

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
Комбинаторика

Направление подготовки (специальности)
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Комбинаторика» является обеспечение фундаментальной подготовки в одной из важных областей современной прикладной математики, освоение языка и методов раздела математики, лежащего в значительной части теории вероятностей, теории кодирования, передачи, защиты и хранения информации, имеющего применение во многих областях новейшей вычислительной техники. Дополнительная цель - ознакомление с историей развития комбинаторного анализа, классических задач перечисления объектов в соответствии с заданными ограничениями. Основная задача дисциплины – научить студентов пониманию языка конечной алгебры и теории информации, воспитанию культуры вычислений с помощью комбинаторного анализа, умениям применять аппарат комбинаторики в различных контекстах.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Комбинаторика» является дисциплиной по выбору. Дисциплина имеет разносторонние связи со всеми специальными и основными математическими дисциплинами. Полученные при её изучении знания используются в различных специальных курсах, где она зачастую выступает в качестве основы курса. Основные математические дисциплины, связанные с указанной, таковы:

1. Теория кодирования и её связь с задачами защиты информации.
2. Теория вероятностей.
3. Теория автоматов.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
<p>ОПК 2.1</p> <p>Способен разрабатывать алгоритмы, реализующие современные математические методы защиты информации</p>	<p>ИД-ОПК -2.1_1 Применяет знание фундаментальных разделов математики для разработки методов защиты информации</p> <p>ИД-ОПК -2.1_3 Применять аппарат производящих функций для решения комбинаторных задач</p>	<p>Знать: основные модели комбинаторной математики, а именно знать формулы числа размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений, а также модели комбинаторики разбиений; основы теории перечисления Пойя; метод математической индукции; принцип включения и исключения, формулу включений и исключений для любого количества множеств; основные классы производящих функций, действия над производящими функциями, способы получения комбинаторных соотношений с помощью производящих функций; понятие рекуррентного соотношения, порядок рекуррентного соотношения, методы решения задач с помощью рекуррентных соотношений, алгоритм решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций</p> <p>Уметь: применять формулы числа размещений, перестановок, сочетаний, а также моделей комбинаторики разбиений при решении комбинаторных задач ; применять принцип включений и исключений для решения комбинаторных задач; применять метод математической индукции для доказательства математических утверждений; уметь строить производящую функцию для последовательности чисел, получать комбинаторные соотношения с помощью производящих функций, применять операции над производящими функциями; решать линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, решать рекуррентные соотношения с помощью производящих функций;</p> <p>3. Владеть навыками математическим аппаратом комбинаторики, методами решения комбинаторных задач: правило суммы, правило произведения и др.</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет __2__ зачетных единиц, __72__ акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Введение. Предмет и методы комбинаторики. Некоторые проблемы. Краткий исторический очерк. Разделы комбинаторики перечислительная, структурная, экстремальная комбинаторика и их взаимодействие. Комбинаторная оптимизация.	3	1						
2	Комбинаторные числа.		1	2				2	Проверка домашних заданий
3.	Формулы обращения. Принцип включения и исключения. Задача о беспорядках. Формула обращения Мебиуса.		2	4		2		2	Проверка домашних заданий
4.	Комбинаторика разбиений.		2	2				2	Проверка домашних заданий
5.	Метод математической индукции		2	4				2	Проверка домашних заданий
6.	Формальные степенные ряды и производящие функции. Действия над производящими функциями. Комбинаторные соотношения и производящие функции.		2	6		2		2	Проверка домашних заданий

7.	Рекуррентные соотношения. Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.		2	4				2	
8.	Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.		2	4			2	2	
9.	Производящие функции и рекуррентные соотношения.		2	6		2		4,7	Проверка домашних заданий
	Всего 72 час.		16	32		5	0,3	18,7	зачет

Содержание разделов дисциплины

1. **Введение.** Предмет и методы комбинаторики. Некоторые проблемы. Краткий исторический очерк. Разделы комбинаторики перечислительная, структурная, экстремальная комбинаторика и их взаимодействие. Комбинаторная оптимизация.

2. **Комбинаторные числа.** Правило суммы, правило произведения. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без повторений. Основные комбинаторные модели. Бином и полином. Свойства биномиальных и полиномиальных коэффициентов.

3. **Формулы обращения.** Принцип включения и исключения. Задача о беспорядках. Формула обращения Мебиуса.

4. **Комбинаторика разбиений.** Основные задачи комбинаторики разбиений. Тождества и арифметические свойства. Тождество Эйлера. Тождество Гаусса – Якоби. Асимптотические свойства функции $p(n)$.

5. **Метод математической индукции.** Применение метода математической индукции для доказательства утверждений из различных разделов математики.

6. **Формальные степенные ряды и производящие функции.**

Действия над производящими функциями. Комбинаторные соотношения и производящие функции.

7. **Рекуррентные соотношения.** Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.

8. **Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.** Метод рекуррентных соотношений.

9. **Производящие функции и рекуррентные соотношения.** Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

4. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний по предложенному алгоритму.

5. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации -- программа Microsoft Office, издательская система LaTeX (Ams Tex);

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с
2. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. МЦНМО, 2006, 400 с.

б) дополнительная литература

3. Холл, М., Комбинаторика : пер. с англ. / под ред. А. О. Гельфонда, В. Е. Тараканова, М., Мир, 1970, 424с
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, М.: «Мир», 1998.
5. Дурнев В. Г., Башкин М.А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. Часть II. Ярославль, 2007.
6. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (под ред. Л.С. Казарина) М: «Мир», 1999.
7. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976.
8. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М: «Наука», 1977.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Автор(ы):

Доцент, к.ф.-м.н. М.А. Заводчиков

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«_Комбинаторика»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задание по теме Комбинаторные числа.

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 1.

Задание по теме Формулы обращения.

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 2.

Задание по теме Комбинаторика разбиений

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 2.

Задание по теме Формальные степенные ряды и производящие функции.

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2, 7.

Задание по теме . Рекуррентные соотношения.

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2.

Задание по теме Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2,7.

Задание по теме Производящие функции и рекуррентные соотношения.

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 7.

Контрольная работа 1.

(проверка сформированности ОПК-2.1, индикатор ИД-ОПК-2.1_1)

1. Пин-код состоит из четырех цифр. Сколько существует таких пин-кодов, у которых две цифры одинаковые?
2. Сколько делителей у числа 508032?
3. Сколько существует инъективных отображений из множества, состоящего из n , в m множество, состоящее из m ?
4. Сколькими способами можно разделить колоду в 36 карт на 6 одинаковых частей?
5. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде суммы пяти натуральных чисел? В частности, сколькими способами можно представить число 27 в виде суммы четырех чисел?
6. Сколько существует целых чисел от 1 до 15000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?
7. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75% пола, другой зеленым – 70%, третий синим – 65%. Какая часть пола заведомо закрашена всеми тремя красками?
8. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?
9. Найти коэффициент при x^5 в выражении $(1+x-2x^2)^8$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Оценки 3 — 5,6 задач, 4 - 7 задач, 5 — 8,9 задач.

Контрольная работа 2(проверка сформированности ОПК-2.1, индикатор ИД-ОПК-2.1_3)

1. Решить рекуррентное соотношение $f_{n+2}=f_{n+1}+12f_n$, $f_0=1$, $f_1=2$.
2. Решить рекуррентное соотношение с помощью производящей функции $f_{n+2}=f_{n+1}+12f_n+\frac{1}{n+1}$, $f_0=1$, $f_1=-1$.
3. Решить рекуррентное соотношение $f_{n+2}-f_{n+1}-12f_n=(2+n)5^n$, $f_0=1$, $f_1=0$.
4. Решить рекуррентное соотношение $f_{n+2}-f_{n+1}-12f_n=(1+n^2)3^n$, $f_0=1$, $f_1=0$.
5. Найдите производящую функцию для последовательности 1, C_m^1 , C_{m+1}^2 , C_{m+2}^3, \dots .
6. Докажите тождество $F_1+F_3+F_5+\dots+F_{2n+1}=F_{2n+2}$, где F_n - числа Фибоначчи.
7. Имеется возможность передавать 4 разных сигнала A, B, C и D, причем их передача занимает соответственно $t_1=2$, $t_2=3$, $t_3=1$ и $t_4=4$ единиц времени. Сколько различных сообщений может быть передано за время $t=30$?

Оценки 3 — 4 задачи, 4 — 5 задач, 5 — 6,7 задач.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Правило суммы и произведения. Примеры.
2. Размещения, перестановки, сочетания без повторений.
3. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями.
4. Бином и полином.
5. Свойства биномиальных коэффициентов.
6. Свойства полиномиальных коэффициентов.
7. Принцип включения – исключения. И формула обращения Мебиуса.
8. Частично упорядоченные множества.
9. Комбинаторика разбиений. Основные задачи.
10. Метод математической индукции.
11. Формальные степенные ряды.
12. Производящие функции.
13. Действия над производящими функциями.
14. Доказательство комбинаторных соотношений с помощью производящих функций.
15. Числа Каталана. Числа Стирлинга и Эйлера. Числа Бернулли и Фибоначчи.
16. Рекуррентные соотношения.
17. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
18. Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

Некоторые задания для зачетной работы

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
2. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами?
3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x+y+z=15$?
4. Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?
5. С помощью метода математической индукции докажите n^3+5n кратно 6.
6. Сколькими способами можно выпуклый $(n+2)$ -угольник разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника?

7. Решить рекуррентное соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + 12f_n$, $f_0 = 1$, $f_1 = 2$.
8. Решить рекуррентное соотношение $f_{n+2} - f_{n+1} - 12f_n = (1+n^2)3^n$, $f_0 = 1$, $f_1 = 0$.

Студент получает зачет при выполнении 70% задач и ответе на вопрос.

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка («зачтено», «незачтено»), которая определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на необходимом уровне.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Комбинаторика»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс «Комбинаторика» отличается высокой степенью абстрактности применяемых методов, но в то же время, один из немногих курсов, позволяющих студентам составить представление о практическом применении абстрактных конструкций. Он насыщен весьма нетривиальными теоремами и, в то же время требует от слушателя высокой алгоритмической культуры. Поэтому возможно приглашение практических работников. Непосредственная роль этого курса – подготовка к восприятию идеологии теории вероятностей, что предполагает хорошее умение вычислять в тех разделах математики, которые получили название «конкретная математика». В то же время, последние темы предваряют в последующем выход на новый уровень абстрактности. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий.