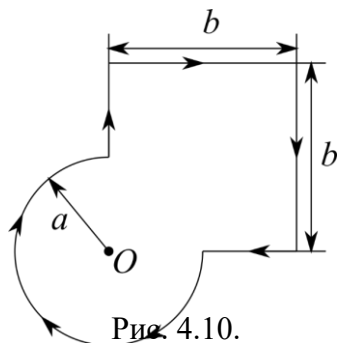


Рис. 4.10.

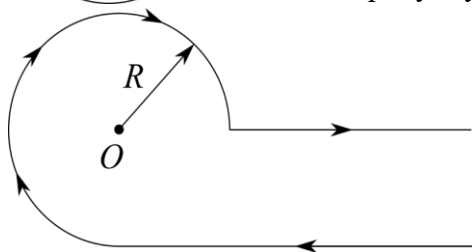


Рис. 4.11.

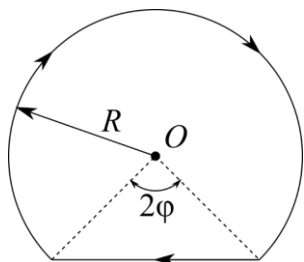


Рис. 4.12.

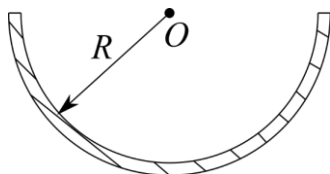


Рис. 4.13.

Ответ: $B = \mu_0 R^2 I e_z / (2(R^2 + z^2)^{3/2})$.

4.2. Пользуясь формулами (4.4) и (4.5), найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I , показанного на рис. 4.10.

Ответ: индукция магнитного поля направлена перпендикулярно рисунку от нас,

$$B = (\mu_0 I / (4\pi)) (3\pi / (2a) + \sqrt{2}/b).$$

4.3. Пользуясь формулами (4.4) и (4.5), найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I , показанного на рис. 4.11.

Ответ: индукция магнитного поля направлена перпендикулярно рисунку от нас,

$$B = (\mu_0 I / (4\pi R)) (1 + 3\pi/2).$$

4.4. Пользуясь формулами (4.4) и (4.5), найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I , показанного на рис. 4.12.

Ответ: индукция магнитного поля направлена перпендикулярно рисунку от нас,

$$B = (\mu_0 I / (2\pi R)) (\pi - \varphi + \operatorname{tg} \varphi).$$

4.5. Ток I течёт перпендикулярно рисунку на нас по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму полукольца радиуса R (рис. 4.13). Пользуясь формулами (4.4) и (4.5), найти индукцию магнитного поля в точке O .

Ответ: индукция магнитного поля направлена влево, $B = \mu_0 I / (\pi^2 R)$.

4.6. Определить модуль индукции магнитного поля внутри бесконечного длинного соленоида с током I и числом витков на единицу длины n .

Ответ: $B = \mu_0 n I$.

4.7. Определить модуль индукции магнитного поля внутри тороида с током I и числом витков N .

Ответ: $B = \mu_0 N I / (2\pi r)$, где r – расстояние от оси симметрии тороида до произвольной точки внутри тороида.

4.8. Определить модуль индукции магнитного поля от безграничной проводящей плоскости, по которой течёт равномерно распределённый ток одного направления с линейной плотностью i (линейная плотность тока – ток, приходящий на единицу длины, которая играет роль «поперечного сечения плоскости»).

Ответ: $B = \mu_0 i / 2$.

4.9. Определить модуль индукции магнитного поля прямого бесконечно длинного провода с током I .

Ответ: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, где r – расстояние от провода до точки наблюдения.

4.10. В вакууме задан ток с плотностью $j = \beta e^{-\alpha \rho^2}$, $\alpha, \beta = \text{const} > 0$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от оси симметрии (ось Z) до данной точки пространства. Определить

модуль индукции магнитного поля во всех точках пространства.

Ответ: $B = \beta(1 - e^{-\alpha\rho^2})/(2\alpha\rho)$.

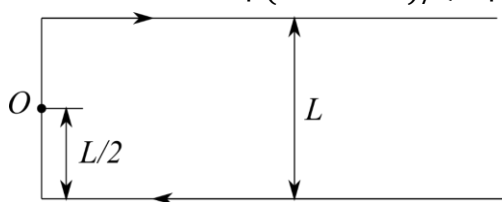


Рис. 4.14.

4.11. Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током I в точке O , если проводник

изогнут, как показано на рис. 4.14.

Ответ: сила направлена влево, $f = \mu_0 I^2 / (\pi L)$.

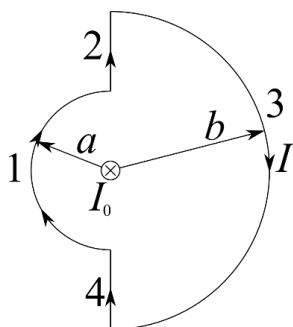
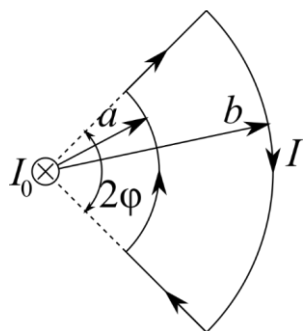


Рис. 4.15.

4.12. Замкнутый контур (рис. 4.15) с током I находится в поле длинного прямого проводника с током I_0 . Плоскость контура перпендикулярна к прямому проводнику. Найти момент сил Ампера, действующий на замкнутый контур.

Ответ: момент сил направлен влево, $M = (\mu_0 I I_0 / \pi)(b - a)$.



4.13. Замкнутый контур (рис. 4.16) с током I находится в поле длинного прямого проводника с током I_0 . Плоскость контура перпендикулярна к прямому проводнику. Найти момент сил

Ампера, действующий на замкнутый контур.

Рис. 4.16.

Ответ: момент сил направлен

влево,

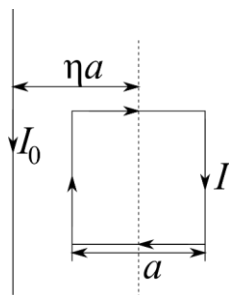


Рис. 4.17.

$$M = (\mu_0 I I_0 / \pi)(b - a) \sin \phi.$$

4.14. Квадратная рамка с током I расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течёт ток I_0 (рис. 4.17). Сторона рамки – a . Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки (пунктирная линия) параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии, которое

в η раз больше стороны рамки. Найти механическую работу сил Ампера, которую необходимо совершить при медленном повороте рамки вокруг её оси на 180° .

Ответ: $A = (\mu_0 a I I_0 / \pi) \ln((2\eta + 1)/(2\eta - 1))$.

4.15. Два параллельных длинных провода с током I в каждом (токи направлены в одну сторону) удалили друг от друга так, что расстояние между ними стало в η раз больше первоначального. Какую работу на единицу длины проводов совершили при этом силы Ампера?

Ответ: $A = -\mu_0 I^2 \ln \eta / (2\pi)$.

5. Постоянное магнитное поле в магнетиках

5.1. Теоретический материал

Магнетиком называют любое вещество, которое под действием внешнего магнитного поля приобретает магнитный момент (намагничивается). Магнетики делятся на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Молекулы диамагнетиков при отсутствии внешнего магнитного поля не имеют магнитного момента. Внесение таких веществ во внешнее магнитное поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах (молекулярный ток или токи намагничивания), и молекулы, а вместе с ними и всё вещество, приобретают магнитный момент.

Молекулы парамагнетиков обладают собственным магнитным моментом, обусловленным внутренним движением зарядов. Каждому магнитному моменту соответствует элементарный круговой ток (ток намагничивания), создающий в окружающем пространстве магнитное поле. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно вследствие хаотического теплового движения, поэтому обусловленное ими результирующее магнитное поле равно нулю. Равен нулю и суммарный момент вещества. Если же вещество поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, и вещество намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля.

Ферромагнетиками называют вещества, которые обладают спонтанной намагниченностью, т. е. могут быть намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля.

Таким образом, намагничивание вещества сопровождается появлением токов намагничивания в атомах и молекулах данного вещества. Ток намагничивания, в отличие от тока проводимости, возникает только в веществе и зависит от магнитного поля.

Вектор намагниченности \mathbf{J} – магнитный момент единицы объёма вещества.

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции для вектора намагниченности \mathbf{J} при наличии магнетиков: ротор вектора намагниченности \mathbf{J} в точке наблюдения равен плотности токов намагничивания \mathbf{j}' в данной точке:

$$\text{rot}\mathbf{J} = \mathbf{j}'. \quad (5.1)$$

Граничные условия для вектора намагниченности: связь между векторами намагниченности по разные стороны от границы двух магнетиков определяется следующим образом:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)] = \mathbf{i}', \quad (5.2)$$

где \mathbf{J}_1 – вектор намагниченности в первом магнетике; \mathbf{J}_2 – вектор намагниченности во втором магнетике; \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе раздела, направленный от первого магнетика во второй магнетик; \mathbf{i}' – вектор линейной плотности молекулярных токов (токов намагничивания), которые расположены на границе между двумя магнетиками. Линейная плотность тока – ток, приходящийся на единицу длины, которая играет роль «поперечного сечения плоскости».

Определение вектора напряжённости магнитного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}, \quad (5.3)$$

где \mathbf{B} – магнитная индукция токов проводимости и намагничивания. Вектор \mathbf{H} является вспомогательным вектором, не имеющим какого-либо глубокого физического смысла.

Интегральная форма теоремы о циркуляции для вектора напряженности **H** при наличии магнетиков: циркуляция вектора напряжённости магнитного поля **H** по произвольному замкнутому контуру Γ равна полному току проводимости I , пронизывающей произвольную поверхность, опирающуюся на контур Γ :

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (5.4)$$

В случае 1) слабого внешнего магнитного поля, напряжённость которого очень мала по сравнению с напряжённостью магнитного поля внутри атома ($H_{\text{ат}} \sim 10^6$ А/м); 2) изотропного магнетика, физические свойства которого не зависят от направления; 3) не ферромагнетика связь между векторами напряженности магнитного поля **H** и магнитной индукции **B** выглядит следующим образом:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (5.5)$$

где μ – магнитная проницаемость магнетика, которая равна отношению индукции магнитного поля токов намагничивания и проводимости к индукции магнитного поля токов проводимости, или, проще говоря, магнитная проницаемость показывается во сколько раз индукция магнитного поля в магнетике больше индукции магнитного поля в вакууме. Для диамагнетиков $\mu < 1$ (висмут, водород, медь), для парамагнетиков $\mu \geq 1$ (алюминий, вольфрам, платина), для ферромагнетика $\mu \gg 1$ (железо, никель, кобальт).

5.2. Примеры решения задач

Пример 5.1. Бесконечный прямолинейный однородный провод радиуса a , сделанный из материала с магнитной проницаемостью $\mu = \alpha \rho^2$ (где $\alpha = \text{const}$; ρ – перпендикуляр, опущенный из точки наблюдения на ось провода), находится в вакууме. По проводу течёт ток с плотностью $j = \beta \rho$ (где $\beta = \text{const}$). Определить объёмную и линейную плотности токов намагничивания.

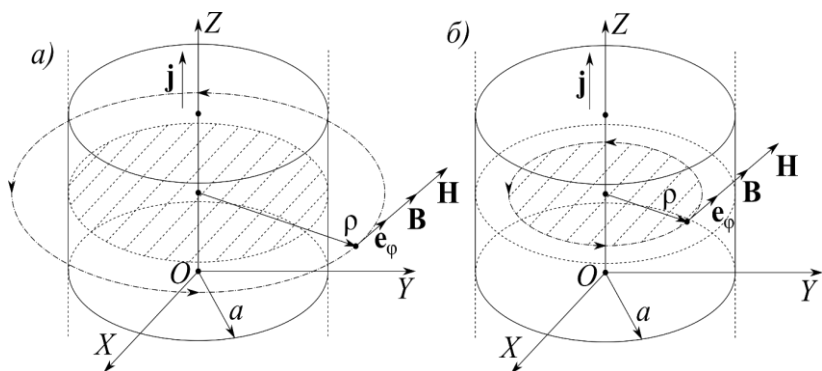


Рис. 5.1. Произвольный контур (штрихпунктирная линия) в форме окружности радиуса ρ , окружающей ток, проходящий через площадь контура (заштрихованная область), в случаях: а) $\rho > a$, б) $\rho < a$

Решение. Задача обладает цилиндрической симметрией. Поворот непрерывного распределения тока относительно оси симметрии (ось Z на рис. 5.1) на произвольные углы и перенос данного распределения тока вдоль этой оси не меняет плотность тока. Следовательно, задачу надо решать в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) и использовать в качестве контура из интегральной формы теоремы о циркуляции при наличии магнетиков (5.4) – окружность, центр которой лежит на оси Z (рис. 5.1). Докажем,

что в каждой точке контура модуль напряжённости магнитного поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости магнитного поля направлен по касательной к этому контуру.

Направление напряжённости магнитного поля по касательной к произвольной окружности (контур) следует из симметрии задачи (рис. 4.8, пример 4.2) и из связи (5.5).

Модуль напряжённости сохраняется при переходе к другой точке наблюдения на произвольной окружности радиуса ρ , так как в новой точке наблюдения распределение тока относительно новой точки наблюдения не изменится, следовательно, величина индукции магнитного поля, согласно (4.3), останется прежней.

Следовательно, левая часть теоремы (5.4) равна:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint H dl = H \oint dl = H 2\pi\rho. \quad (5.6)$$

Ток в правой части теоремы (5.4) определяется через плотность тока (4.1):

$$I = \iint_{S_\rho} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} j dS = \int_{S_\rho} j dx' dy' = \left\{ \begin{array}{l} x' = \rho' \cos \varphi' \\ y' = \rho' \sin \varphi' \\ I = \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(\rho', \varphi')} \right| = \rho' \\ dx' dy' = I d\rho' d\varphi' \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho j(\rho') \rho' d\rho' d\varphi' = 2\pi \int_0^\rho j(\rho') \rho' d\rho' =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2\pi\beta \int_0^{\rho} (\rho')^2 d\rho', & \rho < a, \\ 2\pi\beta \int_0^a (\rho')^2 d\rho' + 2\pi \int_R^{\rho} 0 \cdot \rho' d\rho', & \rho > a, \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 2\pi\beta\rho^3/3, & \rho < a, \\ 2\pi\beta a^3/3, & \rho > a, \end{cases} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

где S_ρ – площадь круга радиуса ρ .

Подставляя (5.6) и (5.7) в теорему (5.4), с учётом направления напряжённости магнитного поля по касательной к произвольной окружности (контура), получаем выражение для напряжённости магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{\beta\rho^2}{3} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < a, \\ \frac{\beta a^3}{3\rho} \mathbf{e}_\varphi, & \rho > a. \end{cases} \quad (5.8)$$

Используя связь (5.5) и выражение для напряженности магнитного поля (5.8), получаем выражение для индукции магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0\alpha\beta\rho^4}{3} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < a, \\ \frac{\mu_0\beta a^3}{3\rho} \mathbf{e}_\varphi, & \rho > a. \end{cases} \quad (5.9)$$

Из определения напряжённости магнитного поля (5.3) и выражений (5.8, 5.9) получаем

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \frac{\beta\rho^2}{3}(\alpha\rho^2 - 1)\mathbf{e}_\varphi, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \quad (5.10)$$

Вектор плотности тока намагничивания (5.1), согласно (5.10), равен

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' = \text{rot}\mathbf{J} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho J(\rho) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho J(\rho)) = \\ &= \mathbf{e}_z \left(\frac{J}{\rho} + \frac{\partial J}{\partial\rho} \right) = \begin{cases} \frac{5\alpha\beta\rho^3}{9} - \beta\rho, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вектор линейной плотности токов намагничивания, которые расположены на границе между двумя магнетиками (5.2), согласно (5.10), равен

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' = [\mathbf{n} \times (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & J(a+0) - J(a-0) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\beta a^2}{3} - \frac{\alpha\beta a^4}{3} \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где под цифрой 1 подразумевается провод ($\mathbf{J}_1 = J(a-0)\mathbf{e}_\varphi$), а под цифрой 2 – вакуум ($\mathbf{J}_2 = J(a+0)\mathbf{e}_\varphi = 0$).

Ответ: смотри выражения (5.11) и (5.12).

Пример 5.2. Постоянный магнит в виде цилиндра радиуса R и длины L изготовлен из материала с однородной намагниченностью \mathbf{J} , направленной вдоль его оси. Найти величину индукции магнитного поля на оси цилиндра.

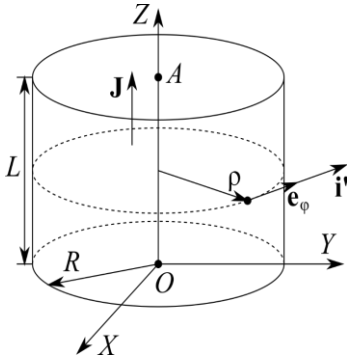


Рис. 5.2.

Решение. Так как намагниченность однородна, то согласно выражению (5.1), плотность тока намагничивания равна нулю ($\mathbf{j}' = 0$). Присутствует ток намагничивания только на боковой поверхности цилиндра с линейной плотностью $\mathbf{i}' = \mathbf{J}\mathbf{e}_\varphi$ согласно (5.2) и рис. 5.2. Таким образом, можно заменить

постоянный магнит из материала с однородной намагниченностью \mathbf{J} на соленоид с линейной плотностью тока $\mathbf{i}' = \mathbf{J}\mathbf{e}_\varphi$.

Магнитное поле соленоида представляет собой суперпозицию индукций магнитных полей (4.2) от круговых токов радиуса R , центры которых располагаются на оси Z и непрерывно и равномерно заполняют отрезок между точками O и A на рис. 5.2. Определим индукцию магнитного поля \mathbf{B}_1 кругового тока $i' = J$, который лежит в плоскости $z = z_0$, где $0 < z_0 < L$. Для этого воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа (4.3), где $\mathbf{r}' = (R\cos\varphi', R\sin\varphi', z_0)$ – радиус-вектор положения вектора элемента контура $d\mathbf{l} = R d\varphi'(-\sin\varphi', \cos\varphi', 0)$ (направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока \mathbf{i}' в точке с радиус-вектором \mathbf{r}'); $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ – радиус-вектор точки наблюдения. Векторное

произведение $[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad \quad \quad$ раскрывается
через определитель

$$[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = Rd\varphi' \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\sin\varphi' & \cos\varphi' & 0 \\ -R\cos\varphi' & -R\sin\varphi' & z - z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_x R\cos\varphi'(z - z_0)d\varphi' + \mathbf{e}_y R\sin\varphi'(z - z_0)d\varphi' + \mathbf{e}_z R^2 d\varphi' =$$

$$= (\cos\varphi'(z - z_0), \sin\varphi'(z - z_0), R)Rd\varphi'.$$

Подставляя данные значения величин в закон Био-Савара-Лапласа (4.3), получаем

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi'(z - z_0), \sin\varphi'(z - z_0), R)Rd\varphi'}{(((-R\cos\varphi')^2 + (-R\sin\varphi')^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 J \mathbf{e}_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\varphi'}{(R^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 J R^2 \mathbf{e}_z}{2(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}.$$

Индукция магнитного поля соленоида получается с помощью интегрирования индукции магнитного поля на единицу длины \mathbf{B}_1 по всей длине цилиндра L :

$$\mathbf{B} = \int_0^L \mathbf{B}_1 dz_0 = \int_0^L \frac{\mu_0 J R^2 \mathbf{e}_z}{2(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dz_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} z_0 = z + R \operatorname{tg} \alpha \\ dz_0 = R d\alpha / \cos^2 \alpha \\ z_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg}(-z/R) \\ z_0 = L \Leftrightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg}((L-z)/R) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0 J \mathbf{e}_z}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \\
&= \frac{\mu_0 J \mathbf{e}_z}{2} \left(\frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Ответ: смотри выражение (5.13).

5.3. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Бесконечный прямолинейный однородный провод радиуса a , сделанный из материала с магнитной проницаемостью μ_1 , находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной проницаемостью μ_2 . По проводу течёт постоянный ток I . Найти объёмную и линейную плотности токов намагничивания.

Ответ: $i' = I(\mu_2 - \mu_1)/(2\pi a)$,

$$j' = \begin{cases} I(\mu_1 - 1)/(\pi a^2), & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

5.2. На поверхности бесконечной пластины течёт ток проводимости с поверхностной плотностью i . Магнитная проницаемость материала пластины равна μ . Определить объёмную и линейную плотности токов намагничивания.

Ответ: $i' = i(\mu - 1)/2$, $j' = 0$.

5.3. Прямой тонкий бесконечно длинный провод, по которому течёт ток I , лежит на поверхности плоского

непроводящего однородного магнетика с магнитной проницаемостью μ , занимающего половину пространства. Найти объёмную и линейную плотности токов намагничивания.

Ответ: $i' = 0$, $j' = 0$.

5.4. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца равен d , ширина зазора равна b , индукция магнитного поля в зазоре равна B . Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти модуль напряжённости магнитного поля внутри магнита.

Ответ: $H = -Bb/(\mu_0(\pi d - b))$.

5.5. Тороидальная катушка с железным сердечником имеет радиус R и число витков N . В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной b , в которой при токе I через обмотку создаётся магнитное поле, модуль индукции которой равен B . Найти магнитную проницаемость железа без учёта краевых эффектов в зазоре.

Ответ: $\mu = 2\pi RB/(NI\mu_0 - Bb)$.

5.6. Постоянный магнит имеет форму полого толстостенного цилиндра с внешним радиусом $R_2 = 10$ см, внутренним радиусом $R_1 = 5$ см и длиной $L = 5$ см. Вектор намагниченности не зависит от точки магнита и направлен вдоль оси цилиндра. Найти точку на оси симметрии, в которой индукция магнитного поля равна нулю.

Ответ: на расстоянии 2.9 см от оснований цилиндра.

5.7. Найти индукцию магнитного поля в центре равномерно поляризованного шара с намагниченностью J .

Ответ: $B = 2\mu_0 J/3$.

5.8. Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности \mathbf{J} параллелен её плоскости. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} внутри и вне пластины.

Ответ: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ внутри пластины; $\mathbf{B} = 0$ снаружи пластины.

5.9. Шар радиуса R имеет однородную намагниченность с вектором намагниченности \mathbf{J} . Найти магнитную индукцию \mathbf{B} внутри и снаружи шара.

Ответ: $\mathbf{B} = 2\mu_0 \mathbf{J}/3$ внутри шара; $\mathbf{B} = (\mu_0 R^3/3)((\mathbf{Jr})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{J}/r^3)$ снаружи шара, где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый из центра шара в данную точку наблюдения.

5.10. Постоянный магнит в виде цилиндра радиуса R и длины L изготовлен из материала с однородной намагниченностью \mathbf{J} , направленной перпендикулярно его оси. Найти величину индукции магнитного поля на оси цилиндра.

Ответ: $B = (\mu_0 J/4) \left((L - z)/\sqrt{R^2 + (L - z)^2} + z/\sqrt{R^2 + z^2} \right)$.

6. Электромагнитная индукция

6.1. Теоретический материал

Электродвижущая сила (ЭДС) — скалярная физическая величина, характеризующая работу сторонних сил (то есть любых сил, кроме электростатических и диссипативных).

Явление электромагнитной индукции – возникновение электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром. Возникающий ток называется индукционным током. Появление индукционного тока вызывает ЭДС индукции. Направление индукционного тока определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Иначе говоря, индукционный ток создаёт магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Закон электромагнитной индукции в интегральном виде: для любого замкнутого контура индуцированная электродвижущая сила (ЭДС индукции) E_i равна скорости изменения магнитного потока Φ (4.9), проходящего через этот контур, взятой со знаком минус:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.1)$$

Знак минус в уравнении (6.1) обусловлен правилом Ленца. Величина магнитного потока Φ связана с выбором положительного направления нормали к контуру, а знак ЭДС индукции E_i – с выбором положительного направления обхода по контуру. Положительное направление нормали \mathbf{n} к контуру и положительное направление обхода контура связаны друг с другом правилом правого винта. Положительное направление нормали к контуру в большинстве задач выбирают сонаправленной с индукцией внешнего магнитного поля.

Таким образом, направление индукционного тока в замкнутом контуре можно определить двумя способами:

1) по изменению магнитного потока (4.9):

1.1) если магнитный поток уменьшается ($d\Phi/dt < 0$), то индукция внешнего магнитного поля \mathbf{B} и индукция магнитного поля индукционного тока \mathbf{B}_i сонаправлены, следовательно; направление индукционного тока I_i связано с направлением индукции внешнего магнитного поля \mathbf{B} по правилу правого винта;

1.2) если магнитный поток увеличивается ($d\Phi/dt > 0$), то индукция внешнего магнитного поля \mathbf{B} и индукция магнитного поля индукционного тока \mathbf{B}_i противоположно направлены, следовательно; направление индукционного тока I_i связано с направлением индукции внешнего магнитного поля \mathbf{B} по правилу левого винта;

2) по знаку ЭДС (6.1) индукции:

2.1) если ЭДС индукции положительно ($E_i > 0$), то индукционный ток I_i связан с направлением нормали к контуру \mathbf{n} по правилу правого винта;

2.2) если ЭДС индукции отрицательно ($E_i < 0$), то индукционный ток I_i связан с направлением нормали к контуру \mathbf{n} по правилу левого винта.

Самоиндукция — это явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении протекающего через контур тока. Если в пространстве, где находится контур с током I , нет ферромагнетиков, магнитный поток Φ через контур будет пропорционален силе тока I :

$$\Phi = LI, \quad (6.2)$$

где L – индуктивность контура. Единица индуктивности – генри (Гн): 1 Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1 А равен 1 Вб. Из формул (4.9) и (6.2) следует, что единица магнитной постоянной μ_0 – генри на метр (Гн/м).

Взаимоиндукция (взаимная индукция) — явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока во втором контуре и наоборот. Если в первом контуре течёт ток I_1 , то он создаст через второй контур магнитный поток Φ_2 , пропорциональный (при отсутствии ферромагнетиков) току I_1 : $\Phi_2 = L_{21}I_1$. Совершенно так же, если во втором контуре течёт ток I_2 , то он создаст через первый контур магнитный поток $\Phi_1 = L_{12}I_2$. Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров. По теореме взаимности они равны между собой, если отсутствуют ферромагнетики.

Энергия W контуров с токами в отсутствие ферромагнетиков равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (6.3)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$, $i \neq k$ – взаимная индуктивность i -го и k -го контуров; $L_{ii} = L_i$ – индуктивность i -го контура; I_k – сила тока в k -м контуре; N – число данных контуров.

Энергия W и плотность энергии w магнитного поля в отсутствие ферромагнетиков:

$$W = \int w dV, \quad w = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (6.4)$$

6.2. Примеры решения задач

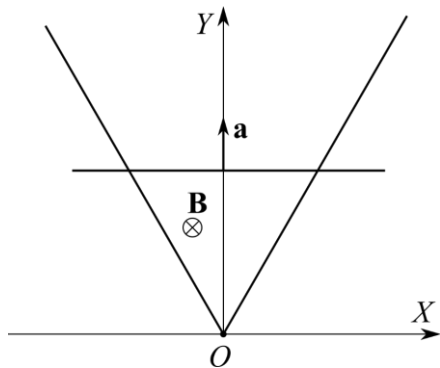


Рис. 6.1.

Пример 6.1. Провод, имеющий форму ломаной линии $y = k|x|$, находится в однородном магнитном поле \mathbf{B} , перпендикулярном плоскости XY . Из начала координат перемещают поступательно без начальной скорости перемычку с постоянным ускорением a (рис. 6.1).

Найти ЭДС индукции в образовавшемся контуре как функцию координаты y .

Решение. ЭДС индукции, согласно закону электромагнитной индукции (6.1) и определению магнитного потока (4.9), равна

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S B dS = -\frac{d}{dt} B \int_S dS = -\frac{d(BS)}{dt} = \\ &= -\frac{B dS}{dt} = -\frac{B 2|x| dy}{dt} = -\frac{B (2y)^{3/2} \sqrt{a}}{k}, \end{aligned}$$

где скорость вдоль оси Y равна $dy/dt = \sqrt{2ay}$. Согласно правилу Ленца ток потечёт в контуре против часовой стрелки, так как ЭДС индукции $E_i < 0$.

Ответ: $E_i = -B(2y)^{3/2}\sqrt{a}/k$.

Пример 6.2. Коаксиальный кабель состоит из внутреннего сплошного проводника радиусом a и наружной проводящей тонкостенной трубки радиусом b . Найти индуктивность единицы длины кабеля, считая распределение тока по сечению внутреннего проводника равномерным. Магнитная проницаемость всюду равна единице.

Решение. В данном случае внутренний проводник не является тонким, поэтому определять индуктивность надо не через магнитный поток (6.2), а энергетически (6.3, 6.4)

Из теоремы о циркуляции (4.6) следует, что

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}, & r < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > a. \end{cases} \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3, 6.4) с учётом связи (5.5), получаем

$$\begin{aligned} L_{\text{ед}} = \frac{L}{h} &= \frac{1}{I^2} \int_0^a \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2 r^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi r dr + \frac{1}{I^2} \int_a^b \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $L_{\text{ед}} = (\mu_0/(2\pi))(1/4 + \ln(b/a))$.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1. Плоская спираль с большим числом N витков, плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали. Наружный радиус витков спирали равен a . Магнитное поле изменяется по закону $B = B_0 \sin \omega t$. Найти амплитудное значение ЭДС индукции, наведённой в спирали.

Ответ: $E_i = \pi a^2 N B_0 \omega / 3$.

6.2. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с её диаметром и перпендикулярной оси соленоида. При этом магнитное поле в соленоиде меняется со временем как $B = B_0 \sin \omega t$. Найти ЭДС индукции в катушке, если в момент времени $t = 0$ ось катушки совпала с осью соленоида.

Ответ: $E_i = -N B_0 S \omega \cos(2\omega t)$.

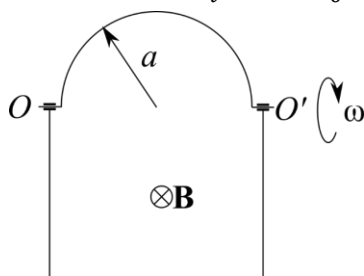


Рис. 6.2.

6.3. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} (рис. 6.2). Верхнюю часть контура – провод в виде полуокружности радиуса a – вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO' . В момент $t = 0$ магнитный поток через контур максимальный. Найти

ЭДС индукции в контуре как функцию времени t .

Ответ: $E_i = \pi a^2 B \omega \sin(\omega t) / 2$.

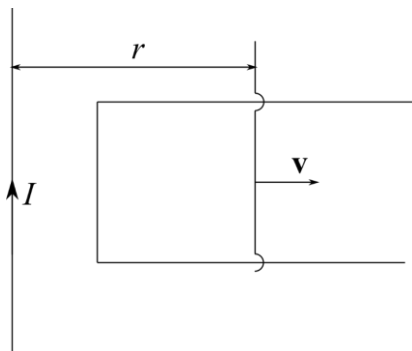


Рис. 6.3.

6.4. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости (рис. 6.3). Перемычку, длина которой l , перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r .

Ответ: $E_i = \mu_0 l v I / (2\pi r)$.

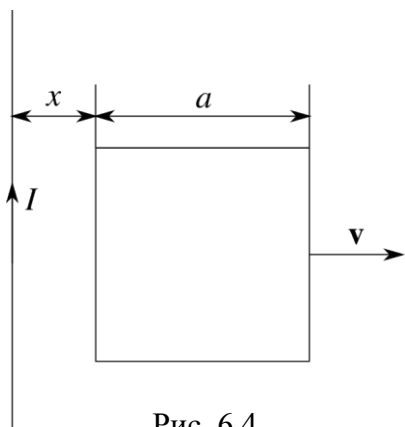


Рис. 6.4.

6.5. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рис. 6.4). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС

индукцию в рамке как функцию расстояния x .

Ответ: $E_i = \mu_0 I a^2 v / (2\pi x(x + a))$.

6.11. Два соленоида одинаковой длины практически одинаково сечения вставлены полностью один в другой. Индуктивность соленоидов – L_1 и L_2 . Пренебрегая краевыми эффектами, найти взаимную индуктивность (по модулю).

Ответ: $|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$.

6.12. Длинный ферромагнитный цилиндр объёмом V имеет две обмотки (одна на другой). Одна обмотка содержит n_1 витков на единицу длины, другая – n_2 . Найти их взаимную индуктивность, пренебрегая краевыми эффектами

Ответ: $L_{12} = \mu_2 \mu_0 n_1 n_2 V$, $L_{21} = \mu_1 \mu_0 n_1 n_2 V$.

6.13. Две одинаковые катушки, каждая индуктивности L , соединяют последовательно. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой, найти индуктивность системы.

Ответ: $L_{\text{общ}} = 2L$.

6.14. Две одинаковые катушки, каждая индуктивности L , соединяют параллельно. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой, найти индуктивность системы.

Ответ: $L_{\text{общ}} = L/2$.

6.15. Две одинаковые катушки, каждая индуктивности L , соединены последовательно и расположены так близко друг к другу, что магнитный поток одной катушки полностью пронизывает, усиливая, другую. Найти индуктивность системы из этих двух катушек.

Ответ: $L_{\text{общ}} = 4L$.

Приложения

Приложение 1. Определение потока и циркуляции векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ по контуру (замкнутой кривой) Γ называется интеграл

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

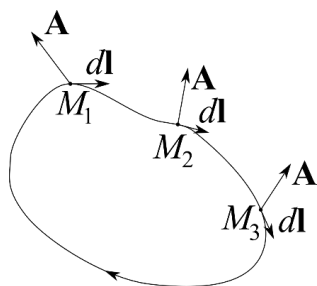


Рис. П.1.1.

взятый по данному контуру Γ , где $d\mathbf{l}$ – бесконечно малое приращение радиус-вектора вдоль контура в сторону обхода по контуру. Направление обхода по контуру выбирается условно. На рис. П.1.1 показано направление $d\mathbf{l}$ в трёх разных точках контура. Окружность на символе интеграла означает,

что интегрирование производится по контуру.

Поток векторного поля $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ через поверхность S – интеграл

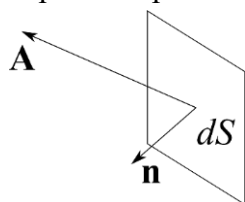


Рис. П.1.2.

$$\int \mathbf{A} d\mathbf{S},$$

взятый по поверхности S , где $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$; \mathbf{n} – единичный вектор положительной нормали к элементу поверхности (положительно направление выбирается условно); dS – площадь элемента

поверхности (рис. П.1.2). Интегрирование по замкнутой поверхности обозначается кружком в середине интеграла:

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Замкнутая поверхность – это поверхность, которая является ограниченной в пространстве и без границ (например, куб, сфера). Примером незамкнутой поверхности могут служить квадрат и бесконечная плоскость. Квадрат не является замкнутой поверхностью, так как имеет границы (стороны квадрата). Бесконечная плоскость не является

ограниченной в пространстве. Нормаль направлена наружу к замкнутой поверхности.

Приложение 2. Преобразование левой части уравнения теоремы Гаусса в случае определённой симметрии

В теореме Гаусса (1.13) замкнутую поверхность мы выбираем сами, в условиях задачи её нет. Обычно замкнутая поверхность совпадает с эквипотенциальной поверхностью. Использование данной теоремы в задачах ограничено случаями специальной симметрии (сферическая, цилиндрическая или плоская симметрия). В этих случаях применение теоремы Гаусса позволяет получить несравненно более простые решения.

При **сферической** симметрии поворот непрерывного распределения зарядов относительно центра симметрии на произвольный угол не меняет плотность распределения зарядов (заряженная сфера, заряженная сферическая оболочка и т. д.). В этом случае в качестве замкнутой поверхности в теореме Гаусса выбирается сфера, центр которой совпадает с центром симметрии непрерывного распределения зарядов, а вычисления удобно проводить в сферических координатах. Данная сфера совпадает с эквипотенциальной поверхностью, так как при переходе от одной точки сферы к другой пространственное распределение зарядов не изменится. В каждой точке замкнутой сферической поверхности модуль напряжённости электростатического поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости перпендикулярен этой поверхности.

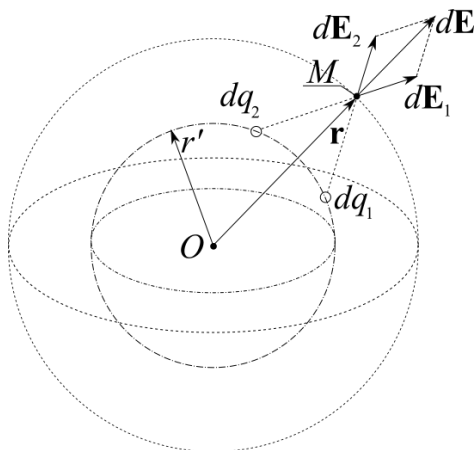


Рис. П.2.1.

Ортогональность вектора напряжённости электростатического поля к произвольной сферической поверхности

следует из симметрии задачи (рис. П.2.1): для каждого произвольного заряда dq_1 существует такой же симметрично расположенный относительно прямой OM заряд dq_2 , что сумма

напряжённостей электростатического поля от которых dE_1 и dE_2 в точке наблюдения M , лежащей на произвольной сфере радиуса r равна напряжённости dE , которая направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} .

Модуль напряжённости сохраняется при переходе к другой точке наблюдения на произвольной сфере радиуса r , так как в новой точке наблюдения распределение зарядов относительно новой точки наблюдения не изменится, следовательно, величина напряжённости электростатического поля, согласно (1.12), останется прежней.

Из условия ортогональности вектора напряжённости электростатического поля к произвольной сферической поверхности следует, что левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) преобразуется следующим образом:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint E dS, \quad (\text{П. 2.1})$$

т. е. во всех точках сферы вектора \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ сонаправленные; следовательно, скалярное произведение данных векторов равно произведению их модулей.

Далее из условия постоянства модуля напряжённости электростатического поля на произвольной сферической поверхности получаем, что выражение (П.2.1) примет вид

$$\oint E dS = E \oint dS = ES, \quad (\text{П. 2.2})$$

где $S = 4\pi r^2$ – площадь сферы.

Таким образом, левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) в случае сферической симметрии с учётом (П.2.1) и (П.2.2) равна

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2. \quad (\text{П. 2.3})$$

При **цилиндрической** симметрии поворот непрерывного распределения зарядов относительно оси симметрии (например, ось цилиндра) на произвольный угол и перенос данного распределения заряда вдоль этой оси не меняет плотность распределения зарядов (заряженный бесконечно длинный цилиндр, заряженная бесконечно длинная цилиндрическая оболочка и т. д.). В этом случае в качестве замкнутой поверхности из теоремы Гаусса выбирается цилиндр, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии непрерывного распределения зарядов, при этом вычисления удобнее всего проводить в цилиндрических координатах. Боковая поверхность данного цилиндра

совпадает с эквипотенциальной поверхностью, так как при переходе от одной точки боковой поверхности цилиндра к другой пространственное распределение зарядов не изменится. В каждой точке боковой цилиндрической поверхности модуль напряжённости электростатического поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости перпендикулярен этой поверхности.

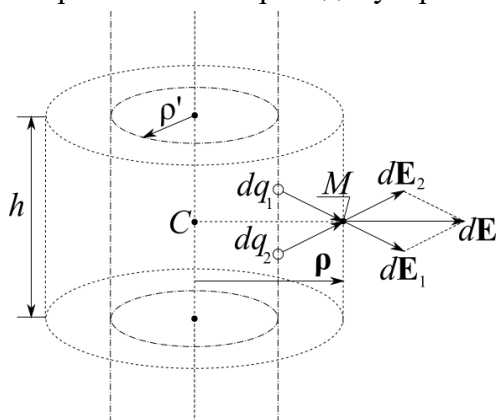


Рис. П.2.2.

Ортогональность напряжённости электростатического поля к боковой поверхности произвольного цилиндра следует из симметрии задачи (рис. П.2.2): для каждого произвольного заряда dq_1 существует такой же симметрично

расположенный относительно прямой CM заряд dq_2 , что сумма напряжённостей электростатического поля от которых $d\mathbf{E}_1$ и $d\mathbf{E}_2$ в точке наблюдения M , лежащей на боковой поверхности произвольного цилиндра радиуса ρ , равна напряжённости $d\mathbf{E}$, которая направлена вдоль полярного радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$.

Модуль напряжённости сохраняется при переходе к другой точке наблюдения на боковой поверхности произвольного цилиндра радиуса ρ , так как в новой точке наблюдения распределение зарядов относительно новой точки наблюдения не изменится; следовательно, величина

напряжённости электростатического поля, согласно (1.12), останется прежней.

Поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и двух оснований. В этом случае левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) разложится на сумму трёх интегралов:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (\text{П. 2.4})$$

где S_1 — площадь боковой поверхности цилиндра, S_2 — площадь нижнего основания, S_3 — площадь верхнего основания.

Из условия ортогональности вектора напряжённости электростатического поля к боковой поверхности произвольного цилиндра следует, что интегралы в правой части выражения (П.2.4) преобразуются следующим образом:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{S_1} E dS, \quad \int_{S_2} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{S_3} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0, \quad (\text{П. 2.5})$$

т. е. вектора \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ сонаправлены только на боковой поверхности цилиндра, а на основаниях данные вектора перпендикулярны; следовательно, скалярное произведение векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ равно произведению их модулей на боковой поверхности и равно нулю на основаниях.

Далее из условия постоянства модуля напряжённости электростатического поля на боковой поверхности произвольного цилиндра получаем, что интеграл по боковой поверхности (П.2.5) примет вид

$$\int_{S_1} E dS = E \int_{S_1} dS = ES, \quad (\text{П. 2.6})$$

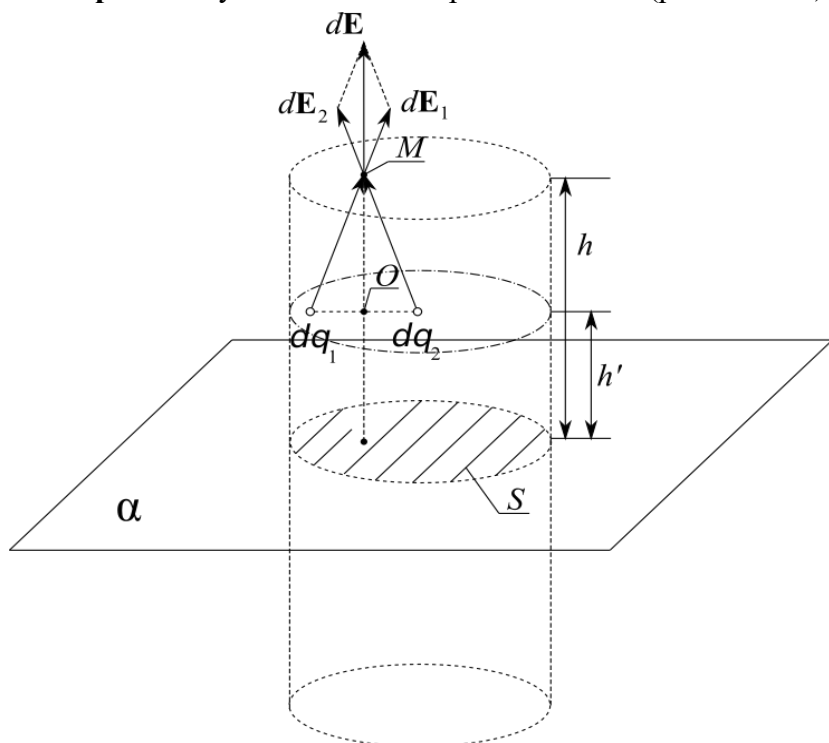
где $S = 2\pi rh$ – площадь боковой поверхности цилиндра, h – высота цилиндра (рис. П.2.2).

Таким образом, левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) в случае цилиндрической симметрии с учётом (П.2.4–П.2.6) равна

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi rh. \quad (\text{П. 2.7})$$

При **плоской** симметрии сдвиг непрерывного распределения зарядов вдоль любого вектора, лежащего в плоскости симметрии, не меняет плотность распределения зарядов (бесконечная заряженная плоскость, бесконечная заряженная пластина и т. д.). В этом случае в качестве замкнутой поверхности из теоремы Гаусса выбирается цилиндр, основания которого параллельны данной плоскости симметрии и находятся на равном расстоянии от плоскости по разные стороны от неё. Основания данного цилиндра совпадают с эквипотенциальной поверхностью, так как при переходе от одной точки оснований цилиндра к другой пространственное распределение зарядов не изменится. В каждой точке торцов цилиндрической поверхности модуль напряжённости электростатического поля принимает постоянное значение, а вектор напряжённости перпендикулярен этим поверхностям.

Ортогональность напряженности электростатического поля к основаниям произвольного цилиндра следует из симметрии задачи (рис. П.2.3):



для каждого произвольного заряда dq_1 существует такой же симметрично расположенный относительно прямой

Рис. П.2.3.

OM заряд dq_2 , что сумма напряжённостей электростатического поля от которых dE_1 и dE_2 в точке наблюдения M , лежащей на верхнем основании произвольного цилиндра высотой h , равна напряжённости dE , которая направлена вдоль прямой OM , т.е. перпендикулярно основанию цилиндра (аналогично для нижнего основания).

Модуль напряжённости сохраняется при переходе к другой точке наблюдения на основаниях произвольного цилиндра (в том числе переход от точки наблюдения на одном основании к точке наблюдения на другом основании цилиндра), так как в новой точке наблюдения распределение зарядов относительно новой точки наблюдения не изменится, следовательно, величина напряжённости электростатического поля, согласно (1.12), останется прежней.

Поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и двух оснований. В этом случае левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) разложится на сумму трёх интегралов (П.2.4).

Из условия ортогональности вектора напряжённости электростатического поля к основаниям произвольного цилиндра следует, что интегралы в правой части выражения (П.2.4) преобразуются следующим образом:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{S_2} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{S_2} E dS, \quad \int_{S_3} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{S_3} E dS, \quad (\text{П. 2.8})$$

т. е. вектора \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ сонаправлены только на основаниях цилиндра, а на боковой поверхности данные вектора перпендикулярны; следовательно, скалярное произведение векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ равно произведению их модулей на основаниях и равно нулю на боковой поверхности.

Далее из условия постоянства модуля напряжённости электростатического поля на основаниях произвольного цилиндра получаем, что интегралы по основаниям (П.2.8) примут вид

$$\int_{S_2} E dS = \int_{S_3} E dS = E \int_{S_2} dS = E \int_{S_3} dS = ES, \quad (\text{П. 2.9})$$

где S – площадь основания цилиндра (площадь заштрихованной области на рис. П.4.3).

Таким образом, левая часть уравнения теоремы Гаусса (1.13) в случае плоской симметрии с учётом (П.2.4, П.2.8, П.2.9) равна

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot 2S. \quad (\text{П. 2.10})$$

Литература

- [1] Иродов, И. Е. Электромагнетизм. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. – 9-е изд. (эл.). – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 319 с.
- [2] Иродов, И. Е. Задачи по общей физике : учебное пособие / И. Е. Иродов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 416 с.

- [3] Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учебное пособие для вузов : в 5 т. Т. 3 : Электричество / Д. В. Сивухин. – 4-е изд., стереотип. – М. : Физмалит ; МФТИ, 2009. – 656 с.
- [4] Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие : в 3 т. Т. 2 : Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. – 5-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2018. – 468 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- [5] Киселев, Д. Ф. Электричество и магнетизм. Методика решения задач : учебное пособие / Д.Ф. Киселев [и др.]. – М. : Физический факультет МГУ, 2010. – 332 с.
- [6] Трофимова, Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стереотип. – М. – Академия, 2006. – 560 с.
- [7] Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм : учебное пособие. – М. : Высш. школа, 1983. – 463 с.

Оглавление

1. Электростатическое поле в вакууме	3
2. Электростатическое поле при наличии проводников	36
3. Электростатическое поле при наличии диэлектриков	58
4. Постоянное магнитное поле в вакууме.....	75
5. Постоянное магнитное поле в магнетиках	93
6. Электромагнитная индукция	105
Приложения.....	113
Литература.....	123

Учебное издание

Кузнецова Ирина Александровна
Московский Сергей Борисович
Романов Дмитрий Николаевич
Сергеев Александр Николаевич

Электромагнетизм. Избранные главы. Примеры и задачи

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор, верстка
И. А. Кузнецова, С. Б. Московский, Д. Н. Романов,
А. Н. Сергеев

Подписано в печать 21.12.2021

Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л. 7,4. Уч.-изд. л. 4,2.

Тираж 5 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.

