

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра теоретической информатики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 23 » мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

«Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений»

Направление подготовки

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль

«Информатика и компьютерные науки»

Квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

очная

Программа
рассмотрена на
заседании кафедры от
12 апреля 2023 г.,
протокол № 10

Программа одобрена НМК
факультета ИВТ
протокол № 6 от
28 апреля 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Цель дисциплины «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений» — приобретение знаний и умений в области разработки алгоритмов, связанных с топологическими характеристиками цифровых изображений. Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными методами исследования топологических свойств цифровых изображений.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений» относится к профессиональному циклу (базовая часть) в силу специфики изучаемого материала, а также его важности для подготовки специалиста, ее преподавание основывается на знаниях полученных слушателями при изучении дисциплин “Линейная алгебра и геометрия”, “Математический анализ”, “Дифференциальные уравнения” .

Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений», используются слушателями при изучении специальных дисциплин и при подготовке выпускной дипломной работы, а также для продолжения обучения в магистратуре по направлению Фундаментальная информатика и информационные технологии.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-1 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат и современные технологии, интерпретировать данные современных научных исследований	ПК-1.2 Владеет методами математического моделирования	<u>Иметь представление</u> - о топологических и гомотопических свойствах множеств на плоскости и в пространстве. -о возможностях применения топологических понятий при анализе цифровых изображений. <u>Знать</u> - основные подходы к исследованию топологических свойств цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах. <u>Уметь</u> - вычислять топологические характеристики цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа		
			Контактная работа							
1	Введение .	6	1	2				3		
2	Дискретные аналоги топологических понятий и операций	6	2	4				6	Задания для самостоятельной работы	
3	Аналоги топологических понятий и операций для двумерных и трехмерных изображений	6	1	2				3	Задание по контрольной работе №1	
4	Двумерные изображения, построенные на основе прямоугольной решетки	3	1	2				3		
5	Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики	6	2	4		1		6	Задания для самостоятельной работы	

6	Различение изображений .	6	2	4		1		6	Коллоквиум №1
7	Эйлерова характеристика трехмерных изображений	6	2	4				6	Задание по контрольной работе №2
8	Близкие к эйлеровой характеристики изображения	6	2	4				6	Задания для самостоятельной работы
9	Изображения, построенные на основе треугольной и гексагональной решеток	6	2	4		1		6	Коллоквиум №2
10	Дополнительные вопросы исследования топологических свойств изображений	6	2	4		2		7	Задание по контрольной работе №2
						2	34		Экзамен
	Всего за 6 семестр		17	34		7	34	52	
	Всего		17	34		7	34	52	

Содержание разделов дисциплины:

1. Введение .

- 1.1 Топологические и гомотопические свойства множеств.
- 1.2 Окрестности.
- 1.3 Связность.
- 1.4 Эйлерова характеристика множеств на плоскости и поверхностей в пространстве.
- 1.5 Топологические операторы: замыкание, внутренность, граница множества.

2. Дискретные аналоги

- 2.1 Дискретные аналоги топологических понятий.
- 2.2 Дискретные аналоги операций в применении к черно-белым изображениям, построенным на основе прямоугольной решетки.

3. Аналоги топологических понятий

- 3.1 Аналоги топологических понятий.
- 3.2 Аналоги топологических понятий операций для двумерных и трехмерных изображений: окрестности, операции замыкания и внутренности, граничный оператор в дискретном случае.
- 3.3 Феномен нескольких типов связностей для изображений.

4. Двумерные изображения

- 4.1 Двумерные изображения, построенные на основе прямоугольной решетки.
- 4.2 Фрагмент размера 2*2 двумерного изображения.
- 4.3 Эйлерова характеристика двумерных изображений.

5. Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики

- 5.1 Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики двумерного изображения.
- 5.2 Характеристический набор коэффициентов изображения, построенный по системе фрагментов размера 2*2.

6. Различение изображений

- 6.1 Различение изображений с помощью характеристического набора коэффициентов.
- 6.2 Функции на изображениях, инвариантные относительно сдвигов и поворотов.
- 6.3 Различение изображений с помощью характеристических наборов и расширенных характеристических наборов коэффициентов , построенных на

- основе фрагментов размера 2×2 .
- 6.4 Приложения: различение алфавитно-цифровых символов.
- 7. Эйлерова характеристика трехмерных изображений.**
- 7.1 Трехмерные изображения, построенные на основе прямоугольной решетки.
- 7.2 Фрагмент размера $2 \times 2 \times 2$ трехмерного изображения.
- 7.3 Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики трехмерного изображения.
- 7.4 Характеристический набор коэффициентов изображения, построенный по системе фрагментов размера $2 \times 2 \times 2$.
- 8. Близкие к эйлеровой характеристики изображения.**
- 8.1 Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику.
- 8.2 Подход к определению близкой к эйлеровой характеристики полутоновых изображений с помощью многочленов.
- 8.3 Интегральная близкая к эйлеровой характеристика для полутоновых изображений.
- 9. Изображения, построенные на основе треугольной и гексагональной решеток.**
- 9.1 Эйлерова характеристика изображений, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток.
- 9.2 Функции инвариантные относительно сдвигов и поворотов на изображениях, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток.
- 9.3 Близкие к эйлеровой характеристики изображений, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток.
- 10. Дополнительные вопросы исследования топологических свойств изображений**
- 10.1 Триангуляция Делоне.
- 10.2 Алгоритмы выделения связных компонент изображения.
- 10.3 Алгоритмы утоньшения и скелетизации изображения.
- 10.4 Топологические свойства изображений на паркетах.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Лекция-беседа или «диалог с аудиторией», является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Эта лекция предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Преимущество лекции-беседы состоит в том, что она позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей студентов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office, издательская система LaTeX;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-НЕХТ" (АБИС "Буки-Next").

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Парфенов, П. Г., Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений : метод. указания / П. Г. Парфенов ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2008, 25с
2. Парфенов, П. Г., Топологические характеристики изображений на паркетах: метод. пособие / П. Г. Парфенов ; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова.- Ярославль, ЯрГУ, 2015, 36с.
3. Парфенов, П. Г., Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений [Электронный ресурс] : метод. указания / П. Г. Парфенов ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2008, 25с <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080490.pdf>
4. Парфенов, П. Г., Топологические характеристики изображений на паркетах [Электронный ресурс] : учебно - метод. пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки Фундаментальная информатика и информационные технологии / П. Г. Парфенов, А. В Смирнов ; Яросл, Ярославль, ЯрГУ, 2015, 33с <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20150405.pdf>

б) дополнительная литература

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебная аудитория №301 на 70 мест с проектором «Асер» для проведения занятий лекционного типа;
- учебная аудитория №301 на 70 мест с проектором «Асер» для проведения практических занятий (семинаров);
- учебная аудитория №301 на 70 мест с проектором «Асер» для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебная аудитория №301 на 70 мест с проектором «Асер» для проведения текущего

контроля и промежуточной аттестации;

-помещения для самостоятельной работы;

-помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров).

Автор(ы) :

Доцент кафедры ТИ, к.ф.-м.н. П.Г. Парфенов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации
студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта
деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные
материалы, используемые в процессе текущей
аттестации**

1. Парфенов, П. Г., Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений : метод. указания / П. Г. Парфенов ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2008, 25с
2. Парфенов, П. Г., Топологические характеристики изображений на паркетах: метод. пособие / П. Г. Парфенов ; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова.- Ярославль, ЯрГУ, 2015, 36с

Выполнить задания (З№):

1. Вычислить эйлеровы характеристики букв русского или латинского алфавитов.
2. Вычислить эйлерову характеристику собственной подписи.
3. Вычислить эйлерову характеристику кренделя.
4. Определить число пятиугольников, требуемое для изготовления футбольного мяча.
5. Вывести формулу для эйлеровой характеристики букета окружностей, сфер и торов.
6. Вывести формулу для эйлеровой характеристики поверхности рода p .
7. Построить характеристический набор коэффициентов для «оцифрованной» собственной подписи. Решить коллективно задачу различения подписей студентов потока ИТ-3.
8. Составить и найти полное решение системы линейных уравнений для обоснования базиса индукции теоремы об эйлеровой характеристике черно-белого цифрового изображения. Рассмотреть оба варианта типов связности.
9. Вывести соотношения для коэффициентов характеристического набора черно – белого цифрового изображения для двух типов связности.
10. Построить многочлены, вычисляющие эйлеровы характеристики четырехпиксельных изображений для двух типов связности.
11. Построить многочлены, задающие значения функций на фрагментах размера $2*2$.
12. Вычислить интегралы, задающие близкие к эйлеровой характеристики четырехпиксельных изображений для двух типов связности.
13. Вычислить интегралы, задающие значения функций на фрагментах размера $2*2$.
14. Теорема об эйлеровой характеристике изображения, построенного на основе гексагональной решетки.
15. Построить многочлены, вычисляющие эйлерову характеристику изображения на гексагональной решетке.
16. Вычислить интегралы, задающие близкие к эйлеровой характеристики четырехпиксельных изображений на гексагональной решетке.
17. Теорема об эйлеровой характеристике изображения, построенного на основе треугольной решетки.
18. Построить многочлены, вычисляющие эйлерову характеристику изображения на треугольной решетке.
19. Вычислить интегралы, задающие близкие к эйлеровой

характеристики четырехпиксельных изображений на треугольной решетке.

Освоить формулировки и доказательство терем № 1–3(Т№):

1. Теорема об эйлеровой характеристике для прямоугольной решетки ([1], стр.13-15.).
2. Теорема об эйлеровой характеристике для ТКШ-решетки Колмогорова ([2], стр.18-20.).
3. Теорема об эйлеровой характеристике для паркета «Октава» ([2], стр.27-31.).

Показатели и критерии, используемые при оценке указанных выше контрольных процедур:

Номер ЛР	Критерии	Шкала оценивания
31-9	ПК-1: Знать понятия используемые в заданиях. Уметь строить алгоритм реализации достижения поставленной задачи. Владеть навыками использования дискретных аналогов непрерывных математических понятий с помощью ранее полученных компетенций для реализации сформулированного задания .	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
310-15	ПК-1: Знать понятия используемые в заданиях. Уметь строить алгоритм реализации достижения поставленной задачи. Владеть навыками использования дискретных аналогов непрерывных математических понятий с помощью ранее полученных компетенций для реализации сформулированного задания .	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
316-19	ПК-1: Знать понятия используемые в заданиях. Уметь строить алгоритм реализации достижения	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения;

	поставленной задачи. Владеть навыками использования дискретных аналогов непрерывных математических понятий с помощью ранее полученных компетенций для реализации сформулированного задания .	0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
T1-3	Знать формулировки утверждений и теорем по указанной тематике. Уметь доказывать утверждения и теоремы по указанным пунктам. Владеть навыками применения указанных утверждений и теорем .	0 баллов – утверждение и теорема не сформулирована, доказательство отсутствует. 0.5 балла – есть элементы формулировки утверждения или теоремы без доказательства. 1.0 балла – есть формулировка утверждения или теоремы , доказательство неполное с серьезными изъянами. 1.5 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка». 2 балла – есть точная формулировка утверждения или соответствующей теоремы, приведено полное доказательство.

Максимальное суммарное количество баллов по ПК-2 – 5 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за лабораторные работы №1-3:

- 0 лабораторных работ — оценка «неудовлетворительно»,
- 1 лабораторная работа — оценка «удовлетворительно»,
- 2 лабораторных работы — оценка «хорошо»,
- 3 лабораторных работы — оценка «отлично».

Список вопросов к экзамену:

1. Введение . Топологические и гомотопические свойства множеств. Окрестности. Связность.
2. Эйлерова характеристика множеств на плоскости и поверхностей в пространстве.
3. Топологические операторы: замыкание, внутренность, граница множества.
4. Аналоги топологических понятий и операций для двумерных изображений: окрестности, операции замыкания и внутренности, граничный оператор в дискретном случае. Феномен нескольких типов связностей для двумерных изображений.
5. Аналоги топологических понятий и операций для трехмерных изображений: окрестности, операции замыкания и внутренности, граничный оператор в дискретном случае. Феномен нескольких типов связностей для трехмерных изображений.

6. Двумерные изображения, построенные на основе прямоугольной решетки. Фрагмент размера 2×2 двумерного изображения. Эйлерова характеристика двумерных изображений.
7. Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики двумерного изображения. Характеристический набор коэффициентов изображения, построенный по системе фрагментов размера 2×2 .
8. Различение изображений с помощью характеристического набора коэффициентов. Функции на изображениях, инвариантные относительно сдвигов и поворотов.
9. Различение изображений с помощью характеристических наборов коэффициентов, построенных на основе фрагментов размера 2×2 . Приложения: различение алфавитно-цифровых символов.
10. Различение изображений с помощью расширенных характеристических наборов коэффициентов, построенных на основе фрагментов размера 2×2 . Приложения: различение алфавитно-цифровых символов.
11. Эйлерова характеристика трехмерных изображений. Трехмерные изображения, построенные на основе прямоугольной решетки. Фрагмент размера $2 \times 2 \times 2$ трехмерного изображения.
12. Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики трехмерного изображения. Характеристический набор коэффициентов изображения, построенный по системе фрагментов размера $2 \times 2 \times 2$.
13. Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику. Подход к определению близкой к эйлеровой характеристике полутоновых изображений с помощью многочленов.
14. Интегральная близкая к эйлеровой характеристика для полутоновых изображений.
15. Изображения, построенные на основе треугольной и гексагональной решеток. Эйлерова характеристика изображений, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток.
16. Функции инвариантные относительно сдвигов и поворотов на изображениях, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток. Близкие к эйлеровой характеристике изображений, построенных на основе треугольной и гексагональной решеток.
17. Дополнительные вопросы исследования топологических свойств изображений. Триангуляция Делоне. Алгоритмы выделения связанных компонент изображения. Алгоритмы утоньшения и скелетизации изображения. Топологические свойства изображений на паркетах

Макет экзаменационного билета

Утверждаю:

Зав. кафедрой

д.т.н., профессор

_____ В.А.Соколов –

« ____ » _____ 20 г.

02.03.02 4 курс

МОУ РФ «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Фундаментальная информатика и информационные технологии

Кафедра теоретической информатики

Дисциплина «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений»

Билет № 1

- 1) Эйлерова характеристика множеств на плоскости.
- 2) Задача. Найти эйлерову характеристику букета окружностей, сфер и торов.

Разработал:
Доцент кафедры теоретической
информатики к.ф.-м.н. П.Г. Парфенов.
Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры
«__»_____20__г.
Протокол № __

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

**2.2 Перечень компетенций, этапы их формирования,
описание показателей и критериев оценивания
компетенций
на различных этапах их формирования**

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Общепрофессиональные компетенции						
ПК-1	Контрольные работы. Задания для самостоятельной работы. Экзамен.	1 – 10	<p><u>Иметь представление</u></p> <p>- о топологических и гомотопических свойствах множеств на плоскости и в пространстве.</p> <p>- о возможностях применения топологических понятий при анализе цифровых изображений.</p> <p><u>Знать</u></p> <p>- основные подходы к исследованию топологических свойств цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p> <p><u>Уметь</u></p>	<p>1. Освоение в основном знаний топологических и гомотопических свойствах множеств на плоскости и в пространстве.</p> <p>2. Освоение в основном знаний о возможностях применения топологических понятий при анализе цифровых изображений.</p> <p>3. Освоение в основном знаний о подходах к исследованию топологических свойств цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах методов численного интегрирования.</p> <p>4. Освоение основ знаний о вычислении топологические характеристики цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p>	<p>1. Освоение в целом знаний топологических и гомотопических свойствах множеств на плоскости и в пространстве.</p> <p>2. Освоение в целом знаний о возможностях применения топологических понятий при анализе цифровых изображений.</p> <p>3. Освоение в целом знаний о подходах к исследованию топологических свойств цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p> <p>4. Освоение в целом знаний о вычислении топологические характеристики цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p>	<p>1. Полное освоение знаний топологических и гомотопических свойствах множеств на плоскости и в пространстве.</p> <p>2. Полное освоение знаний о возможностях применения топологических понятий при анализе цифровых изображений.</p> <p>3. Полное освоение знаний о подходах к исследованию топологических свойств цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p> <p>4. Полное освоение знаний о вычислении топологические характеристики цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.</p>

		- вычислять топологические характеристики цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, а также на паркетах.	численного решения линейных систем и одного нелинейного уравнения.		
--	--	---	--	--	--

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;

- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Оценивание результатов обучения студентов по дисциплине «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений» осуществляется по регламенту текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль в семестре проводится с целью обеспечения своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы студентов.

Текущий контроль проводится в виде самостоятельных и контрольных работ. Критериями оценивания степени овладения умениями и навыками, полученными в результате освоения данной дисциплины, являются следующие:

Критерии оценки результатов СРС:

уровень освоения студентом учебного материала.

умение использовать теоретические знания при выполнении практических, ситуационных задач.

сформированность общеучебных умений,

обоснованность и четкость изложения ответа,

оформление материала в соответствии с требованиями,

уровень самостоятельности студента при выполнении СР,

Критерии оценки результатов внеаудиторной СРС :

уровень освоения учебного материала;

уровень умения использовать теоретические знания при выполнении практических задач;

уровень сформированности общеучебных умений;
 уровень умения активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
 обоснованность и четкость изложения материала;
 уровень умения ориентироваться в потоке информации, выделять главное;
 уровень умения четко сформулировать проблему, предложив ее решение, критически оценить решение и его последствия;
 уровень умения определить, проанализировать альтернативные возможности, варианты действий;
 уровень умения сформулировать собственную позицию, оценку и аргументировать ее;
 оформление материала в соответствии с требованиями.

Критерии оценки результатов контрольной работы

Показатели	Критерии
Понимание условия задачи	-Краткая запись условия. -Использование символики. - Нахождение и запись необходимых дополнительных данных. -Хорошее оформление работы, четкие рисунки и чертежи. -
План решения задачи	-Обоснование выбора формул для решения. -Рациональный способ решения -Запись формул
Осуществление решения	-Решение задачи в общем виде - Правильность вычислений - ...
Проверка правильности решения задачи	-Краткое объяснение решения. -Анализ полученных результатов

3.2 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Шкала оценивания успеваемости текущего контроля и промежуточной аттестации.

В зависимости от уровня сформированности компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено» или оценка по четырехбалльной шкале.

Шкала оценивания результатов СРС

Оценка «отлично»:

- Все задания решены верно,
- Оформлены по требованиям,
- Решение изложено достаточно полно и чётко.
- Даны правильные формулировки, точные определения, понятия терминов.
- Студент может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- Правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» :

- Все задания решены верно,

- Оформлены по требованиям,
- Но, решение изложено недостаточно полно и чётко (не менее 70 % от полного)
- При изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки;
- Даны правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- Студент может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- Однако, есть затруднения при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»:**

- Более половины заданий решены верно,
- Все задания оформлены по требованиям,
- Решение изложено недостаточно полно и чётко (не менее 70 % от полного), при изложении некоторых заданий допущена 1 существенная ошибка, приводящая к неверному ответу.

- Студент знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий;
- излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
- затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка **«неудовлетворительно» :**

- Более половины заданий решены неверно,
- Решение изложено неполно и нечётко (менее 50 % от полного), при изложении многих задач были допущены существенные ошибки, приводящая к неверному ответу.
- Студент не знает или не понимает основные положения данной темы, затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Среднее арифметическое по всем видам текущего контроля СРС составляет оценочный показатель студента, который влияет на выставление итоговой оценки по результатам изучения дисциплины и допуск к итоговой аттестации по дисциплине

Шкала оценивания результатов контрольной работы

Шкала оценивания решения задачи:

0 баллов – полное отсутствие решения; 0,5 балла – частичное выполнение критерия; 0,8 балла – полное выполнение критерия с незначительными ошибками, 1 балл – полное выполнение критерия.

Суммируем баллы по всей контрольной работе. Выставляем за контрольную полученное количество баллов, или переводим баллы в одну из стандартных шкал оценивания (оценки 2, 3, 4, 5 или зачтена работа или нет).

Шкала оценивания экзамена

«2» - плохо:

Теоретический вопрос: студент не раскрыл теоретический вопрос, на заданные экзаменаторами вопросы не смог дать удовлетворительный ответ.

Практический вопрос: студент не понял смысла задачи, не смог выполнить задания. На заданные экзаменатором вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

«3» - удовлетворительно:

Теоретический вопрос: студент смог с помощью дополнительных вопросов воспроизвести основные положения темы, но не сумел привести соответствующие примеры или аргументы, подтверждающие те или иные положения.

Практический вопрос: студент понял смысл задачи, но смог выполнить задание лишь после дополнительных вопросов, предложенных экзаменатором. При этом на поставленные экзаменатором вопросы не вполне ответил правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

«4» - хорошо:

Теоретический вопрос: студент (не допуская ошибок) правильно изложил теоретический вопрос, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений, правовых и моральных норм. Примеры, приведенные учеником, воспроизводили материал учебников. На заданные экзаменатором уточняющие вопросы ответил правильно.

Практический вопрос: студент понял смысл задачи, предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. На заданные экзаменатором вопросы ответил правильно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

«5» - отлично:

Теоретический вопрос: студент полно и правильно изложил теоретический вопрос, привел собственные примеры, правильно раскрывающие те или иные положения, сделал обоснованный вывод;

Практический вопрос: студент полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и уме

3.3 Общие рекомендации по изучению материала курса и подбору заданий

Курс топологических алгоритмов обработки цифровых изображений является курсом по выбору для специальности фундаментальная информатика и информационные технологии и относится к числу дисциплин развивающих прикладные компетенции на основе уже освоенных базовых компетенций указанного направления.

Специфика начального этапа изучения численных методов требует актуализации знаний основ высшей геометрии и топологии, освоения таких понятий как системы окрестностей, замыкания и внутренности множеств, понятия связности множеств, а также освоения дискретных аналогов этих понятий в приложении к цифровым изображениям. В курсе рассматриваются такие фундаментальные понятия высшей

геометрии, как эйлерова характеристика, гомотопия, триангуляции геометрических объектов, в частности триангуляция Делоне, для которых также предлагаются дискретные аналоги, которые позволяют предложить некоторые подходы к задачам различения, классификации и оценки близости цифровых изображений.

Целесообразно подготовить для каждой лекции одно-два задания для миниконтрольных тестового характера, которые позволят не только постоянно мониторить усвоение материала студентами, но и удерживать их внимание на лекции. Для более глубокого зондирования усвоенных знаний студентами предполагается проведение двух коллоквиумов в формате «две и теоретический вопрос». Тематика этих коллоквиумов должна покрывать основные разделы курса. Отметим, что материалы курса уже долгое время служат основой для ВКР бакалавров и магистерских диссертаций по направлению фундаментальная информатика и информационные технологии, а также для публикации научных статей выпускниками.

3.4 Форма проведения экзамена по курсу

Студенты и преподаватели вполне отдадут себе отчет в том, что еще живо представление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий, преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо усилий. При этом студенты порой пытаются подтвердить данное представление, а преподаватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Очевидно, формат итоговой (или семестровой) аттестации накладывает определенный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной аттестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, то в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованностью студентов в работе в аудитории или дома. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении семестровой аттестации (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях, результатов промежуточной аттестации, самостоятельной работы вне аудитории, активности работы на лекциях) может поспособствовать увеличению интенсивности работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных занятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Данные соображения были учтены при разработке формы итоговой аттестации. На экзамене студент получает билет с четырьмя заданиями – два теоретического характера и две задачи – «базовый комплект». Характер работы по ходу семестра «материализуется» в количестве дополнительных предложенных заданий: за активную работу на занятиях, высокие результаты прохождения промежуточных аттестаций (контрольных работ) количество предлагаемых студенту заданий может быть уменьшено, а при слабой работе (низкая посещаемость, слабые результаты или пропуски контрольных работ) – увеличено (возможно, на 2-3). Однако критерии не зависят от количества предложенных заданий, оценка выставляется по следующей схеме: пять минус количество заданий, справиться с которыми не удалось. Таким образом,

активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации, а те, кто своим жизненным стилем избрали упомянутый в эпиграфе принцип, для успешного прохождения экзаменационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий.

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и прозрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулирует студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений» являются лекции, так как изучение численных алгоритмов требует знания определенного количества теоретического материала, причем в достаточно большом объеме.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. В основном такими задачами являются лабораторные работы, а так же задачи тестового характера по материалу лекций. Примеры решения задач разбираются на лекциях и предлагаются на коллоквиумах. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Для усвоения материала необходимо в течение всего курса выполнять задания для самостоятельной работы. Для проверки и контроля усвоения теоретического материала в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде письменных контрольных работ в течение всего семестра изучения дисциплины. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

В конце изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается в письменном виде и включает в себя, как теоретические вопросы, так и практические. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Топологические алгоритмы обработки цифровых изображений» самостоятельно студенту довольно сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" создана по заказу Федерального агентства по образованию в 2005-2008 гг. Главной разработчик проекта - Федеральное государственное автономное учреждение Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций (ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика") www.informika.ru.

ИС "Единое окно" объединяет в единое информационное пространство электронные ресурсы свободного доступа для всех уровней образования в России. Разделы этой системы:

- **Электронная библиотека** – является крупнейшим в российском сегменте Интернета хранилищем полнотекстовых версий учебных, учебно-методических и научных материалов с открытым доступом. Библиотека содержит более 30 000 материалов, источниками которых являются более трехсот российских вузов и других образовательных и научных учреждений. Основу наполнения библиотеки составляют электронные версии учебно-методических материалов, подготовленные в вузах, прошедшие рецензирование и рекомендованные к использованию советами факультетов, учебно-методическими комиссиями и другими вузовскими структурами, осуществляющими контроль учебно-методической деятельности.

- **Интегральный каталог образовательных интернет-ресурсов** содержит представленные в стандартизированной форме метаданные внешних ресурсов, а также содержит описания полнотекстовых публикаций электронной библиотеки. Общий объем каталога превышает 56 000 метаописаний (из них около 25 000 - внешние ресурсы). Расширенный поиск в "Каталоге" осуществляется по названию, автору, аннотации, ключевым словам с возможной фильтрацией по тематике, предмету, типу материала, уровню образования и аудитории.

- **Избранное.** В разделе представлены подборки наиболее содержательных и полезных, по мнению редакции, интернет-ресурсов для общего и профессионального образования.
- **Библиотеки вузов.** Раздел содержит подборки сайтов вузовских библиотек, электронных каталогов библиотек вузов и полнотекстовых электронных библиотек вузов.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

- 1. Личный кабинет** (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.
- 2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ** (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.
- 3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»** (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.

Примеры выполнения заданий контрольных работ

Пример 1. Вычислить эйлерову характеристику букв латинского алфавита, представляя символы в виде графов с вершинами и ребрами.

Решение. Для символа *A* : число вершин $V=5$, число ребер $P=5$

$$V \quad P \quad 5 \quad 5 \quad 0.$$

Для символа *B* : число вершин $V=3$, число ребер

$$V \quad P \quad 3 \quad 4 \quad 1.$$

$P=4$ И т.д.

Пример 2. Футбольный мяч сшит из n шестиугольников и m пятиугольников, выяснить, какие возможные значения могут принимать эти параметры?

Решение. Представляя футбольный мяч в виде выпуклого многогранника получаем: число вершин $V = \frac{6n + 5m}{3}$, число ребер

$P = \frac{6n + 5m}{2}$, число граней $G = n + m$. Зная, что эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 2, получаем :

$$V \quad P \quad G \quad 2 \quad \frac{6n + 5m}{3} \quad \frac{6n + 5m}{2} \quad n + m \quad 2 \quad m \quad 12, n \text{ любое.}$$

Пример 3. Футбольный мяч сшит из n треугольников и m пятиугольников, выяснить, какие возможные значения могут принимать эти параметры?

Решение. Представляя футбольный мяч в виде выпуклого многогранника получаем: число вершин $V = \frac{3n + 5m}{3}$, число ребер

$P = \frac{3n - 5m}{2}$, число граней $\Gamma = n + m$. Зная, что эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 2, получаем:

$$V - P + \Gamma = 2 \Rightarrow \frac{3n - 5m}{4} - \frac{3n - 5m}{2} + n + m = 2 \Rightarrow n - m = 8.$$

Пример 4. Найти эйлерову характеристику букета m сфер BS_m^2 .

Решение. Применяем теорему суммы для эйлеровой характеристики букета из двух сфер:

$$(BS_2^2) + (S^2) - (S^2) = 1 + 2 - 2 = 1.$$

Это базис индукции. Предположение индукции: $(BS_m^2) = m - 1$.

Тогда $(BS_{m+1}^2) = (BS_m^2) + (S^2) - (S^2) = (m - 1) + 2 - 2 = m$.

Формула доказана.

Пример 5. Найти эйлерову характеристику букета l окружностей S^1 , m сфер S^2 и n торов T^2 .

Решение. Аналогично примеру 4, получаем для букета l окружностей $(BS_l^1) = 1 - l$, для букета n торов $(BT_n^2) = 1 - n$.

Тогда для букета l окружностей и m сфер верно:

$$(B(S_l^1 \cup_m S^2)) = (BS_l^1) + (BS_m^2) - (S^2) = (1 - l) + (m - 1) - 1 = m - l - 1.$$

А для букета l окружностей, m сфер и n торов получаем по теореме суммы:

$$(B(S_l^1 \cup_m S^2 \cup_n T^2)) = (B(S_l^1 \cup_m S^2)) + (BT_n^2) = (m - l - 1) + (1 - n) = m - l - n.$$