Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра радиофизики

В. А. Тимофеев
Т. К. Артёмова

Электродинамика и электромагнитные волны

Часть 1

Задачник

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальностям Радиотехника,
Радиофизика и электроника и направлениям Телекоммуникации,
Радиофизика

Ярославль 2009

УДК 537.86
ББК В 336я73
Т 41

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра радиофизики
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Т 41 **Тимофеев, В. А. Электродинамика и электромагнитные волны Ч. 1:** задачник / В. А. Тимофеев, Т. К. Артёмова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2009. – 38 с.

Задачник содержит краткие теоретические сведения и набор заданий различной степени трудности, необходимые для самостоятельного решения.

Первая часть издания состоит из четырех разделов. В них собран материал, включающий упражнения с векторами электромагнитного поля, приведены задачи на структуру и параметры поляризации плоских электромагнитных волн при их распространении в однородных изотропных средах, а также при взаимодействии электромагнитного излучения с плоской границей раздела различных сред.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 010801 Радиофизика и электроника, 210302 Радиотехника, направлениям 210400 Телекоммуникации и 010800.62 Радиофизика (дисциплины «Физика волновых процессов», «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн», «Электродинамика СВЧ», блок ЕН, ОПД, ДС), очной и заочной форм обучения.

УДК 537.86
ББК В 336я73

1. Векторы электромагнитного поля. Формулировка электродинамических задач

Для описания физических полей принято использовать их математические модели – скалярные и векторные поля – функции, заданные на множестве точек пространства. В произвольной системе координат (x_1, x_2, x_3) скалярное поле ϕ приобретает вид некоторой функции $\phi(x_1, x_2, x_3)$, принимающей численные значения – действительные или комплексные. Векторное поле $\vec{A}$ задается тремя проекциями на единичные векторы (орты) выбранной системы координат.

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят **градиент** этого поля

$$grad\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\vec{l}_{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\vec{l}_{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\vec{l}_{x_3}\ , \qquad (1.1)$$

где h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Лямэ по координатам x_1, x_2 и x_3.

Приведем значения коэффициентов Лямэ для наиболее употребительных систем координат:

– декартова система координат (x, y, z) $\qquad h_x = h_y = h_z = 1$;

– цилиндрическая система координат (ρ, φ, z) $\quad h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$;

– сферическая система координат (r, θ, φ) $\qquad h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = rSin\theta$.

Среди скалярных полей выделяют **центральное** (функция ϕ принимает одинаковые значения для всех точек, находящихся на равных расстояниях от некоторого центра, как, например, $\phi = c/r^2$, $\phi = r$) и **осевое** (если функция принимает одинаковые значения для всех точек, равноотстоящих от некоторой оси).

Описание дифференциальных свойств векторного поля несколько сложнее. Векторное поле $\vec{A}$ принято характеризовать скалярным полем – дивергенцией (расхождением) $div\vec{A}$ и векторным полем – ротором (вихрем, кручением) $rot\vec{A}$.

Дивергенцию векторного поля вычисляют путем дифференцирования его проекций по определенным правилам. В произвольной ортогональной криволинейной системе координат

$$div\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial\left(h_2 h_3 A_{x_1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(h_1 h_3 A_{x_2}\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(h_1 h_2 A_{x_3}\right)}{\partial x_3}\right]. \qquad (1.2)$$

Ротор векторного поля – это вектор, определенный в любой точке поля и являющийся его объемной производной, взятой с обратным знаком.

В декартовой, цилиндрической и сферической системах координат:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\vec{e}}_x & \hat{\vec{e}}_y & \hat{\vec{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \qquad (1.3)$$

$$rot\vec{A} = \hat{\vec{e}}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\vec{e}}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right) + \hat{\vec{e}}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right), \ (1.4)$$

$$rot\vec{A} = \hat{\vec{e}}_r\left[\frac{1}{rSin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi Sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right] + \hat{\vec{e}}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) + \hat{\vec{e}}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right). \qquad (1.5)$$

Векторные поля могут быть **сферическими** (все векторы поля проходят через 1 точку – центр, и длина их зависит только от расстояния от этого центра), **цилиндрическими**.

Среди всех интегралов полей выделим только два.

Циркуляция вектора – криволинейный интеграл по замкнутому контуру С, причем С проходится против часовой стрелки, а единичный вектор $d\vec{l}$ является касательным в каждой точке к С:

$$C = \oint\limits_C \vec{A} d\vec{l} \, . \qquad (1.6)$$

Скалярный поток векторного поля – число

$$Q = \int\limits_{\Sigma} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{S} \, , \qquad (1.7)$$

где вектор $d\vec{S}$ – вектор «лицевой» нормали к поверхности Σ, натянутой на контур C. Величина его равна площади поверхности Σ, а направление таково, что если смотреть на его конец, то обход контура C совершается против часовой стрелки, он как бы ввинчивается в площадку при правильном обходе C.

Векторное поле называется **соленоидальным** (полем без источников), если $div\vec{A} = 0$, и **потенциальным** (если это сила, то ее работа по замкнутому контуру равна нулю), если $rot\vec{A} = 0$.

Знание скалярных и векторных производных и интегралов векторов поля позволяет характеризовать структуру поля, а решения уравнений Максвелла с различными граничными и начальными условиями позволяют определить значения векторов поля в каждой точке пространства в любой момент времени, связать создаваемое источниками поле с параметрами источников.

Задачи для решения

1.1. В прямоугольном волноводе сечением $a \times b$ на основной волне отлична от нуля только одна компонента электрического поля $E_y = E_{y0} Sin(\pi x/a) \exp(-\gamma_{10} z)$, где E_{y0} и γ_{10} – константы. Определите $div\vec{E}$ и охарактеризуйте это электрическое поле по типу в произвольной точке $A(x, y, z)$.

1.2. В прямоугольном волноводе сечением $a \times b$ на волне H_{20} отлична от нуля только одна компонента электрического поля $E_y = E_{y0} Sin(2\pi x/a) \exp(-\gamma_{20} z)$, где E_{y0} и γ_{20} – константы. Определите $div\vec{E}$ и охарактеризуйте это электрическое поле по типу в произвольной точке $A(x, y, z)$.