

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**  
Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Регулярные и сингулярные методы теории возмущений**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» относится к числу специальных математических дисциплин. Цель освоения дисциплины заключается в том, чтобы дать студентам представление об асимптотических методах интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый или большой параметр, познакомить студентов с понятиями асимптотической последовательности и асимптотического разложения, математическими основами регулярных и сингулярных методов теории возмущений. В рамках дисциплины обучающимся необходимо освоить методы прямого разложения, Линдштедта-Пуанкаре, перенормировки, многих масштабов, усреднения, Крылова-Боголюбова, пограничного слоя, сращения асимптотических разложений, ВКБ. Эти знания необходимы студентам для решения научных и технических, фундаментальных и прикладных проблем.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» относится к вариативной части Блока 1 и является частью модуля Б1.В.ОД «Обязательные дисциплины».

Ее содержание диктуется внутренней логикой математики, целостностью и завершенностью отдельных разделов и их иерархией, а также ее связями с другими математическими дисциплинами. Для освоения дисциплины студентам нужен определенный уровень знаний и навыков, полученных ранее из курсов дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	<b>ИД-ПК-1.1</b> Имеет способность проводить собственные научные исследования	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- основы теории возмущений;</li><li>- определение асимптотического разложения;</li><li>- свойства асимптотических разложений;</li><li>- понятия регулярности и сингулярности в теории возмущений;</li><li>- определение пограничных слоев.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- интегрировать асимптотические разложения;</li><li>- строить фазовый портрет дифференциального уравнения;</li><li>- применять асимптотические методы для решения научных и технических, фундаментальных и прикладных проблем;</li></ul>
	<b>ИД-ПК-1.2</b> Имеет опыт самостоятельного	<b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- использования асимптотических методов интегрирования нелинейных</li></ul>

получения новых научных и (или) прикладных результатов	дифференциальных уравнений, содержащих малый или большой параметр; применения методов прямого разложения, пограничного слоя для решения задач.
--	--

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачёт. ед., 72 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Определение асимптотического разложения. Единственность	2	1					8	
2	Свойства асимптотических разложений	2	1	1				8	
3	Метод фазовой плоскости	2	1	1				8	
4	Метод многих масштабов	2	1	1				8	
5	Вариация произвольных постоянных. Метод усреднения	2	1	1		1		8	
6	Метод пограничного слоя	2	3	4		1		9	
							0,3	4,7	Зачёт
	ИТОГО		8	8		2	0,3	53,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Раздел 1. Определение асимптотического разложения. Единственность.

Символы порядка и их свойства. Асимптотическая последовательность функций. Асимптотическое разложение (в смысле Пуанкаре). Единственность асимптотического разложения по данной асимптотической последовательности. Термины «асимптотическое разложение», «асимптотический ряд», «асимптотика». Асимптотическое разложение в смысле Олвера.

##### Раздел 2. Свойства асимптотических разложений.

Эквивалентность различных определений асимптотического разложения. Линейные свойства асимптотических разложений. Произведение и частное асимптотических разложений. Интегрирование асимптотических разложений.

##### Раздел 3. Метод фазовой плоскости.

Метод фазовой плоскости. Фазовый портрет уравнения Дюффинга.

##### Раздел 4. Метод многих масштабов.

Описание метода многих масштабов. Применение метода к уравнению Дюффинга и к задаче с высокочастотными слагаемыми.

#### **Раздел 5. Вариация произвольных постоянных. Метод усреднения.**

Изложение метода вариации произвольных постоянных на примере уравнения Дюффинга. Эвристические соображения, приводящие к формальной процедуре метода усреднения.

#### **Раздел 6. Метод пограничного слоя.**

Пограничные слои. Замена переменных на новые быстрые или растянутые переменные. Метод пограничного слоя.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвящённое освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Письменный опрос на знание определений и основных теорем.**

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации
- программы Microsoft Office и издательская система LaTeX;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются «Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендуемых для освоения дисциплины**

#### **а) основная литература**

1. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009.
2. Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 2013.

#### **б) дополнительная литература**

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие. - 3-е изд., стер. - СПб: Лань, 2016. - 480 с.

**в) ресурсы сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке <http://window.edu.ru/library>).
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории. Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, хранящиеся на электронных носителях и обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочим программам дисциплин.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся (группа обучающихся делится на две подгруппы).

Автор(-ы):

профессор кафедры  
математического моделирования,  
д. ф.-м. н., профессор Сергей Александрович Кащенко

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Регулярные и сингулярные методы  
теории возмущений»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачет проводится в форме письменной работы. Примеры заданий.

1. Найти асимптотическое приближение решения начальной задачи  $\varepsilon \dot{x} + x = \sin t, x(0) = 0$ , где  $\varepsilon$  - малый положительный параметр.
2. Найти асимптотическое приближение решения уравнения второго порядка  $\varepsilon^2 \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \cos 2t, x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , где  $\varepsilon$  - малый положительный параметр.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические и лабораторные занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала.

В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы на знание определений и формулировок основных теорем. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения. В конце изучения дисциплины студенты сдают зачёт.