

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Алгебра

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Математика и компьютерные науки»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Алгебра» является обеспечение фундаментальной подготовки в одной из основных областей современной математики, освоение языка и методов одного из наиболее мощных инструментов современной математики. Курс лежит в основе большей части численных методов математики, имеющих применение во многих областях естествознания. Его главной задачей является обучение основным методам решения алгебраических задач, ознакомление с историей развития алгебры и вкладом в неё российских математиков.

Основная задача дисциплины – научить студентов пониманию языка алгебры, воспитанию культуры вычислений с помощью матричной алгебры и алгебры многочленов, линейной алгебры, умениям применять основной аппарат алгебры в различном контексте. Содержание курса является базой для дальнейшего развития содержания дисциплины в специальных курсах.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебра» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Алгебра и теория чисел». Она имеет разнообразные связи с основными и специальными математическими дисциплинами.

Знания, полученные при изучении дисциплины, задействуются практически во всех математических и естественнонаучных курсах. Это математический анализ, аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, компьютерная алгебра, дифференциальные уравнения, теория групп, комплексный анализ, функциональный анализ, финансовая математика, теория кодирования, современная геометрия, криптографические методы, компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии, информационная безопасность, теоретическая механика.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2 Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3 Имеет практический опыт	Знать: методы и современные средства и технологии поиска информации Уметь: применять методики поиска, сбора и обработки информации, осуществлять оценку адекватности информации Владеть навыками: поиска информации в информационных источниках, анализа и систематизации информации

	работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: - основные понятия и теоремы алгебры матриц и многочленов, элементы теории групп, линейной алгебры; - методы вычислений в алгебрах матриц и многочленов, методы вычислений в векторных пространствах; - основные понятия, методы и алгоритмы линейной алгебры Уметь: - решать системы линейных уравнений; - находить корни многочленов с вещественными и комплексными коэффициентами; - вычислять в кольце вычетов по модулю натурального числа; - выяснять, является ли данное множество векторным пространством, выполнять линейно-алгебраические вычисления, проводить доказательства утверждений в инвариантной и координатной формах Владеть навыками: - вычисления в кольце матриц; - вычислений в кольцах многочленов и вычетов по модулю натурального числа; - нахождения определителей, дискриминанта и результата многочленов; - распознавания линейных отображений

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 17 зачетных единиц, 612 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение	1	2						
2	Множества и отображения. Отношения на множествах	1	4	4		2		6	Задания для самостоятельной работы
3	Системы линейных уравнений	1	2	2				6	Задания для самостоятельной работы
4	Векторные пространства	1	6	6		2		12	Задания для самостоятельной работы
5	Матрицы	1	6	6		2		14	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа №1
6	Определители	1	6	6		2		14	Задания для самостоятельной работы
7	Комплексные числа	1	2	4				12	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа №2
8	Алгебраические структуры	1	4	4				8	Задания для самостоятельной работы
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 1 семестр 180 часов		32	32		10	0,5	105,5	
	в том числе с ЭО и ДОТ								
8	Алгебраические структуры (продолжение)	2	4	4		2		8	Задания для самостоятельной работы
9	Кольцо многочленов от одной переменной	2	4	4				8	Задания для самостоятельной работы
10	Теория делимости в кольцах целых чисел и многочленов над полем	2	6	6		2		14	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа №3
11	Многочлены над числовыми полями	2	6	6				14	Задания для самостоятельной

									работы
12	Многочлены от нескольких переменных	2	6	6				8	Задания для самостоятельной работы
13	Поле частных области целостности. Факторкольцо	2	2	2				8	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа №4
14	Конечные поля	2	2	2		2		6	Задания для самостоятельной работы
15	Группы	2	2	2		2		6	Задания для самостоятельной работы
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 2 семестр 180 часов		32	32		10	0,5	105,5	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								
16	Векторные пространства	3	16	16		4		18	Задания для самостоятельной работы
17	Линейные отображения и линейные операторы	3	16	16		4		17,3	Задания для самостоятельной работы
18	Всего за 3 семестр 108 часов		32	32		8	0,3	35,7	Зачет
19	Билинейные и квадратичные формы	4	8	8		2		18	Задания для самостоятельной работы
20	Линейные пространства с дополнительной структурой	4	8	8		2		18	Задания для самостоятельной работы
21	Линейные операторы на линейных пространствах с дополнительной структурой	4	8	8		2		18	Задания для самостоятельной работы
22	Аффинные и евклидовы точечные пространства	4	8	8		2		17,3	Задания для самостоятельной работы
23	Всего за 4 семестр 144 часов		32	32		8	0,5	71,5	Экзамен
	ИТОГО		128	128		36	1,8	318,2	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								

Содержание разделов дисциплины:

1. Введение

Исторический обзор развития алгебры. Основные периоды развития. Расширение понятия числа и знаменитые задачи древности. Разрешимость уравнений в радикалах и появление новых алгебраических структур. Место алгебры в системе математических наук.

2. Множества и отображения. Отношения на множествах

- 2.1. Множества. Операции над множествами. Отображения множеств. Виды отображений. Композиция отображений. Обратимость отображений.
- 2.2. Бинарные отношения. Свойства. Отношения эквивалентности и порядка.
- 2.3. Метод математической индукции.
- 2.4. Понятие бинарной алгебраической операции. Определение группы, кольца, поля.

3. Системы линейных уравнений

- 3.1. Системы линейных уравнений над полем вещественных чисел. Решение системы уравнений. Метод Гаусса. Матричная запись системы линейных уравнений и исследование системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса.
- 3.2. Однородная система линейных уравнений. Теорема о количестве ее решений.

4. Векторные пространства

- 4.1. Векторное пространство над полем, его свойства, примеры. Арифметическое n -мерное векторное пространство. Подпространство.
- 4.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства линейной зависимости. Базис системы векторов и векторного пространства. Теорема о количестве векторов в базисе системы. Ранг системы векторов и его вычисление. Размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе. Линейная оболочка системы векторов и подпространства. Второе определение базиса.
- 4.3. Линейные отображения векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств. Свойства изоморфизма. Теорема об изоморфизме векторных пространств одной и той же конечной размерности над полем P .

5. Матрицы

- 5.1. Понятие матрицы. Действия над матрицами и их свойства. Кольцо квадратных матриц.
- 5.2. Строчечный и столбцовый ранги матрицы, их равенство. Вычисление ранга матрицы. Невырожденные матрицы.
- 5.3. Обратная матрица. Критерий ее существования. Элементарные матрицы. Практический способ нахождения обратной матрицы.
- 5.4. Транспонирование матриц. Ранг произведения матриц. Матричная запись систем линейных уравнений.
- 5.5. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты вектора в новом базисе.
- 5.6. Матрицы линейных отображений. Взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями из R^n в R^m и матрицами размера $m \times n$. Сумма и произведение линейных отображений и их связь с операциями над матрицами.
- 5.7. Утверждение о независимости числа главных и свободных неизвестных системы от способа приведения ее к ступенчатому виду. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
- 5.8. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений.

6. Определители

- 6.1. Перестановки. Четность перестановки. Понятие определителя произвольного порядка. Частные случаи: определители второго и третьего порядков.
- 6.2. Свойства определителей.
- 6.3. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Теорема о разложении определителя по строке или столбцу. Практический способ вычисления определителя порядка выше 3.
- 6.4. Определитель произведения матриц.
- 6.5. Критерий невырожденности матрицы. Нахождение обратной матрицы с помощью определителей.
- 6.6. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

6.7. Метод окаймляющих миноров.

7. Комплексные числа

Комплексные числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

8. Алгебраические структуры

8.1. Бинарные алгебраические операции и алгебраические структуры. Полугруппы и моноиды. Примеры. Обобщенная ассоциативность степени. Обратимые элементы.

8.2. Группы. Примеры групп (числовые группы, матричные, симметрическая и знакопеременная группы, группа корней из единицы), их подгруппы.

8.3. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Примеры. Свойства изоморфизма. Теорема Кэли.

8.4. Циклические группы. Примеры. Порядок элемента группы. Теорема об изоморфизме циклических групп одного и того же порядка.

8.5. Кольца. Примеры. Свойства колец. Кольцо классов вычетов. Гомоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма.

8.6. Тело. Поле. Подполе. Расширение поля. Примеры. Свойства полей. Характеристика поля. Простое поле.

9. Кольцо многочленов от одной переменной

9.1. Понятие многочлена от одной переменной с коэффициентами из кольца K . Степень многочлена. Операции над многочленами. Кольцо многочленов $K[x]$. Кольцо многочленов над областью целостности.

9.2. Деление многочлена с остатком на двучлен. Теорема Безу. Схема Горнера. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.

9.3. Корни многочлена над полем P . Кратность корня. Формулы Виета.

10. Теория делимости в кольцах целых чисел и многочленов над полем

10.1. Евклидовы кольца. Деление с остатком в кольце целых чисел Z и в кольце многочленов над полем P .

10.2. Понятие идеала кольца. Кольцо главных идеалов. Теорема о том, что всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов. Наибольший общий делитель в кольцах целых чисел и многочленов. Его существование и единственность. Алгоритм Евклида в кольцах Z и $P[x]$. Нахождение НОД 3-х и более элементов. Вычисление коэффициентов в линейном выражении НОД.

10.3. Наименьшее общее кратное в кольцах целых чисел и многочленов. Связь НОД и НОК. Результат.

10.4. Факториальное кольцо. Факториальность кольца главных идеалов. Разложение на простые множители в кольцах целых чисел и многочленов. Отыскание НОД и НОК с помощью разложения на простые множители.

10.5. Дифференцирование многочлена. Изменение кратности неприводимого делителя при дифференцировании. Дискриминант.

11. Многочлены над числовыми полями

11.1. Неприводимые многочлены над полями C , R и Q . Критерий Эйзенштейна. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.

11.2. Решение в радикалах алгебраических уравнений 3-й степени. Формула Кардано. Число действительных корней кубического уравнения с действительными коэффициентами. Решение в радикалах алгебраических уравнений 4-й степени. Метод Феррари.

11.3. Границы действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. Теорема Штурма. Приближенное вычисление действительных корней.

12. Многочлены от нескольких переменных

12.1. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение. Отсутствие делителей нуля в кольце многочленов от нескольких переменных над областью целостности. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных над полем P (без доказательства).

12.2. Симметрические многочлены. Представление симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических функций.

13. Поле частных области целостности. Факторкольцо

13.1. Поле частных области целостности.

13.2. Факторкольцо. Построение. Примеры. Теорема о гомоморфизмах колец.

14. Конечные поля

Конечные поля. Количество элементов и характеристика конечного поля. Существование и единственность конечного поля из p^n элементов, p – простое, n – натуральное число. Свойства конечного поля. Построение конечного поля.

15. Группы

15.1. Группы. Классы смежности по подгруппе. Индекс подгруппы. Порядок конечной группы делится на порядок ее подгруппы.

15.2. Циклические подгруппы. Порядок конечной группы делится на порядок любого ее элемента. Примеры.

15.3. Группа корней n -й степени из единицы. Первообразные корни из единицы.

15.4. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп.

16. Векторное пространство

16.1. Понятие векторного пространства: определение и примеры векторных пространств над бесконечными и конечными полями. Линейная зависимость и ее свойства.

16.2. Подпространство. Объединение, сумма и пересечение подпространств. Линейная оболочка подмножества векторов векторного пространства.

16.3. Базис и размерность. Размерности и базисы суммы и пересечения подпространств.

16.4. Координаты вектора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Вычисление координат вектора при смене базиса.

16.5. Прямая сумма подпространств. Прямое дополнение к подпространству.

17. Линейные отображения и линейные операторы

17.1. Линейное отображение (гомоморфизм) векторных пространств. Примеры линейных отображений. Изоморфизм векторных пространств. Классификация конечномерных векторных пространств. Базис как изоморфизм.

17.2. Матрица линейного отображения векторных пространств в паре базисов. Ее изменение при смене базисов.

17.3. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерии инъективности, сюръективности и биективности линейного отображения. Ранг произведения двух матриц. Факторпространство.

17.4. Понятие эндоморфизма векторного пространства (линейного оператора). Матрица линейного оператора в базисе. Подобие матриц. Понятие алгебры над полем. Алгебра эндоморфизмов данного векторного пространства. Ее изоморфизмы на алгебру квадратных матриц.

17.5. Полиномы от линейного оператора. Подалгебра, порожденная оператором, и минимальный полином линейного оператора. Вычисление минимального полинома линейного оператора.

17.6. Инвариантные подпространства линейного оператора. Примеры линейных операторов, обладающих и не обладающих собственными инвариантными подпространствами. Матрица линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством.

17.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический полином линейного оператора и его инвариантность. Теорема Гамильтона – Кэли.

17.8. Корневые подпространства линейного оператора, их основные свойства. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.

17.9. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Жорданов базис.

17.10. Понятие двойственного векторного пространства. Двойственность и операции над подпространствами. Линейный оператор, двойственный к данному. Двойственные базисы и матрица двойственного оператора в двойственном базисе. Рефлексивность векторных пространств.

18. Билинейные и квадратичные формы

18.1 Полилинейное отображение. Полилинейная форма. Билинейная форма. Векторное пространство билинейных форм на данном векторном пространстве. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Матрица билинейной формы в выбранном базисе и ее преобразование при смене базисов. Конгруэнтность матриц.

18.2. Квадратичные формы. Канонический и нормальный (в вещественном случае) виды матрицы квадратичной формы. Знакоопределенность и невырожденность, сигнатура и ранг. Эквивалентность квадратичных форм. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

18.3. Кососимметрические формы. Симплектическая плоскость. Невырожденность кососимметрической формы и размерность пространства. Канонические матрицы кососимметрических форм. Метод Лагранжа приведения кососимметрической формы к каноническому виду.

19. Линейные пространства с дополнительной структурой

19.1 Евклидовы пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Его следствия. Ортогональность. Ортонормированный базис. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональная группа.

19.2. Симплектическая группа. Теорема о спектре симплектического оператора.

19.3. Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы и пространства. Неравенство Коши – Буняковского в эрмитовом случае. Ортонормированный базис в эрмитовом пространстве.

19.4. Унитарные матрицы и унитарная группа.

20. Линейные операторы на линейных пространствах с дополнительной структурой

20.1. Линейные операторы и θ -линейные формы. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Классы эрмитовых и косоэрмитовых операторов. Алгебры эрмитовых и косоэрмитовых операторов.

20.2. Матрица сопряженного и самосопряженного оператора. Критерий равенства операторов. Собственные значения и теорема о канонической форме эрмитова оператора.

20.3. Приведение квадратичной формы к главным осям. Алгоритм. Матричная формулировка. Одновременная диагонализированность пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

20.4. Канонический вид унитарного и ортогонального операторов.

20.5. Нормальный оператор. Связь нормальности и диагонализированности. Спектральная теорема для нормального оператора.

20.6. Перестановочные операторы. Положительно определенные операторы. Теорема о разложении невырожденного оператора в произведение положительно определенного оператора и изометрии.

20.7. Введение комплексной структуры в вещественном пространстве. Комплексификация и овеществление. Композиции комплексификация -- овеществление и овеществление -- комплексификация.

21. Аффинные и евклидовы точечные пространства

21.1. Аффинные пространства. Изоморфизм аффинных пространств. Аффинные координаты. Связь различных систем координат друг с другом.

21.2. Плоскости в аффинном пространстве. Параметрическое задание плоскости. Аффинная оболочка. Взаимное расположение двух плоскостей. Аффинные функции. Аффинные плоскости как решения систем линейных уравнений.

21.3. Евклидовы аффинные пространства. Отрезок. Расстояния и углы. Теорема Пифагора. Расстояние от точки до плоскости. Объем параллелепипеда.

21.4. Общий перпендикуляр к двум плоскостям. Условие единственности общего перпендикуляра. Расстояние между плоскостями.

21.5. Группы и геометрии. Линейные геометрии.

21.6. Квадратичные функции в аффинном пространстве. Центр квадратичной функции.

Эквивалентность квадратичных функций (аффинный и евклидов случаи). Канонический вид квадратичной функции.

21.7. Квадрики. Классификация квадрик (аффинный и евклидов случаи).

21.8. Цилиндры и конусы.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

Электронные учебные курсы «Алгебра (МКН-11БО)» и «Алгебра (МКН-21БО)» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, в которых:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. — Москва : МЦНМО, 2020 — Часть I : Основы алгебры — 2020. — 271 с.
<https://e.lanbook.com/book/146749>
2. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. — Москва : МЦНМО, 2020 — Часть II : Линейная алгебра — 2020. — 367 с.
<https://e.lanbook.com/book/146750>
3. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. — Москва : МЦНМО, 2020 — Часть III : Основные структуры алгебры — 2020. — 271 с.
<https://e.lanbook.com/book/146751>

4. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. <https://e.lanbook.com/book/183725>
5. Сборник задач по алгебре : учебное пособие. — Москва : МЦНМО, 2009. — 408 с. <https://e.lanbook.com/book/9360>
6. Задачи по алгебре. I семестр : практикум / М. А. Заводчиков, М. Е. Сорокина. — Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2019. — 44с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20190207.pdf>
7. Тимофеева Н.В. Линейная алгебра. Современная алгебра: учебное пособие / Н.В. Тимофеева; ЯрГУ им. П.Г.Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2012. - 114с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120204.pdf>
8. Тимофеева Н.В. Линейная алгебра. Современная алгебра: учебное пособие / Н.В. Тимофеева; ЯрГУ им. П.Г.Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2017. - 136с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20170206.pdf>

б) дополнительная литература

1. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. <https://e.lanbook.com/book/187793>
2. Ларин, С. В. Алгебра: многочлены : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. <https://urait.ru/bcode/493274>
3. Окунев, Л. Я. Высшая алгебра : учебник / Л. Я. Окунев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 336 с. <https://e.lanbook.com/book/167769>
4. Окунев, Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре : учебное пособие / Л. Я. Окунев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 192 с. <https://e.lanbook.com/book/167770>
5. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 476 с. <https://e.lanbook.com/book/183752>

в) ресурсы сети «Интернет»

- 1.Электронные каталоги НБ ЯрГУ http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- 2.Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Доцент кафедры алгебры
и математической логики, к. ф.-м. н. М.Е. Сорокина

Доцент кафедры алгебры
и математической логики, к. ф.-м. н. М.А. Заводчиков

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Методы и средства криптографической защиты информации»**

Фонд оценочных средств

**для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задания для самостоятельной работы

(данные задания выполняются студентом самостоятельно
и преподавателем в обязательном порядке не проверяются)

Задания по теме № 2 «Множества и отображения. Отношения на множествах»:

Раздел 2.1: Определить, является ли следующее отображение множеств инъективным, сюръективным, биективным: $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \lg(x+1)/y$.

Раздел 2.2: Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность, антирефлексивность, антисимметричность) обладает отношение ρ на множестве $\mathbb{R}[x]$: $f \rho g \Leftrightarrow |f(a) - g(a)| < 1$ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Раздел 2.3: Докажите, что при любом натуральном n ($4^n + 15n - 1$) делится на 9.

Раздел 2.4: Доказать, что множество M многочленов вида $ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, a не равно 0, является группой относительно операции композиции. Является ли эта группа абелевой?

Задания по теме № 3 «Системы линейных уравнений»:

Раздел 3.1: Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3, \\2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3, \\-x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -1, \\3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2.\end{aligned}$$

Раздел 3.2: Решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0, \\x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Задания по теме № 4 «Векторные пространства»:

Раздел 4.1: Является ли векторным пространством над полем \mathbb{Q} множество X чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, с операциями сложения и умножения на элементы поля \mathbb{Q} ?

Раздел 4.2: Доказать, что система $a^1 = (1; 1; -3; 0)$, $a^2 = (3; -2; 1; 7)$, $a^3 = (2; -5; 1; -1)$ векторов пространства \mathbb{R}^4 линейно независима.

Раздел 4.3: Является ли отображение $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, 0, 0)$, линейным? Какими свойствами оно обладает?

Задания по теме № 5 «Матрицы»:

Раздел 5.1: Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Раздел 5.2: Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Раздел 5.3: Найти матрицу, обратную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Раздел 5.4: Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -10, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Раздел 5.5: Доказать, что системы $e_1 = (1; -1; 0)$, $e_2 = (0; -1; 1)$, $e_3 = (0; 0; 1)$ и $a_1 = (0; 1; -2)$, $a_2 = (4; 0; 0)$, $a_3 = (0; 1; 0)$ векторов арифметического пространства R^3 являются базисами этого пространства. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора a во втором базисе, если в первом базисе он имеет координаты 12, -3, -5.

Раздел 5.6: Написать матрицу линейного отображения $f: R^3 \rightarrow R^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 5x_3, -x_3)$.

Раздел 5.7: Исследовать систему на совместность по критерию Кронекера – Капелли:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Раздел 5.8: Найти фундаментальный набор решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Задания по теме № 6 «Определители»:

Раздел 6.1: Найти число инверсий в перестановке 3, 4, 10, 1, 7, 9, 8, 5, 2, 6.

Раздел 6.2: Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}.$$

Раздел 6.3: Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Раздел 6.4: Вычислить определитель путем возведения его в квадрат:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

Раздел 6.5: Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Раздел 6.6: Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -10, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Раздел 6.7: Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задания по теме № 7 «Комплексные числа»:

- 1) Вычислить: $\frac{(4-i)(2+i)}{3-4i} + 3$.
- 2) Вычислить: $\sqrt{48+14i}$.
- 3) Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| \cdot |z-1| = 5$.
- 4) Решить уравнение над полем \mathbb{C} : $x^4 - ix^2 + 2 = 0$.
- 5) Записать в тригонометрической форме: $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.
- 6) Вычислить: $(-i)^{13} + \left(\frac{i}{\sqrt{3i-1}}\right)^{15}$.
- 7) Вычислить: $\sqrt[3]{1-2i}$.

Задания по теме № 8 «Алгебраические структуры»:

Раздел 8.1: Операцию на непустом множестве можно задать не единственным способом. Привести пример множества и ввести на нем две операции так, чтобы относительно одной операции данное множество являлось группой, а относительно другой – нет.

Раздел 8.2: Доказать, что множество $R[x]$ является группой относительно операции композиции.

Раздел 8.3: Является ли следующее отображение групп гомоморфизмом? В случае положительного ответа выяснить, является ли оно мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом: $f: (Z, +) \rightarrow (Z, +): f(x)=2x$.

Раздел 8.4: Найти порядок элемента 3 в мультипликативной группе Γ_{11} .

Раздел 8.5: Является ли следующее отображение гомоморфизмом колец: $\phi: (Z, +, \times) \rightarrow (Z, +, \times): \phi(x)=2x$.

Раздел 8.6: Является ли данное множество кольцом или полем относительно указанных операций: $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in Z\}$, $+$, \times ?

Задания по теме № 9 «Кольцо многочленов от одной переменной»:

Раздел 9.1: В кольце $Z_7[x]$ найти многочлен наименьшей степени, эквивалентный многочлену $f(x) = 4x^{21} + x^{18} + 2x^{10} - x^8 + 3x^5 - x - 3$.

Раздел 9.2: Разложить многочлен по степеням $x-x_0$ и найти значения его производных в точке x_0 : $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20$, $x_0 = -2$.

Раздел 9.3: Построить многочлен степени со старшим коэффициентом 1, имеющий корни 1, 2 кратности 2 и 4.

Задания по теме № 10 «Теория делимости в кольцах целых чисел и многочленов над полем»:

Раздел 10.1: Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ над полем R : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

Раздел 10.2: Найти НОД многочленов: $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$.

Раздел 10.3: Найти все значения λ , при которых имеют общий корень многочлены $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^2 + \lambda x + 2$.

Раздел 10.4: Найти НОД и НОК многочленов $f(x)=(x^2-1)(x+1)^5(x-8)^3(x^4-4)$ и $g(x)=(x-1)^3(x+1)(x-8)(x+3)^3(x+4)$.

Раздел 10.5: Выделив кратные неприводимые множители данного многочлена, разложить его на неприводимые множители: $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

Задания по теме № 11 «Многочлены над числовыми полями»:

Раздел 11.1: Найти все рациональные корни многочлена $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Раздел 11.2: Пользуясь формулой Кардано, решить уравнение $x^3 + 6x + 2 = 0$.

Раздел 11.3: Составить ряд Штурма и отделить корни многочлена $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$.

Задания по теме № 12 «Многочлены от нескольких переменных»:

1) Выразить многочлен в виде многочлена от элементарных симметрических функций: $(x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1)$.

2) Найти многочлен четвертой степени, корнями которого являются кубы комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

Задания по теме № 13 «Поле частных области целостности. Факторкольцо»:

1) Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{\alpha}{\alpha + 1}$, $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

2) Доказать, что

а) $F[x]/\langle x - \alpha \rangle \simeq F$ (F — поле);

б) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{C}$;

в) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle \simeq \mathbb{C}$.

Задания по теме № 14 «Конечные поля»

1) Привести пример многочлена $f(x)$ 4-й степени из кольца $Z_2[x]$, неприводимого над Z_2 .

2) Построить поле \mathbf{F}_{16} как факторкольцо $Z_2[x]$ по идеалу, порожденному многочленом $f(x)$ из задания 1).

3) Пусть $a = x + (f(x))$ — образ элемента x кольца $Z_2[x]$ в $Z_2[x]/(f(x))$. Вычислить $(a+1)^5 + a^4 - (a-1)^3$.

4) Найти элемент, обратный $a^3 - a - 1$ в \mathbf{F}_{16} .

5) Найти какую-либо образующую мультипликативной группы \mathbf{F}_{16}^* .

6) Сколько всего образующих элементов у группы \mathbf{F}_{16}^* ? Найти их все.

Задания по теме № 15 «Группы»

Раздел 15.1: Найти смежные классы аддитивной группы R по подгруппе Z .

Раздел 15.2: Будет ли группа обратимых элементов кольца Z_{16} циклической?

Раздел 15.3: Найти все первообразные корни степени 10 из единицы.

Раздел 15.4: Доказать, что подгруппа матриц с определителем 1 группы $GL_n(R)$ нормальна.

Задания по теме «Векторные пространства»

1. Докажите, что обратный вектор к данному единственен.

2. Докажите равенство $0 \cdot a = 0$.

3. Докажите равенство $(-\alpha)x = -\alpha x$.

4. Докажите равенство: $(\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$.

5. Докажите, что для $\forall a, b \in V$ уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение.

6. Докажите, что из равенства $\alpha \cdot a = 0$ следует $\alpha = 0$ или $a = 0$.

7. Будет ли векторным пространством множество векторов, компланарных некоторой фиксированной плоскости?

8. Является ли векторным пространством множество R^+ с аддитивной операцией $x \circ y = xy$ и умножением на скаляр $\alpha x = x\alpha$?
9. Будет ли векторным пространством множество целых чисел Z с операцией сложения над полем рациональных чисел Q ?
10. Будет ли векторным пространством множество целых чисел Z с операцией сложения над полем $F_2 = \{0,1\}$?
11. Является ли векторным пространством F_2^n над F_2 ?
12. Является ли множество всех магических квадратов порядка 3 векторным пространством относительно сложения?
13. Пусть X - произвольное множество. V - множество подмножеств в X . Является ли векторным пространством множество V относительно операции пересечения над полем F_2 ? Относительно операции симметрической разности Δ над полем F_2 ?

Задания по теме «Линейная зависимость и базис»

1. Является ли векторным пространством в $Mat_n(R)$ множество симметрических матриц? В случае положительного ответа найдите какой-нибудь базис и размерность.
2. Является ли векторным пространством в $Mat_n(R)$ множество кососимметрических матриц? В случае положительного ответа найдите какой-нибудь базис и размерность.
3. Являются ли векторы $a = (1, -1, 0, -1)$, $b = (2, -1, 1, 0)$, $c = (2, -2, 0, 1)$, $d = (-1, 0, 1, 0)$?
5. Являются ли векторы $(1 + i, 2, -i)$, $(-1 - i, 0, 2i)$, $(0, i, 3i)$ линейно зависимыми?
6. Являются ли многочлены $f_1 = 1 + x$, $f_2 = 1 - 2x + x^2$, $f_3 = 2 - 3x + x^2$ линейно зависимыми?
7. Являются ли функции $\sin x$ и $\cos x$ линейно зависимыми?
8. Дополните векторы $(1, -1, 1, 1)$, $(0, -1, 1, 0)$ до базиса пространства R^3 .
9. Найдите базис пространства решений системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$
10. Найдите базис пространства решений системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$
11. Пусть e_1, e_2, e_3 - линейно независимые векторы. Будут ли линейно зависимыми векторы $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1 - e_2 + e_3$, $c = e_1 - e_2 - e_3$?
12. Пусть e_1, e_2, e_3 - линейно независимые векторы. Будут ли линейно зависимыми векторы $a = e_1 + e_2$, $b = e_1 + e_3$, $c = e_2 + e_3$?

Задания по теме «Подпространства»

1. Является ли векторным подпространством в $Mat_n(R)$ множество симметрических матриц? В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.
2. Является ли векторным подпространством в $Mat_n(R)$ множество кососимметрических матриц? В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.
3. Является ли векторным подпространством в $Mat_n(R)$ множество матриц со следом, равным 0? В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.
4. Является ли векторным подпространством в $Mat_n(R)$ множество матриц с определителем 0? В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.
5. Является ли векторным подпространством в пространстве многочленов степени не выше 2 множество многочленов с нулевым дискриминантом? В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.
6. Является ли векторным подпространством в R^4 множество векторов (x, y, z, t) , координаты которых удовлетворяют равенству $x + y = zt$. В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.

7. Является ли векторным подпространством в R^n множество векторов (x_1, x_2, \dots, x_n) , координаты которых удовлетворяют равенству $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.

8. Является ли векторным подпространством в R^4 множество векторов (x_1, x_2, x_3, x_4) , координаты которых удовлетворяют системе

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0.$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0.$$

В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.

9. Является ли векторным подпространством в R^4 множество векторов (x_1, x_2, x_3, x_4) , координаты которых удовлетворяют системе

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2.$$

В случае положительного ответа найдите размерность подпространства.

Задания по теме «Координаты вектора в базисе»

1. Найти координаты вектора $a = (1, 2, 3, 4)$ в базисе $E = \{e_1 = (-1, 0, 2, -1), e_2 = (0, 2, -1, 1), e_3 = (0, 0, -1, 2), e_4 = (0, 0, 0, -1)\}$.

3. Найдите координаты вектора $f(x) = 2 - x + 2x^2 - x^3$ в базисе $E = \{f_1 = 1 - x + x^2 - x^2, f_2 = 1 + 2x - x^2, f_3 = 1 - 2x, f_4 = 1\}$.

4. Найдите координаты вектора $a = (i, 1 + i, -2i)$ в базисе $E = \{e_1 = (1, 0, i), e_2 = (i, 1, 0), e_3 = (0, i, 1)\}$.

5. Найдите координаты вектора $a = (2, 1, 0)$ в базисе $F = \{e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (2, 2, 0), e_3 = (1, 1, 1)\}$ в векторном пространстве F^3 .

6. В векторном пространстве F^3 выпишите все векторы, которые в паре с вектором $a = (1, 2, 1)$, образуют линейно зависимую систему (лежат на одной прямой).

7. В векторном пространстве F^3 выпишите все векторы, которые вместе с векторами $a = (1, 2, 4)$ и $b = (2, 1, 3)$, образуют линейно зависимую систему (лежат в одной плоскости).

8. Вектор $a = (1, 2, 3)$ задан своими координатами в стандартном базисе. Найдите координаты вектора a в базисе $F = \{f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (-1, 1, 0), f_3 = (-1, -1, 1)\}$.

9. Вектор $a = (1, 2, 3)$ задан своими координатами в стандартном базисе $E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Найдите координаты вектора a в базисе $F = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = e_3\}$.

Задания по теме «Сумма и пересечение подпространств»

1. Даны $V_1 = \langle a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 3) \rangle$ и $V_2 = \langle b_1 = (2, 3, -1), b_2 = (1, 2, -2), b_3 = (1, 1, -3) \rangle$. Найдите базисы подпространств $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$. Найдите размерности этих подпространств. Убедитесь на примере в том, что формула $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ верна.

2. Даны подпространства $V_1 = \langle a_1 = (1, -3, -1, -2), a_2 = (0, 1, -3, 1), a_3 = (1, -4, 2, -3) \rangle$ и V_2 пространство решений системы

$$4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 0.$$

Найдите базис и размерность подпространств $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

3. Найдите базис и размерность подпространств $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$, где $V_1 = \langle x = (-1, 1, 0, -2), y = (-3, 3, 2, 2), z = (1, -1, 2, -1) \rangle$, $V_2 = \langle a = (0, -2, 1, 0), b = (0, -2, 1, 1), c = (-1, 3, -2, 2) \rangle$.

4. Найдите базис и размерность подпространств $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$, где $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 | x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

5. Пусть L_1 и L_2 подпространства в V . Если $\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, то сумма $L_1 + L_2$ равна одному из этих пространств, а пересечение $L_1 \cap L_2$ другому.

6. Пусть U, V, W векторные подпространства. Можно ли утверждать, что верно равенство

$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$

Задания по теме «Линейные отображения»

- Являются ли отображения линейными:
 - $f: R^3 \rightarrow R^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1).$
 - $f: R^3 \rightarrow R^2 \mid (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2 x_3, x_1 x_3).$
 - $f: R^4 \rightarrow R^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1, x_1 x_2 x_3 x_4).$
- Является ли линейным отображением поворот в плоскости R^2 вокруг начала координат на угол 90 градусов? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением поворот в плоскости R^2 вокруг начала координат на угол 180 градусов? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением поворот в плоскости R^2 вокруг начала координат на угол α ? Задайте это отображение формулами.
- Докажите, что проекция вектора на ось Ox в плоскости xOy является линейным отображением. Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением поворот в пространстве R^3 вокруг оси Oz на угол 90 градусов? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением поворот в пространстве R^3 вокруг оси Ox на угол 180 градусов? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением симметрия относительно оси Ox в плоскости R^2 ? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением симметрия относительно оси Oy в плоскости R^2 ? Задайте это отображение формулами.
- Является ли линейным отображением симметрия относительно прямой $y = x$ в плоскости R^2 ? Задайте это отображение формулами.

Задания по теме «Матрица линейного оператора»

- Запишите матрицу поворота вокруг начала координат на плоскости в стандартном базисе.
- Запишите матрицу линейного отображения $f: R^3 \rightarrow R^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1)$ в стандартном базисе. Найдите образ вектора $x = (1, 2, 3)$. Найдите прообраз вектора $x = (1, 2, 3)$.
- Запишите матрицу линейного отображения $f: M_3 \rightarrow M_3 \mid f(x) \rightarrow f'(x)$. Найдите образ многочлена $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. Найдите прообраз многочлена $1 + x$.
- Запишите матрицу поворота на угол α вокруг оси Oz в R^3 .
- Запишите матрицу симметрии относительно координатной плоскости yOz .
- Запишите матрицу симметрии относительно плоскости $\alpha: x + y + z = 0$.
- Запишите матрицу симметрии относительно прямой $l: x = y = z$.
- Запишите матрицу поворота вокруг начала координат на плоскости в базисе $E = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (-1, 1)\}$.
- Линейный оператор в базисе E задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите образ вектора $a = (1, 2, 3)$ заданного в базисе E . Найдите прообраз вектора $a = (1, 2, 3)$.

- Линейный оператор f в базисе E задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Линейный оператор g в базисе E задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу линейных операторов $f \circ g$ и $g \circ f$. Найдите $f \circ g(a)$, где $a = (1, 2, 3)$.

Задания по теме «Корневые подпространства»

1. Линейный оператор задан матрицей A в некотором базисе. Найдите базис, в котором матрица линейного оператора диагональна, если такой базис существует. Выпишите соответствующую диагональную матрицу.

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти собственные значения, алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и корневые подпространства линейного оператора, заданного матрицей:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задания по теме «Жорданова нормальная форма линейного оператора»

1. Найти жорданову нормальную форму матрицы линейного оператора:

$$a) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задания по теме «Билинейные формы»

1. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными формами в соответствующих векторных пространствах

$$a) f(x, y) = x \cdot y^t,$$

$$b) f(AB) = \text{tr}(A^t B),$$

$$c) f(A, B) = \text{tr}(AB),$$

$$d) f(u, v) = \int_a^b (u + v)^2 dx,$$

$$e) f(u, v) = \text{Re}(u\bar{v}), u, v - \text{комплексные числа.}$$

2. Являются ли билинейные формы из задачи 1 симметричными? Кососимметричными?

3. Являются ли билинейные формы из задачи 1 неотрицательно определенными? неположительно определенными?

Задания по теме «Квадратичные формы»

1. Восстановите квадратичную форму по полярной билинейной форме $f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_2y_2$. Запишите матрицу полученной квадратичной формы.

2. Запишите полярную симметричную билинейную форму соответствующую квадратичной $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_1x_4 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 - 5x_3x_4 - x_4^2$.

3. Запишите матрицу квадратичной формы, заданной формулой $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_1x_4 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 - 5x_3x_4 - x_4^2$. Найдите ранг квадратичной формы.

4. Привести квадратичную форму к каноническому виду. Найдите индекс инерции, положительный индекс инерции, отрицательный индекс инерции, сигнатуру.

$$a) 3x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$b) x_1x_2 + x_1x_3,$$

$$c) x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 5x_3^2,$$

$$d) 2x_2^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 - x_3^2,$$

Задания по теме «Евклидовы пространства»

1. Пусть на векторном пространстве V задано скалярное произведение (x, y) . Докажите, что для любого вектора x выполнено равенство $(x, 0) = 0$.

3. Будет ли билинейная форма $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ задавать скалярное произведение на R^4 ?
4. Будет ли билинейная форма $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$ задавать скалярное произведение на R^2 ?
5. Будет ли билинейная форма $f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ задавать скалярное произведение на R^2 ?

6. Будет ли билинейная форма $(A, B) = \text{Tr}(A^T B)$ задавать скалярное произведение на пространстве $\text{Mat}_2(R)$?

7. Найдите длину вектора $a = (1, 2 - 1, 2)$ относительно стандартного скалярного произведения в R^4 .

8. Найдите косинус угла между векторами $a = (-1, 2, 0, 0, -1)$ и $b = (-1, 2, 1, 1, 0)$ относительно стандартного скалярного произведения.

9. Найдите угол между многочленами $f(t) = t^2 - 2t + 1$ и $g(t) = 2t - 1$ относительно

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

скалярного произведения

10.

Найдите косинус угла между матрицами $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ относительно скалярного произведения $(A, B) = \text{Tr}(AB^T)$.

11.

Запишите неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Задания по теме «Метрические задачи в векторных пространствах»

1. Докажите равенства

- a) $(U^\perp)^\perp = U$,
 b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$,
 c) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

2. Найти проекцию вектора x на подпространство U , найти ортогональную составляющую вектора x . Найдите угол между вектором x и подпространством U . Найдите расстояние от вектора x до подпространства U .

- a) $x = (1, 2)$, $U : x_1 + x_2 = 0$,
 b) $x = (1, 2, 3)$, $U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
 c) $x = (1, 2, 3)$, $U : x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
 d) $x = (1, 2, 3, 4)$, $U = \langle a_1 = (0, 1, 0, 1), a_2 = (-1, 0, 1, 0) \rangle$

3.

В пространстве многочленов степени меньшей 4 со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ найти проекцию вектора x на подпространство U , найти ортогональную составляющую вектора x . Найдите угол между вектором x и подпространством U . Найдите расстояние от вектора x до подпространства U .

- a) $x = 1 - t + t^2 + t^3$, $U = \langle h_1 = 1 - t, h_2 = t^2 + t^3 \rangle$.
 b) $x = 1 - t + t^2 + t^3$, $U = \langle h_1 = 1 - t, h_2 = t^2 + t^3, h_3 = 1 - t + t^2 - t^3 \rangle$.

Задания по теме «Процесс ортогонализации»

1. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе задавать скалярное произведение на \mathbb{R}^2 ?
- 2.

Покажите, что в евклидовом пространстве многочленов степени ≤ 2 над полем \mathbb{R} со скалярным произведением, задаваемым формулой $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ векторы $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2 - \frac{1}{3}$ попарно ортогональны. Составляют ли они базис этого пространства?

3. Найдите ортогональный базис пространства векторов ортогональных вектору $a = (1, -1, 1, -1)$.
4. Проверить, что система векторов $a_1 = (1, 1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 1, 2, -2)$ ортогональна в E_4 относительно стандартного скалярного произведения и дополнить ее до ортогонального базиса.
5. Ортогонализируйте систему векторов $a_1 = (1, 2, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 4, 1, 0)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.
6. Ортогонализируйте систему векторов $a_1 = (1, 2, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1, 0)$, $a_4 = (1, 3, 0, 1)$.
- 7.

Ортогонализируйте систему векторов $f_1 = 2$, $f_2 = -x$, $f_3 = 6x^2$ в пространстве многочленов относительно скалярного произведения $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

8. Ортогонализируйте систему векторов $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (-1, 3, 2)$, $a_3 = (4, 0, -2)$ относительно скалярного произведения $(x, y) = 14x_1y_1 + 3x_2y_2 + 14x_3y_3 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1$.

Задания по теме «Эрмитовы пространства»

1. Будет ли форма полуторалинейной? Эрмитовой?
- a) $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$,
 b) $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$,
 c) $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$,
 d) $f(x, y) = x_1y_1 + ix_2y_2 - 4x_3y_3$.
2. Будет ли форма f , заданная в некотором базисе матрицей A , эрмитовой?

a) $\begin{pmatrix} 1 & i & -2 \\ -i & 2i & 1+i \\ 2 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & i & -2 \\ -i & 2i & 1+i \\ -2 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$

3. Что можно сказать о элементах, стоящих на главной диагонали, в эрмитовой матрице?

4. Полуторалинейная форма f задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} i+1 & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

в базисе E . Вычислите значение $f(x, y)$, $x = (1, i)$, $y = (1 - i, 2i)$.

5. Полуторалинейная форма задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} i+1 & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

в базисе $E = \{e_1, e_2\}$, Найдите матрицу этой формы в базисе $F = \{e'_1 = e_1 + ie_2, e'_2 = -ie_1 + e_2\}$

6. Найти квадратичную форму, ассоциированную с эрмитовой формой

$$f(x, y) = x_1 \bar{y}_1 - i x_1 \bar{y}_2 + i x_2 \bar{y}_1 - x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3.$$

Задания по теме «Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением»

1. Докажите равенства

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$,

b) $(AB)^* = B^* A^*$.

2. Будет ли поворот вокруг начала координат в R^2 самосопряженным оператором?

3. Будет ли ортогональная проекция на ось Ox в R^2 самосопряженным оператором?

4. Будет ли ортогональная проекция на плоскость xOy в R^3 самосопряженным оператором?

6. Дан базис $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$. Является ли самосопряженным оператор, который в этом базисе задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть e_1, e_2 - ортонормированный базис и линейный оператор A в базисе $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу оператора A в базисе f_1, f_2 .

Задания по теме «Аффинные пространства»

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2, 0, -1)$ и $B(2, -1, 0, 0)$.

2. Составьте уравнение двумерной плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 0, -1)$, $B(0, 1, 1, 0)$ и $C(-1, 2, 0, 2)$.

3. Составьте уравнение трехмерной плоскости (гиперплоскости), проходящей через точки $A(-1, 2, 1, 0)$, $B(0, 1, 1, 0)$, $C(0, -1, 1, 0)$ и $D(1, 1, 1, 1)$.

4. Составьте уравнение двумерной плоскости, содержащей точку $A(-1, 0, 2, 3)$ и прямую $l: x_1 = -1 + 2t, x_2 = t, x_3 = 0, x_4 = -5 - t$.

5. Составьте уравнение трехмерной плоскости, содержащей точку $A(-3, 0, 1, 0)$ и двумерную плоскость $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

6. Исследовать взаимное расположение двух двумерных плоскостей в пятимерном пространстве $\alpha: x_1 = x_2 = 1, x_3 + x_4 - x_5 = 0$ и $\beta: x_1 = 2 + t_1 + t_2, x_2 = 3 + t_1 + t_2, x_3 = 3 + 2t_1 + t_2, x_4 = 4 + t_1, x_5 = 5 - 2t_2$.

7. Найти ортогональную проекцию точки $A(7, -1, 6, 1)$ на гиперплоскость $\alpha: 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5 = 0$.

8. Найти угол между гиперплоскостями $\alpha: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и $\beta: x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

Контрольная работа № 1

(проверка сформированности ОПК-1, индикаторы ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)

Примеры заданий:

1) Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -10, \\ -3x_1 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

2) Найти какой-либо базис системы векторов и выразить через базис все остальные векторы системы:

$$a_1 = (1, 1, 0),$$

$$a_2 = (1, 0, 2),$$

$$a_3 = (0, 2, 1),$$

$$a_4 = (0, 3, 2),$$

$$a_5 = (1, 1, 1).$$

3) Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Найти матрицу, обратную данной, с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Найти фундаментальный набор решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - 7x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$$

Контрольная работа № 2

(проверка сформированности ОПК-1, индикаторы ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)

Примеры заданий:

1) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2) Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 10; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

3) Найти матрицу, обратную данной, с помощью определителей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Вычислить:

$$\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^{102} + (2-3i)^2}{5+4i}.$$

5) Извлечь корень из комплексного числа:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-i}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$

Контрольная работа № 3

(проверка сформированности ОПК-1, индикаторы ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)

Примеры заданий:

1) Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

$$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8, x_0=2.$$

2) Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1, x_0=-1.$$

3) С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5, g(x)=x^5+x^2-x+1.$$

4) Выделив кратные неприводимые множители многочлена, разложить его на неприводимые множители над полем \mathbf{R} :

$$f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27.$$

5) Не решая уравнение $x^3+2x^2-3x-5=0$, найти сумму квадратов его корней (над полем \mathbf{C}).

Контрольная работа № 4

(проверка сформированности ОПК-1, индикаторы ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)

Примеры заданий:

1) Решить уравнение 4-й степени методом Феррари:

$$x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0.$$

2) Построить нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий двойной корень 1 и простой корень $1+2i$.

3) Найти рациональные корни многочлена:

$$f(x)=x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6.$$

4) Вычислить с точностью до 0,001 действительные корни многочлена

$$f(x)=x^4+3x^3-x-1.$$

5) Выразить через элементарные симметрические многочлены:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5x_1x_2x_3.$$

Правила выставления оценки по результатам контрольной работы

Оценка по результатам контрольной работы считается по следующему принципу:

- правильно выполненное задание – 1 балл;
- частично выполненное задание (или пункт задания 3 в первой контрольной работе) – от 0,1 до 0,9 балла в зависимости от доли решенного правильно, вычислительная ошибка снижает балл на 0,2;
- далее вычисляется процент, который составляет суммарное количество баллов, набранных студентом за выполнение работы, от максимального количества баллов;
- 95%-100% соответствует оценке «отлично», не менее 80%, но меньше 95% - оценке «хорошо», не менее 60%, но меньше 80% - оценке «удовлетворительно», меньший процент соответствует оценке «неудовлетворительно» (умения и навыки на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

2. Список вопросов и заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к экзамену (I семестр)

1. Исторический обзор развития алгебры. Основные периоды развития. Расширение понятия числа и знаменитые задачи древности. Разрешимость уравнений в радикалах и появление новых алгебраических структур. Место алгебры в системе математических наук.
2. Множества. Операции над множествами. Отображения. Виды отображений. Композиция отображений. Обратимость отображений.
3. Бинарные отношения. Свойства. Отношения эквивалентности и порядка. Метод математической индукции.
4. Системы линейных уравнений над полем вещественных чисел. Решение системы уравнений. Метод Гаусса. Матричная запись системы линейных уравнений и исследование системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса. Однородная система линейных уравнений. Теорема о количестве ее решений.
5. Векторное пространство над полем, его свойства, примеры. Арифметическое n -мерное векторное пространство. Подпространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства линейной зависимости.
6. Базис системы векторов и векторного пространства. Теорема о количестве векторов в базисе системы. Ранг системы векторов и его вычисление. Размерность векторного пространства.
7. Координаты вектора в базисе. Линейная оболочка системы векторов и подпространства. Второе определение базиса.
8. Линейные отображения векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств. Свойства изоморфизма. Теорема об изоморфизме векторных пространств одной и той же конечной размерности над полем P .

9. Понятие матрицы. Действия над матрицами и их свойства. Кольцо квадратных матриц.
10. Строчечный и столбцовый ранги матрицы, их равенство. Вычисление ранга матрицы.
11. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Критерий ее существования.
12. Элементарные матрицы. Практический способ нахождения обратной матрицы.
13. Транспонирование матриц. Ранг произведения матриц. Матричная запись систем линейных уравнений.
14. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты вектора в новом базисе.
15. Матрицы линейных отображений. Взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями из R^n в R^m и матрицами размера $m \times n$. Сумма и произведение линейных отображений и их связь с операциями над матрицами.
16. Утверждение о независимости числа главных и свободных неизвестных системы от способа приведения ее к ступенчатому виду. Критерий совместности Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений.
17. Перестановки. Четность перестановки. Понятие определителя произвольного порядка. Частные случаи: определители второго и третьего порядков.
18. Свойства определителей.
19. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Теорема о разложении определителя по строке или столбцу. Практический способ вычисления определителя порядка выше 3.
20. Определитель произведения матриц. Критерий невырожденности матрицы. Нахождение обратной матрицы с помощью определителей.
21. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. Метод окаймляющих миноров.
22. Комплексные числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.
23. Бинарные алгебраические операции и алгебраические структуры. Полугруппы и моноиды. Примеры. Обобщенная ассоциативность степени. Обратимые элементы.
24. Группы. Примеры групп (числовые группы, матричные, симметрическая и знакопеременная группы, группа корней из единицы), их подгруппы.
25. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Примеры. Свойства изоморфизма. Теорема Кэли.
26. Циклические группы. Примеры. Порядок элемента группы. Теорема об изоморфизме циклических групп одного и того же порядка.

Типы задач, выносимых на экзамен

- 1) Определить свойства бинарного отношения на множестве, выяснить, является ли оно отношением эквивалентности, порядка.
- 2) Доказать утверждение о натуральных числах методом математической индукции.
- 3) Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, Крамера, методом обратной матрицы.
- 4) Определить, является ли данное подмножество подпространством данного векторного пространства.
- 5) Определить, является ли данная система векторов линейно независимой, является ли базисом пространства.
- 6) Найти базис и ранг системы векторов, базис и размерность линейной оболочки, векторного пространства, выразить через базис остальные векторы системы.
- 7) Найти координаты вектора в данном базисе.
- 8) Определить, является ли данное отображение векторных пространств линейным, изоморфизмом.
- 9) Выполнить сложение, вычитание, умножение матриц, умножение матрицы на число, возведение в степень.
- 10) Найти ранг матрицы.
- 11) Найти матрицу, обратную данной, способом элементарных преобразований и с помощью определителей.
- 12) Решить матричное уравнение.
- 13) Написать матрицу перехода от одного базиса к другому.
- 14) Найти координаты вектора в новом базисе.
- 15) Написать матрицу данного линейного отображения в данных базисах.
- 16) Найти матрицу суммы и произведения линейных отображений по их матрицам в фиксированных базисах.
- 17) Исследовать систему линейных уравнений на совместность по критерию Кронекера-Капелли.
- 18) Определить размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.
- 19) Найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.
- 20) Найти число инверсий в перестановке, определить четность перестановки.
- 21) Вычислить определитель произвольного порядка.
- 22) Определить, является ли матрица невырожденной, с помощью элементарных преобразований и критерия невырожденности.
- 23) Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.
- 24) Выполнить операции над комплексными числами в алгебраической форме.
- 25) Выполнить умножение, деление, возведение в натуральную степень комплексных чисел в тригонометрической форме, извлечь корень натуральной степени n из комплексного числа.
- 26) Доказать, что указанное множество относительно данной операции является полугруппой, моноидом, группой.
- 27) Найти какую-нибудь (все) подгруппу(-ы) данной группы, доказать, что это действительно подгруппа.
- 28) Доказать, что данное отображение является гомоморфизмом групп, найти его ядро, образ, выяснить, является ли это оно мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом.
- 29) Найти порядок группы, подгруппы, элемента группы.
- 30) Проверить, является ли группа циклической, найти образующую (все образующие) циклической группы, подгруппы.

Список вопросов к экзамену (II семестр)

1. Кольцо. Примеры и простейшие свойства колец. Кольцо классов вычетов.
2. Гомоморфизмы колец. Примеры. Область целостности. Группа обратимых элементов кольца.
3. Тело. Поле. Подполе. Расширение поля. Свойства полей. Характеристика поля. Простое поле, его характеристика.
4. Понятие многочлена от одной переменной с коэффициентами из кольца K . Степень многочлена. Операции над многочленами. Кольцо многочленов $K[x]$. Кольцо многочленов над областью целостности.
5. Деление многочлена с остатком на двучлен. Теорема Безу. Схема Горнера. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.
6. Корни многочлена над полем P . Кратность корня. Формулы Виета.
7. Евклидовы кольца. Деление с остатком в кольце целых чисел Z и в кольце многочленов $P[x]$.
8. Понятие идеала кольца. Кольцо главных идеалов. Теорема о том, что всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов. Наибольший общий делитель в кольцах целых чисел и многочленов. Его существование и единственность.
9. Алгоритм Евклида в кольцах Z и $P[x]$. Нахождение НОД 3-х и более элементов. Вычисление коэффициентов в линейном выражении НОД.
10. Наименьшее общее кратное в кольцах целых чисел и многочленов. Связь НОД и НОК. Результат.
11. Факториальное кольцо. Факториальность кольца главных идеалов. Разложение на простые множители в кольцах целых чисел и многочленов. Отыскание НОД и НОК с помощью разложения на простые множители.
12. Дифференцирование многочлена. Изменение кратности неприводимого делителя при дифференцировании. Дискриминант.
13. Неприводимые многочлены над полями C , R и Q . Критерий Эйзенштейна. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.
14. Решение в радикалах алгебраических уравнений 3-й степени. Формула Кардано. Число действительных корней кубического уравнения с действительными коэффициентами.
15. Решение в радикалах алгебраических уравнений 4-й степени. Метод Феррари.
16. Границы действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. Теорема Штурма. Приближенное вычисление действительных корней.
17. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение. Отсутствие делителей нуля в кольце многочленов от нескольких переменных над областью целостности. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных над полем P (без доказательства).
18. Симметрические многочлены. Представление симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических функций.
19. Поле частных области целостности.
20. Факторкольцо. Построение. Примеры. Теорема о гомоморфизмах колец.

21. Конечные поля. Количество элементов и характеристика конечного поля. Существование и единственность конечного поля из p^n элементов, p – простое, n – натуральное число. Свойства конечного поля. Построение конечного поля.
22. Группы. Классы смежности по подгруппе. Индекс подгруппы. Порядок конечной группы делится на порядок ее подгруппы. Циклические подгруппы. Порядок конечной группы делится на порядок любого ее элемента. Примеры.
23. Группа корней n -й степени из единицы. Первообразные корни из единицы.
24. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп.

Правила выставления оценки на экзамене

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается не менее 1 часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала, грамотно использует терминологию.

Оценка «Хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Ответы излагаются в терминах дисциплины, но при этом допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Список вопросов к зачету (III семестр)

1. Линейные векторные пространства. Определение и примеры. Линейная оболочка. Подпространства векторного пространства.
2. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность векторного пространства. Матрица перехода от базиса к базису.
3. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма. Прямое дополнение.
4. Линейные функционалы. Двойственное пространство. Сопряженный (двойственный) базис.
5. Линейные отображения. Линейные операторы. Примеры. Матрица линейного оператора.
6. Изменение матрицы линейного оператора при смене базиса.
7. Алгебра линейных операторов. Ее свойства. Размерность.
8. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа. Ранг линейного оператора. Подобие матриц. Критерии невырожденности линейного оператора.
9. Характеристический многочлен. Примеры. След и определитель как инварианты.
10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
11. Оператор с простым спектром. Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора.
12. Минимальный многочлен линейного оператора.
13. Жорданова клетка. Корневые подпространства. Существование разложения в сумму корневых подпространств.
14. Теорема о жордановой нормальной форме. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы.

Список вопросов к экзамену (IV семестр)

1. Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы билинейной формы при смене базиса. Ранг билинейной формы.
2. Пространство билинейных форм. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Размерности пространств симметричных и кососимметричных билинейных форм. Представление билинейной формы в виде суммы симметричной и кососимметричной.
3. Квадратичные формы. Канонический вид. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
4. Вещественные квадратичные формы. Сигнатура. Закон инерции. Положительно определенные формы.
5. Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Норма вектора. Угол между векторами.
6. Ортонормированный базис. Существование ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации.
7. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Группы $O(n)$ и $SO(n)$.
8. Эрмитовы формы. Матрица эрмитовой формы.
9. Эрмитовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма вектора. Угол между векторами.
10. Унитарные матрицы. Группы $U(n)$ и $S(n)$.
11. Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением. Сопряженный линейный оператор. Самосопряженные линейные операторы.
12. Спектр эрмитова оператора. Канонический вид эрмитовых операторов.
13. Аффинные пространства. Линейное аффинное пространство. Задание линейного аффинного пространства.

Правила выставления оценки на экзамене

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается не менее 1 часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала, грамотно использует терминологию.

Оценка «Хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Ответы излагаются в терминах дисциплины, но при этом допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Алгебра» являются лекции; по всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основные методы дисциплины.

Задания для самостоятельного решения формулируются на лекциях и практических занятиях. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач. Полный список заданий для самостоятельной работы по темам (разделам) дисциплины приведен в ЭУК в LMS Moodle «Алгебра (МКН-11БО)» и «Алгебра (МКН-21БО)». Вопросы, возникающие в процессе или по итогам решения этих задач, можно задать на консультациях и практических занятиях или в форуме (чате) в ЭУК в LMS Moodle.

Для самостоятельной работы, в том числе и повтора разобранного на лекциях и практических занятиях материала, рекомендуется использовать материалы, выложенные в ЭУК в LMS Moodle «Алгебра (МКН-11БО)» и «Алгебра (МКН-21БО)».

В конце 1-го, 2-го и 4-го семестров студенты сдают экзамен, в конце 3-го семестра – зачет. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса и задачу. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, в это время предусмотрена и групповая консультация.