

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Теория групп**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

**1. Цели освоения дисциплины** Целями освоения дисциплины «Теория групп» являются: обеспечение подготовки в одной из важных областей математики и ее приложений, знакомство с современными понятиями теории обыкновенных линейных представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Математический аппарат теории групп используется во многих разделах математики и физики, причем сфера его приложений все время расширяется. Более того, будучи относительно законченной, данная теория служит образцом для других алгебраических систем –компактных групп, групп Ли и теории сложности вычислений.

## 2. Место дисциплины в структуре программы

Дисциплина «Теория групп» является дисциплиной по выбору вариативной части.Б1.В.ДВ.01.01 Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов, применяемых для анализа представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих математических дисциплин: теории чисел, линейной алгебры, аналитической геометрии.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы и критерии их оценивания

- готовность к исследованию в области алгебраической геометрии, алгебраической и ана

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
ПК-1 Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	ПК1_1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий ПК1_2 Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	<b>1. Знать:</b> Основные методы и формулировки результатов, использующихся в защите информации <b>2. Уметь</b> обосновывать алгоритмы защиты информации <b>3. Владеть</b> навыками быстрых вычислений в основных алгебраических системах

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часов

Дисциплина изучается в течение первого семестра. Формой итоговой аттестации по дисциплине является зачет.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)	Формы текущего контроля успеваемости
-------	--	---------	--	--------------------------------------

			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1	Теорема Лагранжа. Действие группы на множестве. Нормализатор и стабилизатор точки. Теоремы Силова и их следствия. Группы малых порядков	3	5				13	Задания для самостоятельной работы. Контрольная работа
2	Прямые произведения групп. Абелевы группы. Двойные смежные классы. Нормальные подгруппы и факторгруппы.	3	5			2.3	13	Задания для самостоятельной работы
3	Автоморфизмы и полупрямые произведения. Применения к теории представлений и комбинаторике, быстрым вычислениям. Китайская теорема об остатках	3	6			2	9.7	Задания для самостоятельной работы
		3						Зачет
	<b>Всего 72 часа</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4.3</b>	<b>35.7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

*Тема № 1:* Теорема Лагранжа и ее следствия. Малая теорема Ферма. Действие группы на множестве. Транзитивное действие. Нормализатор и централизатор. Центр группы. Классы сопряженных элементов. Три теоремы Силова.

*Тема № 2:* Прямые произведения групп. Абелевы группы. Двойные смежные классы и произведения групп. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы об изоморфизмах. Голоморф группы. Группы подстановок.

*Тема № 3:* Автоморфизмы и полупрямые произведения групп. Применения теории групп в физике и комбинаторике, быстрым вычислениям. Перечислительная теорема Бернсайда. Китайская теорема об остатках. Свертка и ДПФ. Применение преобразования Фурье к быстрым вычислениям. Обработка сигналов и теория групп.

### 5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- GAP (GNU GPL).

процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

-- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ -- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ - NEXТ" (АБИС "БУКИ - NEXТ""БУКИ - NEXТ").

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры, М: Физматлит, 2000
2. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. , Екатеринбург: УрО РАН, 2009, 379 с.

3. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (под ред. Л.С.Казарина), М.:Мир, 1999.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000. – 239 с.

#### **б) дополнительная литература**

1. Струнков С.П. Введение в теорию представлений конечных групп. М: МИФИ, 1999
2. Глухов М.М., Круглов И.А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров с приложениями в криптографии. Лань: Сп-б, 2015
3. Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам, Ленанд, 2015
4. W.Feit, Characters of finite groups, Yale University.W.A.Benjamin, Inc., N,Y.- Amsterdam, 1967
5. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009

#### **в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/>
3. <http://mech.math.msu.su/departement/>  
([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (<http://www.edu.ru/library>).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).
6. [http:// www.tc26.ru](http://www.tc26.ru)
7. [http:// www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub_id=919061)
6. <http://habrahabr.ru/post/210684/>
8. [http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub_id=919061)
9. <http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po-issledovaniyu-khesh-funksii-stribog/>

#### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики  
профессор, д.ф-м.н.

Казарин Л.С

**Приложение к №1 рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»**

**Оценочные средства  
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к зачету:**

1. Представление группы. Приводимые и неприводимые представления..
2. Центр группы и коммутант.
3. Теорема Лагранжа
4. Малая теорема Ферма.
5. Теорема Эйлера.
6. Конечные абелевы группы.
7. Циклическая свертка и ДПФ.
8. Поле алгебраических чисел.
9. Нормализатор и централизатор.
10. Теоремы Силова.
11. Перечислительная лемма Бернсайда.
12. Теорема Казарина –Бернсайда (без доказательства).
13. Нормальные подгруппы и гомоморфизмы. Определение и примеры.
14. Применения теории групп к физическим задачам.
15. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы.
16. Применение ДПФ к быстрым вычислениям.
17. Обработка сигналов и теория групп.
18. Автоморфизмы и полупрямые произведения.
19. Теорема Ландау.
20. Классы групп (Разрешимые и нильпотентные)
21. Вложения групп.

**1.2 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельно работы по теме 1**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, § 22, задачи из подпунктов 22.1 – 22.19, .

По книге .Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4, гл.4, §4

**Задания для самостоятельно работы по теме 2**

По задачку Белого В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, , § 22, задачи из подпунктов 22.21 – 22.42, 22.45 – 22.58, .

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §6 и , §7, гл

### **Задания для самостоятельной работы по теме 3**

По книге Ноден П., Китте К. «Алгебраическая алгоритмика», гл.V, упражнения 29 – 36

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4

### **Контрольная работа**

1. Вычислить таблицу подгруппы знакопеременной группы степени 5..
2. Найти формулы для свертки двух многочленов степени 5, используя дискретное преобразование Фурье в конечном поле (в зависимости от значений коэффициентов).
3. Верно ли, что любое точное двумерное представление конечной группы над  $\mathbb{C}$  неприводимо?
4. Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$  индекса 2. Доказать, что она нормальна.
5. Найти все подгруппы группы, являющейся прямым произведением двух групп кватернионов порядка 8.

### **Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины**

#### **Компетенция ОПК-2**

**1. Группа порядка 36 действует на некотором множестве. Орбиты каких длин возможны?**

- А) 1,2,4,
- Б) 1,3,9,
- В) 1,2,3,4,6,9,12,18,36
- Г) длин, не являющихся делителями 36.

**2. Перечислите число и гомоморфизмы группы кватернионов  $Q_8$**

- А) 5 представлений степеней 1,1,1,1,2
- Б) 2 представления степеней 2 и 2
- В) 3 представления степени 2
- Г) 2 представления степени 3

**3. Регулярное представление конечной нетривиальной группы**

- А) имеет степень, равную порядку группы, и неприводимо
- Б) имеет степень, равную порядку группы, и всегда приводимо
- В) имеет степень, равную 1.

**4. Неприводимые неэквивалентные представления абелевой группы порядка 12**

- А) имеют степени 1,2,3,4,12,
- Б) имеют степень 1, их 12 штук,
- В) имеют степень 1, их 5 штук.

Вопрос №	Правильный ответ
1	В
2	А
3	Б
4	Б

### Оценка сформированности компетенций

Компетенции	Номера вопросов	Уровень формирования	Количество правильных ответов, критерии
ПК-2	1-4	Пороговый	Не менее 2
		Продвинутый	Не менее 3
		Высокий	Не менее 4

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»**

**Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины**

**Учебно-методическое обеспечение  
самостоятельной работы аспирантов по дисциплине**

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,  
рекомендованных к использованию при освоении дисциплины**

Электронные ресурсы ЯрГУ (<http://lib.uniyar.ac.ru>)

1. Библиографические записи всех видов документов, составляющих фонд библиотеки, на русском и иностранных языках и поступивших позже 1995 года:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) (в открытом доступе)

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»:

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)

4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека Online»:

[www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

5. Проект MAPC: <http://mars.arbicon.ru>.

6. Электронно-библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>

7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru: <http://elibrary.ru>

8. Англоязычные библиотеки в сети университета:

а) MathSciNet: <http://www.ams.org/snhtml/annser.csv> - с платформы издателя

<http://search.ebscohost.com/> - с платформы Ebscohost

б) Web of Science: <http://webofscience.com>

в) Scopus: <http://www.scopus.com>

г) Science The American Association for the Advancement of Science:

<http://www.sciencemag.org>

д) Ресурсы Springer

SpringerJournals: <http://link.springer.com/>

SpringerProtocols: <http://www.springerprotocols.com/>

SpringerMaterials: <http://materials.springer.com/>

SpringerReference: <http://link.springer.com>

zbMATH: <http://zbmath.org/>