

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Динамика дискретных систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Динамика дискретных систем» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования. Основная цель курса — дать доступное студентам введение в круг вопросов, связанных с поведением нелинейных дискретных динамических моделей, определяемых одномерными отображениями.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Динамика дискретных систем» относится к вариативной части блока Б1 образовательной программы и является дисциплиной по выбору. Дисциплина «Динамика дискретных систем» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. При освоении дисциплины необходим определенный уровень освоения дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Алгебра». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Динамика дискретных систем», используются при изучении ряда специальных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.	<b>ИД-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов.	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>— основные понятия и результаты теории дискретных систем.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>— применять понятия, результаты и методы теории дискретных систем в других разделах математики.</li></ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>— систематического и результативного применения аппарата теории дискретных систем.</li></ul>

	<b>ИД-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач.	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– методы решения важнейших задач теории дискретных систем.</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач теории дискретных систем.</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– применения компьютера для решения задач теории дискретных систем.</li> </ul>
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Введение. Дополнительные сведения из математического анализа.	7	2	2				9	
2.	Топологическая сопряжённость.	7	1	2				6	
3.	Локальные бифуркации.	7	3	3	4	1		7	
4.	Глобальные бифуркации. Порядок Шарковского.	7	2	2	3	1		7	
5.	Производная Шварца и устойчивость циклов.	7	2	2	2	1		6	
6.	Логистическое отображение.	7	2	1	3	1		5	
7.	Гиперболические множества и хаотичность отображений.	7	2	2	2	1		6	
8.	Многомерные отображения.	7	2	2	2	1		6	
							0,3	1,7	Зачёт
	ИТОГО		16	16	16	6	0,3	53,7	
	в том числе с ЭО и ДОТ								

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии.

**Вводная лекция** — даёт первое целостное представление о дисциплине (или её разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных учёных, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также даётся анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция (или лекция общего курса)** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:
  - Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery). Договор 1506/KMP от 22.08.2018;
  - Microsoft Office STD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522. Лицензионный договор №Л-339 от 19/03/2013; акт №331 от 29/03/2013;
  - MikTeX (свободно распространяемое ПО).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

#### **а) основная литература**

1. Бурд В.Ш. Введение в динамику одномерных отображений: учебное пособие. — Ярославль, ЯрГУ, 2006.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20060201.pdf>
2. Бурд В.Ш. Дискретное операторное исчисление. — Ярославль, ЯрГУ, 2009.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090230.pdf>

#### **б) дополнительная литература**

1. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова Думка, 1986.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. — Киев: Наукова Думка, 1989.

### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) — списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы):

зав. кафедрой математического моделирования, д.ф.-м.н. И.С. Кашенко  
доцент кафедры математического моделирования, к.ф.-м.н. А.В. Секацкая

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Динамика дискретных систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1 Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**1.2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов для подготовки к зачёту**

1. Периодические точки. Исследование устойчивости.
2. Топологическая сопряжённость. Основные свойства. Примеры.
3. Локальные бифуркации. Бифуркация цикла.
4. Локальные бифуркации. Бифуркация удвоения периода.
5. Глобальные бифуркации. Диграфы и их применение.
6. Глобальные бифуркации. Порядок Шарковского, доказательство некоторых частных случаев: цикл  $\rightarrow$  неподвижная точка; цикл периода 3  $\rightarrow$  циклы всех периодов.
7. Производная Шварца и устойчивость циклов. Теорема Зингера.
8. Каскад бифуркаций удвоения логистического отображения.
9. Цикл периода 3 и число неустойчивых циклов логистического отображения.
10. Определение хаотической динамики. Примеры отображений, обладающей хаотической динамикой.
11. Динамика оператора сдвига в пространстве двоичных последовательностей.
12. Динамика логистического отображения при  $r \geq 4$ .
13. Лемма об эквивалентности определений гиперболического множества.
14. Многомерные отображения. Исследование устойчивости неподвижных точек и циклов. Примеры хаотических отображений.
15. Линейные многомерные отображения. Методы решения, устойчивость, основные свойства.

**Задания на зачёт**

**Вариант 1**

1. Дать определение притягивающего цикла периода  $n$ .
2. Дать определение топологически сопряжённых систем.
3. Дать определение хаотической динамики (расшифровать).
4. Сформулировать теорему о бифуркации цикла.

5. Выстроить в соответствии с рядом Шарковского числа: 4, 7, 11, 24, 44, 90, 4096.
6. Пусть  $a < b < c < d < e$ ,  $f(a) = c$ ,  $f(b) = e$ ,  $f(c) = b$ ,  $f(d) = a$ ,  $f(e) = d$ .  
Существование циклов каких периодов можно гарантировать у непрерывного отображения  $f(x)$ ?
7. Дано отображение  $f(x) = \arctan(ax)$ . Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра  $a$ . Определите типы бифуркаций.
8. Известно, что у отображения  $f(x)$  есть точка, орбита которой всюду плотна на множестве  $A$ . Докажите, что оно топологически транзитивно на  $A$ .

## Вариант 2

1. Дать определение отталкивающего цикла периода  $n$ .
2. Дать определение топологически сопряжённых систем.
3. Дать определение хаотической динамики (расшифровать).
4. Сформулировать теорему о бифуркации удвоения цикла.
5. Выстроить в соответствии с рядом Шарковского числа: 8, 5, 13, 36, 44, 82, 2048.
6. Пусть  $a < b < c < d < e$ ,  $f(a) = b$ ,  $f(b) = e$ ,  $f(c) = d$ ,  $f(d) = a$ ,  $f(e) = c$ .  
Существование циклов каких периодов можно гарантировать у непрерывного отображения  $f(x)$ ?
7. Дано отображение  $f(x) = \arctan(ax)$ . Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра  $a$ . Определите типы бифуркаций.
8. Отображение  $f(x) = 4 \sin x$  при  $x$  от 0 до  $\pi$ ,  $= 2x$  при отрицательных  $x$ , и  $= \pi - x$  при  $x$  больших  $\pi$ . Опишите его инвариантное множество (если оно существует) и докажите (или опровергните) гиперболичность отображения.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Динамика дискретных систем»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Учебный материал по дисциплине «Динамика дискретных систем» излагается на лекциях, обсуждается на практических занятиях в виде задач.

Зачёт принимается в письменном виде. Зачётная работа содержит как теоретический материал (определения, формулировки теорем, задания связанные с тонкостями доказательства различных фактов из курса), так и задачи.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Динамика дискретных систем» самостоятельно студенту возможно, однако требует серьёзного умения работать с литературой. Поэтому посещение всех аудиторных занятий очень рекомендовано. В любом случае, без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.