

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Теория графов**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

### 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Теория графов" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний и умений в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом специальности "10.05.01-Компьютерная безопасность" (уровень специалитета), содействует фундаментализации образования, развитию логического и алгоритмического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения.

Цель дисциплины - формирование у студентов способности применять основные методы теории графов при решении задач в их будущей профессиональной деятельности (научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической), а также формирование на основе этой способности необходимых общекультурных и профессиональных компетенций. Задачи дисциплины - дать обучаемым необходимые знания по основным разделам теории графов; формирование у студентов математической культуры, знакомство с аппаратом теории графов и основными алгоритмами на графах.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП специалитета

«Теория графов» является дисциплиной по выбору.

Теория графов – важнейший математический инструмент, широко используемый в химии, генетике, исследовании операций, лингвистике, проектировании и кодировании. Знания и практические навыки, полученные из курса Теория графов, используются обучаемыми при изучении естественно-научных дисциплин, а также при разработке курсовых и дипломных работ, в научно-исследовательской работе.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		

<p><b>ОПК 2.1</b></p> <p>Способен разрабатывать алгоритмы, реализующие современные математические методы защиты информации</p>	<p><b>И-ОПК -2.1_1</b> Применяет знание фундаментальных разделов математики для разработки методов защиты информации</p> <p><b>И-ОПК-2.1_4</b> знает способы эффективной реализации алгоритмов</p>	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>–основные понятия теории графов;</li> <li>–основные операции на графах);</li> <li>–свойства и типы графов;</li> <li>–метрики на графах;</li> <li>–классические оптимизационные задачи на графах.</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>–анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теории графов для их решения;</li> <li>–строить графические модели задач и явлений практического характера по специальности;</li> <li>–применять стандартные графические модели к решению прикладных задач;</li> </ul> <p><b>владеть:-</b> навыками научного исследования с применением графических методов;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>–опытом работы с реферативной, справочной, периодической и монографической литературой с целью получения новых знаний по теории графов;</li> <li>–навыками использования библиотек прикладных программ для решения прикладных графических задач с использованием компьютера</li> <li>–алгоритмами решений задач на графах.</li> </ul>
--	--	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часа.

№	Темы (разделы) дисциплины,  их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					
			Лекции	Практические	Консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	1. Начальные понятия 1.1. Основные определения 1.2. Операции над графами 1.3. Степени вершин графа 1.4. Матрица смежности и матрица инцидентности	3	2	4			2	Решение задач, устный опрос
2	2. Связность		2	4	1		2	Решение задач,

	2.1. Маршруты и связность 2.2. Вершинная связность и реберная связность 2.3. Двусвязные графы 2.4 Поиск маршрута наименьшего веса. Алгоритм Дijkstra							устный опрос
3	3. Деревья 3.1. Определение дерева 3.2. Остов минимального веса Алгоритмы Краскал и Прима		2	4	1		2	Решение задач, устный опрос
4	4. Независимые множества, клики, доминирующие множества 4.1. Независимые множества 4.2. Шенноновская емкость графов 4.3. Задача Рамсея. Функция неплотности 4.4. Доминирование и покрытия 4.5. Паросочетания 4.6. Паросочетания в двудольном графе 4.7. Паросочетания и покрытия 4.8. Наибольшие паросочетания и задача о назначениях		2	4	1		2	Решение задач, устный опрос
5	5. Планарность Плоские и планарные графы		2	4	1		2	Решение задач, устный опрос
6	6. Обходы 6.1. Эйлеровы графы 6.2. Гамильтоновы графы		2	4	1		2	Решение задач, устный опрос
7	7. Раскраски 7.1. Правильная раскраска Критерий двудольности графа 7.2. Оценки хроматического числа 7.3. Раскраска ребер 7.4. Раскраска планарных графов 7.5. Проблема четырех красок		2	4			2	Самостоятельная работа
8.	8. Сети, разрезы, потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона.		2	4			2	Решение задач, устный опрос
						0,3	2,7	зачет
	<b>Всего 72 час.</b>		<b>16</b>	<b>32</b>	<b>5</b>	<b>0,3</b>	<b>18,7</b>	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- **вступление** (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний по предложенному алгоритму.

#### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации -- программа Microsoft Office, издательская система LaTeX (Ams Tex);

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

##### **а) основная литература:**

1. Дольников, В. Л., Основные алгоритмы на графах : текст лекций / В. Л. Дольников, О. П. Якимова ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2011, 78с
2. Башкин М. А. Дискретная математика / М. А. Башкин, О. П. Якимова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та. Ч. 2: сборник задач для студентов, обучающихся по направлению Математика и компьютерные науки, специальности Компьютерная безопасность. - Б.м.: Б.и., 2013. - 75 с.
3. Дурнев, В. Г., Элементы дискретной математики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова ; Яросл. гос. ун-т. Ч. 2, Ярославль, ЯрГУ, 2007, 180с

##### **б) дополнительная литература:**

1. Лекции по теории графов : учеб. пособие для вузов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич, М., ЛИБРОКОМ ; URSS, 2013, 383с
2. Ильютко, Д. П., Комбинаторная топология и теория графов в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов высших учебных заведений,

обучающихся по направлению 010100 Математика / Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, И. М. Никонов ; Яросл..., Ярославль, ЯрГУ, 2013, 149с

3. Дольников В.Л., Полякова О.П. Теория графов. Алгоритмы на графах: учебное пособие/ Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2003. 116 с.

**в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
4. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>

**8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

доцент кафедры КБ и ММОИ, к. ф.-м. н., Якимова О. П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«ТЕОРИЯ ГРАФОВ»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**Задачи для домашней и самостоятельной работы приведены в сборнике**

Башкин М. А. Дискретная математика / М. А. Башкин, О. П. Якимова; Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та. Ч. 2: сборник задач для студентов, обучающихся по направлению Математика и компьютерные науки, специальности Компьютерная безопасность. - Б.м.: Б.и., 2013. - 75 с.

**Примеры задач для самостоятельной работы(И-ОПК 2.1\_1)**

1. Из полного 100-вершинного графа удалили 98 ребер. Доказать, что он остался связным.
2. В графе 100 вершин, причем степень любой из них не меньше 50. Доказать, что граф связан.
3. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.
4. Связный граф  $G$  остается связным при удалении любых 18 вершин (вместе со всеми инцидентными ребрами). Назовем разрезом любое множество из 19 вершин, при удалении которых граф теряет связность, а куском любую компоненту связности, которая образуется при удалении разреза. Известно, что любой кусок, содержащий менее 10 вершин, не содержится ни в каком разрезе. Докажите, что никакой кусок не содержится внутри разреза.
5. В связном графе между любыми двумя вершинами есть маршрут из не более чем трех ребер, а степень каждой вершины не более, чем 4. Докажите, что в графе не более 53-х вершин.
6. Какое минимальное количество ребер нужно удалить из полного графа с 15 вершинами, чтобы он перестал быть связным?
7. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной простой цепью, является деревом.
8. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.
9. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми инцидентными ребрами так, чтобы он остался связным.
10. У царя Гвидона было три сына, из его потомков 100 имело по три сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков у Гвидона?
11. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелетов; б) 196 перелетов.
12. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
13. Приведите пример графа, в котором наименьшее доминирующее множество не является независимым.
14. Верно ли, что любое паросочетание графа содержится в наибольшем паросочетании?

15. Пусть  $G$  --- граф без изолированных вершин. Докажите, что  $G$  содержит такое доминирующее множество  $D$ , что  $VG \setminus D$  также доминирующее.
16. Граф шахматного ферзя имеет 64 клетки шахматной доски в качестве множества вершин, и две его вершины смежны тогда и только тогда, когда они соединены ходом ферзя,; аналогично определяются графы трех других фигур: коня, слона и ладьи. Найти наименьшее доминирующее множество для каждого из этих четырех графов.
17. Минимаксные задачи на графах.
18. Доказать, что в любом графе, имеющем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.
19. Какое максимальное число точек сочленения может иметь граф на  $n$  вершинах
20. Доказать, что диаметр графа, дополнительного к несвязному графу, не больше 2.
21. Является ли дерево двудольным графом? Какие полные двудольные графы являются деревьями?
22. Доказать, что граф  $G$  связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения вершин  $VG = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ , в графе  $G$  найдется ребро, соединяющее некоторые две вершины  $x \in V_1$  и  $y \in V_2$ .
23. Сколько компонент связности в лесу с 76 вершинами и 53 ребрами? Какое минимальное и максимальное число висячих вершин может иметь такой лес?

### **Оценивание результатов решения самостоятельной работы**

Решение самостоятельных работ осуществляется с целью проверки уровня знаний, умений, владений, понимания студентом основных методов и законов изучаемой теории при решении конкретных практических задач, умения применять на практике полученных знаний.

#### **Правила выставления оценки:**

каждая задача оценивается в 3 балла:

3 - студент логически правильно решил поставленную задачу, верно применяя теоретические знания;

2 – в решении задачи содержатся описки или погрешности, что может привести к неверному ответу при верной, в целом, логической последовательности рассуждений; либо верное решение недостаточно обосновано;

1 – задача не решена, но имеется существенное продвижение в ее решении; может быть решена часть задачи; может быть изложен верный алгоритм решения задачи с неудачной попыткой его применения;

0 – решение задачи неверное либо отсутствует.

Оценка за решение контрольной или самостоятельной работы выставляется по сумме набранных за каждую задачу баллов :

менее 55% от максимально возможного количества баллов - неудовлетворительно,  
55-69% от максимально возможного количества баллов - удовлетворительно,  
70-84% от максимально возможного количества баллов - хорошо,

85-100% от максимально возможного количества баллов – отлично.



Приведенные выше пороговые значения процентных диапазонов могут изменяться в зависимости от сложности работы, количества предложенных задач, общей итоговой картины решения работы по учебной группе и других факторов.

### Вопросы к зачету(И-ОПК 2.1\_1, И-ОПК 2.1\_4):

1. Основные определения. Операции над графами
2. Степени вершин графа
3. Представление графа в памяти компьютера
4. Маршруты и связность
5. Вершинная связность и реберная связность
6. Двусвязные графы
7. Определение дерева
8. Остов минимального веса
9. Независимые множества. Шенноновская емкость графов
10. Задача Рамсея. Функция неплотности
11. Доминирование и покрытия
12. Паросочетания. Паросочетания в двудольном графе
13. Наибольшие паросочетания и задача о назначениях
14. Плоские и планарные графы
15. Эйлеровы графы
16. Гамильтоновы графы
17. Правильная раскраска. Оценки хроматического числа
18. Раскраска ребер
19. Раскраска планарных графов. Проблема четырех красок
20. Алгоритмы на графах.

### Тестовые задания для самоконтроля при подготовке к зачету

1. Оценить значение диаметра графа, дополнительного к несвязному графу
2. Как связаны степени вершин графа  $\deg v_i$  и число его ребер  $m$ , если число вершин равно  $n$ ?
3. Существует ли граф, имеющий не менее двух вершин, у которого все степени вершин различны?
4. Какое максимальное число ребер может иметь несвязный граф на  $n$  вершинах?
5. Верно ли, что графы, имеющие одинаковое количество вершин каждой степени, изоморфны?
6. Является ли дерево двудольным графом?
7. Какие полные двудольные графы являются деревьями?
8. Какое минимальное число висячих вершин в дереве с числом всех вершин, не менее 2?
9. Как связаны число вершин  $n$  и число его ребер  $m$  в дереве?
10. Сколько компонент связности в лесу с 76 вершинами и 53 ребрами?
11. Сколько центральных вершин имеет дерево?
12. Сколько точек сочленения (разделяющих вершин) может иметь дерево на  $n$  вершинах?
13. Сколько мостов может иметь дерево на  $n$  вершинах?
14. Сколько существует различных деревьев на  $n$  помеченных вершинах?
15. Каково хроматическое число дерева, содержащего не менее 2-х вершин?
16. Каково хроматическое число полного графа на  $n$  вершинах?
17. Радиус графа равен  $r$ . Каким может быть его диаметр  $D$ ?
18. Если эйлеров цикл графа является простым, то каковы степени вершин данного графа?
19. Является ли дерево, имеющее не менее 2 вершин, гамильтоновым графом?
20. Является ли полный граф, имеющий не менее 3 вершин, гамильтоновым графом?
21. Формула Эйлера для графа с числом вершин  $n$ , числом ребер  $m$  и числом граней  $f$ .
22. Какие из графов:  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_{2,3}$ ,  $K_{2,4}$ ,  $K_{3,3}$ ,  $K_{4,4}$  – являются планарными?

### Ответы на тестовые задания

1.  $\sum_{i=1, \dots, n} \deg v_i = 2m$
2. (не больше 2.)
3. нет
4.  $C_{n-1}^2$
5. нет
6. да
7.  $K_{1,1}$  и  $K_{1,2}$
8. 2
9.  $m=n-1$
10. 23
11. 1 или 2.
12. от 1 до  $n-1$
13.  $n-1$
14.  $n^{n-2}$
15. 2
16.  $n$
17.  $r \leq D \leq 2r$
18. все степени вершин равны 2
19. нет
20. да
21.  $n-m+f=2$
22.  $K_3, K_4, K_{2,3}, K_{2,4}$

Для данной дисциплины в соответствии с учебным планом выставляется оценка: «зачтено», «незачтено».

Оценка «зачтено» выставляется студенту, выполнившему самостоятельную работу на оценку не менее «удовлетворительно» и проявившему на мероприятии промежуточной аттестации умения и навыки, соответствующие уровню, не ниже порогового. Студент знает:

- основные понятия теории графов;
- основные операции на графах;
- свойства и типы графов;
- метрики на графах;
- классические оптимизационные задачи на графах.

Студент может делать ошибки, но должен их исправлять самостоятельно после дополнительных (наводящих) вопросов преподавателя.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, проявившему на мероприятии промежуточной аттестации умения и навыки, соответствующие уровню, ниже порогового:

- Студент не может выполнить постановку задачи, не может провести сравнительный анализ данной задачи с другими, не может определить метод ее решения и провести даже простейший анализ полученного результата.
- Студент не может провести самостоятельно даже базовые вычисления с использованием математического аппарата, не может пояснить даже выполненные на практических занятиях вычисления и (или) логику решения.

Оценка «не зачтено» выставляется также студенту, получившему на зачете задание, но отказавшемуся отвечать.

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала являются лекции. По большинству тем предусмотрены домашние задания для закрепления лекционного материала путем применения его к конкретным задачам.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения материала в течение обучения при сдаче самостоятельных работ преподаватель задает вопросы позволяющие выяснить понимание материала. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра студенты сдают зачет.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу, указанную в разделе 7.