

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Математические методы в экономике**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математические методы в экономике» являются математико-экономические методы и модели.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Дисциплина «Математические методы в экономике» относится к группе дисциплин по выбору к вариативной части Блока 1 и примыкают к курсам «Экономика» «Исследование операций», «Методы оптимизации».

Для освоения данной дисциплины студенты быть знакомы с классическим аппаратом математического анализа, линейной алгебры и геометрии.

Полученные в курсе «Математические методы в экономике» знания необходимы для изучения последующих дисциплин модуля «Математика и компьютерные науки», а также для продолжения обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика»

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС, ВО, ОП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	<b>ИД-ОПК -1-2</b> Осуществляет постановку задачи и определяет способ ее решения	<b>Знать:</b> - основные понятия математических методов в экономике; - практическое применение математических методов в экономике; - основные понятия теории графов <b>Уметь:</b> - решать основные задачи логистики  <b>Владеть навыками:</b> - применения математического аппарата для решения экономических задач, - применение пакетов MS Word, MS Excel.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультаций	аттестационные испытания	самостоятель ная	
1	Математико-экономические методы	5	6	6		1		7	
2	Линейное программирование	5	6	6		2		7	Задания для самостоятельной работы
3	Математические модели в экономике	5	5	7		1		12	Контрольная работа
							0,3	5,7	Зачет
	Всего		17	19		4	0,3	31,7	

#### Содержание разделов дисциплины

1. Математико-экономические методы
  - 1.1. Основные понятия теории графов
  - 1.2. Определение кратчайшего пути
  - 1.3. Построение сети минимальной длины
  - 1.4. Задача размещения производства
  - 1.5. Размещение объектов сервиса
  - 1.6. Задача определения максимального потока
  - 1.7. Задача единого среднего
  - 1.8. Задача охвата
  - 1.9. Задача о назначениях. Венгерский метод.
2. Линейное программирование
  - 2.1. Транспортная задача
  - 2.2. Симплекс-метод
  - 2.3. Геометрический метод задачи линейного программирования
  - 2.4. Задача об использовании ресурсов. Задача о диете.
  - 2.5. Общая, стандартная и каноническая задачи
  - 2.6. Двойственные задачи линейного программирования
  - 2.7. Целочисленные задачи линейного программирования
3. Математические модели в экономике
  - 3.1. Модель Леонтьева
  - 3.2. Линейная модель торговли

### 3.3. Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционно-образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** даёт первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, истории развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных учёных, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) - последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвящённое освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний. В процессе проведения таких занятий устанавливается тесный контакт преподавателя со студентами.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться): В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader - система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).

Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.

Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.

Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

**7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ  
[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>

База научных статей Mathnet

База Scopus

База Web of Sciences

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

**а) Основная литература**

1. Просветов Г.И. Математические методы в экономике. М., Изд-во РДЛ, 2007.
2. Балабаев В.Е. Математические модели рыночной экономики. Методические указания. Ярославль, ЯрГУ, 2005.

**б) дополнительная литература**

1. Боровиков В.П. Популярное введение в современный анализ данных в системе Statistica-Горячая линия. Телеком. 2013.
2. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск.: Высшая школа, 1978. – 256с.

**в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ  
([http:// www. Lib. Uniya ac.ru / opac/bk cat. Find.php](http://www.Lib.Uniya.ac.ru/opac/bk_cat.Find.php)).
2. Информационная система «Единое окно к образовательным ресурсам» (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке [http:// window.edu.ru/library](http://window.edu.ru/library)).
3. Электронно – библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru))

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);

- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы) :

Профессор кафедры математического анализа, д.ф-м.н. Балабаев В.Е.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Математические методы в экономике»**

**Фонд оценочных средств  
Для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе  
текущего контроля успеваемости**

**1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания для самостоятельной работы по теме «Линейное программирование»**

- <sup>1</sup> Компания занимается доставкой посылок. Нужно развести посылки 10 клиентам. Заданы величины  $d_j$  — количество посылок, которые нужно доставить клиенту  $j$ ,  $j = 1, \dots, 10$ . В компании имеется 4 грузовика вместимостью  $q_i$  посылок каждый,  $i = 1, \dots, 4$ . Предполагается, что все посылки не входят в один грузовик, но  $\sum_{i=1}^4 q_i \geq \sum_{j=1}^{10} d_j$  и  $d_j \leq q_i$ . Партию посылок предназначенную одному клиенту нельзя доставлять разными грузовиками. Затраты при отправке грузовика  $i$  равны  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Каждый грузовик может объехать не более пяти клиентов, кроме того, к следующим парам клиентов нельзя доставлять посылки одним и тем же грузовиком: (1,7), (2,6), (2,9). Определите, какие грузовики необходимо задействовать, чтобы доставить все посылки клиентам с минимальными суммарными затратами. Постройте математическую модель.
- <sup>2</sup> Отдел статистики подсчитал, что в городе имеется  $n$  женихов и  $n$  невест. Известна привлекательность  $(c_{ij})$  невесты  $i$  женихом  $j$ . Постройте математическую модель так, чтобы каждому жениху назначить невесту и каждой невесте назначить жениха с максимальной суммарной привлекательностью между парами. Правда ли, что задача является полиномиально разрешимой?

## Контрольная работа

1. Заданы матрица  $(h_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  с положительными вещественными элементами и вектор  $(c_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  с положительными вещественными элементами. Пусть  $\mathfrak{F}$  — семейство всех непустых подмножеств множества  $\{1, \dots, m\}$ . Для каждого  $F \in \mathfrak{F}$  определим

$$z(F) = \sum_{i=1}^n \max_{j \in F} h_{ij} - \sum_{j \in F} c_j.$$

Постройте для задачи максимизации функции  $z(F)$  модель целочисленного линейного программирования, используя только булевы переменные.

2. Докажите, что если все компоненты матрицы  $A$  и вектор-столбца  $b$  целочисленные и  $A$  — унимодулярная матрица, то все базисные решения задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

имеют целочисленные компоненты. Докажите, что утверждение верно, если  $Ax \leq b$  ( $Ax \geq b$ ).

## 1.2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Список вопросов к зачёту

1. Основные понятия теории графов. Орграф, структурный граф, сеть. Матрицы смежности и инцидентности.
2. Задача определения кратчайшего пути. Метод присвоения меток.
3. Построение коммуникационной сети минимальной длины.
4. Размещение производства. Гравитационный метод.
5. Размещение объектов сервиса. Эвристический метод Ардолана
6. Метод взвешивания, метод учёта полных затрат, метод калькуляции затрат.
7. Алгоритм определения максимального потока. Источники, стоки.
8. Задача единого среднего
9. Задача охвата
10. Задача о назначениях. Венгерский метод Куна-Маркеса.
11. Минимизация и максимизация целевой функции в задачах о назначениях.
12. Транспортная задача. Закрытая модель.
13. Метод северо-западного угла.
14. Метод минимальной стоимости
15. Матрица оценок. Оценка клетки. Отмеченные и пустые клетки.
16. Особый случай при решении транспортной задачи, нулевая поставка.
17. Распределительный метод решения транспортной задачи, цикл пересчёта.
18. Открытая модель транспортной задачи. Фиктивный потребитель, фиктивный поставщик.
19. Общая, стандартная и каноническая задачи линейного программирования. Задачи о диете и об использовании ресурсов.
20. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.

21. Симплекс-метод. Критерий оптимальности. Альтернативный оптимум. Вырожденное решение. Зацикливание и правило его устранения. Правило прямоугольников. Разрешающие столбец, строка, элемент.
22. Двойственные задачи линейного программирования.
23. Первая и вторая теоремы двойственности
24. Целочисленные задачи линейного программирования. Метод Гомори.
25. Модель Леонтьева, матрица прямых затрат. Векторы валового выпуска и конечного продукта.
26. Продуктивная матрица. Достаточное условие продуктивности. Матрица полных затрат.
27. Линейная модель международной торговли. Условия бездефицитной торговли. Структурная матрица.
28. Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Гамильтоновы графы. Константы приведения.

### **Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)**

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

### **Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)**

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач.

На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости.

При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняется поставленные баллы за задания. Пусть  $k$  – число задач в предложенном варианте (например,  $k=5$ ). Определяется общее число  $M$  баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения  $r = MN$ , где  $N=4k$  – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

$0.75 \leq r \leq 1$  - оценка «отлично»;

$0.60 \leq r < 0.75$  - оценка «хорошо»;

$0.26 \leq r \leq 0.59$  - оценка «удовлетворительно»;

$0 \leq r \leq 0.25$  - оценка «неудовлетворительно».

Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

### **Требования для получения зачета**

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Математические методы в экономике»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основу освоения курса «Математические методы в экономике» составляет сочетание лекций и практических занятий при определённом преобладании второго вида занятий. Если на лекциях излагаются основные теоремы и небольшое число примеров иллюстративного материала, то на практических занятиях решается значительное число задач.

Для успешного освоения дисциплины принципиально важно решение достаточно большого количества упражнений, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного материала. Конспекты лекции необходимо прорабатывать еще раз дома и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются объединением нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных навыков работы с аппаратом экстремальных задач, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиума. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

В конце 5-го семестра студенты сдают зачёт. Зачёт выставляется по результатам контрольной работы и краткого собеседования.

Освоить самостоятельно дисциплину «Математические методы в экономике» большинству студентов крайне сложно. В первую очередь это связано с тем, что используются многие понятия и методы смежных математических дисциплин: алгебра и аналитическая геометрия. Игрет роль и большой объем материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий сдать экзамен по итогам изучения дисциплины практически невозможно.

## **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы рекомендуется использовать учебную литературу, указанную в пункте 8 настоящей программы.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

### **1. Международный научно-образовательный сайт EqWorld. Сайт EqWorld**

содержит обширную информацию о различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП). Интегральных уравнений. Особое внимание уделено уравнениям математической физики и механики. Приведены таблицы точных решений, описаны методы решения уравнений. Содержит учебную физико-математическую библиотеку, в которую авторы могут добавлять свои книги и диссертации, а также форум для вопросов и дискуссий.

EqWorld работает на русском и английском языках и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики, химии, биологии и инженерных наук. Все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей.

Адреса сайта в Интернете: <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> (рус).  
<http://eqworld.ipmnet.ru> (англ.)

**2. Электронная-библиотечная система «Университетская библиотека online»** ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной и художественной литературе ведущих издательств (\* регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.)

**3. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам»** (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. ИС «Единое окно» объединяет в единое информационное пространство электронные ресурсы свободного доступа для всех уровней образования в России.

Разделы этой системы:

- **Электронная библиотека;**
- **Интегральный каталог образовательных интернет ресурсов;**
- **Избранное;**
- **Библиотеки вузов.**

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

**1. Личный кабинет** ([http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php)) даёт возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета. Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог», пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация» и заполнить представленные поля информации.

**2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ** ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_find.php)) содержит около 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным дисциплинам, изданным в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

**3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»** ([http://www/lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www/lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.