

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Пакеты математических программ и математическое моделирование

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Математика и компьютерные науки»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Пакеты математических программ и математическое моделирование» является ознакомление с одним из пакетов прикладных математических программ и математическим моделированием. Программа составлена с ориентацией на систему вычислительной математики «Wolfram Mathematica», но при изучении курса можно пользоваться и другими пакетами («Maple», «Mathcad», «MatLab» и другие).

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Дисциплина «Пакеты математических программ и математическое моделирование» относится к вариативной части Блока 1.

Для освоения данной дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате некоторых разделов из математического анализа, алгебры, дискретной математики, дифференциальных уравнений и программирования.

Знание и умение применять современные пакеты прикладных математических программ является важной составляющей общей культуры выпускника. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях математики, так и при решении практических задач из разнообразных прикладных областей, таких как математическая экономика, математическая лингвистика, обработка и передача данных, криптография и др.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		

ПК-4 Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования	ПК-4.2 Знает современные методы разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	Знать: <ul style="list-style-type: none"> – возможности современных пакетов математических программ для численного и символьного решения наиболее распространенных задач; – интерфейс и основные функции одного из пакетов математических программ. Уметь: <ul style="list-style-type: none"> – пользоваться пакетами математических программ для решения стандартных математических задач; – пользоваться встроенным языком программирования пакета для составления функций, расширяющих возможности стандартного пакета; – пользоваться средствами графического представления данных.
	ПК-4.3 Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	Уметь: <ul style="list-style-type: none"> – работать с пакетами прикладных математических программ; – решать математические задачи с использованием систем вычислительной математики. Владеть навыками: <ul style="list-style-type: none"> – решения математических задач на компьютере в символьном и численном виде; – построения математической модели профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачётные единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)	Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ
			Контактная работа	

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Введение.	7	2		2			2	
2.	Основы символьных вычислений.	7	2		2			5	Лабораторная работа №1
3.	Графические возможности системы.	7	2		2			5	Лабораторная работа №2 Лабораторная работа №3
4.	Преобразование многочленов. Подстановки. Работа с векторами и матрицами. Системы линейных уравнений.	7	2		2			5	Лабораторная работа №4 Лабораторная работа №5
5.	Численные расчеты.	7	2		2			5	Лабораторная работа №6
6.	Процедурное программирование.	7	2		2	2		6	
7.	Математическое моделирование.	7	4		4	2		6	Лабораторная работа №7
							0,3	1,7	Зачёт
	ИТОГО		16		16	4	0,3	35,7	

Содержание разделов дисциплины

1. Введение.

- 1.1. Основные цели и задачи курса.
- 1.2. Интерфейс пакета математических программ «Wolfram Mathematica» и выполнение простейших численных и символьных вычислений.
- 1.3. Основные типы данных и переменные.
- 1.4. Работа со списками, векторами и матрицами.
- 1.5. Алгебраические преобразования.
- 1.6. Функции и выражения в системе «Mathematica».

2. Основы символьных вычислений.

- 2.1. Различные формы представления данных.
- 2.2. Символьное упрощение, вычисление пределов, дифференцирование, интегрирование, решение дифференциальных уравнений.
- 2.3. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Построение интегральных кривых, фазовой траектории на примере системы Лоренца. Использование функции «Manipulate» для исследования влияния параметров на поведение фазовой траектории.
- 2.4. Примеры исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Математический маятник. Движение упругого мяча.

- 2.5. Примеры использования функций «Locator», «Manipulate», «StreamPlot» при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 2.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений.
- 3. **Графические возможности системы.**
 - 3.1. Графические функции и их опции.
 - 3.2. Двумерная графика. Трехмерная графика.
 - 3.3. Изменение стиля и комбинирование построенных рисунков.
 - 3.4. Построение анимированных графиков. Построение графиков с возможностью варьировать параметры.
- 4. **Преобразование многочленов. Подстановки. Работа с векторами и матрицами.**
 - 4.1. Алгебраические операции с векторами. Дифференциальные операции векторного анализа. Графическое представление векторных полей.
- 5. **Численные расчеты.**
 - 5.1. Управление точностью вычислений.
 - 5.2. Средства для численного вычисления пределов, интегралов, решения дифференциальных уравнений.
- 6. **Процедурное программирование.**
 - 6.1. Составные выражения. Условные операторы. Циклы.
- 7. **Математическое моделирование.**
 - 7.1. Введение в математическое моделирование. Понятие модель, моделирование, математическое моделирование. Основные этапы метода математического моделирования.
 - 7.2. Свойство универсальности математических моделей. Математическая модель «Хищник-жертва». Модель изменения зарплаты и занятости.
 - 7.3. Моделирование колебания струны с закрепленными концами. Использование метода Фурье и разностной схемы. Построение анимированного графика.
 - 7.4. Моделирование уравнения теплопроводности. Явная и неявная разностная схема.
 - 7.5. Моделирование движения брошенного под углом к горизонту тела без и с учетом сопротивления. Построение разностной схемы.
 - 7.6. Моделирование движения тел под действием силы тяготения.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция — дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

- **Электронный учебный курс «Концепции современного естествознания» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:
 - представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
 - осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
 - представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
 - представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
 - представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
 - представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
 - посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимся и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:
 - программы Microsoft Office;
 - издательская система Latex;
 - Adobe Acrobat Reader;
- для проведения занятий по дисциплине:
 - Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery). Договор 1506/KMP от 22.08.2018;
 - Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service. Сублицензионный Контракт №76 от 23/12/2017; акт №GE00490 от 25/12/2017;
 - Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407. Сублицензионный Контракт №76 от 23/12/2017; акт №GE00490 от 25/12/2017.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Мостовской А.П. Численные методы и система Mathematica: Учеб. пособие. — Мурманск: 2009. — 249 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 799 с.

б) дополнительная литература

1. Глазков Д.В. Пакеты прикладных математических программ. Методические указания. Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2009.
<http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20090232.pdf>.
2. Колокольникова А.И. Спецразделы информатики: введение в MatLab [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.И. Колокольникова, А.Г. Киренберг, М.: Берлин, Директ-Медиа, 2014, 73 с.
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275268>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения лабораторных работ;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) — списочному составу группы обучающихся.

Автор:

доцент кафедры математического
моделирования, к.ф.-м.н. А.В. Секацкая

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Пакеты математических программ и математическое моделирование»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Лабораторная работа №1

1. Символьные вычисления

а. Упростите выражение:

▪ $\frac{a^{-3}b^{-1}+a^{-1}b^{-3}}{a^{-4}-b^{-4}} \frac{2}{(a-b)^{-1}};$

▪ $\frac{m-2}{m(m-2)+4} + \frac{8+4(1-m)+m^2}{8+m^3} - \frac{1}{2+m};$

▪ $\frac{3n+10}{n+4} + \left(\frac{n-4}{n+6}\right)^2 \left(\frac{n+21}{16-8n+n^2} - \frac{n+3}{16-n^2}\right);$

▪ $\frac{\frac{a+2}{a-2}}{\frac{6a}{a^3-8} + \frac{2a}{a^2+2a+4} + \frac{1}{2-a}} - \frac{4a+4}{a-2}.$

б. Докажите тождество:

▪ $2 + 2 = 4;$

▪ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2;$

▪ $8a^3 + 12a^2b + 12a^2c + 6ab^2 + 12abc + 6ac^2 + b^3 + 3b^2c + c^3 =$
 $= (2a + b + c)^3;$

▪ $\left(\frac{c^2}{b^2} + b^2\right)(c^6b^2 + y^2) = (c^4 + by)^2 + \left(\frac{c}{b}y - b^2c^3\right)^2.$

в. Разложите на множители:

▪ $x^4 - 1;$

▪ $x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2;$

▪ $x^4 + 4x^2 - 1.$

2. Интегрирование и дифференцирование функций, пределы

а. Найдите интеграл функции $y = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}$ на отрезке $[3,4]$.

б. Найдите неопределенный интеграл функции $y = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}.$

- с. Найдите производную функции $y = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)$. Упростите полученное выражение.
- д. Найдите пятую производную функции $y = 2 \cos(2x) - 2 \sin(x)$.
- е. Найдите предел функции $y = 2 \sqrt{x} \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right)$ при $x \rightarrow \infty$.

3. Решение уравнений

- а. Решите следующее уравнение относительно переменной x : $\pi x = e$.
- б. Решите следующее уравнение относительно переменной x ; относительно переменной a ; переменной t . В последнем случае объясните полученный результат: $xt^2 = \frac{1}{a}$.
- с. Решите следующее уравнение относительно переменной t ; относительно переменной x : $\sqrt{\sin(x)t^2} = 4$.
- д. Решите уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в общем; решите для каких-нибудь конкретных коэффициентов.

4. Сумма рядов и разложение в ряд Тейлора

- а. Найдите сумму ряда:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$;
 - $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$;
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.
- б. Вычислите ряд Тейлора для следующих функций:
- $\frac{x}{\ln(1+x)}, x_0 = 4$;
 - $x \sin(2x), x_0 = 10$;
 - $\sin(x)e^{x^2}, x_0 = 7$.

5. Задачи

- а. Вычислите площадь фигуры ограниченной данными линиями:
 $y = x^2 + 3x, y = 2 + 4x$.
- б. Найдите объем V тел, полученных вращением заданных фигур вокруг оси Ox
 $y = x^2 + 2x$ и ограниченную прямыми $y = 4 - x, x = 0$.

Лабораторная работа №2

1. Постройте графики функций $f(x)$, $g(x)$, $f(g(x))$ на одном чертеже. Установите формат осей «пересечение в начале координат», одинаковый масштаб по оси абсцисс и оси ординат, добавьте сетку. Сделайте первый график пунктирным, второй — жирным, а третий — зеленого цвета.

Вариант	Задание
1.	$g(x) = \cos x, f(x) = \ln x$
2.	$g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = a \cos x$

3.	$g(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f(x) = a \sin x$
4.	$g(x) = \frac{1}{\sin x}, f(x) = a \tan x$
5.	$g(x) = x(1-x^2), f(x) = \sqrt{x}$
6.	$g(x) = \sin x, f(x) = a \sin x$
7.	$g(x) = \cos x, f(x) = 8^{\cos 2x}$
8.	$g(x) = 4x - x^2 - 4, f(x) = x^2 e^x$
9.	$g(x) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), f(x) = e^x$
10.	$g(x) = e^x, f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$

- Постройте графики функций $f(x)$, $g(x)$, $f(x) + g(x)$ на одном чертеже. Установите формат осей «пересечение в начале координат», одинаковый масштаб по оси абсцисс и оси ординат, добавьте сетку. Сделайте первый график пунктирным, второй — жирным, а третий — зеленого цвета.
- Постройте графики функций. Запишите уравнения касательной и нормали к каждой кривой в указанных точках и изобразите их на графике вместе с исходной функцией. Добейтесь на графике чёткого графического представления.

Вариант	Задание
1.	$y(x) = x^3 \sin x$ в точке $\frac{\pi}{2}$
2.	$y(x) = \frac{x^4+1}{x^4-1}$ в точке -2
3.	$y(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке 3
4.	$y(x) = \frac{\sin^2(5x)}{(x^3+1)^2}$ в точке $0,5$
5.	$y(x) = a \tan \frac{1}{x}$ в точке 1
6.	$y(x) = \frac{1}{\ln x}$ в точке 3
7.	$y(x) = (x^2 + 4x - 3)$ в точке 1
8.	$y(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке 0
9.	$y(x) = \ln(x + \cos x)$ в точке 0
10.	$y(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ в точке 1

- Задайте дискретный аргумент x с начальным значением -10 , конечным значением 10 и шагом $0,1$; задайте функции $y(x)$ и постройте точечный график кривой, если
 - $y = \sin x$;

- b. $y = \ln(x + \cos x)$.
5. Постройте график кривой, заданной параметрически, если:
- $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$;
 - $x(t) = \sin t, y(t) = \sin t \cos t$;
 - $x(t) = \sin t, y(t) = \sin^2 t \cos t$.
6. Постройте график функции в полярной системе координат:
- $f_1(v) = 3$;
 - $f_2(w) = \frac{w}{2}$;
 - $f_3(\vartheta) = \sin \frac{5\vartheta}{3}$;
- i. Постройте в тех же координатных осях $g(w) = 2^{\sin w}$, и график сложной функции.
- d. $f_4(\varphi) = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$.

Лабораторная работа №3

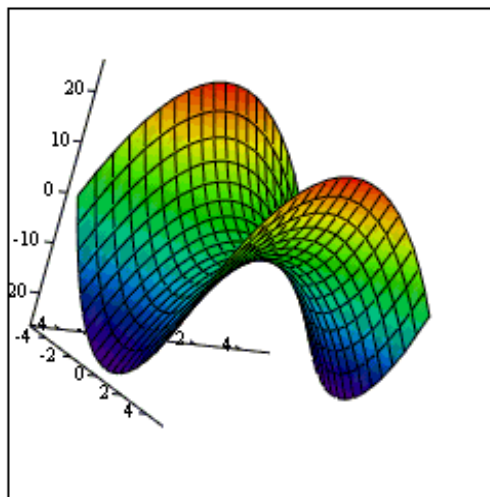
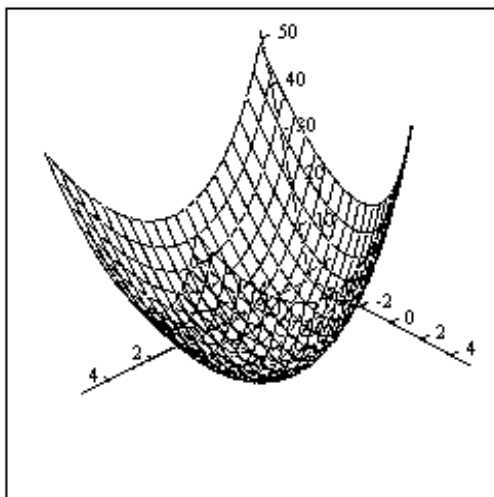
1. Постройте график функции

Вариант	Задание
1.	$z = xy$
2.	$z = x^2 - y^2$
3.	$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
4.	$z = x^2 + y^2$
5.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
6.	$z = xy^2$
7.	$z = \sqrt{x^2 y^2}$
8.	$z = \cos(x) y^2$
9.	$z = \cos x \sin y$
10.	$z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

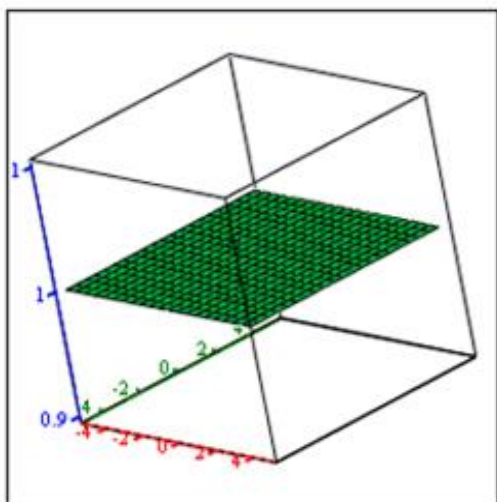
2. Постройте следующие графики (с тем же форматированием)

$$F(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$$

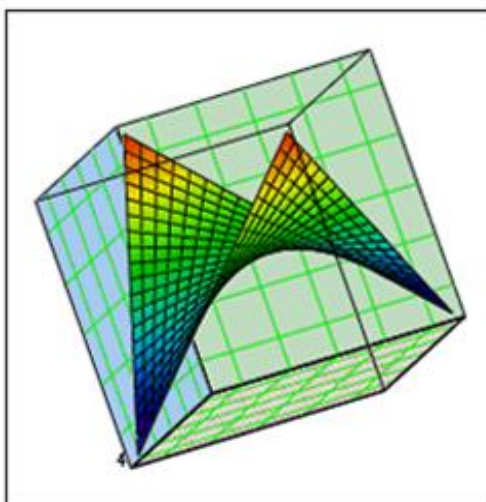
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



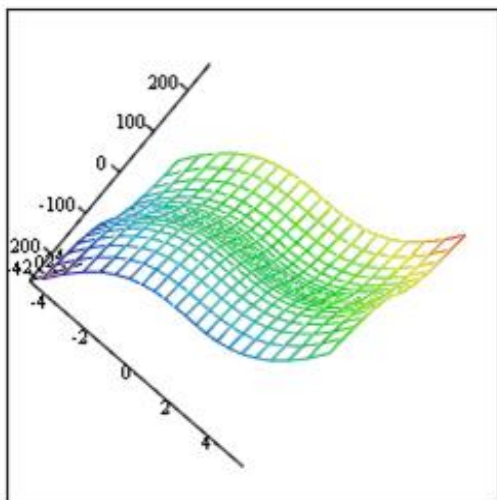
$$f(x, y) = 1$$



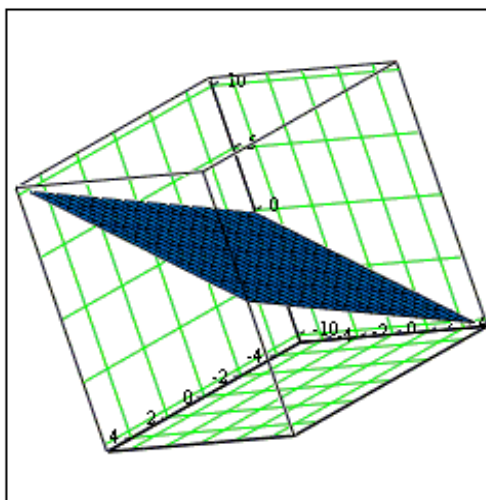
$$f(x, y) = xy$$



$$f(x, y) = x^3 + y^3$$



$$f(x, y) = x - y$$



3. Карта уровней

Создайте карту линий уровня для функции:

a. $f(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2 + 1}$;

b. $f(x, y) = \frac{-x^2}{x^2 + y^2 + 1}$;

с. Рядом постройте графики соответствующих поверхностей.

4. Параметрические построения в пространстве

- Постройте в пространстве параметрически заданную прямую.
- Постройте в пространстве параметрически заданную окружность.
- Постройте в пространстве параметрически заданную цилиндрическую поверхность.

5. Поверхности вращения

- Постройте параметрически заданный тор (график поверхности):

$$x_{i,j} = (R + r \cos w_j) \cos q_i$$

$$y_{i,j} = (R + r \cos w_j) \sin q_i$$

$$z_{i,j} = r \sin w_j$$

- b. Постройте следующие поверхности вращения:
- Цилиндрическую поверхность.
 - Коническую поверхность.
 - Сферу.

Лабораторная работа №4

1. Матрицы

- Задайте произвольную квадратную матрицу A размера не менее 3×3 . Найдите её определитель (если определитель матрицы равен нулю, измените значения элементов матрицы), транспонированную и обратную матрицу.
- Задайте матрицу B того же размера, что и A . Найдите сумму, разность матриц, произведения AB и BA .
- Приклейте матрицу B к матрице A :
 - справа;
 - снизу.
- Задайте матрицу C размера 2×2 так, чтобы её элементами являлись переменные, значения которых не определены. Вычислите символично определитель этой матрицы и транспонированную матрицу. Сделайте то же с матрицами размера 3×3 и 4×4 .
- Откройте документ «Mathematica» с именем «Matr». Для заданной в нём матрицы M найдите:
 - Количество строк и столбцов матрицы, общее количество элементов матрицы;
 - Максимальный элемент матрицы.

2. Вектора

Для следующих векторов:

Вариант	Вектор \vec{a}	Вектор \vec{b}	Вектор \vec{c}	Формула
1	$(1, -1, 2)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 1)$	$s = 4b * c - b \times c \times a$
2	$(2, 5, 7)$	$(1, 2, 4)$	$(4, 10, -1)$	$s = 2a - 3b \times c$
3	$(-2, 4, 11)$	$(3, 8, 4)$	$(4, 4, -1)$	$s = c \times a - b \times c$
4	$(1, -1, 2)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 4, 6)$	$s = 2b \times a + b \times 3c$
5	$(1, 1, 1)$	$(0, 1, 1)$	$(1, 2, 4)$	$s = 2b \times a - b \times 3c$
6	$(2, 5, 7)$	$(1, 2, 4)$	$(2, 5, 7)$	$s = 4b * c - b \times c \times a$
7	$(8, 1, 3)$	$(16, 2, 6)$	$(0, 1, 2)$	$s = c \times a - b \times c$
8	$(2, 0, 0)$	$(0, 2, 0)$	$(2, 5, 7)$	$s = c \times a - b \times c$
9	$(4, -10, 4)$	$(10, 5, 7)$	$(1, -1, 2)$	$s = 2a - 3b \times c$
10	$(-13, 6, 0)$	$(-5, 6, 2)$	$(-7, 9, -1)$	$s = 4b * c - b \times c \times a$

- Найти сумму векторов, скалярное произведение векторов, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .
- Определить, являются ли вектора \vec{a} и \vec{b} ортогональными (взаимно перпендикулярными).
- Найдите координаты вектора для формулы, приведенной в таблице.
- Определить, являются ли вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ компланарными.

3. Деление отрезка в данном соотношении

Вариант	Задание
1.	Даны точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(7, 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в два раза ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
2.	Даны точки $M_1(-8, 10)$ и $M_2(-4, 2)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая находится посередине между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
3.	Даны точки $M_1(-9, 3)$ и $M_2(3, 6)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в два раза ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
4.	Даны точки $M_1(3, -6)$ и $M_2(11, 6)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в три раза ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
5.	Даны точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(8, 6)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в пять раз ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
6.	Даны точки $M_1(5, -3)$ и $M_2(12, 2)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в четыре раза ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
7.	Даны точки $M_1(2, 4)$ и $M_2(7, 3)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в три раза ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
8.	Даны точки $M_1(4, 8)$ и $M_2(7, 2)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая находится посередине между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
9.	Даны точки $M_1(14, -2)$ и $M_2(14, 7)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в пять раз ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.
10.	Даны точки $M_1(-9, 3)$ и $M_2(3, 6)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в пять раз ближе к M_1 , чем к M_2 и находится между точками M_1 и M_2 . Сделайте чертеж.

4. Соотношения в треугольнике

Треугольник ABC задан своими вершинами. Найти:

- величины углов A, B, C ;
- координаты точки пересечения медиан и расстояние от неё до вершины A ;
- площадь треугольника ABC .

Вариант	А	В	С
1.	(1, 1, 1)	(2, 2, 2)	(4, 3, 5)
2.	(-13, 6, 0)	(-5, 6, 2)	(-7, 9, -1)
3.	(-8, 6, -3)	(2, 8, 2)	(-1, 10, 2)
4.	(-2, 4, -1)	(9, 4, -1)	(14, 9, 2)

5.	(3, 4, 5)	(3, 10, 0)	(14, 11, 1)
6.	(1, 2, 3)	(9, 2, 2)	(6, -4, 2)
7.	(0, -2, 1)	(15, 4, 5)	(17, 2, 3)
8.	(-2, -4, 1)	(-6, 3, 2)	(-11, 3, 3)
9.	(10, -5, 2)	(19, -5, -3)	(18, 4, -1)
10.	(-2, 2, 0)	(3, 4, 2)	(6, 9, 2)

5. Параллелепипед

Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $A(0,0,0)$, $B(1, -1, 0)$, $C(0,1,1)$, $A_1(4,2,0)$.

- Вычислить объём (смешанное произведение векторов).
- Вычислить площадь сечения $ACC_1 A_1$ (векторное произведение).
- Вычислить длины диагоналей BD , BD_1 (сложение и вычитание векторов).

Лабораторная работа №5

1. Решение неравенств

- Решите следующие неравенства относительно переменной x . Объясните полученные результаты. Для объяснения постройте графики к каждому неравенству:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 9 < 0 & \quad x^2 + 6x - 9 > 0 \\ x^2 + 6x + 9 < 0 & \quad x^2 + 6x + 9 > 0 \quad x^2 + 6x + 10 > 0 \end{aligned}$$

2. Решение системы неравенств

Решите следующие системы неравенств:

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{cases} 3 - \frac{z-1}{2} > 1, \\ 2z + \frac{z}{3} < 7; \end{cases} & \quad \text{b. } \begin{cases} 2(3y - 1) - 4(2y + 3) < 10, \\ \frac{y-3}{2} - \frac{y+4}{3} < 0; \end{cases} \\ \text{c. } \begin{cases} 1 - \frac{2x+3}{3} > 2 - \frac{x+1}{4}, \\ 5(x - 4) - 8 > 6(2x - 1) - 2; \end{cases} & \quad \text{d. } \begin{cases} \frac{2x+1}{5} - 1 \leq 2, \\ \frac{x}{5} - 2 \geq x; \end{cases} \\ \text{e. } \begin{cases} \frac{y+1}{4} - \frac{y+1}{6} < \frac{y+1}{3}, \\ \frac{y-3}{4} + y < 2y - \frac{y-3}{8}; \end{cases} & \quad \text{f. } \begin{cases} \frac{2z-1}{4} + \frac{z+1}{2} \leq 3z + 1, \\ \frac{z-3}{2} + 2(z - 1) \leq z + 5. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Решите следующие системы линейных уравнений:

1.	$\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = -2, \\ 4x + y + 4z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = -2, \\ 4x + y + 4z = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x - y + z = 5, \\ 2x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4, \\ 2x + y + z = 6, \\ 4x + y + 2z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 8, \\ 2x + y + z = 6, \\ x + y + 4z = 4. \end{cases}$

3.	$\begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ -4x - 3y + z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ -4x - 2y + z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y - z = 1, \\ 3x + y - z = 0, \\ -4x - 4y + z = 1. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ 3y + 4z = -6, \\ 4x + 2y - 2z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3y + 4z = -6, \\ x + z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3y + 4z = -6, \\ 4x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ x + 3y + 3z = 4, \\ x + 5y + 5z = 17. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ 2x - y - z = 2, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = -2, \\ 4x + y + 4z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y + z = 4, \\ 2x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3y + 4z = -6, \\ 4x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$

- с помощью функции «*LinearSolve*(*M*, *y*)», представив систему в матричном виде: $AX = B$ (найдите вектор X);
- с помощью функции «*RowReduce*» происходит по методу Гаусса;
- с помощью функции «*Solve*»;
- с помощью метода Крамера;
- объясните полученные результаты.

4. Решение задач: составление систем уравнений. Решение и изображение графически

Вариант	Задание
1.	Произведение двух чисел равно 77, а их разность равна 4. Найти эти числа.
2.	Высота трапеции равна 8 см, средняя линия ее равна 9 см. Найти основания трапеции, если она равновелика прямоугольнику со сторонами, равными основаниям трапеции.
3.	Бассейн наполняется через два крана. Наполнение бассейна только через первый кран длится на 22 мин дольше, чем наполнение этого бассейна только через второй кран. Оба крана, действуя одновременно, наполняют бассейн за один час. За сколько времени каждый из кранов может наполнить бассейн?
4.	В двух concentрических окружностях, радиусы которых равны 25 см и 17 см, требуется провести хорду так, чтобы часть ее, лежащая во внутренней окружности, составляла $\frac{2}{5}$ всей хорды. Определить длину хорды и расстояние от нее до центра.
5.	Площадь прямоугольного треугольника равна 6 дм ² . Найти стороны этого треугольника, если известно, что прямоугольный параллелепипед, измерениями которого служат стороны данного треугольника, имеет объем, равный 60 дм ³ .
6.	Разность двух сторон параллелограмма равна 3 см, меньшая диагональ параллелограмма равна большей его стороне и на 2 см меньше большей диагонали. Найти стороны и диагонали параллелограмма.

Лабораторная работа №6

1. Освоить применение всех функций, предназначенных для решения дифференциальных уравнений и их систем различных типов.
2. Решить следующие обыкновенные дифференциальные уравнения или их системы (сначала сделать попытку символьного решения: если это не удастся, то решить численно и построить график):

a. $y' = \frac{1}{2-y};$

b. $y'' + 2xy' - y = 2(x^2 + 1) \sin x, \quad y(0,5) = -0,5 \cos 0,5, \quad y'(0,5) = 1;$

c. $y'' + 4y = \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$

d. $xyy'' - x(2 \ln x - 1)y'^2 = yy', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -2;$

e. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}};$

f. $\dot{x}(t) = ax - y, \quad \dot{y}(t) = x - ay, \quad a$ — постоянная;

g. $y' = -\frac{y}{x} + y^2 \ln x, \quad y(1) = -2;$

h. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9;$

i. $\frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{z}, \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 1;$

j. $x^2y'' - 2y = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0, \quad y(2) = 4,5.$

3. Решить смешанную задачу для дифференциального уравнения в частных производных:

a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - t^2)e^{-x}, \quad u(0,t) = t, \quad u(1,t) = te^{-t}, \quad u(x,0) = 0.$

b. $\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad u(0,t) = \cos t, \quad u(2,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 1 - \frac{x}{2}.$

Лабораторная работа №7

1. Математическое моделирование

- a. **Модель «Хищник-жертва».** Исследовать аналитически данную математическую модель: найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, исследовать их на устойчивость, построить фазовый портрет, сделать выводы о поведении решений данной системы. Используя функцию «StreamPlot», построить фазовый портрет.
- b. **Уравнение колебания струны с закреплёнными концами.** Построить анимацию («Animation») колебания струны с закреплёнными концами, используя для нахождения решения метод Фурье, а также построение разностной схемы (явной и неявной).
- c. **Уравнение теплопроводности.** Найти решение уравнения теплопроводности при помощи метода Фурье и построения разностной схемы (явной и неявной), построить график решения уравнения в разные моменты времени.

- d. **Моделирование движения брошенного под углом к горизонту тела.** Построить разностную схему для системы дифференциальных уравнений, описывающих движение брошенного под углом к горизонту тела без и с учётом сопротивления воздуха. Построить график решения для разных значений коэффициента сопротивления.
- e. **Моделирование движения тел под действием силы тяготения.** Найти решение системы дифференциальных уравнений. Построить анимацию.

1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачёт выставляется по итогам текущей аттестации.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Пакеты математических программ и математическое моделирование»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Пакеты математических программ и математическое моделирование» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе «Пакеты математических программ и математическое моделирование» лежит особый математический аппарат. По большинству тем предусмотрены лабораторные работы, с помощью выполнения которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом «Пакеты математических программ и математическое моделирование».

Для успешного освоения дисциплины очень важно выполнение достаточно большого количества заданий, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения заданий из лабораторных работ разбираются на занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель выполнения лабораторных работ — помочь усвоить фундаментальные понятия, законы и основы данного курса. Для выполнения всех лабораторных работ необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы проводятся семинарские занятия, которые помогают разъяснить материал по пройденной теме.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают зачёт. Зачёт выставляется по итогам выполнения всех лабораторных работ в течение семестра и краткого собеседования по его результатам.