МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Уравнения n-симплекса и алгебраические структуры

Направление подготовки (специальности)
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена	Программа одобрена НМК
на заседании кафедры	математического факультета
от 12 апреля 2023 г., протокол № 8	протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

i. Введение в теорию отображений n-симплекса, включая отображения Янга-Бакстера и тетраэдров Замолодчикова.

ii. Ознакомиться с алгебро-геометрическими методами построения отображений n-симплекса и исследовать связь между уравнениями n-симплекса, итегрируемыми системами и алгебраическими структурами.

iii. Предоставить студентам опыт с использованием пакетов программного обеспечения (Wolfram Mathematica, Maple) для решения современных задач в области интегрируемых систем.

iv. Привлекать студентов к научным исследованиям.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Уравнения n-симплекса и алгебраические структуры» к вариативной части Блока 1 и является курсом по выбору.

Теория уравнений n-симплекса использует инструменты из всех классических областей математики для построения и классификации их решений. Поэтому, для освоения данной дисциплиной студенты должны иметь знания дисциплин «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики».

Полученные в курсе «Уравнения n-симплекса и алгебраические структуры» знания необходимы для получения научных результатов в этой области наук.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	**ИД-ОПК-1_2** Осуществляет постановку задачи, выбирает способ ее решения	**Знать:** - основные определения отображений n-симплексов и их интегрируемости; - связь между уравнениями n-симплексов и задачами матричной рефакторизации; - методы построения отображений n-симплексов. **Уметь:** - воспроизводить математические приемы, используемые при построении решений уравнений n-симплексов; - строить отображения n-симплексов;

	ИД-ОПК-1_3 Применяет математический аппарат, и теории для решения прикладных и теоретических задач.	- находить их первые интегралы и делать вывод об интегрируемости; - связывать отображения n-симплексов с дискретными интегрируемыми системами. **Владеть навыками:** - построение отображений Янга--Бакстера; - построение отображений тетраэдров Замолодчикова; - построение отображений 4-симплексов; - построение отображений n-симплексов с помощью задач матричной рефакторизации. - проверка интегрируемости отображений n-симплексов. - работы с пакетом *Wolfram Mathematica.*

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет ___ зачетных единиц, ___ акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера.		1	1				2	Задания для самостоятельной работы

2	Преставление Лакса для отображений Янга-Бакстера.		2	2				3	Задания для самостоятельной работы
3	Связь между отображениями Янга-Бакстера и дискретными интегируемыми системами		1	1		1		3	Задания для самостоятельной работы
4	Интегрируемость по Лиувиллю.		1	1				2	Задания для самостоятельной работы
5	Построение с помощью преобразований Дарбу.		1	1				3	Задания для самостоятельной работы
6	Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики.		1	1				3	Задания для самостоятельной работы
7	Линейные отображения Янга-Бакстера.		1	1		1		2	Задания для самостоятельной работы
	Итого за 1 семестр 36 часа		**8**	**8**		**2**		**18**	
8	Уравнение тетраэдров Замолодчикова.		1	1				7	Задания для самостоятельной работы
9	Отображения тетраэдров и задачи матричной рефакторизации.		1	1				7	Задания для самостоятельной работы
10	Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу.		1	1		1		7	Задания для самостоятельной работы
11	Линейные отображения тетраэдров Замолодчикова.		1	1				6	Задания для самостоятельной работы
12	Уравнение 4-симплекса Бажанова—Строганова.		1	1				7	Задания для самостоятельной работы
13	Отображения 4-симплекса и преобразования Дарбу.		1	1		1		7	Задания для самостоятельной работы
14	Уравнение n-симплекса.		1	1			0.5	6	Задания для самостоятельной работы
15	Некоммутативные аналоги отображений n-симплекса.		1	1				7	Задания для самостоятельной работы
									Экзамен
	Всего за 2 семестр 108 часа		**8**	**8**		**2**	**0.5**	**54**	
	ИТОГО	**144**	**16**	**16**		**4**	**0.5**	**72**	

Содержание разделов дисциплины:

1. Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера.
1.1. Квантовое уравнение Янга-Бакстера.
1.2. Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера.
1.3. Параметрическое уравнение Янга-Бакстера.
1.4. Отображения Янга-Бакстера. Отображение Адлера.
1.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

2. Преставление Лакса для отображений Янга-Бакстера.
2.1. Пара Лакса для отображений Янга-Бакстера.
2.2. Матричная трифакторизация и свойство Янга-Бакстера.
2.3. Пара Лакса для отображения Адлера.
2.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

3. Связь между отображениями Янга-Бакстера и дискретными интегируемыми системами.
3.1. Уравнения в квад-графах VS отображения Янга-Бакстера.
3.2. Связь через симметрии: Уравнение dpKdV vs отображение Адлера.
3.3. Связь через представления Лакса.
3.4. Связь через инварианты.
3.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

4. Интегрируемость по Лиувиллю.
4.1 Первые интегралы и интегрируемость.
4.2. Пуассоновы структуры. Ф-и Казимира.
4.3. Интегрируемость по Лиувиллю.
4.4. Приложение в отображение Адлера-Ямилова.
4.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

5. Построение с помощью преобразований Дарбу.
5.1. Задачи матричной рефакторизации для матриц Дарбу.
5.2. Метод построения интегрируемых параметрических отображений Янга-Бакстера, как ограничения отображений Янга-Бакстера в симплектических листьях.
5.3. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

6. Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики.
6.1. Задачи матричной рефакторизации и соответствия.
6.2. Отображения Янга-Бакстера типа KdV, Boussinesq и другие.
6.3. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

7. Линейные отображения Янга-Бакстера.
7.1. Алгебраические соотношения, которым удовлетворяют линейные отображения Янга-Бакстера.
7.2. Доказательство того, что дифференциал отображения Янга-Бакстера является отображением Янга-Бакстера.
7.3. Частичные линеаризации отображений Янга-Бакстера.
7.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

8. Уравнение тетраэдров Замолодчикова.

8.1. Теоритико-множественные решения функционального уравнения тетраэдров Замолодчикова.
8.2. Отображения тетраэдров. Отображение электрических сетей.
8.3. Классификация Кашаева—Корепанова—Сергеева.
8.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

9. Отображения тетраэдров и задачи матричной рефакторизации.
9.1. Локальное уравнение Янга-Бакстера.
9.2. Генератор отображения тетраэдров.
9.3. Локальное уравнение Янга-Бакстера и соответствия.
9.4. Задача матричной шесть-факторизации.
9.5. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

10. Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу.
10.1. Построение отображений тетраэдров через задачи матричной рефакторизации для матриц Дарбу.
10.2. Построение отображений тетраэдров типа NLS.
10.3. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

11. Линейные отображения тетраэдров Замолодчикова.
11.1. Алгебраические соотношения, которым удовлетворяют линейные отображения *тетраэдров Замолодчикова.*
11.2. Доказательство того, что дифференциал отображения Янга-Бакстера является отображением *тетраэдров Замолодчикова.*
11.3. Частичные линеаризации отображений *тетраэдров Замолодчикова.* .
11.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

12. Уравнение 4-симплекса Бажанова—Строганова.
12.1. Теоретико-множественные решения уравнения 4-симплекса.
12.2. Локальное уравнение тетраэдров и отображения 4-симплекса.
12.3. Примеры отображений 4-симплекса.
12.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.
13. Отображения 4-симплекса и преобразования Дарбу.
13.1. Построение отображений тетраэдров через задачи матричной шесть-рефакторизации для матриц Дарбу.
13.2. Построение отображений 4-симплекса типа NLS.
13.3. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

14. Уравнение n-симплекса.
14.1. Теоретико-множественные решения уравнения n-симплекса.
14.2. Методы построения отображения n-симплекса.
14.3. Отображения n-симплекса как расширения отображений 2-, 3- и 4-симплекса.
14.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

15. Некоммутативные аналоги отображений n-симплекса.
15.1. Методы построения некоммутативных отображений n-симплекса.
15.2. Отображения n-симплекса в телах.
15.3. Отображения n-симплекса в группах.
15.4. Приложения в *Wolfram Mathematica*.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- издательская система LaTex;
- пакет программного обеспечения *Wolfram Mathematica*;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис, «Дискретная дифференциальная геометрия», Регулярная и хаотическая динамика 2010, ISBN: ISBN:978-5-93972-798-3.

2. S. Konstantinou-Rizos, «Darboux transformations, discrete integrable systems and related Yang-Baxter maps». PhD thesis. University of Leeds, UK (2014).
https://arxiv.org/pdf/1410.5013.pdf (электронный ресурс)

б) дополнительная литература

1. S. Konstantinou-Rizos, "Birational solutions to the set-theoretical 4-simplex equation," Physica D: Nonlinear Phenomena, 448, 133696 (2023)
https://arxiv.org/pdf/2211.16338.pdf (электронный ресурс)

2. S. Konstantinou-Rizos. Noncommutative solutions to Zamolodchikov's tetrahedron equation and matrix six-factorisation problems. Physica D: Nonlinear Phenomena 440 (2022), 133466.
https://arxiv.org/pdf/2202.10491.pdf (электронный ресурс)

3. S. Igonin, S. Konstantinou-Rizos. Algebraic and differential-geometric constructions of set theoretical solutions to the Zamolodchikov tetrahedron equation. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55 (2022), 405205.
https://arxiv.org/pdf/2110.05998.pdf (электронный ресурс)

4. S. Igonin, V. Kolesov, S. Konstantinou-Rizos and M. Preobrazhenskaia, Tetrahedron maps, Yang–Baxter maps, and partial linearisations. Journal of Physics A: Math. Theor. 54 (2021) 505203
https://arxiv.org/pdf/2106.09130.pdf (электронный ресурс)

5. V. Buchstaber, I. Igonin, S. Konstantinou-Rizos and M. Preobrazhenskaia, "Yang--Baxter maps, Darboux transformations, and linear approximations of refactorisation problems," Journal of Physics A: Math. Theor., vol. 53, 504002 (2020).
https://arxiv.org/pdf/2009.00045.pdf (электронный ресурс)

6. S. Konstantinou-Rizos, "Tetrahedron maps of nonlinear Schrödinger type," Nuclear Physics B, vol. 960, 115207 (2020).
https://arxiv.org/pdf/2005.13574.pdf (электронный ресурс)

7. S. Konstantinou-Rizos, "On the 3D consistency of a Grassmann extended lattice Boussinesq system," Nuclear Physics B 951, 114878 (2020).
https://arxiv.org/pdf/1908.00565.pdf (электронный ресурс)

8. S. Konstantinou-Rizos, G. Papamikos, "Entwining Yang–Baxter maps related to NLS type equations", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52, 485201 (2019).
https://arxiv.org/pdf/1907.00019.pdf (электронный ресурс)

9. S. Konstantinou-Rizos, T. Kouloukas, A noncommutative discrete potential KdV lift, Journal of Mathematical Physics 59, 063506 (2018).
https://arxiv.org/pdf/1611.08923.pdf (электронный ресурс)

10. S. Konstantinou-Rizos, A. V. Mikhailov, "Anticommutative extension of the Adler map", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 49 (2016), 30LT03 , IOP Select.
https://arxiv.org/pdf/1602.01714.pdf (электронный ресурс)

11. G. G. Grahovksi, S. Konstantinou-Rizos, A. V. Mikhailov, "Grassmann extensions of Yang–Baxter maps", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 49, 145202 (2016).
https://arxiv.org/pdf/1510.06913.pdf (электронный ресурс)

12. S. Konstantinou-Rizos, A. V. Mikhailov, “Darboux transformations, finite reduction groups and related Yang–Baxter maps”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46, 425201 (2013).
https://arxiv.org/pdf/1205.4910.pdf (электронный ресурс)

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica,* для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica,* для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории с проектором, доской и компьютерами, оснащенными пакетом программного обеспечения *Wolfram Mathematica,* для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Автор:

Доцент кафедры
нелинейной динамики, к.ф.-м.н. ______ С. Константину Ризос
должность, ученая степень *подпись* *И.О. Фамилия*

Приложение No. 1 к рабочей программе дисциплины

“Уравнения n-симплекса и алгебраические структуры”

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы
(данные задания выполняются студентом самостоятельно
и проверяются преподавателем)

Задания по теме “Теоретико-множественное уравнение Янга–Бакстера”

- Проверить, что отображение перестановок $P(x, y) = (y, x)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера.
- Доказать, что отображение Адлера

$$(x, y) \xrightarrow{Y} (u, v) = \left(y - \frac{a-b}{x+y}, x + \frac{a-b}{x+y} \right),$$

удовлетворяет параметрическому уравнению Янга–Бакстера

$$Y^{12}_{a,b} \circ Y^{13}_{a,c} \circ Y^{23}_{b,c} = Y^{23}_{b,c} \circ Y^{13}_{a,c} \circ Y^{12}_{a,b}.$$

- Написать код в Mathematica, который будет проверять, что отображение $((x,a),(y,b)) \xrightarrow{Y} ((u((x,a),(y,b)),a),(v,((x,a),(y,b)))$ удовлетворяет параметрическому уравнению Янга–Бакстера.

Задания по теме “Преставление Лакса для отображений Янга–Бакстера”

- Доказать, что отображение Адлера $(x,y) \xrightarrow{Y} (u,v) = \left(y - \frac{a-b}{x+y}, x + \frac{a-b}{x+y}\right)$ имеет матрицу Лакса:
$$\mathrm{L}(x;a,\lambda) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 + a - \lambda & x \end{pmatrix}.$$

- Доказать, что отображение Адлера — инволютивное, т.е. $Y^{ij} \circ Y^{ij} = Id$. Найти для него первые интегралы.

- Если задача матричной рефакторизации
$$\mathrm{L}(u;a,\lambda)\mathrm{L}(v;b,\lambda) = \mathrm{L}(y;b,\lambda)\mathrm{L}(x;a,\lambda),$$
для какой-то квадратной матрицы $\mathrm{L} = \mathrm{L}(x;a,\lambda)$, определяет рациональное отображение, то это отображение является бирациональным.

- Пусть отображение
$$((x,a),(y,b)) \xrightarrow{Y_{a,b}} ((u((x,a),(y,b)),a),(v((x,a),(y,b)),b)).$$
Если $Y_{a,b}$ удовлетворяет задаче матричной рефакторизации
$$\mathrm{L}(u;a,\lambda)\mathrm{L}(v;b,\lambda) = \mathrm{L}(y;b,\lambda)\mathrm{L}(x;a,\lambda),$$
то $\mathrm{Tr}(\mathrm{L}(y;b,\lambda)\mathrm{L}(x;a,\lambda))$ генерирует первые интегралы для $Y_{a,b}$.

Задания по теме “Связь между отображениями Янга-Бакстера и дискретными интегируемыми системами”

- Используя симметрии дискретного потенциального уравнения КдФ построить отображение Янга–Бакстера Адлера.

Задания по теме “Интегрируемость по Лиувиллю”

- Найти инварианты для отображения Адлера–Ямилова

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)\xrightarrow{Y_{a,b}}\left(y_1-\frac{a-b}{1+x_1y_2}x_1,y_2,x_1,x_2+\frac{a-b}{1+x_1y_2}y_2\right).$$

- Найти скобки Пуассона, относительно которых инварианты отображения Адлера–Ямилова в инволюции, и доказать интегрируемость по Лиувиллю.
- Написать код в Mathematica для проверки унитегрируемости по Лиувиллю.

Задания по теме “Построение с помощью преобразований Дарбу”

- Доказать, что матрица
$$M=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f&p\\\widetilde{q}&1\end{pmatrix},$$
элементы которой удовлетворяют системе
$$\partial_x f=2(pq-\widetilde{p}\widetilde{q}),\qquad \partial_x p=2(pf-\widetilde{p}),\qquad \partial_x\widetilde{q}=2(q-\widetilde{q}f),$$
является преобразованием Дарбу для оператора НУШ $\mathfrak{L}(p,q;\lambda)=D_x+\lambda\mathrm{diag}(1,-1)+\begin{pmatrix}0&2p\\2q&0\end{pmatrix}$.
- После замены $(f,p,\widetilde{q})\longmapsto(X,x_1,x_2)$ в преобразовании Дарбу для НУШ, поставить соответствующею матрицу $\mathrm{M}(x_1,x_2,X;a,\lambda)$ в задачу матричной рефакторизации
$$\mathrm{M}(u_1,u_2,U;a,\lambda)\mathrm{M}(v_1,v_2,V;b,\lambda)=\mathrm{M}(y_1,y_2,Y;b,\lambda)\mathrm{M}(x_1,x_2,X;a,\lambda),$$
и построить шестимерное отображение Янга–Бакстера типа НУШ.
- Найти первые интегралы шестимерного отображения Янга–Бакстера типа НУШ.
- Доказать, что можно ограничисть шестимерное отображение Янга–Бакстера типа НУШ к отображению Адлера–Ямилова на инвариантных листьях.

Задания по теме “Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики.”

- Построить отображение Янга–Бакстера с помощью преобразования Дарбу для КдФ.
- Построить отображение Янга–Бакстера с помощью преобразования Дарбу для Boussinesq.

Задания по теме "Линейные отображения Янга-Бакстера."

- Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим линейное отображение $Y\colon V\times V\to V\times V$, заданную формулой

$$Y(x,y)=(Ax+By,\ Cx+Dy),\qquad x,y\in V,\qquad A,B,C,D\in(V).$$

  Доказать, что отображение Y удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера тогда и только тогда, когда отображения $A,B,C,D\in(V)$ в нем удовллетворяют следующим соотношениям

$$\begin{gathered}
C^2=C{-}DCA,\qquad B^2=B-ABD,\\
DC-CD=DCB,\qquad AB-BA=ABC,\\
CA-AC=BCA,\qquad BD-DB=CBD,\\
DA-AD=BCB-CBC.
\end{gathered}$$

Задания по теме "Уравнение тетраэдров Замолодчикова."

- Пусть X — множество. Написать код в Mathematica, который проверяет удовлетворяет ли отображение $T\in[(\mathcal{X}\times\mathbb{C})^3]$, namely $T:((x,a),(y,b),(z,c))\mapsto((u(x,y,z),a),(v(x,y,z),b),(w(x,y,z),c))$ параметрическому уравнению тетраэдров Замолодчикова

$$T^{123}_{a,b,c}\circ T^{145}_{a,d,e}\circ T^{246}_{b,d,f}\circ T^{356}_{c,e,f}=T^{356}_{c,e,f}\circ T^{246}_{b,d,f}\circ T^{145}_{a,d,e}\circ T^{123}_{a,b,c}.$$

- Проверить, что отображения тетраэдров из классифакации Сергеева удовлетворяют уравнению тетраэдров Замолодчикова.

Задания по теме "Отображения тетраэдров и задачи матричной рефакторизации."

- Пусть L = L($x, a; \lambda$) — матрица, зависящая от переменной $x \in \mathcal{X}$, параметра $a \in \mathbb{C}$ и спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$L(x, a; \lambda) = \begin{pmatrix} A(x, a; \lambda) & B(x, a; \lambda) \\ C(x, a; \lambda) & D(x, a; \lambda) \end{pmatrix}.$$

  Написать код в Mathematica, который определяет 3×3 расширения матрицы L = L($x, a; \lambda$), и генерирует через локальное уравнение Янга–Бакстера,

$$L_{12}(u, a; \lambda) L_{13}(v, b; \lambda) L_{23}(w, c; \lambda) = L_{23}(z, c; \lambda) L_{13}(y, b; \lambda) L_{12}(x, a; \lambda),$$

  отображения тетраэдров Замолодчикова.

Задания по теме “Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу.”

- Пусть матрица

$$M(x_1, x_2; a) = \begin{pmatrix} a + x_1 x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Подставить эту матрицу в локальное уравнение Янга–Бакстера и построить отображение тетраэдров типа НУШ.

- Найти первые интегралы для отображения тетраэдров типа НУШ.

- Ограничить отображение тетраэдров типа НУШ к отображению тетраэдров Сергеева на инвариантных листьях.

Задания по теме “Уравнение 4-симплекса Бажанова—Строганова.”

- Пусть X — множество. Написать код в Mathematica, который проверяет удовлетворяет ли отображение $T \in [(\mathcal{X} \times \mathbb{C})^3]$, т.е. $T : ((x, \alpha), (y, \beta), (z, \gamma)) \mapsto ((u(x, y, z), \alpha), (v(x, y, z), \beta), (w(x, y, z), \gamma))$ параметрическому уравнению 4-симплексов:

$$T^{123}_{\alpha,\beta,\gamma} \circ T^{145}_{\alpha,\delta,\epsilon} \circ T^{246}_{\beta,\delta,\zeta} \circ T^{356}_{\gamma,\epsilon,\zeta} = T^{356}_{\gamma,\epsilon,\zeta} \circ T^{246}_{\beta,\delta,\zeta} \circ T^{145}_{\alpha,\delta,\epsilon} \circ T^{123}_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

- Построить расширения 4-симплексов для всех отображений тетраэдров в списке Сергеева.

Зачет

Зачет ставится студентам, набравшим 40 и более баллов по каждой самостоятельной работе.

Экзамен

Экзамен проводится в письменной форме. На экзамене проверяется понимание основных основных концепций дисциплины, определений и теорем. Также, проверяются вычислительные навыки студентов в конкретных задачах, а также навыки с использованием пакета программного обеспечения Wolfram Mathematica. Продолжительность экзамена — 4 часа.

Вопросы к экзамену:

- Представление Лакса для отображений Янга–Бакстера. Представление Лакса отбражения Адлера.
- Доказательство теоремы о задаче матричной трифакторизации для проверки свойства Янга–Бакстера.
- Связь между отображениями Янга–Бакстера и уравнениями в квад–гряфах. Через симметрии и через представлений Лакса.
- Построение первых интегралов. Интегрируемость по Лиувиллю.
- Построение отображений Янга–Бакстера с помощью преобразований Дарбу.
- Линеаризация отображений Янга–Бакстера. Дифференциал отображений Янга–Бакстера.
- Алгебраические соотношения линейных отображений Янга–Бакстера.
- Некоммутативные отображения Янга–Бакстера в группах и телах.
- Локальное уравнение Янга–Бакстера.
- Уравнение тетраэдров Замолодчикова и параметрическое уравнение тетраэдров Замолодчикова.
- Классификация Сергеева–Кашаева–Корепанова.

- Доказательство теоремы о задаче матричной шесть-факторизации для проверки свойства тетраэдров Замолодчикова.
- Построение отображений тетраэдров Замолодчикова с помощью преобразований Дарбу. Отображения тетраэдров Замолодчикова типа НУШ. Их первые интегралы.
- Некоммутативные отображения тетраэдров Замолодчикова в группах и телах.
- Локальное уравнение тетраэдров Замолодчикова.
- Уравнения 4-симплексов Бажанова–Строганова.
- Расширения отображений тетраэдров Замолодчикова на отображении 4-симплексов Бажанова–Строганова через их генераторов.
- Примеры отображений 4-симлексов.

Система оценивания

Самостоятельные работы являются обязательными. Каждая работа проверяется и студенты получают с 0 до 100 баллов по каждой работе. Итоговая оценка по этой дисциплине вычисляется по формуле:

$$\text{Итоговая оценка} = 0.4 \times \text{средний балл по самост. работам} + 0.4 \times \text{итоговый балл экзамена}$$

- <60 — неудовлетворительно.
- 61–70 — удовлетворительно (3).
- 71–90 — хорошо (4).
- 91–100 — отлично (5).

Поскольку одной из основных целей этого предмета является привлечение студентов к научным исследованиям, студенты, которые во время семестра получили оригинальные научные результаты, получают автоматически оценку отлично (5).