

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дискретные и вероятностные модели**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 19 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Дискретные и вероятностные математические модели» является ознакомление студентов с направлениями применения дискретных и вероятностных математических моделей в технических и социально-экономических системах.

Основной задачей изучения дисциплины «Дискретные и вероятностные математические модели» является формирование у студентов навыков построения моделей с использованием дискретной математики и теории вероятностей.

В результате изучения дисциплины «Дискретные и вероятностные математические модели» студенты должны знать основные области и задачи применения дискретных и вероятностных математических моделей.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретные и вероятностные математические модели» (ДВММ) призвана расширить знания студентов не только по фундаментальным основам избранной ими профессии, но и стимулировать их к постоянному совершенствованию и расширению общенаучной базы, стремлению к достижению наивысших результатов в науке и практической деятельности. Изучение дисциплины базируется на знании обучающимся теории вероятностей, дискретной математики и численных методов. Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины, используются при написании курсовых работ и ВКР.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

Код компетенции	Формулировка компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
ПК-2	способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>иметь представление:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• об основных дискретных и вероятностных моделях;</li><li>• о направлениях и задачах применения дискретных и вероятностных моделей;</li><li>• о возможностях моделирования современными средствами алгоритмизации и программирования.</li></ul> <b>владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• навыками работы с современной научно-технической литературой в области математического моделирования и теории вероятностей;</li><li>• навыками использования аппарата математического моделирования при решении различных профессиональных задач.</li></ul> <b>уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• проводить постановку и решение задач с использованием дискретных и вероятностных моделей.</li></ul>

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет \_\_ зачетные единицы, \_\_ акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудо- емкость (в академических ча- сах)						Формы текущего контроля успевае- мости Форма промежу- точной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа						
			лекции	Практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Производящие функции в тео- рии вероятностей. Производя- щие функции последователь- ностей.		12					4	КР №1
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>							2	
2	Характеристические функции в теории вероятностей. При- меры ХФ. Предельные теоре- мы.		4	2				4	КР №2
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>							2	
1.3	Вероятностные модели. Функции Радемахера и их свойства. Моделирование за- дачи о подбрасывании монеты. Неравенство Чебышева. Сильная и слабая предельные теоремы. Нормальные числа. Генераторы случайных вели- чин		12	14					опрос
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								
	ИТОГО								
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>								

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Активные и интерактивные формы проведения занятий.

При реализации различных видов учебной работы используются образовательные технологии, направленные на развитие у студентов творческих способностей и самостоятельности.

Практические занятия как форма обучения позволяют более полно реализовать компетентностный подход во взаимодействии с контекстным, проблемным и личностно-ориентированным подходами с опорой на интерактивные методы обучения, которые основаны на принципах взаимодействия студентов друг с другом, активности, опоре на групповой опыт при обязательной обратной связи. На практических занятиях в процессе целесообразно использовать следующие ин-

терактивные методы: метод кейсов, деловые игры, мозговой штурм, дебаты. Использование данных интерактивных методов позволит:

- более эффективно организовать учебный процесс, сочетая традиционное обучение с новыми современными технологиями;
- повысить мотивацию студентов к получению знаний;
- формировать ценностные отношения к будущей педагогической деятельности, так как с помощью интерактивных методов студент вовлекается в моделируемую преподавателем будущую профессиональную деятельность;
- повысить уровень сформированности ключевых профессиональных компетенций и личностных качеств.

Курс обучения предполагает чтение научной литературы отечественных и зарубежных авторов, использование интернет-ресурсов.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

Электронный учебный курс «Компьютерная безопасность» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся при подготовке к экзамену;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- презентации и видео лекций по темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- посредством форума и системы сообщений осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office, издательская система LaTeX;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система «БУКИ-NEXT» (АБИС «Буки-Next»).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная учебная литература:**

1. Дискретные и вероятностные модели: учебное пособие / М. С. Беспалов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых. — Владимир: Изд-во Владимирского гос. ун-та, 2017. — 83 с.
2. Романовский И.В. Дискретный анализ. 4-е изд., испр. и доп. СПб.: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2008. - 336 с.

### **б) дополнительная учебная литература:**

1. Теория вероятностей и математическая статистика. Б.А. Севастьянов - М.: Юрайт, 2012. -

255 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: свободный

2. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М. Кац- М.: Юрайт, 2016. - 155 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: свободный

3. Резник В.Г. Дискретные и вероятностные математические модели: методические указания по самостоятельной и индивидуальной работе студентов. - Томск, ТУСУР, 2016. - 65 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: - [http://asu.tusur.ru/learning/mag010400/d09/m010400\\_d09\\_work.pdf](http://asu.tusur.ru/learning/mag010400/d09/m010400_d09_work.pdf)

**в) ресурсы сети «Интернет»**

4. Электронные каталоги НБ ЯрГУ - [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

5. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ - [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

6. Электронный архив ЯрГУ - <http://elar.uniyar.ac.ru/jspui/community-list>

Ресурсы в свободном доступе.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);

- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

-помещения для самостоятельной работы;

-помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Составитель:

Д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ Бережной Е.И.

**Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

Контрольная работа № 1

1.1. Для случайной величины  $\xi$ , распределенной по биномиальному закону с параметрами  $n$  и  $p$ , вычислить производящую функцию. Через производящую функцию вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также все ее факториальные моменты.

1.2. Для случайной величины  $\xi$ , распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , вычислить производящую функцию. Через производящую функцию вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.3. Пусть вероятность попадания в цель при одном (каждом) выстреле равна  $p$ . Случайная величина  $\tau$  равна числу выстрелов до первого попадания. Найти производящую функцию для случайной величины  $\tau$ , а также математическое ожидание и дисперсию для нее.

1.4. Пусть  $\tau_3$  равна числу выстрелов до трех первых попаданий. Вычислить производящую функцию для  $\tau_3$ . Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.5. Две независимые случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  распределены по закону Пуассона с параметрами 2 и 3 соответственно. Найти закон распределения случайной величины  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ .

1. Для случайной величины  $\xi$ , равномерно распределенной на отрезке  $[-1, 1]$ , вычислить характеристическую функцию, а также математическое ожидание и дисперсию через нее.

Вычислите характеристическую функцию и закон распределения случайной величины  $2\xi$ .

Как выглядит  $f_2(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi_2$ , равномерно распределенной на отрезке  $[-2, 2]$ ?

2. Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\xi_1$  равномерно распределены на отрезке  $[-1, 1]$  и независимы. Выведите закон распределения суммы этих величин и вычислите характеристическую функцию.

3. По характеристической функции  $f(t) = \cos t$  восстановите закон распределения случайной величины  $\eta$ .

4. Восстановите законы распределения случайных величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  по их характеристическим функциям  $f_1(t) = \cos^2 t$  и  $f_2(t) = \cos^3 t$ .

5. Найти закон распределения для случайной величины  $\zeta = \xi + \eta$ , где  $\xi$  и  $\eta$  – независимые случайные величины из упражнений 3.4 и 3.6.

6. Докажите, что в случае четной функции плотности  $p(x)$  характеристическая функция  $f(t)$  действительная.

7. Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – независимые и одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией  $f(t)$ . Вычислите характеристическую функцию  $\eta = \xi_1 - \xi_2$ .

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

**Пороговый уровень** - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

**Продвинутый уровень** - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

**Высокий уровень** - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень (общие характеристики):**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень (общие характеристики):**

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины



ны;

- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически верное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- глубокое усвоение необходимого материала из основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Студенту желательно проявлять активное участие на занятиях, задавать вопросы, поскольку умение обосновывать свою точку зрения, нахождение компромиссного решения в этически выдержанной дискуссии не только важно для лучшего усвоения материала, но и ценится в реальной жизни. Важным моментом при изучении любой дисциплины является организация самостоятельной работы.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

В освоении дисциплины (модуля) инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации по предмету является важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.