

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета


П. Н. Нестеров

« 18 » мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

«Теория алгебраических структур»

программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Форма обучения очная

Программа одобрена
на заседании кафедры алгебры и математической логики
от « 17 » мая 2022 года, протокол № 9

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Теория алгебраических структур» является освоение основных алгебраических структур, применяемых в различных развитых математических теориях и их приложениях

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору. Данная дисциплина направлена на освоение теории алгебраических структур и основных конструкций, применяемых в алгебре и ее приложениях.

3. Планируемые результаты освоения дисциплины: -

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

основные алгебраические структуры: группы, кольца, модули, многочлены, группы и алгебры Ли, булевы кольца. Методы изучения групп и алгебр, идеалы, нормальные подгруппы, эндоморфизмы и гомоморфизмы, конструкции некоторых структур, теорему Веддерберна и лемму Шура.

Уметь:

использовать строение соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные объекты из более простых.

Владеть:

навыками анализа и вычислений в алгебраических структурах. Применением основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и произведений

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1.	Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции.	2	1				10	
2	Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.	2	3				11	
3.	Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции.	2	3				11	
4	Модули. Прямые суммы и свободные модули. Тензорное произведение. Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.	2	3				11	
5	Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом.	2	3				11	
6	Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов	2	3				11	Задания для самостоятельной работы

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости
	идеалов. Группа Брауэра.							
7	Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.	2	2				11	
						2	12	Зачет
	Всего 108 час.		18			2	88	

Содержание разделов дисциплины:

1. Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции
2. Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.
3. Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции
4. Модули. Прямые суммы и свободные модули. Тензорное произведение. Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.
5. Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом
6. Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов идеалов. Группа Брауэра
7. Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции

высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы аспирантов. На консультациях по просьбе аспирантов рассматриваются наиболее сложные разделы дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы аспирантов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

6. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.

б) дополнительная литература

4. Гэри М, Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982..
5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
7. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009
10. Владимиров Д.А., Булевы алгебры. М., Наука, 1969

в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

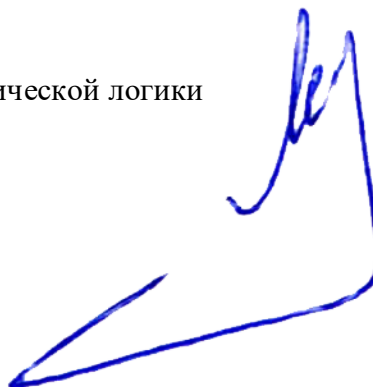
Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав следующие помещения:

- учебные аудитории для проведения лекций;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
доктор физико-математических наук

A handwritten signature in blue ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke at the bottom.

Л.С. Казарин

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Теория алгебраических структур»
по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Оценочные материалы
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации
аспирантов по дисциплине

1. Контрольные задания и (или) иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы

1. Гомоморфизмы групп и колец. Идеалы и нормальные подгруппы. Классы вычетов. Построение полей небольшого порядка.
2. Евклидовы кольца. Норма элемента. Разложимые и неприводимые элементы кольца. Булевы кольца. Суммы колец.
3. Расширение поля. Построения с помощью циркуля и линейки. Общее уравнение n -ой степени. Группа Галуа и ее вычисление.
4. Модули и абелевы группы. Основная теорема об абелевых группах. Представления и модули представлений. Тензорные произведения модулей. Кронекерово произведение матриц.
5. Алгебры. Примеры алгебр. Алгебры Ли, групповые алгебры, алгебра Клиффорда. Алгебры как группы с операторами.
6. Простые и примитивные кольца. Структурные теоремы о полупростых и простых кольцах. Теорема Веддерберна о простых алгебрах с единицей.
7. Лемма Шура и Теорема Машке. Основные теоремы о характерах конечных групп.
8. Комплексные полупростые алгебры Ли. Нильпотентная и разрешимая алгебры Ли. Картаново разложение. Группа Вейля. Типы комплексных простых алгебр Ли.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачет по дисциплине проводится устно по билетам. Каждый билет содержит один теоретический вопрос и одну задачу.

Список вопросов к зачету:

Список теоретических вопросов:

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа .
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы .
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности .
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса .
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Задания для зачета

1. Доказать, что группа порядка 15 циклическая.
2. Показать, что неразрешимая группа наименьшего порядка будет иметь порядок 60.
3. Доказать, что число элементов конечного поля – степень его характеристики.
4. В каком случае поле $GF(p^m)$ содержит подполе, изоморфное $GF(p^n)$?
5. Доказать теорему о строении конечнопорожденных абелевых групп.
6. Предложить алгоритм нахождения примитивного элемента в конечном поле, заданном вычетами по модулю неприводимого многочлена $g(x)$.
7. Какова группа Галуа уравнения $x^4+2x^2+x+3=0$?
8. Доказать, что полное матричное кольцо P_n является центральной простой алгеброй над полем P .
9. Доказать, что если многообразие M содержится в объединении многообразий M_1 и M_2 , то M содержится в M_1 или M_2 .
10. Является ли идеал $(x_1 x_1 - x_2^2, x_2 x_3 - x_1^3, x_3^2 - x_1^2 x_2)$ кольца $K[x_1, x_2, x_3]$ простым?
11. Как устроена простая алгебра без единицы?
12. В любом подмножестве M кольца $S = R[x_1, x_2, \dots, x_m]$ с коэффициентами в поле R существует такой конечный набор элементов m_1, m_2, \dots, m_r , что любой элемент S представим в виде линейной комбинации элементов m_1, m_2, \dots, m_r с коэффициентами из S .
13. Пусть L —алгебра Ли и X – элемент из L . Покажите, что $\text{ad } X$ – дифференцирование алгебры L .
14. Пусть L —алгебра Ли и H, K – ее нильпотентные идеалы. Доказать, что $H+K$ – нильпотентный идеал L .
15. Показать, что по таблице неприводимых комплексных характеров конечной группы можно определить порядки классов сопряженных элементов группы, порядок центра и коммутанта группы.
16. Будет ли решетка нормальных подгрупп группы модулярной?
17. Построить полную решетку разбиений множества из четырех элементов.
18. Если группа G порождается конечным множеством X , то в любом ее порождающем множестве имеется конечное подмножество, также порождающее G .

19. Доказать, что все идеалы групповой алгебры бесконечной циклической группы главные.

2.1 Описание процедуры выставления оценки

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется аспиранту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Аспирант дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует научную терминологию.

Оценка «Хорошо» выставляется аспиранту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются аспирантом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется аспиранту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. При ответах аспирант допускает ошибки в определении и раскрытии отдельных понятий, формулировке положений, которые аспирант затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа аспирант не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется аспиранту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов аспиранта.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также аспиранту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

