

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

 П. Н. Нестеров

« 18 » мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

«Теория групп»

программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Форма обучения очная

Программа одобрена
на заседании кафедры алгебры и математической логики
от « 17 » мая 2022 года, протокол № 9

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Теория групп» является знакомство с основными направлениями одной из основополагающих дисциплин современной алгебры и ее приложений. Материал охватывает как основные конструкции и направления в теории конечных групп, так и конструкции и теоремы, используемые в теории бесконечных групп, известные как комбинаторная теория групп.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Теория групп» является дисциплиной по выбору. Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов и основных конструкций, используемых в теории групп.

3. Планируемые результаты освоения дисциплины: -

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

основные теоремы теории групп, методы изучения конечных и бесконечных групп. Главные классы групп и примеры. Связи групп и графов. Деревья. Действия групп на множестве. Способы задания групп. Расширения, произведения и другие конструкции групп. Применения групп.

Уметь:

использовать положения теории и основные теоремы для извлечения информации о группе. Находить нормальные подгруппы группы и гомоморфные образы, использовать различные способы задания группы.

Владеть:

навыками анализа и конструирования подгрупп с заданными свойствами с помощью различных операций над группами. Способами задания описания группы с помощью его сведения к произведениям разного рода или через определяющие соотношения.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1	Введение в теорию конечных групп. Теорема Лагранжа, Теоремы о гомоморфизмах. Действие группы на множестве. Нормализатор и централизатор. Теоремы Силова. Прямые произведения групп.	2	5				13	Задания для самостоятельной работы
2.	Простые группы расширения групп. Группа A_5 Группы Матье, системы Штейнера. Группы и теория кодирования. Теория расширений. Графы Кэли и автоморфизмы деревьев.	2	5				13	Задания для самостоятельной работы
3	Комбинаторная теория групп. Свободные группы. Фундаментальная группа графа. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Преобразование Титце. Деревья и свободные группы. Свободное произведение с объединением. Деревья и HNN-расширения. Хопфовы и финитно аппроксимируемые группы	2	8				62	
						2		Зачет
	Всего	108 час.	18			2	88	

Содержание разделов дисциплины:

Тема № 1: Введение в теорию конечных групп. Теорема Лагранжа, Теоремы о гомоморфизмах. Действие группы на множестве. Нормализатор и централизатор. Теоремы Силова. Прямые произведения групп.

Тема № 2: Простые группы и расширения групп. Группа $A_{5,l}$ Группы Матье, системы Штейнера. Применения групп к теории кодирования. Теория расширений. Графы Кэли и автоморфизмы деревьев.

Тема № 3: Комбинаторная теория групп. Свободные группы. Фундаментальная группа графа. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Преобразование Титце. Деревья и свободные группы. Свободное произведение с объединением. Деревья и HNN-расширения. Хопфовы и финитно аппроксимируемые группы

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы аспирантов. На консультациях по просьбе аспирантов рассматриваются наиболее сложные разделы дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы аспирантов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

6. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000. – 239 с.
5. Богопольский О.В. Введение в теорию групп, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 148 с.

б) дополнительная литература

6. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
7. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.

8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009
10. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М: «Наука». 1974
11. Gorenstein D. Finite groups, Harper and Row, N.Y. and London, 1968.

в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

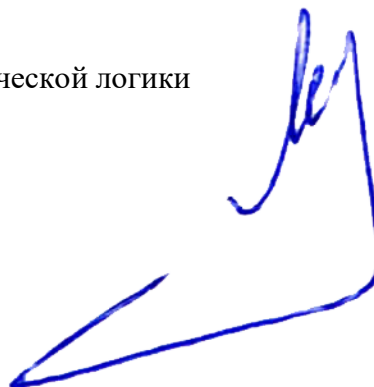
Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав следующие помещения:

- учебные аудитории для проведения лекций;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
доктор физико-математических наук



Л.С. Казарин

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Теория групп»
по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Оценочные материалы
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации
аспирантов по дисциплине

1. Контрольные задания и (или) иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы

1. Исследование центральных произведений групп кватернионов и групп диэдра порядка 8. Монография Д.Горенштейна [11], глава 5. Два типа центральных произведений, являющихся экстраспециальными группами. Их группы автоморфизмов. Отождествление групп автоморфизмов указанных групп с ортогональными группами. Возможные приложения.

2. Исследование простых групп небольшого порядка. Доказать, что существует единственная простая неабелева группа порядка 60. Доказать, что она изоморфна знакопеременной группе подстановок степени 5. Все группы, порядка меньше 60 разрешимы. Как устроена группа невырожденных матриц размера 2 с элементами из Z_5 ?

3. Вычисления в группах подстановок. Способы записи элемента группы подстановок степени n . Функциональный способ записи и запись в виде произведения независимых циклов. Порядок элемента группы подстановок степени n . Исследование наибольшего порядка группы подстановок степени n . Критерий сопряженности подстановок. Действие группы на множестве. Транзитивное действие и орбиты. Стабилизаторы подмножеств и нормализаторы подгрупп.

4. Лемма Фраттини и факторизация конечной группы. Расширение групп. Система факторов. Теорема Шура. Классовое равенство и его применение. Теоремы Силова. Строение групп порядка p^n (существование центра, ряды подгрупп, нормализаторное условие). Порядки силовских подгрупп симметрической группы степени n .

5. Группы порядков, не превосходящих 100. Их нормальное строение, представления в виде произведений подгрупп меньших порядков. Исключить из рассмотрения группы порядков 64 и 32.

6. Коды, исправляющие ошибки. Расстояние Хэмминга и двоичный код Хэмминга. Задание кода Хэмминга и исправление ошибок.

7. Свободные группы конечного ранга. Копредставления групп. Теорема Дика. Свободная абелева группа. Конечно порожденные абелевы группы. Полные абелевы группы. Перечислить все абелевы группы порядков, не превосходящих 100.

8. Графы и графы Кэли групп. Подграфы, морфизмы. Деревья. Графы Кэли. Автоморфизмы деревьев. Фундаментальная группа графа. Представление группы узла трилистника. Представление группы S_n . Группы и симметрии графов.

9. Теорема Нильсена-Шрайера и формула Нильсена-Шрайера о ранге подгруппы конечного индекса. Свободное произведение с объединением. Деревья и HNN-расширения. Связь свободных произведений с объединением и HNN-расширений. Хопфовы и финитно аппроксимируемые группы.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине проводится устно по экзаменационным билетам.

Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса.

На подготовку к ответу дается 60 минут.

Список вопросов к зачету:

1. Действие группы на множестве стабилизатор и орбита.
2. Теоремы о гомоморфизмах групп.
3. Нормализатор и централизатор.
4. Теоремы Силова.
5. Прямые произведения групп.
6. Автоморфизмы и полупрямые произведения.
7. Голоморф.
8. Сплетения и расширения групп.
9. Группы Матъе и знакопеременные группы.
10. Системы Штейнера.
11. Применения групп в теории кодирования.
12. Группы и алгебры Ли.
13. Проблема классификации конечных простых групп.
14. Группы и графы.
15. Граф Кэли.
16. Свободная группа.
17. Расширения групп.
18. Фундаментальная группа графа.
19. Задание группы образующими и соотношения.
20. Преобразования Титце. Деревья и свободные группы.
21. Деревья и HNN-расширения.
22. Хопфовы и финитно аппроксимируемые группы.

2.1 Описание процедуры выставления оценки

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется аспиранту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины;

осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Аспирант дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует научную терминологию.

Оценка «Хорошо» выставляется аспиранту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются аспирантом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется аспиранту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. При ответах аспирант допускает ошибки в определении и раскрытии отдельных понятий, формулировке положений, которые аспирант затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа аспирант не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется аспиранту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов аспиранта.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также аспиранту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.