

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Цель преподавания дисциплины заключается в том, чтобы сформировать у будущих специалистов современные теоретические и практические знания в области функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина "Функциональный анализ" относится к базовой части Блока 1. Для освоения данной дисциплины студентам нужны знания из курсов математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного. Полученные в курсе знания и умения будут необходимы при изучении курсов математических дисциплин, исследующих те или иные математические структуры, при написании курсовых и дипломных работ. Более того, развитие таких дисциплин как дифференциальные уравнения, теория управления, методы вычисления и другие, вряд ли было бы успешным, если бы при этом не использовался функциональный анализ. Поэтому функциональный анализ стал необходимым элементом серьезного математического образования.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция (код и формулировка) | Индикатор достижения компетенции (код и формулировка) | Перечень планируемых результатов обучения |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Общепрофессиональные компетенции | | |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ИД-ОПК-1.1 Обладает основными фундаментальными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике их использования в профессиональной деятельности | Знать основные теоремы теории линейных непрерывных операторов, принцип сжимающих отображений и другие теоремы о существовании решений различных классов уравнений. Уметь решать задачи функционального анализа; доказывать утверждения функционального анализа. Владеть аппаратом функционального анализа |
| | ИД-ОПК-1.2 Умеет квалифицированно определять область фундаментальных знаний, относящихся к поставленной задаче | Знать формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства. Уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, применять методы функционального анализа в процессе исследований. Владеть методами применения аппарата функционального анализа для решения задач. |
| | ИД-ОПК-1.3 Имеет навыки аналитической работы, связанной с применением фундаментальных знаний на практике | Знать формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства. Уметь ставить задачи, пользуясь языком функционального анализа, адаптировать методы функционального анализа для исследования сложных систем; |

| | | |
|--|--|--------------------------------------------------------------------------------|
| | | Владеть навыками практического использования методов, изученных в курсе |
|--|--|--------------------------------------------------------------------------------|

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 академических часов.

| № п/п | Темы (разделы) дисциплины, их содержание | Семестр | Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах) | | | | | | Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ (при наличии) | |
|----------|----------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| | | | Контактная работа | | | | | | | |
| | | | Лекции | практические | лабораторные | консультации | аттестационные испытания | самостоятельная работа | | |
| 1 | Введение. Метрические пространства. Примеры метрических пространств. | 5 | 2 | 2 | | | | 4 | | |
| 2 | Полные метрические пространства. | 5 | 2 | 2 | | | | 2 | Контрольная работа № 1 | |
| 3 | Принцип сжимающих отображений и его применение. | 5 | 2 | 2 | | 1 | | 4 | | |
| 4 | Компактные метрические пространства. | 5 | 2 | 2 | | 1 | | 3 | | |
| 5 | Нормированные пространства. | 5 | 1 | 1 | | 1 | | | | |
| 6 | Линейные непрерывные функционалы и их свойства | 5 | 3 | 4 | | 1 | | 4 | Контрольная работа № 2 | |
| 7 | Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала | 5 | 2 | 2 | | 1 | | 4 | Контрольная работа № 3 | |
| 8 | Сопряженное пространство. | 5 | 2 | 2 | | 1 | | 2 | Контрольная работа № 4 | |
| 9 | Линейные непрерывные операторы. | 5 | 4 | 4 | | 1 | | 5 | | |
| 10 | Компактные операторы и их свойства | 5 | 4 | 3 | | 1 | | 3 | Контрольная работа № 5 | |
| 11 | Гильбертовы пространства | 5 | 4 | 4 | | 1 | | 4 | Контрольная работа № 6 | |

| | | | | | | | | | |
|----|---------------------------------|---|-----------|-----------|--|-----------|------------|-------------|------------------------|
| 12 | Линейные интегральные уравнения | 5 | 2 | 2 | | 1 | | 1 | |
| 13 | Обобщенные функции | 5 | 2 | 2 | | | | | Контрольная работа № 7 |
| | | | | | | 2 | 0.5 | 33.5 | Экзамен |
| | ИТОГО 144 часа | | 32 | 32 | | 10 | 0.5 | 69.5 | |

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Введение. Метрические пространства.

Предмет и метод дисциплины «Функциональный анализ». Краткие исторические сведения. Связь с другими математическими дисциплинами.

Определения и примеры метрических пространств. Сходимость, открытые и замкнутые множества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.

Раздел 2. Полные метрические пространства.

Определения и примеры полных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространств.

Раздел 3. Принцип сжимающих отображений и его применения.

Принцип сжимающих отображений. Применение принципа для решения алгебраических, интегральных и дифференциальных уравнений. Обобщение принципа сжимающих отображений.

Раздел 4. Компактные метрические пространства.

Понятие компактности. Критерий компактности Хаусдорфа. Критерии компактности в различных метрических пространствах (теорема Арцела-Асколи).

Компактность в пространстве последовательностей и в пространстве Лебега. Компактность в конечномерном пространстве. Обобщение теоремы Вейерштрасса.

Раздел 5. Нормированные пространства.

Определение и примеры нормированных пространств. Банаховы пространства. Связь метрических и нормированных пространств.

Раздел 6. Линейные функционалы.

Определение и примеры непрерывных линейных функционалов. Геометрический смысл линейного функционала. Норма функционала и примеры ее вычисления. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. Ее следствия. Функционал Минковского и его свойства. Отделение выпуклых множеств. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. Норма линейного функционала.

Раздел 7. Теорема Хана-Банаха.

Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. Ее следствия. Функционал Минковского и его свойства. Отделение выпуклых множеств.

Раздел 8. Сопряженные пространства.

Определения и примеры сопряженных пространств. Полнота. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.

Раздел 9. Линейные операторы.

Определения и примеры. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Сопряженный оператор. Обратный оператор (теорема Банаха об обратном операторе). Принцип равномерной ограниченности. Спектр оператора. Резольвента.

Раздел 10. Компактные операторы

Определения и примеры компактных операторов. Единичный оператор как пример некомпактного оператора. Основные свойства компактных операторов. Спектр компактного оператора.

Раздел 11. Гильбертовы пространства.

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Сепарабельные гильбертовы пространства. Существование ортогонального базиса. Ортогональные системы функций. Разложение функций в ряд Фурье. Системы Хаара и Радемахера. Ортогонализация. Неравенство Бесселя. Замкнутая ортогональная система. Теорема Рисса-Фишера. Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Спектр эрмитова оператора. Теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. Спектральная теорема. Неограниченные, самосопряженные операторы.

Раздел 12. Линейные интегральные уравнения.

Основные определения. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения с симметрическим ядром. Теорема Фредгольма. Случай вырожденных ядер. Уравнения Вольтерра.

Раздел 13. Обобщенные функции.

Расширение понятия функций. Пространство основных функций. Действия над обобщенными функциями (умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных). Пространство обобщенных функций.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

Самостоятельная работа – вид учебной деятельности, выполняемый студентами без непосредственного контакта с преподавателем или управляемый преподавателем опосредованно через специальные учебные материалы.

Контрольная работа – один из основных видов самостоятельной работы студентов, представляющий собой изложение ответов на теоретические вопросы по содержанию учебной дисциплины и решение практических заданий.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине могут использоваться:

Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебное пособие. - М.: Наука, 1972.-496с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1965.-519с.
3. Антонец В.А., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Мн.: Вышэйшая школа, 1978.-205с.
4. Иродова И.П. Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа. Учебное пособие. Ярославль, ЯрГУ, 2010.- 124с.
5. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учебное пособие для вузов. - М.: Наука, 1984.-256 с.

б) дополнительная литература

1. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа: учебное пособие для вузов. - М.: Наука, 1979.-381с
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения: Введение в теорию: Учебное пособие для вузов. - М.: Наука, 1975.-304с.
3. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 1982.-271с..
4. Садовничий В.А. Теория операторов: учебник для вузов - 4-е изд., испр. и доп. - М.: Дрофа, 2001.-384с.

в) ресурсы сети «Интернет»

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Автор:

Профессор кафедры общей математики, доктор физ.-мат. наук И.П. Иродова

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Функциональный анализ»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Примеры вопросов и задач на экзамене.

Пример 1.

1. Критерий компактности Хаусдорфа (достаточность).
2. Доказать, что $\tilde{L}_p[a, b]$ не полное метрическое пространство.
3. Будет ли последовательность $x_n(t) = e^{\frac{t}{n}}, n \in N$ сходиться в $L_1[-1, 1]$?
4. Будет ли $\rho(x, y)$ метрикой на R , и если да, то будет ли метрическое пространство полным?
$$\rho(x, y) = |e^{3x} - e^{3y}|.$$
5. Предкомпактно ли множество функций
 $x_n(t) = e^{t-n}, n \in N$ в $C[0, 1]$?

Пример 2.

1. Обобщение теоремы Вейерштрасса.
2. Доказать, что l_∞ - полное метрическое пространство.
3. Будет ли $\rho(x, y)$ метрикой на R , и если да, то будет ли метрическое пространство полным?

$$\rho(x, y) = |(2x)^3 - (2y)^3|.$$

4. Будет ли последовательность $x_n = \left(\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right)$ сходиться в пространстве $L_1[-1, 1]$?
5. Предкомпактно ли множество функций

$$K = \left\{ x \in l_1 : |x_{2n}| \leq \frac{1}{(2n)^2}; |x_{2n+1}| \leq \frac{1}{n^3} \right\} \text{ в } l_1?$$

Пример 3.

1. Теорема о вложенных шарах.
2. Доказать, что $C[a, b]$ - полное метрическое пространство.

3. Будет ли $\rho(x, y)$ метрикой на R , и если да, то будет ли метрическое пространство полным?

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

4. Будет ли последовательность $x_n(t) = |t| + \left(\frac{t}{n}\right)^2$ сходиться в $C[-1, 2]$?

5. Предкомпактно ли множество функций

$$x_n(t) = \cos \alpha t, \quad \alpha \in [3, 4] \text{ в } C[0, 1]?$$

Пример 4.

1. Принцип сжимающих отображений.

2. Доказать, что если X - полное метрическое пространство, $Y \subset X$, Y - замкнуто, то Y - полное метрическое пространство.

3. Будет ли $\rho(x, y)$ метрикой на R , и если да, то будет ли метрическое пространство полным?

$$\rho(x, y) = |\sin^3 x - \sin^3 y|.$$

4. Будет ли последовательность $x_n(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{t}{n} + 1, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$ сходиться в $L_2[-1, 1]$?

5. Предкомпактно ли множество функций

$$K = \left\{ x \in l_2 : |x_{2n}| \leq \frac{1}{2n}; |x_{2n+1}| \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} \text{ в } l_2?$$

Пример 5.

1. Линейные функционалы. Определение и примеры. Геометрический смысл линейных функционалов.

2. Непрерывные и ограниченные линейные функционалы. Примеры, свойства.

3. Норма линейного функционала. Геометрический смысл нормы функционала.

4. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в метрическом пространстве.

5. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в нормированном

6. Общий вид линейного функционала в пространстве $C[a, b]$.

7. Принцип сжимающего отображения и его применение для интегрального уравнения Фредгольма.

8. Общий вид функционалов в пространстве ограниченных последовательностей.

Контрольные работы.

Темы контрольных работ:

1) метрические пространства (свойства метрики, сходимость в различных пространствах, полные метрические пространства, сепарабельные пространства);

2) применение принципа сжимающих отображений;

3) линейные функционалы (вычисление нормы функционала, сходимость функционалов, нахождение продолжения функционала, общий вид функционала в различных пространствах);

4) линейные операторы (вычисление нормы операторов, проверка сходимости последовательности операторов);

5) спектр оператора;

6) гильбертово пространство;

7) обобщенные функции.

Контрольная работа 1

Вариант I.

1. Можно ли на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за метрику величину:

$$\rho(x, y) = |x(a) - y(a)| + |x'(a) - y'(a)| + |x''(a) - y''(a)| ?$$

2. Будет ли последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots)$ сходиться в пространствах

$$l_p, l_\infty, S ?$$

3. При каком λ оператор A , действующий в пространстве $C[0, 1]$ является сжимающим?

$$Ax(t) = \lambda \int_0^1 t^2 \cdot sx(s) ds + 1$$

4. Пусть $\rho(x, y)$ - метрика в пространстве X . Будет ли метрикой $\rho_1(x, y) = \rho^2(x, y)$?

5. Доказать, что оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$ является непрерывным

$$Ax = (x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - x_3, 0, 0, \dots)$$

Вариант II.

1. Можно ли на множестве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за метрику величину:

$$\rho(x, y) = \max_t |x'(t) - y'(t)| ?$$

2. Будет ли последовательность $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ сходиться в пространствах l_p, l_∞, S ?

3. Будет ли оператор A , действующий из l_2^1 в l_2^1 сжимающим?

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Пусть X - множество дифференцируемых функций, заданных на $[a, b]$. Будет ли $\rho(x, y) = \min_{t \in [a, b]} |x'(t) - y'(t)| + |x(a) - y(a)|$ метрикой на X ?

5. Сходится ли последовательность $x^{(n)} = (e^{-1}, \dots, e^{-n}, 0, 0, \dots)$ в пространстве l_1 ?

Вариант III.

1. Можно ли на множестве действительных чисел ввести метрику с помощью формулы:

$$\rho(x, y) = |x^2 - y^2|?$$

2. Будет ли последовательность $x_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n - \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ сходиться в пространстве $C[0, 1]$?

3. Будет ли оператор A , действующий из l_2^2 в l_2^2 сжимающим?

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $\rho(x, y)$ - метрика в пространстве X . Будет ли метрикой $\rho_1(x, y) = \rho^2(x, y)$?

5. Будет ли последовательность $x_n(t) = t^n + t + 1$ сходиться в пространстве $C[0, 1]$?

Вариант IV.

1. Можно ли на множестве упорядоченных групп из действительных чисел ввести метрику с помощью формулы:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{\frac{1}{2}}$$

2. Будет ли последовательность $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ сходиться в пространстве $C[0, 1]$?

3. Будет ли отображение A , действующее на $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$ сжимающим?

$$Ax(t) = \frac{1}{2}t \cdot x(t).$$

4. Будет ли $\rho(x, y) = |x(a) + y(a) - x(b) - y(b)| + \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ метрикой на множестве дифференцируемых функций?

5. Сходится ли последовательность $x_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 < t \leq 1 \\ 2, & t = 0 \\ t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$ в пространстве $L_2[0, 1]$?

Контрольная работа 2.**Вариант I.**

1. Найти неподвижную точку отображения $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 1$$

2. Указать последовательность, которая сходится к корню уравнения $F(x) = 0$, и выяснить, сколько нужно сделать итераций, чтобы получить приближенное значение с точностью до $\varepsilon = 0.01$

$$F(x) = x^5 + x + 1.$$

3. Найти методом последовательных приближений решение интегрального уравнения с точностью до 0.01:

$$f(x) = \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot s^2 f(s) ds + 1$$

Вариант II.

1. Найти неподвижную точку отображения $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{t^2}{2} + 4$$

2. Указать последовательность, которая сходится к корню уравнения $F(x) = 0$, и выяснить, сколько нужно сделать итераций, чтобы получить приближенное значение с точностью до $\varepsilon = 0.01$

$$F(x) = 2x + s \cdot nx - 1.$$

3. Найти методом последовательных приближений решение интегрального уравнения с точностью до 0.01:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos \pi(x-s) f(s) ds + 1$$

Вариант III.

1. Найти неподвижную точку отображения $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) d\tau - t^2 + 3t + 2.$$

2. Указать последовательность, которая сходится к корню уравнения $F(x) = 0$, и выяснить, сколько нужно сделать итераций, чтобы получить приближенное значение с точностью до $\varepsilon = 0.01$

$$F(x) = x^3 + 2x + 1.$$

3. Найти методом последовательных приближений решение интегрального уравнения с точностью до 0.01:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2 + (s-1)^2] f(s) ds + x^2$$

Вариант IV.

1. Найти неподвижную точку отображения $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) d\tau + t^2 - 8$$

2. Указать последовательность, которая сходится к корню уравнения $F(x) = 0$, и выяснить, сколько нужно сделать итераций, чтобы получить приближенное значение с точностью до $\varepsilon = 0.01$

$$F(x) = -2x^5 - x + 3.$$

3. Найти методом последовательных приближений решение интегрального уравнения с точностью до 0.01:

$$f(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 (x-s+1)^2 f(s) ds + x^3 - x.$$

Контрольная работа 3.

Вариант I.

1. Вычислить, пользуясь только определением, норму функционалов. Доказать их линейность.

а) $f : C[a, b] \rightarrow R \quad [a, b] = [-1, 2]$

$$f(x) = \int_{-1}^2 t \cdot x(t) dt - \frac{x(0) + x(1)}{2}.$$

б) $f : l_1 \rightarrow R$

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

в) $f : C_0 \rightarrow R$ (C_0 - это пространство последовательностей, сходящихся к нулю,

$$\|x\|_{C_0} = \max_i |x_i|).$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k.$$

2. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму функционала из п. 1а и представить этот функционал в виде интеграла Стильтеса.

3. Найти $\rho(x^*, \ker f, C[-1, 1])$, где $x^*(t) = |t|$ и $f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dt$.

Найти многочлен наилучшего приближения, если он существует.

4. Построить продолжение функционала $f_0 : L_0 \rightarrow R$ на все пространство L с сохранением нормы

а) $L = l_p^2, L_0 = \{x \in l_p^2 : x_1 = 3x_2\}, p = 1, 2, \infty,$

$$f_0(x) = x_1.$$

б) $L = l_p^3, L_0 = \{x \in l_p^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, p = 1, 2, \infty,$

$$f_0(x) = x_1 + x_2.$$

5. Будут ли функционалы f_0 и f удовлетворять условиям теоремы Хана-Банаха?

$$f_0 : L_0 \rightarrow R. \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\},$$

$$f_0(x) = x_1 - x_2. \quad f : l_\infty^2 \rightarrow R, \quad f(x) = -3x_2.$$

Вариант II.

1. Вычислить, пользуясь только определением, норму функционалов. Доказать их линейность.

а) $f : C[a, b] \rightarrow R \quad [a, b] = [-1, 2]$

$$f(x) = \int_{-1}^2 t \cdot x(t) dt - \frac{x(0) + x(1)}{2}$$

б) $f : l_1 \rightarrow R$

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

в) $f : C_0 \rightarrow R$ (C_0 - это пространство последовательностей, сходящихся к нулю,

$$\|x\|_{C_0} = \max_i |x_i|).$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k.$$

2. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму функционала из п. 1а и представить этот функционал в виде интеграла Стильтеса.

3. Найти $\rho(x^*, \ker f, l_2)$, где $x^* = (1, -1, 2, 0, \dots)$ и $f(x) = 2x_1 + 3x_3$.

Найти многочлен наилучшего приближения, если он существует.

4. Построить продолжение функционала $f_0 : L_0 \rightarrow R$ на все пространство L с сохранением нормы

а) $L = l_p^2, L_0 = \{x \in l_p^2 : x_1 = -2x_2\}, p = 1, 2, \infty.$

$$f_0(x) = 3x_1.$$

б) $L = l_p^3, L_0 = \{x \in l_p^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, p = 1, 2, \infty.$

$$f_0(x) = x_1 - 2x_2.$$

5. Будут ли функционалы f_0 и f удовлетворять условиям теоремы Хана-Банаха?

$$f_0 : L \rightarrow R. \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 - 3x_2 = 0\}$$

$$f_0(x) = x_1. \quad f : l_1^2 \rightarrow R. \quad f(x) = x_1.$$

Контрольная работа 4.

Вариант I.

1. Вычислить норму оператора в $C[0, 1]$

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds$$

2. Вычислить норму оператора в l_2 :

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

3. X - банахово пространство; A - линейный ограниченный оператор, действующий из X в X . Будет ли величина $\|x\|_2$ нормой $\|x\|_2 := \|Ax\|$?

4. Пусть e_1, e_2, \dots - базис в l_2 . Определим оператор A_n формулой

$$A_n e_k = \begin{cases} e_1, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}.$$

Найти нормы A_n и выяснить, есть ли сходимость (равномерная и поточечная) к нулю?

Вариант II.

1. Вычислить норму оператора в $C[0,1]$

$$Ax(t) = \int_0^1 t^n s^m x(s) ds$$

2. Вычислить норму оператора в l_2 :

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots).$$

3. X - банахово пространство; A - линейный ограниченный оператор, действующий из X в X . Будет ли в этой норме X банаховым пространством $\|x\|_2 = \|x\| + \|Ax\|$?

4. Пусть e_1, e_2, \dots - базис в l_2 . Определим оператор A_n формулой

$$A_n e_k = \begin{cases} e_n, k = 1 \\ 0, k \neq 1 \end{cases}.$$

Найти нормы A_n и выяснить, есть ли сходимость (равномерная и поточечная) к нулю?

Контрольная работа 5.

Вариант I.

1. Имеет ли оператор $A: l_2 \rightarrow A_2$ ограниченный обратный

$$Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots \right).$$

2. Найти спектр оператора $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = x(0) + t^2 x\left(\frac{1}{2}\right).$$

3. Может ли число $\lambda = \frac{1}{2}$ принадлежать спектру оператора $A: l_1^2 \rightarrow l_1^2$

$$Ax = (2x_1, x_1 + x_2).$$

4. Показать, что если λ является регулярной точкой для оператора A , то λ будет регулярной точкой и для оператора $A + B$, где $\|B\|$ достаточно мала.

Вариант II.

1. Имеет ли оператор $A: l_2 \rightarrow A_2$ ограниченный обратный

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_n}{n^2}, \dots \right).$$

2. Найти спектр оператора $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = x\left(\frac{1}{2}\right) + tx(0).$$

3. Может ли число $\lambda = 3$ принадлежать спектру оператора $A : l_2^2 \rightarrow l_2^2$

$$Ax = (3x_1, 4x_1 + x_2).$$

4. Показать, что если λ является регулярной точкой для оператора A , то λ будет регулярной точкой и для оператора $A + B$, где $\|B\|$ достаточно мала.

Контрольная работа 6.

Вариант I.

1. Применить процесс ортогонализации к последовательности $1, x, x^2$ в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Найти коэффициенты разложения по базису $e_n = e^{2\pi i n}$ в $L_2[0,1]$ для функции $f(x) = e^{\lambda x}$.

3. Найти в $L_2[0,1]$ ортогональное дополнение к множеству многочленов.

4. Доказать, что M всюду плотно в $H \Leftrightarrow$ если не существует элемента $z \neq 0$ такого, что z перпендикулярно M .

Вариант II.

1. Применить процесс ортогонализации к последовательности $1, x, x^2$ в весовом гильбертовом пространстве $L_2\left([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

2. Найти коэффициенты разложения по базису $e_n = e^{2\pi i n}$ в $L_2[0,1]$ для функции $f(x) = \operatorname{sgn}(2x-1)$.

3. Найти в $L_2[0,1]$ ортогональное дополнение к множеству многочленов с нулевым свободным членом.

4. Доказать, что если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Контрольная работа 7.

Вариант I.

1. Найти обобщенную производную от функции $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x - n, & n \leq x \leq n + \frac{1}{2} \\ n + 1 - x, & n + \frac{1}{2} < x < n + 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin nx}{x}$ сходится в пространстве K^* к функции $\delta(x)$.

3. В классе обобщенных функций решить дифференциальное уравнение $y' = \delta(x - a)$.

4. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Вариант II.

1. Найти обобщенную производную от функции $f(x)$.

$$y = x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad -1 < \lambda < 0.$$

2. Доказать, что последовательность функций $f_n(x) = \cos nx$ как последовательность обобщенных функций сходится к нулю в пространстве K^* .

3. В классе обобщенных функций решить дифференциальное уравнение $y'' = \delta(x) + \delta(x - 1)$.

4. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f(x) = x^k$.

Вариант III.

1. Найти производную по Фреше от функционала $F(x) = \|x\|^2$ в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$.

2. Существует ли производная по Гато от функционала $F(x) = \|x\|$ в пространстве $C[0, 1]$?

3. Исследовать на экстремум функционал

$$I(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx,$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 8.$$

4. Найти кривую, проходящую через точки $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, имеющую длину π и такую, чтобы площадь, заключенная между кривой и отрезком оси Ox , была наибольшей.

Вариант IV.

1. Существует ли производная по Фреше от функционала $F(x) = \|x\|$ в пространстве $C[0, 1]$?

2. Существует ли производная по Гато от функционала $F(x) = \|x\|$ в точке $x = 0$ в пространстве $L_2[0, 1]$?

3. Найти экстремум функционал

$$I(y, z) = \int_2^3 (xy'^2 + z'^2 + xy'z') dx,$$

$$\text{где } y(2) = \ln 3, \quad y(3) = \ln 3, \quad z(2) = \ln 2, \quad z(3) = 0.$$

4. Определить форму, которую принимает в поле тяжести абсолютно гибкая нить длиной l , подвешенная за оба конца.

Индивидуальные задания.

Темы индивидуальных заданий:

- 1) Топологические пространства.
- 2) Эквивалентность множеств. Понятие мощности.
- 4) Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.
- 5) Пополнение метрического пространства.
- 6) Функционал Минковского и его свойства.
- 7) Интегральные уравнения Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
- 8) Аналитические свойства резольвенты.
- 9) Задача Штурма-Лиувилля как пример использования теоремы Фредгольма.
- 10) Монотонные последовательности операторов. Функции от оператора.
- 11) Спектральная теорема. Примеры неограниченных самосопряженных операторов.
- 12) Дифференцирование в линейных пространствах.

1.2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену

1. Метрические пространства. Определения и примеры (с доказательством).
2. Полные метрические пространства. Определение, примеры.
3. Критерий полноты метрических пространств.
4. Пополнение метрических пространств.
5. Принцип сжимающих отображений и его обобщение.
6. Применение принципа сжимающих отображений для решения систем линейных уравнений.
7. Применение принципа сжимающих отображений для решения дифференциальных уравнений.
8. Применение принципа сжимающих отображений для решения интегральных уравнений.
9. Всюду плотные и нигде не плотные множества. Определения, примеры. Сепарабельные пространства.
10. Теорема Бэра (о структуре полного метрического пространства). Применение теоремы.
11. Компактное метрическое множество и его простые свойства.
12. Непрерывные функции, заданные на компакте (обобщение теоремы Вейерштрасса).
13. Критерий компактности в конечном пространстве.
14. Вполне ограниченные множества. Связь с ограниченными множествами.
15. Критерий компактности Хаусдорфа.
16. Критерий компактности в $C[a, b]$.
17. Критерий компактности в $L_p[a, b]$.
18. Критерий компактности в l_p .
19. Банаховы пространства. Примеры.
20. Линейные функционалы. Геометрический смысл линейного функционала.
21. Непрерывные и ограниченные линейные функционалы.
22. Норма линейного функционала. Геометрический смысл нормы функционала.
23. Опорная гиперплоскость.
24. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в метрическом пространстве.

25. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала в нормированном пространстве.
26. Следствия теоремы Хана-Банаха.
27. Функционал Минковского и его свойства.
28. Отделение выпуклых множеств.
29. Сопряженное пространство. Полнота сопряженного пространства.
30. Общий вид функционала в пространстве l_p^n . Сопряженное к пространству l_p^n .
31. Общий вид функционала в пространстве l_p . Сопряженное к пространству l_p .
32. Общий вид функционала в пространстве $L_p[a, b]$. Сопряженное к $L_p[a, b]$.
33. Функции ограниченной вариации.
34. Интеграл Стильтьеса.
35. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a, b]$.
36. Сопряженное к пространству $C[a, b]$.
37. Слабая и сильная сходимость последовательности функционалов. Критерий слабой сходимости функционалов.
38. Применение слабой сходимости функционалов к приближенному вычислению интегралов.
39. Линейные операторы, определение, примеры.
40. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Простейшие свойства операторов.
41. Норма оператора. Примеры вычисления норм операторов.
42. Сумма и произведение операторов. Пространство $L(X, Y)$.
43. Теорема Банаха-Штейнгауса (принцип равномерной ограниченности) и его применение к теории интерполирования.
44. Обратные операторы. Определение, примеры и простейшие свойства.
45. Теорема Банаха об обратном к оператору $E - A$.
46. Теорема Банаха об обратном операторе.
47. Спектр оператора. Свойства спектра оператора. Резольвента.
48. Компактные операторы. Определение, примеры. Единичный оператор как пример некомпактного оператора.
49. Свойства компактных операторов. Собственные значения компактных операторов.
50. Сопряженные операторы и их свойства.
51. Линейные операторные уравнения с компактными операторами, условия их разрешимости и альтернатива Фредгольма
52. Гильбертовы пространства. Неравенство Коши - Буняковского. Примеры гильбертовых пространств.
53. Полные ортогональные системы. Примеры полных ортогональных систем.
54. Теорема об ортогонализации.
55. Замкнутые ортогональные системы. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Связь замкнутых и полных систем.
56. Изоморфизм гильбертовых пространств
57. Ортогональное дополнение. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму ортогональных подпространств.
58. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

- 59. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта-Шмидта.
- 60. Интегральные уравнения Фредгольма с симметричным ядром.
- 61. Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.
- 62. Обобщенные функции и действия над ними.
- 63. Пространство обобщенных функций.
- 64. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций.

1.3 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины в конце семестра студенту выставляется оценка. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Функциональный анализ»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Функциональный анализ» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз проработать.

Учитывая то, что практических занятий не очень много, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные. Кроме того, в течение семестра студенты должны выполнить две домашние самостоятельные работы.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде 7 контрольных работ. Почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы на знание определений и формулировок основных теорем. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса и две задачи. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Функциональный анализ» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.