

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Нелинейная динамика**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Нелинейная динамика» – дать студентам представление о поведении нелинейных динамических систем, описываемых конечномерными нелинейными дифференциальными уравнениями. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения;
- познакомить студентов с особенностями геометрии фазового пространства нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений;
- научить студентов методам исследования поведения траекторий систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности грубого состояния равновесия;
- познакомить с понятием центрального многообразия системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия;
- дать представление об отображении Пуанкаре в окрестности периодической траектории;
- научить студентов методам построения устойчивых, неустойчивых и центральных многообразий систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия и методам построения уравнений поведения траекторий на центральном многообразии;

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к вариативной части блока Б1, номер в УП – Б1.В.ДВ.03.01

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Нелинейная динамика», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		

<p>ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p>	<p>ИД-ПК-1.1 Обладает способностью критического отбора данных, связанных с научными исследованиями</p>	<p>Знать основные понятия и результаты теории нелинейных динамических систем</p> <p>Уметь решать типовые вычислительные и аналитические задачи нелинейных динамических систем</p> <p>Владеть навыками самостоятельного изучения вопросов теории нелинейных динамических систем, в частности, в области разработки алгоритмов нахождения решения таких задач</p>
	<p>ИД-ПК-1.2 Имеет навыки обработки данных с применением современных информационных технологий и алгоритмов</p>	<p>Знать основные алгоритмические методы теории нелинейных динамических систем</p> <p>Уметь выделять составляющие задачи теории нелинейных динамических систем в поставленных задачах</p> <p>Владеть навыками численного решения нелинейных динамических систем</p>
	<p>ИД-ПК-1.3 Способен самостоятельно интерпретировать данные научных исследований и формулировать соответствующие выводы</p>	<p>Уметь пользоваться аналитическими методами теории нелинейных динамических систем (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.)</p> <p>Владеть способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к теории нелинейных динамических систем</p>

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачёт. ед., 108 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Нелинейные динамические системы. Основные понятия. Фазовое пространство динамической системы. Качественное интегрирование динамических систем. Свойства решений. Физические задачи, математическими моделями которых являются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения.	1	1	1				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
2	Положения равновесия динамической системы. Линеаризованная система. Качественное исследование двумерных и трехмерных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	1	1	1				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
3	Классификация грубых положений равновесия нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Устойчивые положения равновесия. Теорема об устойчивости по первому приближению (без доказательства). Ведущие и неведущие многообразия	1	1	1				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
4	Состояние равновесия седлового типа. Инвариантные многообразия. Краевая задача. Теорема о существовании устойчивого и неустойчивого	1	2	2				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос

	многообразий состояния равновесия (без доказательства).								
5	Построения инвариантных многообразий состояния равновесия седлового типа.	1	1	1				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
6	Нормальная форма системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия.	1	2	2		2		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
	Всего за семестр		8	8		2		28	
7	Центральное многообразие положения равновесия динамической системы. Теорема о центральном многообразии (без доказательства). Алгоритм построения дифференциального уравнения поведения траекторий на центральном многообразии.	2	2	3				10	задания для самостоятельной работы, устный опрос
8	Локальные бифуркации состояния равновесия. Бифуркация Андронова-Хопфа.	2	2	3				10	задания для самостоятельной работы, устный опрос
9	Периодические траектории. Отображение Пуанкаре. Неподвижная точка. Мультипликаторы. Гомоклиническая траектория.	2	2	1				10	задания для самостоятельной работы, устный опрос
10	Особенности нелинейных отображений в окрестности неподвижной точки. Устойчивые и неустойчивые многообразия.	2	2	2				12	задания для самостоятельной работы, устный опрос
	Всего за семестр		8	8		2		42	
							0,5		Экзамен
	<b>ИТОГО</b>	<b>108</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>6</b>	<b>0,5</b>	<b>70</b>	

#### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Сочетание традиционных образовательных технологий в форме лекций и семинарских занятий, домашних работ и проведение контрольных мероприятий (экзамена).

В ходе освоения дисциплины «Нелинейная динамика» студентам необходимо успешно выдержать следующие испытания:

- экзамен, содержащий вопросы и задачи курса.

Кроме того, ведётся контроль за посещаемостью занятий. Плохая посещаемость усугубляет положение студента, плохо справившегося с текущими испытаниями.

#### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft Office Std 2013 OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются «Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»» [http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендуемых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике - ИКИ (2003).
2. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике.. Часть 2-ИКИ (2009)
3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Из-во Наука, 1978, 304 с.

в) дополнительная литература:

1. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. М.: Из-во Мир. 1986. 301 с.

#### **в) ресурсы сети «Интернет»**

Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ

Электронный архив ЯрГУ

Электронный каталог Научной библиотеки ЯрГУ им. П.Г.Демидова

Математические журналы базы Scopus

Математические журналы базы Mathnet

#### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор:

Профессор кафедры  
математического моделирования,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Евгений Павлович Кубышкин

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Нелинейная динамика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Пример задания, предлагающегося на экзамене

1. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа. Многомерный случай. Краевая задача. Теорема о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий.
2. Построить с точностью до кубических слагаемых устойчивое и неустойчивое многообразия в окрестности нулевого положения равновесия следующей системы дифференциальных уравнений
$$\begin{aligned}\dot{u} &= -5u + v \tan v \cos u, \\ \dot{v} &= 2v + \sin u \sinh u (1 + v).\end{aligned}$$

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

**Вопросы к экзамену**

1. Нелинейные динамические системы. Основные определения. Фазовое пространство. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров. Теорема о дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам (формулировка и комментарии).
2. Положения равновесия нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений. Линеаризованная система. Матрица Якоби. Теорема об устойчивости по первому приближению (формулировка). Критерий Рауса-Гурвица (формулировка).
3. Качественное исследование двумерной линейной системы уравнений. Случаи узла, седла и фокуса.
4. Качественное исследование трехмерной линейной системы уравнений. Случаи узла, фокуса, седла, седло-фокуса.
5. Многомерные линейные системы. Структура решений в случае простых корней, в случае кратных корней.
6. Топологическая классификация грубых положений равновесия. Условие эквивалентности нелинейной автономной системы в окрестности положения равновесия ее линейной части. Теорема Гробмана-Хартмана (формулировка).
7. Топологическая эквивалентность линейных систем.
8. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа. Двумерный случай.



9. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа.  
Многомерный случай. Краевая задача. Теорема о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий.
10. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа.  
Алгоритм построения устойчивого и неустойчивого многообразий.
11. Нормальная форма системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия.
12. Центральное многообразие. Теорема о центральном многообразии (формулировка). Алгоритм построения центрального многообразия.
13. Локальные бифуркации состояния равновесия. Бифуркация Андронова-Хопфа.
14. Периодические траектории. Отображение Пуанкаре. Неподвижная точка.  
Мультипликаторы. Гомоклиническая траектория.
15. Особенности нелинейных отображений в окрестности неподвижной точки.  
Устойчивые и неустойчивые многообразия.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Нелинейная динамика»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Студентам предлагается изучить не только рекомендованную литературу, но и возможные дополнительные источники (например, научные статьи), на которые может указать преподаватель. Эта работа по большей части может выполняться студентами индивидуально, под руководством преподавателя.

В процессе освоения дисциплины обучающиеся выполняют курсовые работы, которые являются важным этапом написания ВКР на 4-м курсе. Вопросы, связанные с выполнением курсовой работы и ВКР, оформлением текстов, разнообразные вопросы по выступлению на защитах этих работ, вполне целесообразно задать преподавателю дисциплины. Большую пользу принесет выступление на семинаре или студенческой (молодежной) конференции. Тема доклада для выступления вполне может быть связана с тематикой прикладного функционального анализа и смежными науками, в том числе, с компьютерной реализацией алгоритмов аппроксимации. Такой расширенный подход к освоению материала дисциплины может быть весьма полезен студентам.

Отметим, наконец, важность самостоятельной работы над математическими доказательствами. Именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий, и именно доказательства наиболее полезны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте его воспроизвести - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.