

**РАДИОАВТОМАТИКА
ЗАДАЧНИК**

Казаков Л.Н., Красников А.В., Палей Д.Э.

**Изд-во ЯВВУ ПВО
Ярославль**

2016 г.

Оглавление

Оглавление	2
Глава 1. Способы математического описания систем автоматического управления.....	5
1. Математическое описание	5
1.2. Примеры решения типовых задач на математическое описание динамических звеньев.....	6
1.3. Задачи.....	7
Глава 2. Преобразования структурных схем систем автоматического управления.....	10
2.1. Структурные схемы.....	10
2.2. Стандартные приемы преобразования структурных схем.....	13
2.3. Примеры решения типовых задач на преобразования структурных схем систем.....	17
2.4. Задачи.....	19
Глава 3. Коэффициент передачи системы с обратной связью.....	25
3.1. Коэффициент передачи замкнутой системы.....	25
3.2. Примеры решения типовых задач на расчет коэффициентов передачи систем с обратной связью.....	26
3.3. Задачи.....	26
Глава 4. Временные характеристики линейных стационарных систем.....	29
4.1. Основные теоретические сведения.....	29
4.2. Примеры решения типовых задач.....	31
4.3. Задачи.....	33
Глава 5. Частотные характеристики линейных стационарных систем.....	37
5.1. Основные теоретические сведения.....	37
5.2. Примеры решения типовых задач.....	39
5.3. Задачи.....	41
Глава 6. Расчет логарифмических амплитудных характеристик.....	45
6.1. Основные теоретические сведения.....	45
6.2. Примеры решения типовых задач.....	50
6.3. Задачи.....	53

Глава 7. Устойчивость линейных систем	56
7.1 Основные теоретические сведения	56
7.2 Критерий устойчивости Гурвица	56
7.3 Критерий устойчивости Найквиста.....	57
7.4 Логарифмическая форма критерия Найквиста	60
7.5. Примеры решения типовых задач	60
7.6. Задачи.....	63
Глава 8. Качество линейных стационарных систем.....	66
8.1. Качество САУ в переходном режиме.....	66
8.2. Интегральные критерии качества.....	67
8.3. Коэффициенты ошибок.....	69
8.4. Астатизм систем	70
8.5. Частотные критерии качества.....	71
8.6. Примеры решения типовых задач	75
8.7. Задачи.....	78
Глава 9. Последовательная коррекция линейных стационарных систем	81
9.1. Примеры решения типовых задач.	81
Глава 10. Системы управления при случайных воздействиях	88
10.1. Случайные величины и случайные процессы.....	88
10.2. Прохождение случайного сигнала через линейную систему.....	96
10.3. Средняя квадратичная ошибка системы	101
10.4. Примеры решения типовых задач	103
10.5. Задачи.....	106
Глава 11. Типовые системы.....	109
Основные теоретические сведения	109
11.1. Коэффициент передачи.....	109
11.2. Шумовая полоса	112
11.3. Логарифмические характеристики	113
11.4. Задачи по выбору оптимальных параметров САУ	119
Приложение.....	124
П1. Формулы интегрирования спектральной плотности	124
П2. Оценка качества переходного процесса по ЛАХ разомкнутой системы	125
П3. Таблица преобразований Лапласа	127

Глава 1. Способы математического описания систем автоматического управления

1. Математическое описание

Рассмотрим линейную систему автоматического регулирования. Зависимость выхода от входа может быть описана линейным дифференциальным уравнением

$$c_n \frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + c_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (1.1)$$

где c_i, b_j - постоянные коэффициенты; x, y - входная и выходная величины. Порядок системы определяется порядком правой части (1.1) и равен m . Обычно $m \leq n$.

Положим, что начальные условия нулевые и применим к обеим частям (1.1) преобразование Лапласа. В итоге получим операторное уравнение вида

$$(c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} \dots c_0) y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \dots b_0) x(p) \quad (1.2)$$

где $y(p), x(p)$ - изображения соответственно выходной и входной величины. Уравнение (1.2) линейное алгебраическое относительно переменной Лапласа p . Решим его относительно $y(p)$

$$y(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n c_i p^i} x(p) = K_{yx}(p) x(p) \quad (1.3)$$

Оператор

$$K_{yx}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_0} \quad (1.4)$$

называется передаточной функцией динамического элемента. Передаточная функция $K_{yx}(p)$ по определению равна отношению изображения реакции $y(p)$ элемента к изображению входного воздействия $x(p)$ при нулевых начальных условиях.

Таким образом, зная передаточную функцию элемента, можно найти выходную величину при заданной входной

$$y(p) = K_{yx}(p) x(p) \quad (1.5)$$

Из свойств преобразования Лапласа известно, что преобразование Лапласа от свертки равно произведению изображений исходных функций. Соответственно обратное преобразование Лапласа от произведения изображений равно свертке. Если взять обратное преобразование Лапласа от правой части (1.5), то получим свертку входного сигнала и обратного преобразования от передаточной функции.

$$y(t) = L^{-1} \{ K_{yx}(p) x(p) \} = \int g(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

С другой стороны правая часть (1.6) это интеграл Дюамеля. Таким образом, обратное преобразование Лапласа от передаточной функции это импульсная характеристика системы.

$$g(t) = L^{-1} \{ K_{yx}(p) \} \quad (1.7)$$

И соответственно преобразование Лапласа от импульсной характеристики - коэффициент передачи системы

$$K_{yx}(p) = L \{ g(t) \} \quad (1.8)$$

1.2. Примеры решения типовых задач на математическое описание динамических звеньев

1.2.1. Определить передаточную функцию элемента, динамика которого описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = ku$$

где u - входная величина; ω - выходная величина; $T, k = const.$

Решение.

Произведем замену $\frac{d}{dt} = p$ и получим $\omega(Tp+1) = ku$.

Из определения передаточной функции элемента следует, что

$$K(p) = \frac{\omega}{u}$$

Окончательно имеем $K(p) = \frac{k}{Tp+1}$

1.2.2. Определить передаточную функцию элемента, динамика которого описывается дифференциальным уравнением

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + rC \frac{du}{dt} + u = L \frac{di}{dt} + ri$$

где i - входная величина; u - выходная величина; $L, C, r = const.$

Произведем замену $\frac{d}{dt} = p$ и получим $(LCp^2 + rCp + 1)u = (Lp + r)i$.

Передаточная функция элемента по определению $K(p) = u/i$.

Соответственно получим

$$K(p) = \frac{Lp + r}{LCp^2 + rCp + 1}$$

1.2.3. Написать дифференциальное уравнение элемента, если задана его передаточная функция

$$K(p) = \frac{kp}{p(1+Tp)}$$

Решение.

$$K(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

Помня, что получим:

$$p(1+Tp)y(p) = kp x(p)$$

Заменим p на $\frac{d}{dt}$ и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(1 + T \frac{d}{dt} \right) y(t) = k \frac{d}{dt} x(t)$$

или

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = k \frac{dx}{dt}$$

1.3. Задачи

1.3.1. Задача

Задан оператор линейной стационарной системы $y(t) = A[x(t)]$

Требуется определить передаточную функцию системы $K_{yx}(p)$ по дифференциальному уравнению системы.

Варианты заданий приведены в таблице 1.

1.3.2. Задача

Задана передаточная функция линейной системы $K_{yx}(p)$.

Требуется определить дифференциальное уравнение системы.

Варианты заданий приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.1

Номер варианта	$y(t) = A[x(t)]$
1	$8y'''(t) + 2y''(t) + 2y'(t) = x'(t) + 10x(t)$
2	$y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 3x''(t) + 10x'(t)$
3	$2y'''(t) + 8y''(t) = 16x''(t) + 4x'(t) + 4x(t)$
4	$y'''(t) + 0,5y(t) = 2x'(t) + 5x(t)$
5	$0,5y''(t) + y'(t) + 2y(t) = x'''(t) + 5x''(t)$
6	$10y'''(t) + 2y''(t) + 2,5y'(t) = 10x'(t) + 25x(t)$
7	$0,1y''(t) + 0,2y'(t) + 0,1y(t) = 0,5x''(t) + x'(t)$
8	$y'''(t) + 5y''(t) = 2x''(t) + x'(t) + 2x(t)$
9	$2y'''(t) + 0,5y'(t) = x'(t) + 8x(t)$
10	$0,2y''(t) + 0,1y'(t) + 0,2y(t) = 3x'''(t) + 2x''(t)$

11	$0,05y'''(t) + 0,5y''(t) + 5y'(t) = 40x'(t) + 20x(t)$
12	$0,75y''(t) + 1,5y'(t) + 3y(t) = 30x''(t) + 15x(t)$
13	$0,4y'''(t) + 2y''(t) = 10x'(t) + 5x(t)$
14	$2y'''(t) + y'(t) + 0,5y(t) = 1,5x'''(t) + 3x''(t)$
15	$3y'''(t) + 10y''(t) = 1,6x''(t) + 2x'(t) + 10x(t)$
16	$4y'''(t) + 6y''(t) + 2y'(t) = 4x'(t) + 8x(t)$
17	$8y''(t) + 2y(t) = 10x''(t) + 20x'(t)$
18	$y'''(t) + 4y'(t) = 16x''(t) + 24x'(t) + 8x(t)$
19	$0,5y'''(t) = 2x''(t) + 5x'(t) + 2x(t)$
20	$3y''(t) + 7,5y'(t) + 3y(t) = 15x'''(t)$
21	$y'''(t) + 5y''(t) = 4x'(t) + 10x(t)$
22	$2,5y'''(t) + 0,5y''(t) + 0,1y(t) = 4x'(t) + 2x(t)$
23	$0,1y''(t) + 0,5y'(t) + 2,5y(t) = 5x''(t) + 10x'(t)$
24	$2y''(t) + y'(t) + 0,5y(t) = 3x'''(t) + 5x''(t)$
25	$0,6y'''(t) + 3y''(t) = 15x''(t) + 7,5x'(t) + 15x(t)$
26	$y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 10x'(t) + 5x(t)$
27	$5y'''(t) + 0,2y(t) = 4x''(t) + 2x(t)$
28	$5y'''(t) + 5y'(t) = 10x''(t) + 25x'(t) + 10x(t)$
29	$4y'''(t) = 4x''(t) + 6x'(t) + 2x(t)$
30	$1,5y''(t) + 2y'(t) + 0,5y(t) = 3x'''(t)$

Таблица 1.2

Номер вар.	$K_{xy}(p)$	Номер вар.	$K(p)$
1	$K_{xy}(p) = \frac{p + 10}{8p^3 + 2p^2 + p}$	16	$K_{xy}(p) = \frac{p^2 + p + 10}{12p^2 + 4p}$
2	$K_{xy}(p) = \frac{p + 10}{8p^3 + 2p^2 + 1}$	17	$K_{xy}(p) = \frac{p^2 + p + 10}{8p^3 + 3p}$
3	$K_{xy}(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + p}{p^3 + 10p^2 + p + 12}$	18	$K_{xy}(p) = \frac{2p(p^2 + p)}{7p^3 + p + 12}$
4	$K_{xy}(p) = \frac{p(p^3 + 3p^2)}{4p^3 + 7}$	19	$K_{xy}(p) = \frac{p(p^3 - 2)}{4p^3 + 5}$
5	$K_{xy}(p) = \frac{5(4p + 1)}{4p^2 + p + 2}$	20	$K_{xy}(p) = \frac{p(4p + 1)}{12p^3 + p^2 + 2}$
6	$K_{xy}(p) = \frac{100(0,5p + 1)}{p^2(p + 2)}$	21	$K_{xy}(p) = \frac{100(0,5p + 1)}{p^2(p + 2)}$
7	$K_{xy}(p) = \frac{100(0,5p + 1)}{p^2(p^2 + 2)}$	22	$K_{xy}(p) = \frac{10(2p - 7)}{p^2(3p^2 - 2)}$
8	$K_{xy}(p) = \frac{10}{p^2(p + 2)(p + 1)}$	23	$K_{xy}(p) = \frac{10p}{p(p + 5)(p - 1)}$
9	$K_{xy}(p) = \frac{10}{p(p + 2)^2}$	24	$K_{xy}(p) = \frac{10 - 8p}{p^2(p + 2)^2}$
10	$K_{xy}(p) = \frac{10p + 1}{(p + 2)^2}$	25	$K_{xy}(p) = \frac{10p^2 + 4}{(p - 3)^2}$
11	$K_{xy}(p) = \frac{7p}{p^2(p + 2)}$	26	$K_{xy}(p) = \frac{7p + 1}{p^2(p - 7)}$
12	$K_{xy}(p) = \frac{7p(p + 1)}{p^2}$	27	$K_{xy}(p) = \frac{7p(p + 1)}{p^2 + p^3}$

13	$K_{xy}(p) = \frac{7p^2(p+1)}{p^2(0.5p-7)}$	28	$K_{xy}(p) = \frac{7p(p-12)}{p^2(2p+2)}$
14	$K_{xy}(p) = \frac{7(p+1)}{p(0.5p-7)-4}$	29	$K_{xy}(p) = \frac{3(p+p^2)}{p(2p+1)-5p}$
15	$K_{xy}(p) = \frac{10}{p(p-7)-4p^3}$	30	$K_{xy}(p) = \frac{10p}{p(p^2-p)+4p^3}$

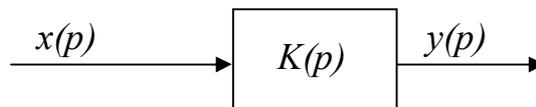
Глава 2. Преобразования структурных схем систем автоматического управления

2.1. Структурные схемы

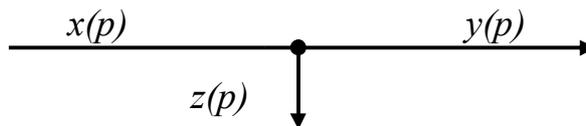
В радиоавтоматике широко используется понятие *структурная схема*. Под структурной схемой понимают условное графическое изображение математической модели автоматической системы управления в виде соединения звеньев.

Звено на структурной схеме изображается в виде прямоугольника, внутри которого пишут передаточную функцию или ее символ.

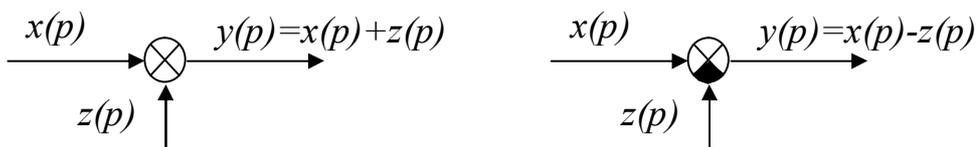
Каждое звено имеет одну входную и одну выходную величины, которые изображаются стрелками с соответствующей надписью около нее.



Если выходная величина какого-то звена воздействует на несколько звеньев, то этот сигнал разветвляют точкой, от которой отходит необходимое число стрелок.



Если сигналы суммируются или вычитаются, то на структурной схеме это обозначается окружностью с несколькими секторами в которую приходят суммируемые сигналы. Закрашенный сектор обозначает вычитание сигнала :



Типовой задачей при анализе систем радиоавтоматики является приведение структурной схемы к "расчетному виду" от заданного входа до заданного выхода. Фактически это обозначает вычисление по структурной схеме соответствующей передаточной функции. Для такого расчета широко применяются *эквивалентные преобразования структурных схем*. Эквивалентное преобразование позволяет заменить несколько звеньев одним элементом с эквивалентным коэффициентом передачи. Для преобразования в структурной схеме выделяют стандартные комбинации соединения звеньев.

Другой типовой задачей является преобразование структурной схемы системы к другому виду. При этом передаточная функция системы должна остаться неизменной. Такое преобразование обычно состоит в эквивалентной замене одного типа соединения звеньев другим типом соединений.

Традиционно выделяют следующие стандартные типы соединений: *последовательное, параллельное, встречно-параллельное (с обратной связью)*.

При последовательном соединении звеньев выходная величина каждого звена, кроме последнего, является входной для последующего звена.

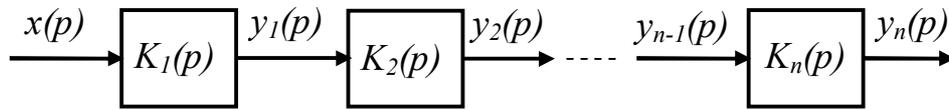


Рис. 2.1

При преобразовании схемы цепочку последовательно соединенных звеньев

$$K(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p).$$

можно заменить одним звеном, с передаточной функцией

При параллельном соединении все звенья имеют одну и ту же входную величину, а их выходные величины суммируются.

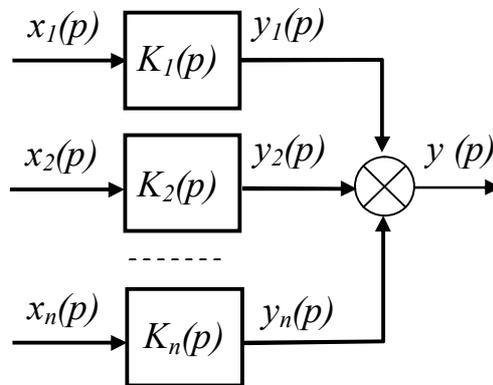


Рис. 2.2

$$K(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p)$$

Эквивалентная передаточная функция

Встречно-параллельное соединение образует замкнутую систему с обратной связью. При отрицательной обратной связи

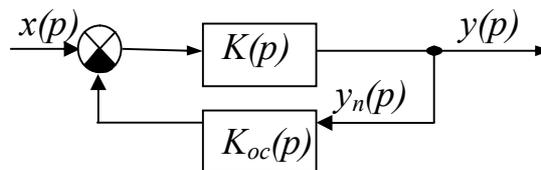
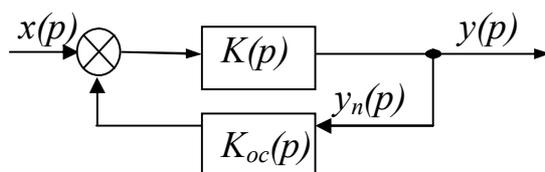


Рис. 2.3

$$K_{yx}(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)K_{oc}(p)},$$

передаточная функция определяется из выражения

где $K(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы, $K_{oc}(p)$ - передаточная функция звена (звеньев), находящихся в обратной цепи. При положительной обратной связи



передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

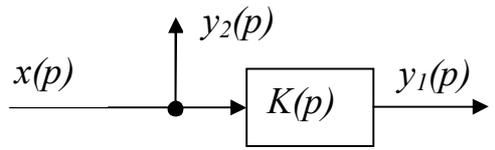
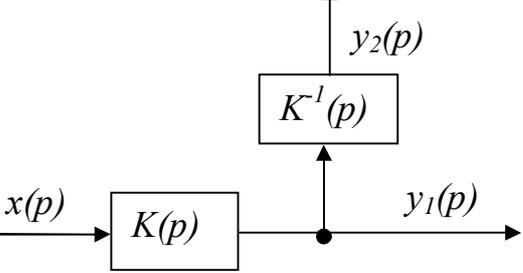
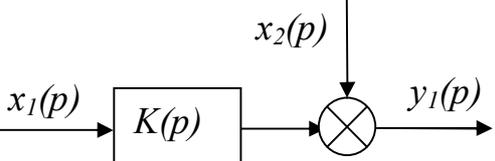
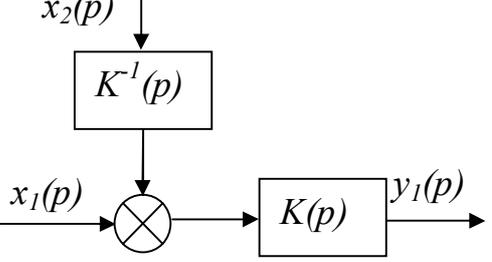
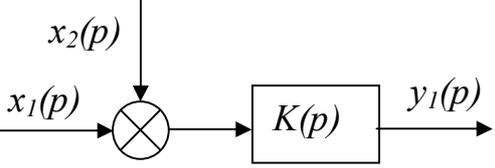
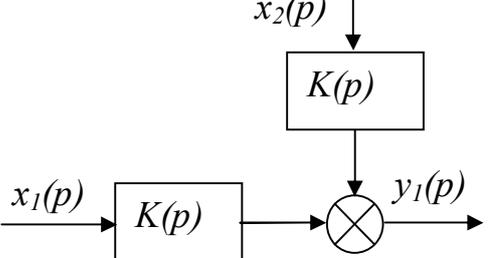
$$K_{yx}(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)K_{oc}(p)}$$

Структурные преобразования являются эквивалентными, если они сохраняют неизменными все входные и выходные сигналы.

Основные правила преобразования структурных схем линейных систем приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка сумматоров	<p>$y(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p) + x_4(p)$</p>	<p>$y(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p) + x_4(p)$</p>
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла со входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		

Перенос узла со входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора со входа на выход звена		

2.2. Стандартные приемы преобразования структурных схем

2.2.1. Узлы на входе и выходе звена

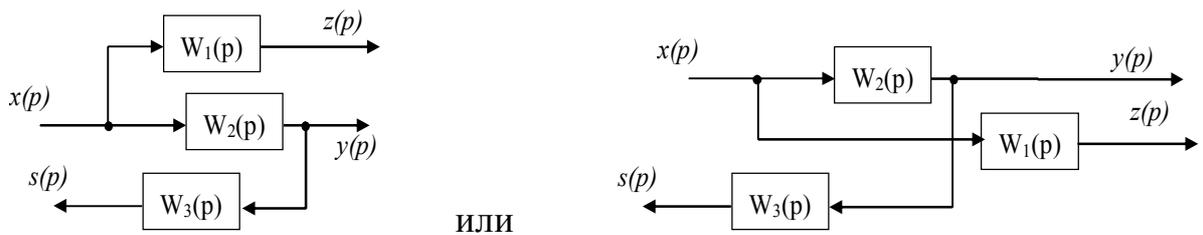


Рис. 2.4

Согласно правилам переноса узла со входа на выход элемента схему на Рис. 2.2.1 можно представить в виде

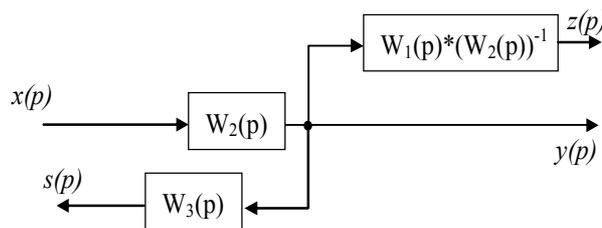


Рис. 2.5

Так же согласно правилам переноса узла с выхода на вход элемента схему на Рис. 2.4 можно представить в виде

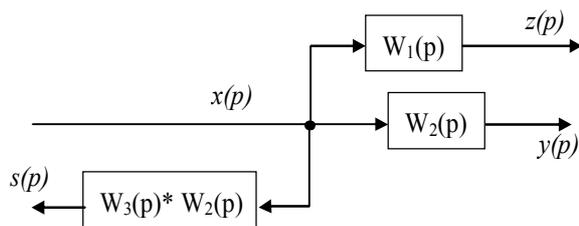


Рис. 2.6

2.2.2. Сумматоры на входе и выходе звена

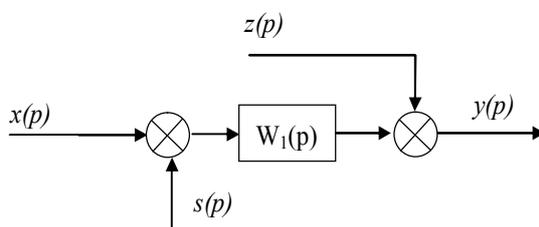


Рис. 2.7

Согласно правилам переноса сумматора со входа на выход элемента схему на Рис. 2.7 можно представить в виде

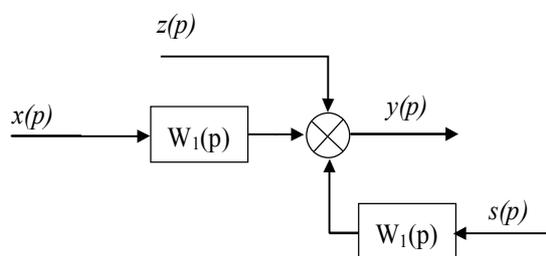


Рис. 2.8

Так же согласно правилам переноса узла с выхода на вход элемента схему на Рис. 2.7 можно представить в виде

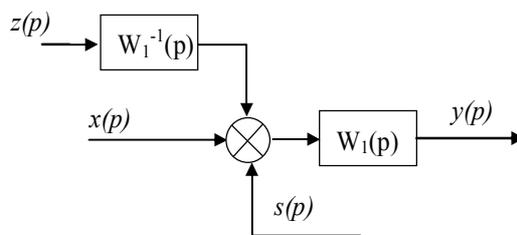


Рис. 2.9

2.2.3. Возмущающее воздействие внутри кольца обратной связи

Рассмотрим ситуацию, когда в кольце обратной связи присутствует дополнительное возмущающее воздействие.

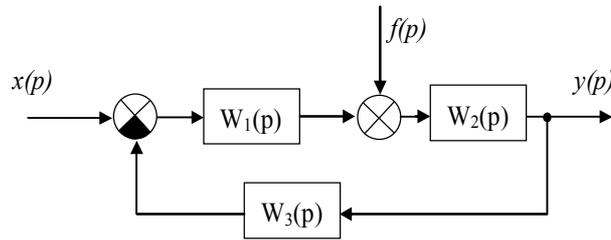


Рис. 2.10

Для того чтобы привести структурную схему на Рис. 2.10 к расчетному виду, необходимо вынести входное воздействие $f(p)$ из кольца. Это можно сделать двумя способами.

а) Наиболее универсальный и предпочтительный - перенос внешнего воздействия на вход системы. Сделать это можно согласно правилам переноса сумматора с выхода на вход элемента с учетом того, что последовательно включенные сумматоры можно менять местами.

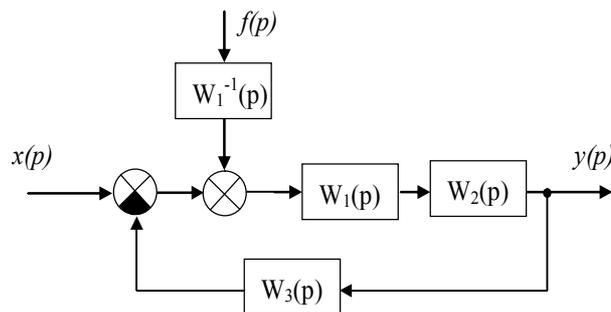


Рис. 2.11

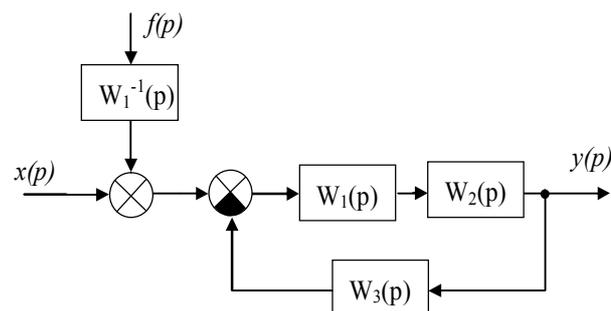


Рис. 2.12

б) Можно вынести воздействие за кольцо - на выход системы. Для этого необходимо воспользоваться правилом переноса сумматора со входа на выход звена. При этом следует учитывать, то звеном является все кольцо, состоящее из элементов W_1 , W_2 , W_3 . Для переноса следует найти коэффициент передачи от места поступления входного воздействия, до точки, в которую оно переносится W_{fy} .

$$W_{fy} = W_2 / (1 + W_1 W_2 W_3)$$

Соответственно эквивалентная схема будет выглядеть следующим образом:

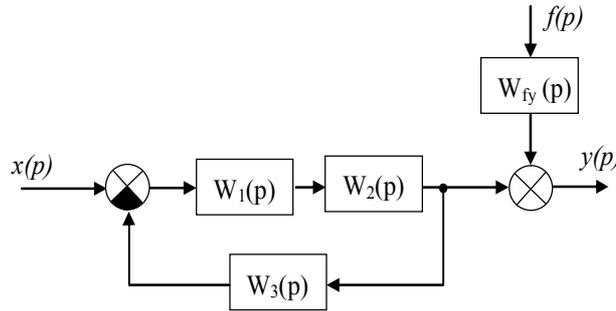


Рис. 2.13

2.2.4. Перекрестное входное воздействие внутри кольца обратной связи

Пусть входное воздействие через дополнительное звено поступает внутрь кольца

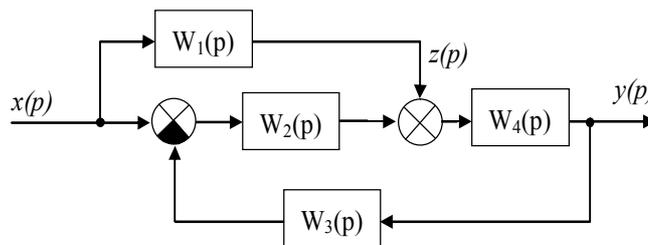


Рис. 2.14

Фактически это эквивалентно задаче с возмущающим воздействием внутри кольца. Необходимо только учитывать, что в систему поступает часть входного сигнала $x(p)$.

Есть два основных варианта преобразования структурной схемы к расчетному виду

а) Перенос сигнала $z(p)$ на вход кольца. Этот способ наиболее прост и удобен.

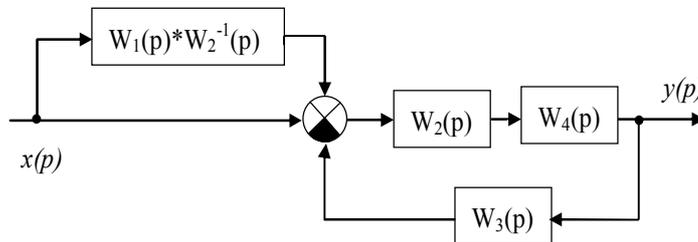


Рис. 2.15

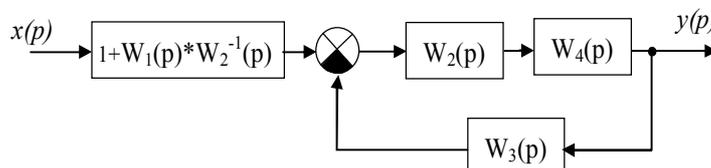


Рис. 2.16

б) Перенос сигнала $z(p)$ за кольцо

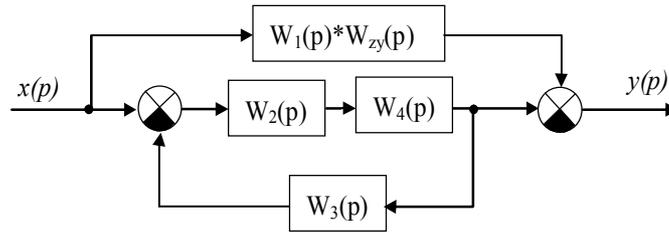


Рис. 2.17

где коэффициент передачи
 $W_{zy} = W_4 / (1 + W_2 W_3 W_4)$

2.3. Примеры решения типовых задач на преобразования структурных схем систем

2.3.1. Требуется определить все основные передаточные функции системы, структурная схема которой показана на Рис. 2.18.

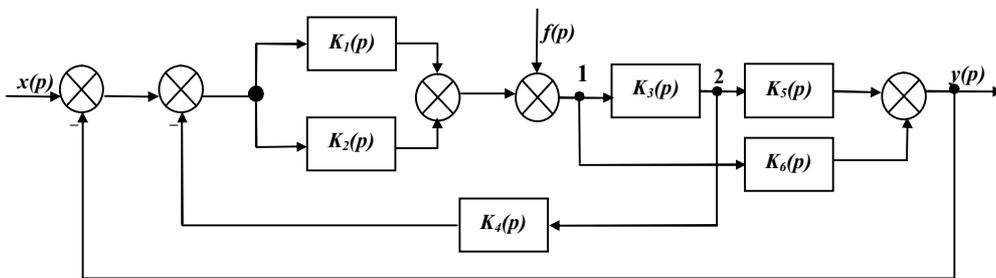


Рис. 2.18

$$K_1(p) = 2/p, K_2(p) = 1, K_3(p) = 1/2, K_4(p) = 2, K_5(p) = 1/p, K_6(p) = 2/p.$$

Решение.

1. Определение передаточной функции разомкнутой системы $K(p)$:

а) приведение заданной структурной схемы с помощью структурных преобразований к одноконтурному виду:

- перенос узла 1 через элемент $K_3(p)$ и узел 2 (Рис. 2.19)

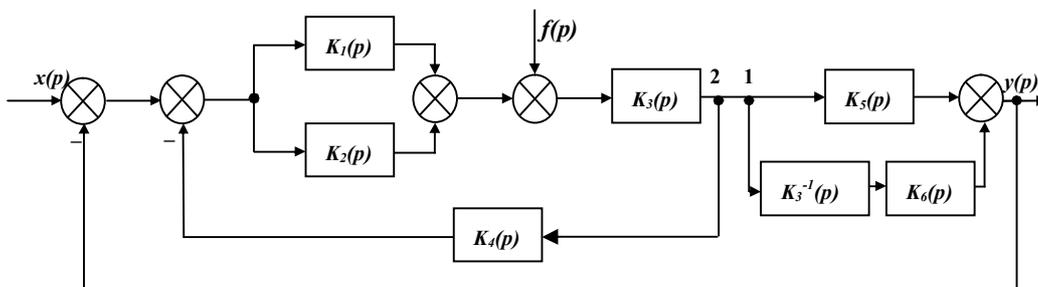


Рис. 2.19

- определение передаточных функций параллельных соединений (Рис. 2.20)

$$K_{1,2}(p) = K_1(p) + K_2(p) = \frac{2}{p} + 1 = \frac{2(0,5p+1)}{p};$$

$$K_{5,6}(p) = K_5(p) + \frac{K_6(p)}{K_3(p)} = \frac{1}{p} + \frac{4}{p} = \frac{5}{p}.$$

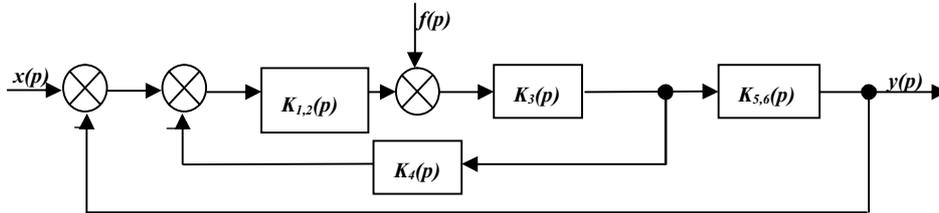


Рис. 2.20

- перенос возмущения $F(p)$ через элемент $K_{1,2}(p)$ против хода сигнала (Рис. 2.21)

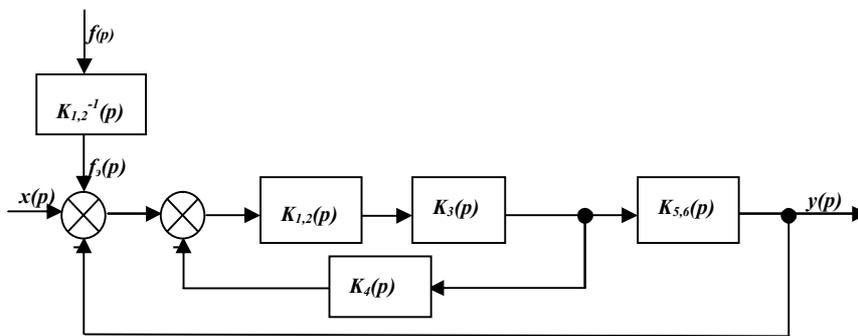


Рис. 2.21

- определение передаточной функции встречно-параллельного соединения (Рис. 2.22)

$$K_0(p) = \frac{K_{1,2}(p)K_3(p)}{1 + K_{1,2}(p)K_3(p)K_4(p)} = \frac{2(0,5p+1) \cdot 0,5}{1 + \frac{2(0,5p+1) \cdot 0,5 \cdot 2}{p}} = \frac{0,5(0,5p+1)}{p+1}.$$

и эквивалентного возмущения (см. Рис. 1.4 и 1.5)

$$F_3(p) = F(p) \frac{1}{K_{1,2}(p)}$$

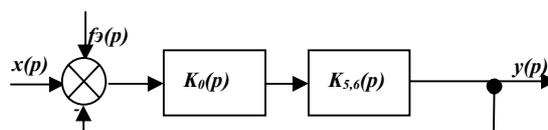


Рис. 2.22

б) определение передаточной функции разомкнутой системы $K(p)$ (Рис. 2.23)

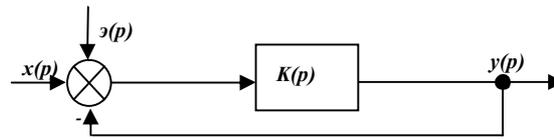


Рис. 2.23

$$K(p) = K_0(p)K_{5,6}(p) = \frac{0,5(0,5p+1)}{p+1} \cdot \frac{5}{p} = \frac{2,5(0,5p+1)}{p(p+1)}$$

2. Определение передаточной функции замкнутой системы $K_{yx}(p)$

$$K_{yx}(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{2,5(0,5p+1)}{p(p+1)+2,5(0,5p+1)} = \frac{0,5p+1}{0,4p^2+0,9p+1}$$

3. Определение передаточной функции от возмущения $K_f(p)$

$$K_f(p) = \frac{K_{yx}(p)}{K_{1,2}(p)} = \frac{p}{2(0,5p+1)} \cdot \frac{0,5p+1}{0,4p^2+0,9p+1} = \frac{0,5p}{0,4p^2+0,9p+1}$$

4. Определение передаточной функции ошибки от задающего воздействия

$$K_{ex}(p) = -\frac{1}{1+K(p)} = K_{yx}(p) - 1 = -\frac{0,4p(p+1)}{0,4p^2+0,9p+1}$$

2.4. Задачи

2.4.1 Задача

На рисунке 2.24 показаны структурные схемы соединений звеньев.

Требуется:

а) определить передаточную функцию $K_{xy}(p)$ заданного соединения;

б) определить, какому элементарному динамическому звену соответствует полученная функция $K(p)$ и определить параметры этого звена.

Варианты заданий приведены в таблице 2.2.

2.4.2 Задача

Структурные схемы соединений звеньев показаны на рисунке 2.25

Требуется определить передаточную функцию $K_{xy}(p)$ заданного соединения;

2.4.3. Задача

Для автоматических систем, структурные схемы которых показаны на рисунке 2.26, требуется определить все основные передаточные функции.

2.4.4. Задача

Выполнить структурные преобразования для линейных систем автоматического регулирования (Рис. 2.27) и привести их к расчетному виду.

2.4.5. Задача

Выполнить структурные преобразования для линейных систем автоматического регулирования (Рис. 2.28) и привести их к расчетному виду.

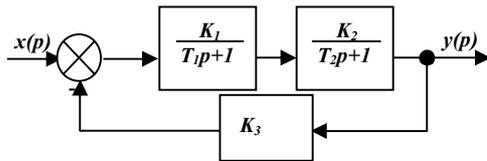


Схема 1

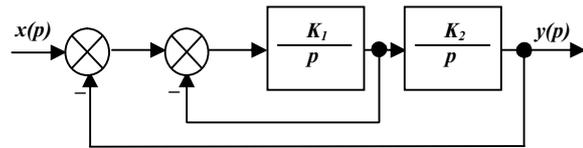


Схема 4

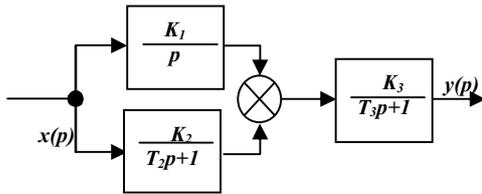


Схема 2

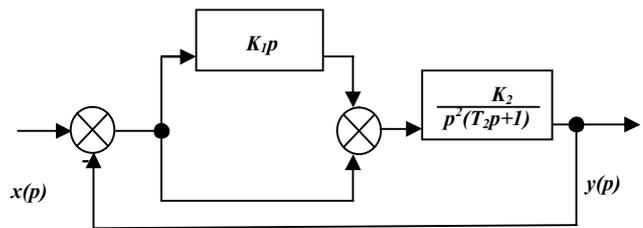


Схема 5

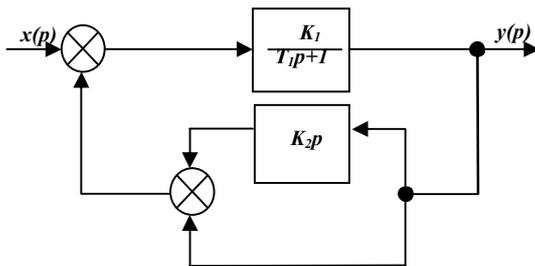


Схема 3

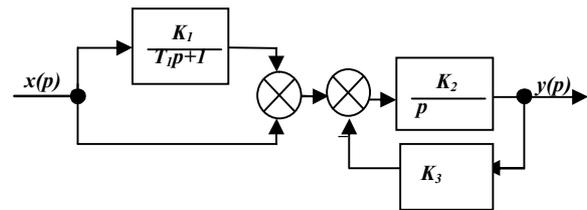


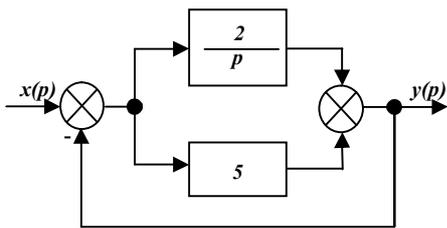
Схема 6

Рис. 2.24

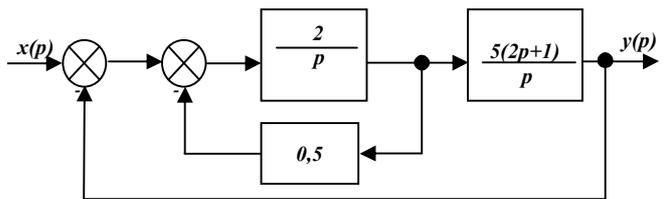
Таблица 2.2

Номер вар.	1	2	3	4	5	6
Номер схемы	1	1	1	1	1	1
K_1	1	2	3	4	5	3,5
T_1, c	0,6	0,625	0,7	0,75	1	1,5
K_2	3,1	3,5	2,6	1,75	0,3	2

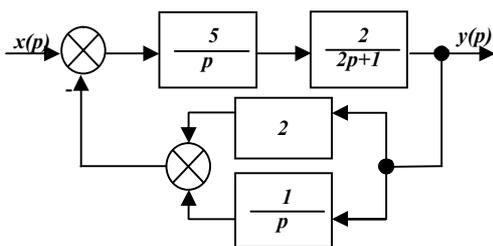
$T_2, \text{с}$	3	2,5	1,75	1,5	1	0,75
K_3	2	0,75	0,5	0,5	2	0,5
Парам. / Номер вар.	7	8	9	10	11	12
Номер схемы	2	2	2	2	2	2
$K_1, \text{с}^{-1}$	10	9	8	7	6	5
K_2	2	4,5	4	3,5	3	2
$T_2, \text{с}$	0,3	1,5	2,5	0,5	1	0,2
$K_3, \text{с}$	4	1	1,25	0,1	0,5	3
$T_3, \text{с}$	0,5	2	3	0,2	0,9	1
Парам. / Номер вар.	13	14	15	16	17	18
Номер схемы	3	3	3	3	3	3
K_1	1	2	3	4	5	6
$T_1, \text{с}$	0,5	0,6	0,4	1	2	1
$K_2, \text{с}$	1,5	1,2	1,2	1	2	1
Парам. / Номер вар.	19	20	21	22	23	24
Номер схемы	4	4	4	4	4	4
$K_1, \text{с}^{-1}$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,8	1,25
$K_2, \text{с}^{-1}$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,8	1,25
Парам. / Номер вар.	25	26	27	28	29	30
Номер схемы	5	5	5	5	5	5
$K_1, \text{с}$	1	2	3	4	5	6
$K_2, \text{с}^{-2}$	100	25	16	6,25	4	1
$T_2, \text{с}$	1	2	3	4	5	6
Парам. / Номер вар.	31	32	33	34	35	36
Номер схемы	6	6	6	6	6	6
K_1	1	1	1	1	1	2
$T_1, \text{с}$	0,2	0,4	0,5	0,8	1	1,5
$K_2, \text{с}^{-1}$	25	12,5	10	6,25	5	3,33
K_3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6



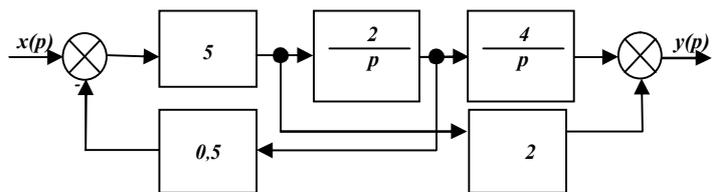
а



б



б



з

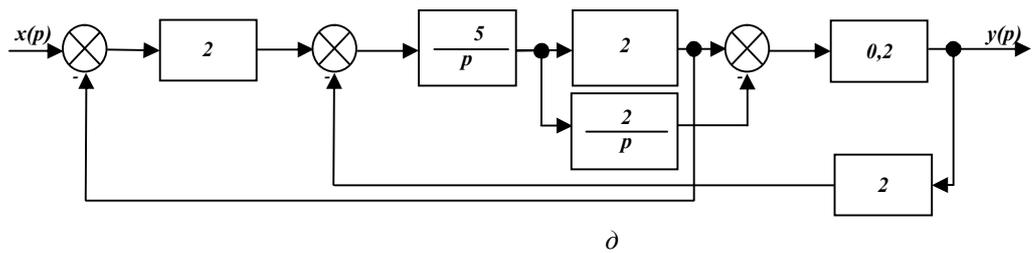


Рис. 2.25

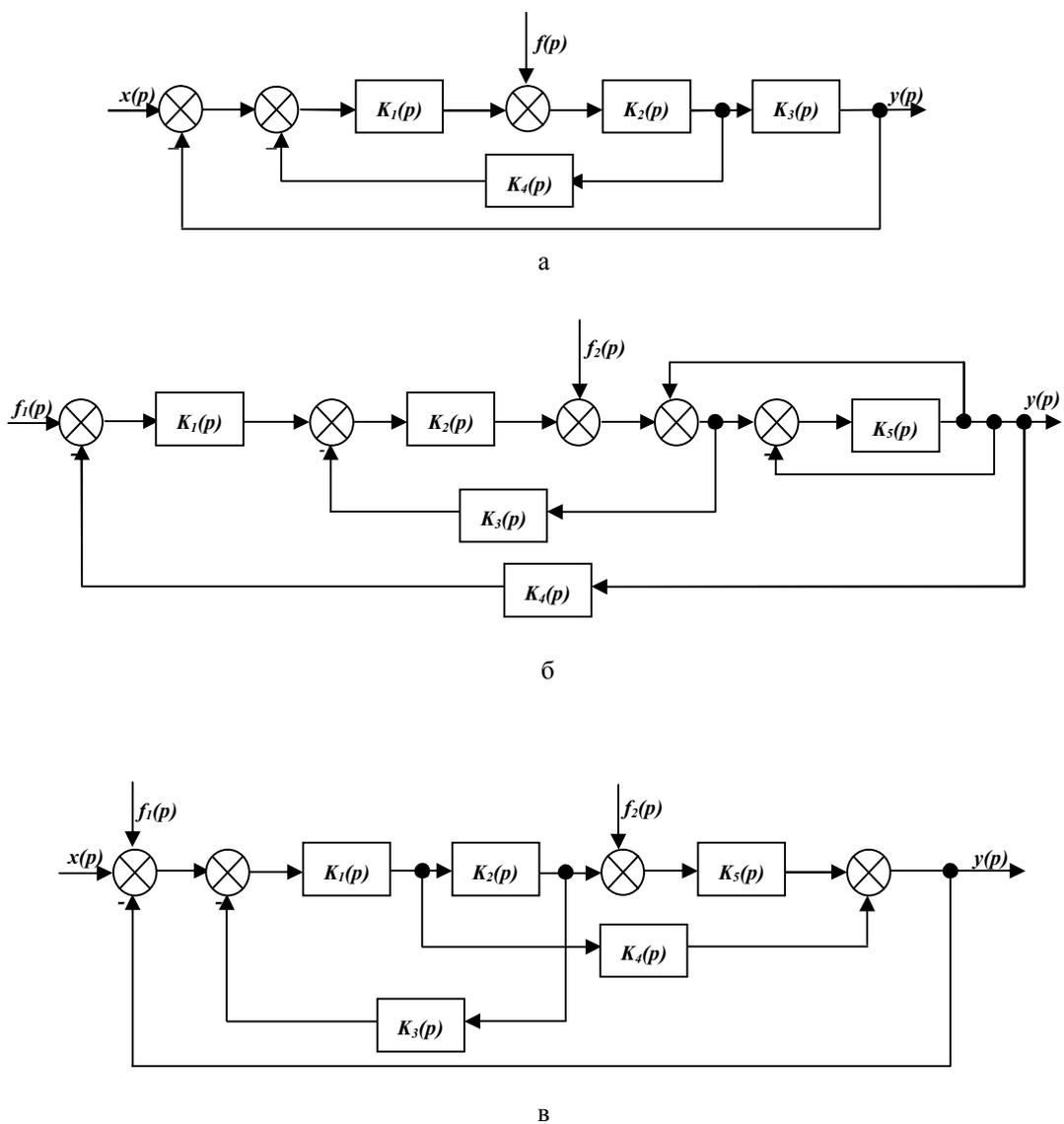
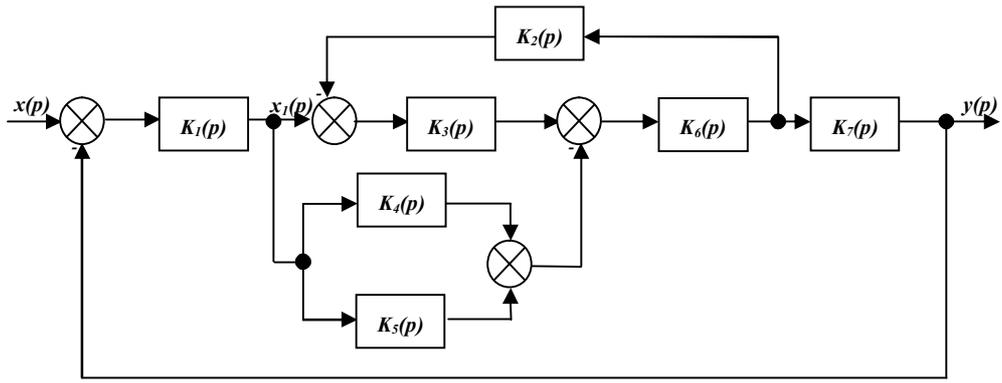
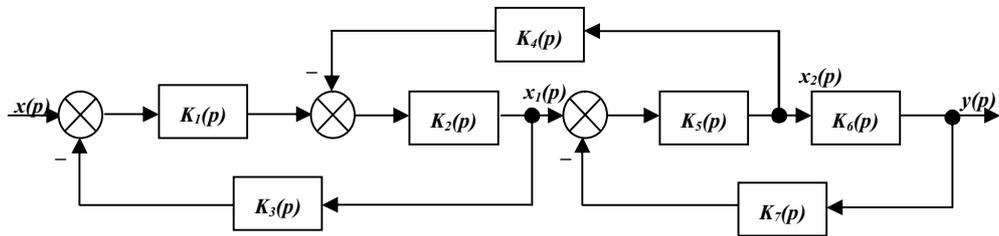


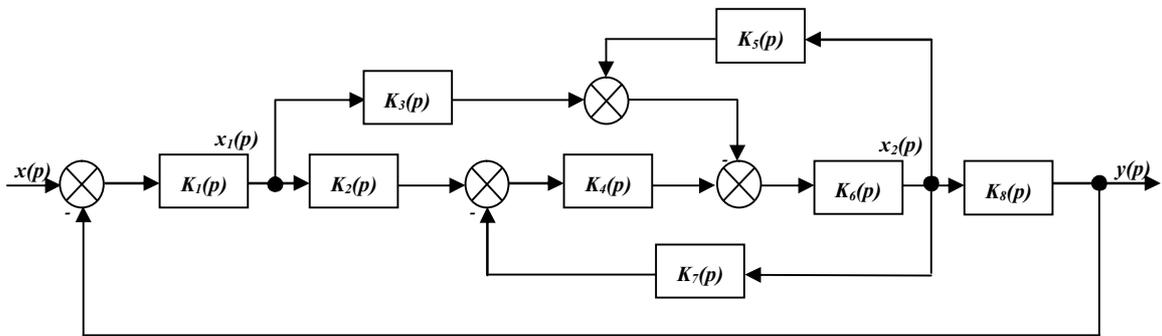
Рис. 2.26



a

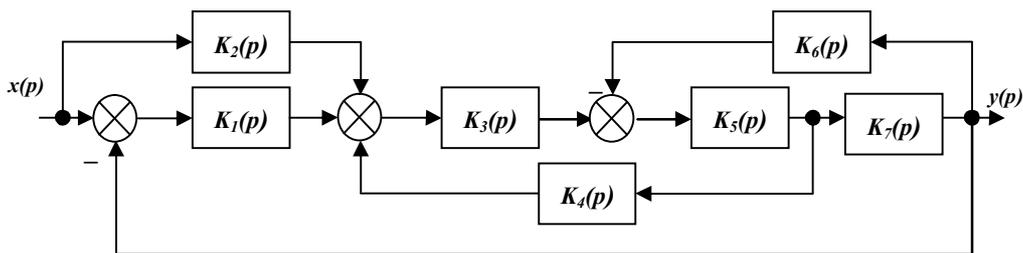


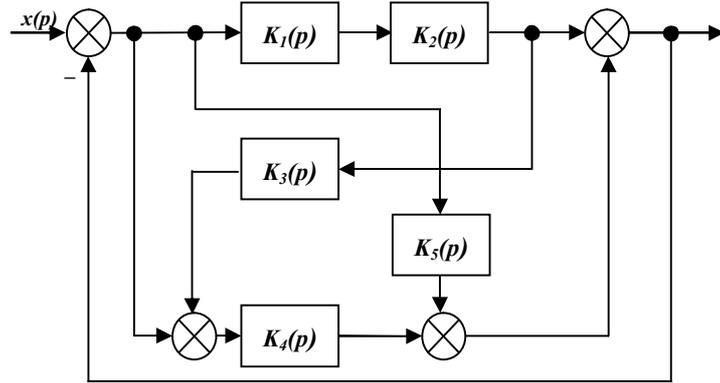
б



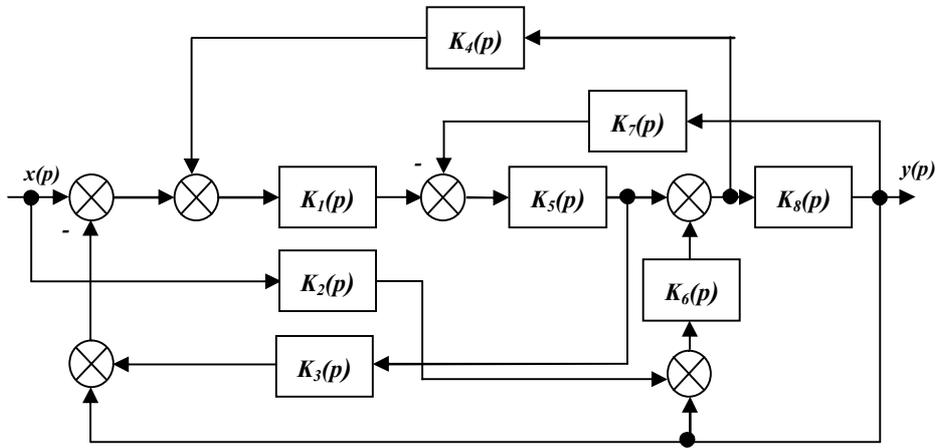
в

Рис. 2.27





б



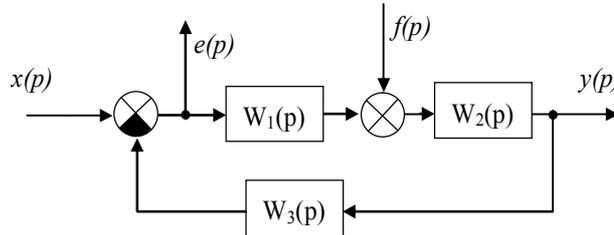
б

Рис. 2.28

Глава 3. Коэффициент передачи системы с обратной связью

3.1. Коэффициент передачи замкнутой системы

Рассмотрим САУ с обратной связью, структурная схема которой представлена на рис. 1



Найдем коэффициент передачи от входа системы $x(p)$ до выхода $y(p)$

$$e(p) = x(p) - W_3(p)y(p) \quad (3.1)$$

$$y(p) = W_1(p)W_2(p)e(p)$$

Из (1), следует что

$$W_y(p) = y(p)/x(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)} \quad (3.2)$$

Коэффициент передачи $W_y(p)$ называют *коэффициентом передачи замкнутой системы*. Часто его обозначают опуская индекс, просто $W(p)$.

Сигнал $e(p)$, равный рассогласованию выхода и входного воздействия, называют *сигналом ошибки*. Найдем коэффициент передачи от входа $x(p)$ до выхода $e(p)$. Из выражений (1) легко получить:

$$W_e(p) = e(p)/x(p) = \frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)} \quad (3.3)$$

Коэффициент передачи $W_e(p)$ называют *коэффициентом передачи по ошибке*.

Пусть в системе есть дополнительное возмущающее воздействие $f(p)$. Найдем коэффициент передачи от входа $f(p)$ до выхода $y(p)$:

$$y(p) = W_2(f(p) + W_1(p)W_3(p)y(p)) \quad (3.4)$$

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)}$$

Если сравнить выражения (2), (3) и (4), то легко заметить, что знаменатель имеет одинаковый вид: $1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)$, а числитель равен коэффициенту передачи от входа до выхода по кольцу. Величину равную произведению коэффициентов передачи всех звеньев в кольце $W_r(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ называют *коэффициентом передачи разомкнутой системы*.

Таким образом, чтобы найти коэффициент передачи системы с обратной связью необходимо найти $W_r(p)$ и коэффициент передачи от входа до выхода по кольцу. Итоговое выражение примет вид:

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{X_j(p)} = \frac{W_j(p)}{1+W_r(p)} \quad (3.5)$$

, где $x_j(p)$ вход системы, $W_j(p)$ коэффициент передачи от этого входа до выхода при движении по кольцу.

3.2. Примеры решения типовых задач на расчет коэффициентов передачи систем с обратной связью

Задача.

Пусть коэффициент передачи разомкнутой системы равен

$$W_r(p) = \frac{1}{p(1+T_1p)}$$

Необходимо найти коэффициент передачи замкнутой системы по ошибке

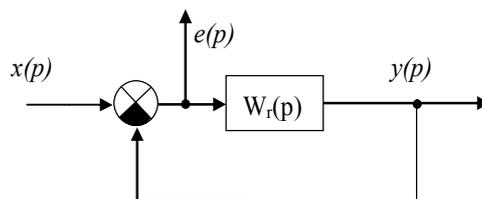
Решение

Согласно (5) выражение для КП по ошибке равно $W_e(p) = \frac{1}{1+W_r(p)}$, т.е.

$$W_e(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{p(1+T_1p)}} = \frac{p(1+T_1p)1}{p(1+T_1p)+1}$$

Задача.

Рассмотрим систему, структурная схема которой изображена на рисунке



Пусть коэффициент передачи замкнутой системы равен

$$W(p) = \frac{(1+T_1p)}{2+p(T_1+T_2)}$$

Необходимо вычислить коэффициент передачи разомкнутой системы $W_r(p)$

Решение

Согласно (5) выражение для КП замкнутой системы $W(p) = \frac{W_r(p)}{1+W_r(p)}$

Выразим отсюда $W_r(p)$:

$$W_r(p) = \frac{W(p)}{1-W(p)} = \frac{\frac{1+T_1p}{2+p(T_1+T_2)}}{1-\frac{1+T_1p}{2+p(T_1+T_2)}} = \frac{1+T_1p}{2+p(T_1+T_2)-(1+T_1p)} = \frac{1+T_1p}{1+T_2p}$$

3.3. Задачи

3.3.1. Задача

Для системы автоматического регулирования со структурной схемой, приведенной на Рис. 3.1 известен коэффициент передачи разомкнутой системы.

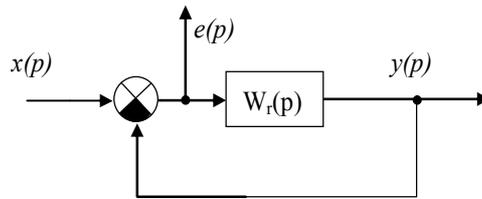


Рис. 3.1

Необходимо вычислить коэффициент передачи замкнутой системы и коэффициент передачи по ошибке $W_r(p)=K(p)$. Варианты заданий приведены в таблице 3.1.

3.3.2. Задача

Для системы автоматического регулирования со структурной схемой, приведенной на Рис. 3.1 известен коэффициент передачи замкнутой системы $W(p)=K(p)$. Необходимо вычислить коэффициент передачи системы по ошибке. Варианты заданий приведены в таблице 3.1.

3. Для системы автоматического регулирования со структурной схемой, приведенной на Рис. 3.1 известен коэффициент передачи замкнутой системы $W(p)=K(p)$. Необходимо вычислить коэффициент передачи разомкнутой системы. Варианты заданий приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Номер вар.	$K(p)$	Номер вар.	$K(p)$
1	$\frac{10}{p^2}$	16	$\frac{100(p+1)}{p(4p+1)}$
2	$\frac{5}{p^2(2p+1)}$	17	$\frac{5(2p+1)}{p(0,5p+1)}$
3	$\frac{2(p+1)}{p^2}$	18	$\frac{10}{p(2p+1)^2}$
4	$\frac{10(p+1)}{p(2p+1)}$	19	$\frac{5}{p(0,5p+1)^2}$
5	$\frac{5(4p+1)}{p(p+1)}$	20	$\frac{2}{(5p+1)(p+1)}$
6	$\frac{10(0,5p+1)}{p^2(2p+1)}$	21	$\frac{20}{(0,5p+1)^2}$
7	$\frac{100(2p+1)}{p^2(p+1)}$	22	$\frac{5}{p^2}$
8	$\frac{10}{(2p+1)(p+1)}$	23	$\frac{10}{p^2(p+1)}$
9	$\frac{5}{p(2p+1)^2}$	24	$\frac{25(p+1)}{p^2(2p+1)}$

10	$\frac{0,3}{p^2}$	25	$\frac{2(p+1)}{p^2(0,25p+1)}$
11	$\frac{2}{p^2(0,5p+1)}$	26	$\frac{10(4p+1)}{p(2p+1)}$
12	$\frac{4(2p+1)}{p^2}$	27	$\frac{5}{p(0,5p+1)^2}$
13	$\frac{10(4p+1)}{p^2(2p+1)}$	28	$\frac{25}{p(0,5p+1)}$
14	$\frac{5(0,2p+1)}{p^2(p+1)}$	29	$\frac{(2p+1)}{(4p+1)(p+1)^2}$
15	$\frac{5}{p(2p+1)}$	30	$\frac{5(p+1)}{(2p+1)(0,5p+1)^2}$

Глава 4. Временные характеристики линейных стационарных систем

4.1. Основные теоретические сведения

Единичной ступенчатой функцией $1(t)$ называется функция, удовлетворяющая равенствам:

$$\begin{cases} 1(t) = 0, & t \leq 0 \\ 1(t) = 1, & t > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{p} \quad (4.2)$$

График функции $1(t)$ показан на Рис. 4.1 а.

Смещенная единичная ступенчатая функция $1(t-\tau)$ определяется соотношениями вида:

$$\begin{cases} 1(t-\tau) = 0, & t \leq \tau \\ 1(t-\tau) = 1, & t > \tau \end{cases} \quad (4.3)$$

$$L\{1(t-\tau)\} = \frac{1}{p} e^{-\tau p} \quad (4.4)$$

График функции $1(t-\tau)$ приведен на рис.4.1 б.

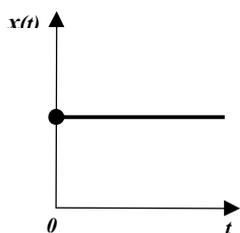


Рис. 4.1.а

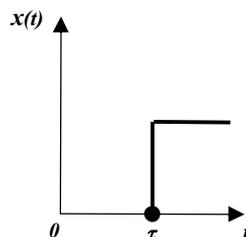


Рис. 4.1.б

Единичным импульсом, или дельта-функцией $\delta(t)$, называется функция, удовлетворяющая следующим равенствам:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.6)$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \quad (4.7)$$

Смещенная дельта-функция $\delta(t-\tau)$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{cases} \delta(t-\tau) = 0, & t \neq \tau \\ \delta(t-\tau) = \infty, & t = \tau \end{cases} \quad (4.8)$$

$$L\{\delta(t)\} = e^{-\tau p} \quad (4.9)$$

Импульсной характеристикой $k(t)$ одномерной системы с одним входом называется реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях.

Импульсная характеристика $k(t)$ удовлетворяет равенствам:

$$k(t)=0, \quad t \leq 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} K_{xy}(p) = L\{k(t)\} \\ k(t) = L^{-1}\{K_{xy}(p)\} \end{cases} \quad (4.11)$$

где $K_{yx}(p)$ - передаточная функция системы.

Импульсная характеристика определяет реакцию системы $y(t)$ на любой заданный входной сигнал $x(t)$ с помощью интеграла Дюамеля, который имеет вид:

- для момента включения системы $t = 0$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)k(\tau)d\tau; \quad (4.12)$$

- для произвольного момента включения t_0

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = \int_0^{t-t_0} x(t-\tau)k(\tau)d\tau; \quad (4.13)$$

- для установившегося режима $t = \infty$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)k(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} x(t-\tau)k(\tau)d\tau. \quad (4.14)$$

Переходной характеристикой $h(t)$ одномерной системы с одним входом называется реакция системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях.

Переходная характеристика $h(t)$ удовлетворяет равенствам:

$$h(t) = 0, \quad t \leq 0; \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \frac{K_{yx}(p)}{p} = L[h(t)]; \\ h(t) = L^{-1}\left[\frac{K_{yx}(p)}{p}\right]; \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} h(t) = \int_0^t k(\tau)d\tau; \\ \frac{dh(t)}{dt} = k(t). \end{cases} \quad (4.17)$$

Переходная характеристика определяет два основных показателя качества АС: *время регулирования* t_p и *перерегулирование* H_m . Временем регулирования называется время установления переходного процесса с точностью до 5% по отношению к установившемуся значению переходной функции $h(\infty)$. На рис.4.2 показан график типовой переходной функции.

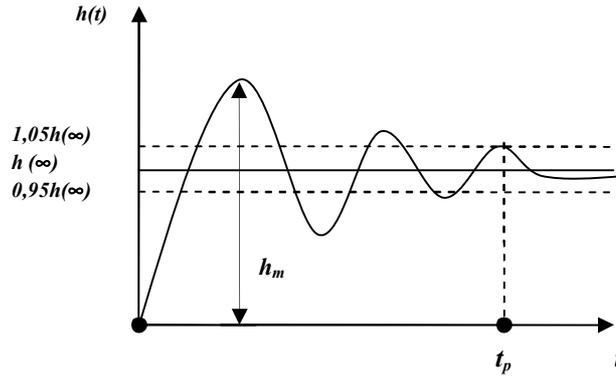


Рис. 4.2.

Из графика, по определению, следует, что время регулирования равно максимальной абсциссе точек пересечения графика $h(t)$ с прямыми $h = 1,05h(\infty)$ и $h = 0,95h(\infty)$.

Перерегулированием называется относительная величина максимального выброса переходной функции, выраженная в процентах, т.е.:

$$H_m = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% \quad (4.18)$$

где h_m - абсолютный максимум переходной функции (рис.4.2). Время, за которое устанавливается этот максимум, носит название время установления t_p .

4.2. Примеры решения типовых задач

4.2.1. Функция $x(t)$ задана графиком на рисунке 4.3.

Требуется записать аналитическое выражение $x(t)$ и определить его изображение по Лапласу.

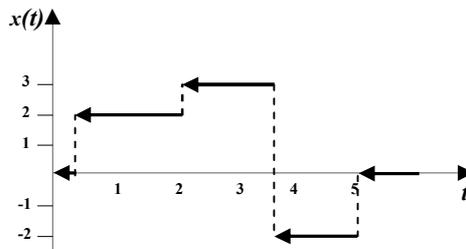


Рис. 4.3.

Решение.

Решение базируется на формулах 4.1-4.4.

$$x(t) = 2 \cdot 1(t-0,5) + 1(t-2) - 5 \cdot 1(t-3,5) + 2 \cdot 1(t-5);$$

$$L[x(t)] = X(p) = \frac{2}{p} e^{-0,5p} + \frac{1}{p} e^{-2p} - \frac{5}{p} e^{-3,5p} + \frac{2}{p} e^{-5p} =$$

$$= \frac{1}{p} (2e^{-0,5p} + e^{-2p} - 5e^{-3,5p} + 2e^{-5p}).$$

4.2.2. Структурная схема соединения звеньев показана на рисунке 4.4. Требуется определить импульсную и переходную характеристики системы и изобразить их графики.

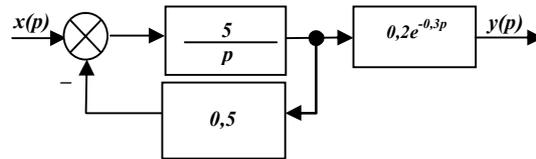


Рис. 4.4.

Решение.

Определение передаточной функции соединения $K_{yx}(p)$:

$$K_{xy}(p) = \frac{\frac{5}{p}}{1 + \frac{5}{p} \cdot 0.5} \cdot 0.2e^{-0.3p} = \frac{1}{p+2.5} \cdot e^{-0.3p} = \frac{0.4}{0.4p+1} \cdot e^{-0.3p}$$

Полученная передаточная функция позволяет представить исходное соединение звеньев эквивалентной схемой, показанной на рисунке 4.5, которая представляет собой последовательное соединение аperiodического звена с

$K_1(p) = \frac{k_1}{Tp+1} = \frac{0,4}{0,4p+1}$ и звена постоянного запаздывания с $K_2(p) = e^{-\tau \cdot p} = e^{-0,3p}$.

Для этой схемы
$$y(t) = \begin{cases} y_1(t-\tau), & t > \tau \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases}$$

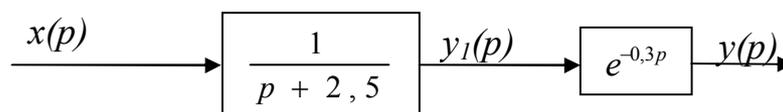


Рис. 4.5.

а) Определение импульсной характеристики.

1. Определение импульсной характеристики $k_1(t)$ соединения без учета звена постоянного запаздывания:

$$k_1(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p+2,5} \right] = e^{-2,5t}, \quad t > 0;$$

2. Определение импульсной характеристики всего соединения:

$$k(t) = k_1(t-\tau) = e^{-2,5(t-0,3)}, \quad t > 0,3.$$

График импульсной характеристики показан на рисунке 4.6.

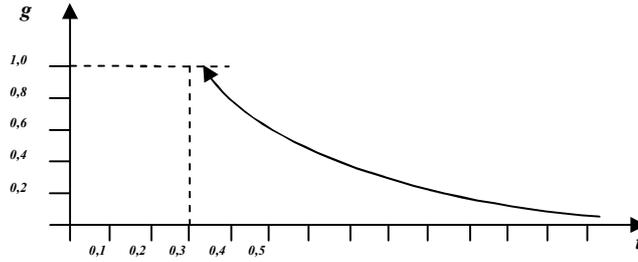


Рис. 4.6.

б) Определение переходной характеристики.

1. Определение переходной характеристики $h_1(t)$ соединения без учета звена постоянного запаздывания:

$$h_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+2.5)} \right\} = 1(1 - e^{-2.5t}), t > 0$$

2. Определение переходной характеристики всего соединения:

$$h(t) = h_1(t - \tau) = 1(1 - e^{-2.5(t-0.3)}), t > 0.3$$

График переходной характеристики показан на Рис. 4.7.

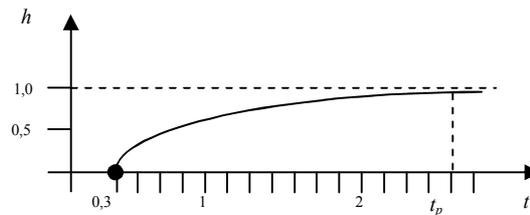


Рис. 4.7.

4.3. Задачи

4.3.1. Заданы функции $x(t)$:

1) $x(t) = 3 \cdot I(t)$;

2) $x(t) = -2 \cdot I(t-1)$;

3) $x(t) = 2 \cdot I(t) - 4 \cdot I(t-1) + I(t-2)$;

4) $x(t) = 0,2 \cdot I(t-0,2) + 4 \cdot I(t-1)$;

5) $x(t) = -I(t-1) + 3 \cdot I(t-3)$;

6) $x(t) = 4 \cdot I(t) - 2 \cdot I(t-1)$;

7) $x(t) = 0,5 \cdot I(t-2) - 4 \cdot I(t-3) + 3,5 \cdot I(t-5)$.

Требуется построить графики функций $x(t)$.

4.3.2. Заданы функции $x(t)$:

$x(t) = 2 \cdot \delta(t-2)$;

$x(t) = -\delta(t) + 5 \cdot \delta(t-3)$;

$x(t) = -2 \cdot \delta(t) + \delta(t-2)$;

$x(t) = \delta(t-3) - 0,5 \cdot \delta(t-10)$;

$$x(t) = 3 \cdot \delta(t-1) - \delta(t-3) + 2 \cdot \delta(t-4).$$

Требуется построить графики функций $x(t)$.

4.3.3. На Рис. 4.8 показаны графики функций $x(t)$.

Требуется записать аналитическое выражение $x(t)$ и определить его изображение по Лапласу.

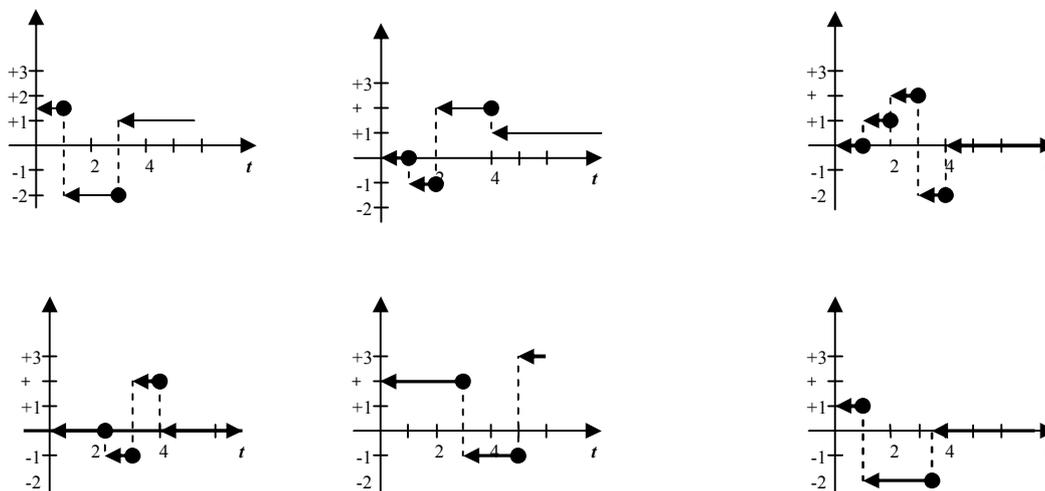


Рис. 4.8.

4.3.4. Заданы передаточные функции звеньев:

- | | | |
|------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 1) $K(p) = 3;$ | 4) $K(p) = \frac{2}{p};$ | 7) $K(p) = \frac{2}{p+1};$ |
| 2) $K(p) = -2;$ | 5) $K(p) = \frac{0,5}{p};$ | 8) $K(p) = -\frac{3}{2p+1};$ |
| 3) $K(p) = 1,5;$ | 6) $K(p) = -\frac{1}{p};$ | 9) $K(p) = \frac{1,5}{0,5p+1}.$ |

Требуется записать аналитические выражения для временных характеристик звеньев, построить графики временных характеристик и определить показатели качества звеньев.

4.3.5. Заданы передаточные функции звеньев:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| $K(p) = \frac{2}{p^2 + 0,5p + 1};$ | 4) $K(p) = 2e^{-p};$ |
| $K(p) = \frac{3}{p^2 + 1,4p + 1};$ | 5) $K(p) = 0,5e^{-2p};$ |
| $K(p) = \frac{4}{4p^2 + 4p + 1};$ | 6) $K(p) = 4e^{-0,5p}.$ |

Требуется записать аналитические выражения для временных характеристик звеньев, изобразить графически временные характеристики и определить показатели качества звеньев.

4.3.6. Заданы передаточные функции автоматических систем:

$$1) K_{yx}(p) = \frac{p^2}{(p+1)(0,5p+1)(0,2p+1)};$$

$$6) K_{yx}(p) = \frac{p}{0,5p+1};$$

$$2) K_{yx}(p) = \frac{5p}{(2p+1)(p+1)(0,5p+1)};$$

$$7) K_{yx}(p) = \frac{4p}{(2p+1)(p+1)};$$

$$3) K_{yx}(p) = \frac{3(2p+1)}{(p+1)(0,5p+1)(0,1p+1)};$$

$$8) K_{yx}(p) = \frac{2p}{(p+1)(0,2p+1)} e^{-p};$$

$$4) K_{yx}(p) = \frac{(p+1)^2}{(2p+1)(0,5p+1)(0,1p+1)};$$

$$9) K_{yx}(p) = \frac{3(p+1)}{2p+1};$$

$$5) K_{yx}(p) = \frac{3(p+1)}{(2p+1)(0,5p+1)};$$

$$10) K_{yx}(p) = \frac{4(0,5p+1)}{(2p+1)(0,1p+1)} e^{-2p}.$$

Требуется определить аналитические выражения временных характеристик и изобразить их графики.

4.3.7. На Рис. 4.9 показаны структурные схемы автоматических систем,

Требуется:

а) определить аналитические выражения временных характеристик систем и изобразить их графики;

б) определить перерегулирование H_m , время регулирования t_p и установившееся значение переходной функции.

Варианты заданий приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Парам. АС \ Номер вар.	1	2	3	4	5	6
Номер схемы	1	1	1	1	1	1
K_1	1	2	3	4	5	6
K_2	10	5	4	3	2	1
K_3	0,2	0,3	0,5	1	0,4	0,5
τ , с	2	1,5	1	0,8	0,5	0,4
T , с	3	2	1,5	1,2	1	0,5
Парам. АС \ Номер вар.	7	8	9	10	11	12
Номер схемы	2	2	2	2	2	2
K_1 , с ⁻¹	2	3	4	5	10	0,1
K_2 , с ⁻¹	3	1,5	2	2,5	4	1
T_1 , с	0,1	0,2	0,8	1	2	5
T_2 , с	0,4	0,45	0,2	0,25	0,36	0,2
Парам. АС \ Номер вар.	13	14	15	16	17	18
Номер схемы	3	3	3	3	3	3
K_1 , с ⁻¹	10	5	4	2,5	2	1

K_2	20	16	10	8	5	4
τ, c	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Парам. АС	Номер вар.					
Номер схемы	19	20	21	22	23	24
K_1, c^{-1}	4	4	4	4	4	4
K_2	0,1	0,2	0,4	0,5	1	2
T, c	2	3	4	5	6	7
Парам. АС	Номер вар.					
Номер схемы	25	26	27	28	29	30
K_1	5	5	5	5	5	5
K_2	10	9	8	7	6	5
K_2	8	6	4	2	1	9
τ, c	0,2	0,5	0,6	1	1,5	2
a_1, c	22	24	20	20	12	3,5
a_2, c^2	100	64	25	16	4	1

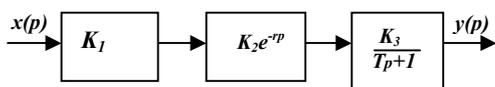


Схема 1

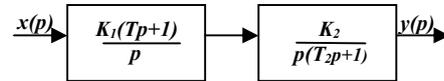


Схема 2

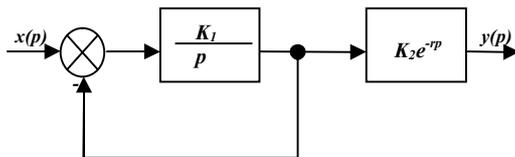


Схема 3

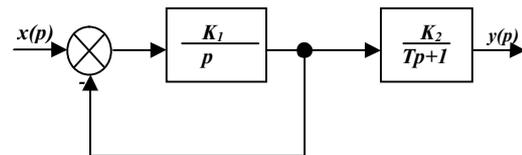


Схема 4

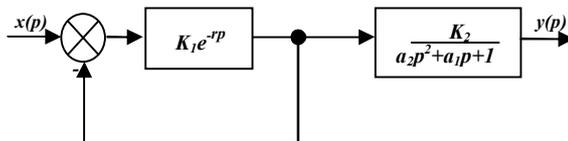


Схема 5

Рис. 4.9.

Глава 5. Частотные характеристики линейных стационарных систем

5.1. Основные теоретические сведения

Наряду с передаточными функциями динамику систем оценивают по частотным характеристикам, которые отражают зависимость амплитуды и фазы от частоты синусоидальных колебаний при прохождении их через звено или систему. Т.е., иначе говоря, устанавливают связь между спектрами входного процесса $x(j\omega)$ и выходного $y(j\omega)$. Для получения частотных характеристик на вход системы (звена) подают типовое гармоническое воздействие. На выходе появится сигнал той же частоты, но с другими амплитудой и фазой, которые зависят от частоты входного сигнала.

Если на вход системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением (1.1), будут подаваться гармонические воздействия $x(t)=A_1\sin\omega t$ постоянной амплитуды и разной частоты, то на выходе установятся синусоидальные колебания с другой амплитудой и сдвинутые по фазе на угол φ , $y(t)=A_2\sin(\omega t-\varphi)$. Эти сигналы можно записать в комплексной форме

$$\begin{aligned}x(j\omega) &= A_1(\omega)\exp[j\varphi_{\text{вх}}(\omega)]; \\y(j\omega) &= A_2(\omega)\exp[j\varphi_{\text{вых}}(\omega)].\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\text{Тогда } y(j\omega) = K_{yx}(j\omega)A_1(\omega)\exp[j\varphi_{\text{вх}}(\omega)] = K_{yx}(j\omega)x(j\omega)\tag{5.2}$$

где $K_{yx}(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{D(j\omega)}$ - комплексная частотная характеристика.

По полученным значениям x и y для различных частот ω получают частотные характеристики: амплитудную, фазовую и амплитудно-фазовую.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) есть зависимость отношения амплитуды колебаний гармонического воздействия на выходе к амплитуде колебаний на его входе от частоты колебаний ω .

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) отражает зависимость разности фаз между входными и выходными колебаниями от частоты колебаний.

Задавая различные частоты входному гармоническому воздействию, получают в результате серию точек, по которым строя частотные характеристики.

Амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) строят по амплитудной и фазовой характеристикам. С этой целью на графике ФЧХ для определенной частоты ω находят значение фазы $\varphi(\omega)$ и откладывают его в виде угла от горизонтальной оси (по часовой стрелке, если угол отрицательный, и против часовой стрелки, если угол положительный). На прямой, проведенной под этим углом, откладывают значения амплитуды, взятые с графика АЧХ при той же частоте, и получают точку характеристики для частоты ω . Затем аналогичным образом находят точки для других частот, соединив которые,

получают кривую АФЧХ. Таков путь экспериментального определения частотных характеристик.

Если в выражение передаточной функции звена или разомкнутой системы подставить $p=j\omega$, то получим выражение АФЧХ или частотной функции, представленное на комплексной плоскости как геометрическая сумма вещественной $Re(\omega)$ и мнимой $Im(\omega)$ частей комплексной частотной характеристики:

$$K_{yx}(j\omega) = Re K_{yx}(j\omega) + Im K_{yx}(j\omega) = R_{yx}(\omega) + jI_{yx}(\omega) \quad (5.3)$$

Амплитудная частотная характеристика определяется как

$$A_{yx}(\omega) = K_{yx}(\omega) = \sqrt{R_{yx}^2(\omega) + I_{yx}^2(\omega)}, \quad (5.4)$$

а фазовая:

$$\varphi_{yx}(\omega) = \text{arctg} \frac{I_{yx}(\omega)}{R_{yx}(\omega)}. \quad (5.5)$$

Подставляя в формулы (5.3) - (5.5) значения ω от 0 до ∞ строят амплитудную, фазовую и амплитудно-фазовую частотные характеристики отдельных звеньев и системы в целом.

При исследовании автоматических систем широкое применение находят графические способы представления частотных характеристик.

Годографом частотной характеристики $K_{yx}(j\omega)$ называется траектория точки $K_{yx}(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞ . Построение годографа проводится по парам вещественных характеристик: $A_{yx}(\omega)$, $\varphi_{yx}(\omega)$ или $R_{yx}(\omega)$, $I_{yx}(\omega)$, согласно вышеописанным методам. Стрелкой указывается направление возрастания частоты.

Для многих задач исследования АС представляет интерес общий вид годографа частотной характеристики, без детального его построения.

Для приближенного изображения годографа ЧХ системы с передаточной функцией вида

$$K(p) = \frac{kp^\mu \prod_{j=1}^{\gamma} (T_j^* p + 1)}{p^\nu \prod_{i=1}^{\lambda} (T_i p + 1)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (5.6)$$

$$\text{где } T_i > 0, i=1 \dots \lambda, T_j > 0, j=1 \dots \gamma \text{ для первой дроби} \quad (5.7)$$

$$\text{и } m = \mu + \gamma, n = \nu + \lambda \text{ для второй,} \quad (5.8)$$

можно пользоваться следующими правилами:

- начальная точка $K(j0)$ годографа определяется наличием и числом ν интегрирующих и μ дифференцирующих звеньев в передаточной функции $K(p)$ (см. табл. 3.1);

- конечная точка годографа $K(j\infty)$ зависит от разности порядков знаменателя и числителя передаточной функции $n-m$ (см. табл. 5.1);

- фаза годографа передаточной функции вида (5.6) при малых частотах приближенно определяется равенством

$$\varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}\mu - \frac{\pi}{2}\nu + \sum_{j=1}^{\gamma} T_j^* \omega - \sum_{i=1}^{\lambda} T_i \omega \quad (5.9)$$

- радиус-вектор годографа при $\omega \rightarrow \infty$ поворачивается в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки), если $\lambda > \gamma$, и в положительном направлении, если $\lambda < \gamma$.

Таблица 5.1

ЧХ	Начало годографа			Конечная точка		
	$\nu = \mu = 0$	$\nu \neq 0; \mu = 0;$	$\nu = 0; \mu \neq 0;$	$n = m$	$n > m$	$n < m$
$A(\omega)$	k	∞	0	$\frac{k \prod_{j=1}^{\gamma} T_j^*}{\prod_{i=1}^{\lambda} T_i}$	0	∞
$\varphi(\omega)$	0	$-\frac{\pi}{2}\nu$	$+\frac{\pi}{2}\mu$	0	$-\frac{\pi}{2}(n-m)$	$+\frac{\pi}{2}(m-n)$

Если передаточная функция системы содержит в виде сомножителя звено постоянного запаздывания, т.е. имеет вид

$$K(p) = K_0(p)e^{-\tau \cdot p}, \quad (5.10)$$

где $K_0(p)$ - передаточная функция вида (5.6), то построение годографа частотной характеристики проводится в следующем порядке:

- изображается годограф $K_0(p)$;
- каждая точка годографа $K_0(p)$, соответствующая частоте ω_i , смещается по фазе в отрицательном направлении на величину $-\tau\omega_i$.

5.2. Примеры решения типовых задач

5.2.1. Задача

Для системы с передаточной функцией $K(p) = \frac{2(p+1)}{p(p-1)}$ требуется

изобразить общий вид годографа.

Решение.

1. Определение частотных характеристик $R(\omega)$, $I(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$.
Производим замену в передаточной функции $p \rightarrow j\omega$:

$$K(j\omega) = \frac{2(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)}.$$

Умножаем числитель и знаменатель дроби на комплексно-сопряженное выражение знаменателя

$$K(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega)}{-j\omega(1 - j\omega)} \times \frac{j\omega(1 + j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)}.$$

В результате преобразований выделяем $R(\omega)$ и $I(\omega)$

$$K(j\omega) = \frac{2(1+j\omega)j\omega(1+j\omega)}{-j\omega(1-j\omega)j\omega(1+j\omega)} = \frac{-4\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)} + j \frac{2\omega(1-\omega^2)}{\omega^2(1+\omega^2)}$$

$$R(\omega) = \frac{-4}{(1+\omega^2)}; I(\omega) = \frac{2(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}$$

Согласно выражениям (5.4) и (5.5) определяем $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$

$$A(\omega) = |K(j\omega)| = \left| \frac{2(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)} \right| = \frac{2\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{2}{\omega};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \arctg \left(\frac{1-\omega^2}{-2\omega} \right).$$

2. Построение общего вида годографа.

Для этого необходимо в выражения для $R(\omega)$, $I(\omega)$ подставлять значения ω в диапазоне $[0, \infty]$.

ω	$R(\omega)$	$I(\omega)$
0	-4	∞
1	-2	0
∞	0	0

Строим годограф (см. Рис. 5.1)

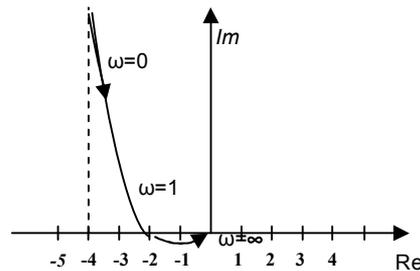


Рис. 5.1.

3.2.2. Задача

Изобразить общий вид годографа для системы с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{0,1(2p+1)(0,2p+1)}{p(p+1)^2(0,1p+1)^3}$$

Решение.

1. Построение годографа проводится в соответствии с правилами:

- определение начальной точки годографа $K(j0)$

так как $\nu=1$, $\mu=0$, то (см. табл. 3.1) $A(0)=\infty$ и $\varphi(0)=-\pi/2$;

- определение конечной точки годограф $K(j\infty)$

так как $n=6$, $m=2$ (см. 3.7), то (см. табл. 3.1) $A(\infty)=0$ и $\varphi(\infty)=-2\pi$;

- определение фазы годографа $K(j\omega)$ при малых частотах (см. 5.9):

$$\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 2\omega + 0,2\omega - 2\omega - 3 \cdot 0,1\omega = -\frac{\pi}{2} - 0,1\omega$$

- определение направления поворота радиуса-вектора годографа $K(j\omega)$ при больших частотах

так как в $K(j\omega)$ $\lambda = 5$, а $\gamma=2$, то при больших частотах радиус-вектор годографа поворачивается в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки);

- изображение общего вида годографа представлено на рис 5.2.

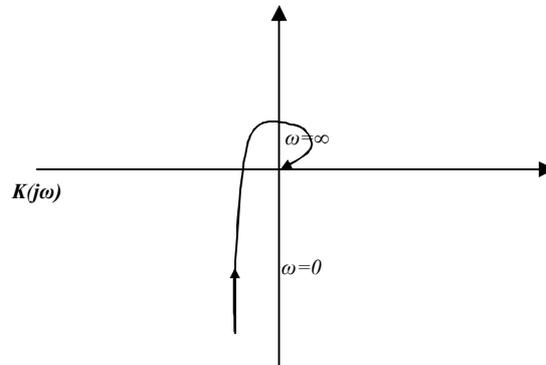


Рис. 5.2.

5.3. Задачи

5.3.1. Задача

Заданы передаточные функции звеньев:

1) $K(p) = \frac{5}{p}$;

2) $K(p) = \frac{20}{0,1p + 1}$;

3) $K(p) = \frac{21}{4p^2 + 2p + 1}$;

4) $K(p) = 0,5p$;

5) $K(p) = 0,3(2p + 1)$;

6) $K(p) = 0,1(0,25p^2 + 0,8p + 1)$;

7) $K(p) = 5e^{-2p}$.

Требуется:

- записать аналитические выражения для следующих характеристик: $K(j\omega)$, $R(\omega)$, $I(\omega)$ и $A(\omega)$;

- построить годографы звеньев.

5.3.2. Задача

Заданы передаточные функции звеньев:

$$1) K(p) = \frac{k}{Tp + 1};$$

$$2) K(p) = \frac{k}{-Tp + 1};$$

$$3) K(p) = k(Tp - 1);$$

$$4) K(p) = k(-Tp + 1);$$

$$5) K(p) = \frac{kp}{Tp - 1};$$

$$6) K(p) = \frac{kp}{-Tp + 1};$$

$$7) K(p) = \frac{k(Tp - 1)}{p};$$

$$8) K(p) = \frac{k(-Tp + 1)}{p};$$

$$9) K(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p - 1};$$

$$10) K(p) = \frac{k(T_1 p - 1)}{T_2 p + 1}.$$

Требуется:

- записать аналитические выражения для амплитудно-фазовой $K(j\omega)$, вещественной $R(\omega)$, мнимой $I(\omega)$, амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик;

- построить годографы звеньев.

5.3.3. Задача

Заданы передаточные функции:

$$1) K(p) = \frac{10}{(0,5p + 1)^3};$$

$$2) K(p) = \frac{100}{p(0,2p + 1)^2};$$

$$3) K(p) = \frac{0,1p}{(3p + 1)^2};$$

$$4) K(p) = \frac{5p^2}{(5p + 1)(0,3p + 1)};$$

$$5) K(p) = \frac{0,2(5p + 1)^3}{p^2(p + 1)(0,01p^2 + 0,15p + 1)};$$

$$6) K(p) = \frac{0,1(10p+1)^2(0,04p^2+0,3p+1)}{(0,05p+1)^3(p^2+1,4p+1)};$$

$$7) K(p) = \frac{5(0,05p+1)^2(4p^2+3p+1)}{(0,3p+1)^3(10p+1)};$$

$$8) K(p) = \frac{10(0,5p+1)}{(2p+1)(0,1p+1)^2} e^{-0,2p};$$

$$9) K(p) = \frac{0,05(10p+1)^3}{p(0,5p+1)^2} e^{-p};$$

$$10) K(p) = \frac{100p(p+1)(0,05p+1)}{(100p^2+10p+1)} e^{-0,5p}.$$

Требуется:

- записать аналитические выражения для амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик;
- построить годографы частотных характеристик.

5.3.4. Задача

Задана передаточная функция соединений звеньев $K(p)$ (см. таблицу 3.2).

Требуется:

- записать аналитические выражения для амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик.

Таблица 5.2

Номер варианта	$K(p)$	Номер варианта	$K(p)$
1	$\frac{100(0,5p+1)}{p(2p+1)}$	16	$\frac{100p}{(5p+1)} e^{-0,2p}$
2	$\frac{10(5p+1)}{p(0,2p+1)}$	17	$\frac{10p}{(2p+1)} e^{-0,5p}$
3	$\frac{(0,3p+1)}{p(5p+1)}$	18	$\frac{p}{(2p+1)} e^{-2p}$
4	$\frac{0,1(3p+1)}{p(0,5p+1)}$	19	$\frac{0,1p}{(3p+1)} e^{-0,4p}$
5	$\frac{0,01(0,2p+1)}{p(2,5p+1)}$	10	$\frac{0,01p}{(0,4p+1)} e^{-3p}$
6	$\frac{100p(0,5p+1)}{(2p+1)^2}$	21	$\frac{100}{p^2(3p+1)} e^{-0,1p}$
7	$\frac{10p(2p+1)}{(0,5p+1)^2}$	22	$\frac{10(2p+1)}{p^2} e^{-0,3p}$
8	$\frac{p(0,05p+1)}{(3p+1)^2}$	23	$\frac{(0,5p+1)}{p^2} e^{-p}$

9	$\frac{0,1p(5p+1)}{(0,3p+1)^2}$	24	$\frac{0,1}{p^2(0,2p+1)}e^{-2p}$
10	$\frac{0,01p(0,02p+1)}{(4p+1)^2}$	25	$\frac{0,01(3p+1)}{p^2}e^{-0,5p}$
11	$\frac{100}{p(2p+1)^2}e^{-p}$	26	$\frac{100p^2}{(5p+1)^2}e^{-p}$
12	$\frac{10}{p(0,5p+1)^2}e^{-2p}$	27	$\frac{10p^2}{(0,2p+1)^2}e^{-3p}$
13	$\frac{1}{p(5p+1)^2}e^{-0,2p}$	28	$\frac{100(5p+1)}{p^2}$
14	$\frac{0,1(p+1)}{p}e^{-0,5p}$	29	$\frac{10(0,5p+1)}{p^2(2p+1)}$
15	$\frac{0,01(2p+1)}{p}e^{-0,1p}$	30	$\frac{(2p+1)}{p^2(0,3p+1)}$

Глава 6. Расчет логарифмических амплитудных характеристик

6.1. Основные теоретические сведения

Пусть есть САУ, описываемая коэффициентом передачи (КП) $W(p)$.

Перейдем от операторного представления в частотную область, соответственно заменим p на $j\omega$. Получим коэффициент передачи в частотной области $W(j\omega)$. Это комплексное число, которое может быть представлено в стандартом виде.

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)} \quad (6.1)$$

Как известно, модуль этого числа $A(\omega)$ называют амплитудной частотной характеристикой системы (АЧХ), аргумент $\Phi(\omega)$ – фазовой частотной характеристикой системы.

График зависимости $L(\omega)=20\lg(A(\omega))$ от частоты, построенный в логарифмическом формате, называют *логарифмической амплитудной частотной* характеристикой (ЛАХ). Единицей измерения ЛАХ является *децибел* (дБ). *Бел* - это логарифмическая единица, которая соответствует десятикратному увеличению мощности. (1 бел увеличение в 10 раз, 2 - бела в 100 раз и т.д.). *Децибел* - одна десятая бела. Если бы $A(\omega)$ описывал отношение мощностей, то множитель при логарифме в (1) был бы равен 10. Т.к. коэффициент передачи описывает отношение не мощностей а входной и выходной величин, то увеличение КП в 10 раз соответствует увеличению отношения мощностей в 100 раз, т.е двум белам или двадцати децибелам. Вследствие этого перед логарифмом в (1) стоит коэффициент 20.

График зависимости $\Phi(\omega)$ от частоты, построенный в логарифмическом формате называют *логарифмической фазовой частотной характеристикой* (ФАХ).

Правила построения ЛАХ

При построении логарифмических характеристик по оси абсцисс (ось x) откладывается частота в логарифмическом масштабе. Это значит, что наносятся деления, соответствующие $\lg(\omega)$. Часто около делений указывается само значение частоты ω в *рад/сек*.

Логарифмические характеристики строятся в декадной и октавной шкалах. В декадной шкале по оси абсцисс откладывают десятичный логарифм частоты, т.е. одно деление соответствует увеличению частоты в 10 раз (Рис. 1). В октавной шкале по оси x откладывают логарифм частоты по основанию 2, т.е. одно деление соответствует увеличению частоты в 2 раза (Рис. 2).

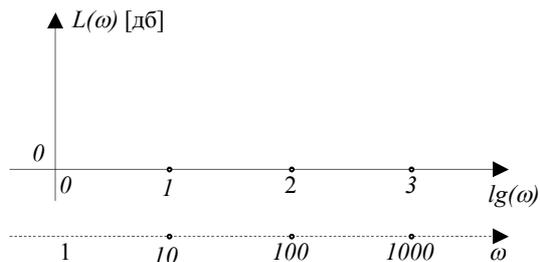


Рис. 6.1. Декадная шкала

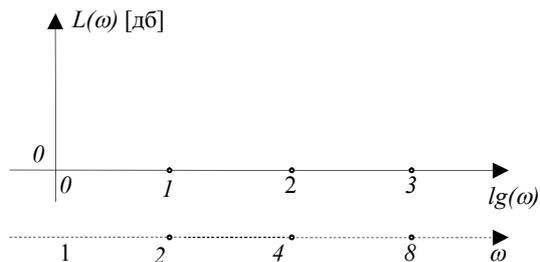


Рис. 6.2. Октавная шкала

По оси ординат (ось y) откладывается значение модуля $A(\omega)$ в децибелах. Ось абсцисс проходит через точку 0 дБ. Это соответствует значению модуля $A(\omega) = 1$.

Ось ординат пересекает ось абсцисс в произвольном месте. Следует помнить, что в логарифмической шкале ноль по частоте абсцисс находится в минус бесконечности, поэтому обычно принято за начало отсчета брать частоту равную единице или 0 в логарифмическом формате. При таком выборе в отрицательной области (слева от нуля) идут частоты равные дробным частям единицы (в декадной шкале $1/10 = 10^{-1}$, $1/100 = 10^{-2}$ и т.д.). Справа от нуля располагаются частоты больше единицы – каждое деление степень десяти в декадном представлении или степень двойки в октавном.

Рассмотрим ЛАХ типовых звеньев.

Логарифмическая характеристика идеального интегратора

Рассмотрим идеальный интегратор. Его операторный коэффициент передачи : $W(p) = \frac{k}{p}$, в частотной области $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$

$$\text{Модуль } |W(j\omega)| = A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

Найдем выражение для вычисления ЛАХ

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg\left(\frac{k}{\omega}\right) = 20 \lg(k) + 20 \lg\left(\frac{1}{\omega}\right) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega) \quad (6.2)$$

Построим зависимость $L(\omega)$ в логарифмическом формате.

На единичной частоте значение ЛАХ в любой шкале определяется выражением

$$L(1) = 20lg(k)$$

При построении в декадной шкале представим частоту виде степеней десяти – $\omega = 10^a$. Выражение для $L(\omega)$ примет вид

$$L(\omega) = 20lg(k) - 20lg(\omega) = 20lg(k) - 20lg(10^a) = 20lg(k) - 20a \quad (6.3)$$

При изменении частоты в 10 раз (на одну декаду) значение ЛАХ изменяется на 20 дб. Таким образом, в октавной шкале ЛАХ интегратора представляет собой прямую с отрицательным наклоном равным - 20 дб/дек.

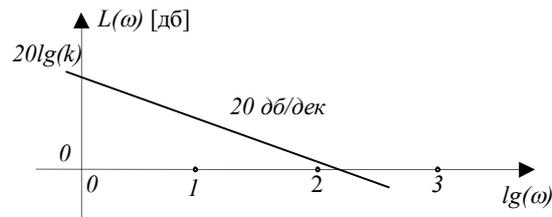


Рис. 6.3. ЛАХ идеального интегратора в декадной шкале

При построении в октавной шкале представим частоту виде степеней двойки – $\omega = 2^a$. Выражение для $L(\omega)$ примет вид

$$L(\omega) = 20lg(k) - 20lg(\omega) = 20lg(k) - 20lg(2^a) = 20lg(k) - 20alg(2) = 20lg(k) - 20a \cdot 0.303 \dots \approx 20lg(k) - 6a \quad (6.4)$$

При изменении частоты в 2 раза (на одну декаду) значение ЛАХ изменяется на 6 дБ.

Таким образом, в октавной шкале ЛАХ интегратора представляет собой прямую с отрицательным наклоном равным - 6 дб/дек.

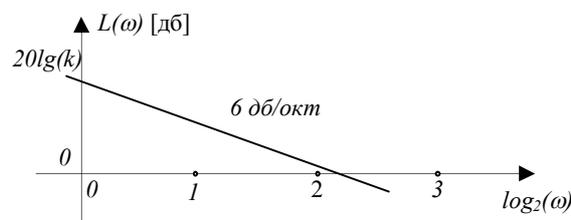


Рис. 6.4. ЛАХ идеального интегратора в октавной шкале

Логарифмическая характеристика идеального дифференциатора

Коэффициент передачи звена $W(p) = kp$ в частотной области $W(j\omega) = kj\omega$

Модуль коэффициента - $A(\omega) = k\omega$.

Найдем выражение для вычисления ЛАХ

$$L(\omega) = 20lg(A(\omega)) = 20lg\left(\frac{k}{\omega}\right) = 20lg(k) + 20lg\left(\frac{1}{\omega}\right) = 20lg(k) - 20lg(\omega) \quad (6.5)$$

Построим зависимость $L(\omega)$ в логарифмическом формате.

На единичной частоте значение ЛАХ в любой шкале определяется выражением

$$L(1) = 20 \lg(k)$$

При построении в декадной шкале представим частоту виде степеней десяти – $\omega = 10^a$. Выражение для $L(\omega)$ примет вид

$$L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega) = 20 \lg(k) + 20 \lg(10^a) = 20 \lg(k) + 20a$$

Таким образом, в октавной шкале ЛАХ дифференциатора - прямая с положительным наклоном равным - 20 дб/дек. Соответственно в октавной шкале наклон будет равен 6 дб/окт

Логарифмическая характеристика интегрирующей цепочки

Коэффициент передачи интегрирующей цепочки определяется выражением $W(p) = \frac{k}{(1+Tp)}$, в частотной области $W(j\omega) = \frac{k}{1+Tj\omega}$.

Модуль коэффициента передачи

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}. \quad (6.6)$$

Характерную частоту для этого звена $\omega_T = \frac{1}{T}$ называют *частотой среза*.

Для построения ЛАХ рассмотрим выражение для $A(\omega)$ в разных диапазонах частот.

1) Пусть частота меньше частоты среза $\omega < \omega_T$. Будем считать, что можно пренебречь слагаемым $T^2\omega^2$ в выражении (6.6). Т.е. ЛАХ на этих частотах может быть представлен выражением:

$$A(\omega) = k \quad (6.7)$$

Соответственно выражения для расчета ЛАХ будет выглядеть так:

$$L(\omega) = 20 \lg(k); \omega < \omega_T \quad (6.8)$$

2) Пусть частота больше частоты среза $\omega > \omega_T$. Будем считать, что значение $T\omega$ достаточно велико и можно пренебречь единицей в знаменателе выражения (6). Т.е. ЛАХ на этих частотах может быть представлена выражением:

$$A(\omega) = \frac{k}{T\omega}. \quad (6.9)$$

Таким образом, при $\omega > \omega_T$, выражение расчета ЛАХ интегрирующей цепочки будет выглядеть так же как и для идеального интегратора (6.3):

$$L(\omega) = 20 \lg(k) - 20a; \omega > \omega_T \quad (6.10)$$

В результате ЛАХ можно представить как кусочно-линейную функцию. График ее состоит из двух частей: горизонтальная линия на частотах $\omega < \omega_T$ и прямая с отрицательным наклоном 20 дб/окт в декадной шкале (или 6 дб/окт. в октавной) на частотах $\omega > \omega_T$. Полученный график является приближительным. Ошибка достигает максимума на частоте $\omega = \omega_T$. Вместе с тем можно оказать, что она невелика и не превышает 3дб.

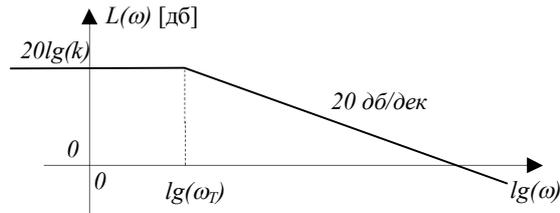


Рис. 6.5. ЛАХ интегрирующей цепочки

Алгоритм построения ЛАХ произвольного апериодического звена

Рассмотрим звено, коэффициент передачи которого представляет из себя отношение полиномов

$$W(p) = k \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_np)}{(1+T_{n+1}p)(1+T_{n+2}p)\dots(1+T_{n+m}p)} \quad (6.11)$$

Построения ЛАХ проведем в несколько шагов:

1) Перейдем в частотную область, заменим p на $j\omega$

$$W(j\omega) = k \frac{(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)\dots(1+T_nj\omega)}{(1+T_{n+1}j\omega)(1+T_{n+2}j\omega)\dots(1+T_{n+m}j\omega)} \quad (6.12)$$

2) Найдем модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$

$$A(\omega) = k \frac{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}\dots\sqrt{1+T_n^2\omega^2}}{\sqrt{1+T_{n+1}^2\omega^2}\sqrt{1+T_{n+2}^2\omega^2}\dots\sqrt{1+T_{n+m}^2\omega^2}} \quad (6.13)$$

3) Найдем все частоты сопряжения для данного коэффициента передачи

$$\omega_j = 1/T_j \quad (6.14)$$

4) Расположим эти частоты в порядке возрастания

$$\omega_{min} < \omega_{k1} < \omega_{k2} < \omega_{k3} < \omega_{k4} < \omega_{k5} \dots < \omega_{max} \quad (6.15)$$

5) Рассмотрим $A(\omega)$ на частотах меньше минимальной частоты сопряжения ω_{min} . Будем считать, что во всех корнях (13) можно пренебречь слагаемым $T_j^2\omega^2$. Т.е. ЛАХ на этих частотах можно представить выражением :

$$L(\omega) = 20\lg(k); \omega < \omega_{min} \quad (6.16)$$

6) Далее будем последовательно рассматривать $A(\omega)$ в диапазоне частот между соседними частотами сопряжения $\omega_{ki} < \omega < \omega_{k(i+1)}$. Вначале возьмем диапазон $\omega_{min} < \omega < \omega_{k1}$, потом $\omega_{k1} < \omega < \omega_{k2}$ и т.д.

Для всех корней (6.13) в которых частота сопряжения больше или равна верхней частоте диапазона $\omega_{k(i+1)}$ будем считать, что слагаемыми $T_j^2\omega^2$ можно пренебречь и подкоренное выражение равно единице.

Для всех выражений под корнем в (13), в которых частота сопряжения меньше верхней частоты диапазона $\omega_{k(i+1)}$ будем считать, что единицей под корнем можно пренебречь и они, соответственно, равны $T_j\omega$.

Таким образом, при переходе в каждый новый диапазон частот сопряжения в выражении для ЛАХ, согласно (13), появляется дополнительный коэффициент $T_j\omega$ в числителе или знаменателе (где $\omega_j=1/T_j$ частота сопряжения нижней границы диапазона). Само выражение для ЛАХ будет линейным с угловым коэффициентом, пропорциональным степени частоты в выражении для $A(\omega)$. Если $A(\omega)\sim\omega$, то это 20 дб/дек (6 дб/окт); если $A(\omega)\sim\omega^2$ то это 40 дб/дек (12 дб/окт) и т.д.

7) Рассмотрим $A(\omega)$ на частотах больше максимальной частоты сопряжения. Будем считать, что во каждом корне (6.13) можно пренебречь единицей и он приблизительно равен $T_j\omega$. Т.е. ЛАХ на этих частотах можно представить выражением :

$$A(\omega) = k \frac{(T_1 T_2 \dots T_n)\omega^n}{(T_{n+1} T_{n+2} \dots T_{n+m})\omega^m}; \omega > \omega_{max} \quad (6.17)$$

8) С учетом сделанных предположений получим выражение для ЛАХ в каждом диапазоне частот и построим график в виде кусочно-линейной функции.

6.2. Примеры решения типовых задач

6.2.1. Задача.

Для звена с коэффициентом передачи $W(p) = k \frac{(1+T_1p)}{(1+T_2p)}$; $T_2 > T_1$ необходимо построить ЛАХ.

Решение:

1) Перейдем в частотную область, заменим в исходном КП $p \rightarrow j\omega$.

$$W(j\omega) = k \frac{(1+T_1j\omega)}{(1+T_2j\omega)}$$

2) Найдем модуль коэффициента передачи

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k \frac{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

3) Найдем частоты сопряжения для данного коэффициента передачи

$$\omega_1=1/T_1; \omega_2=1/T_2;$$

4) Расположим частоты сопряжения в порядке возрастания

$$\omega_2 < \omega_1$$

5) Проанализируем КП в разных диапазонах частот. Получим для каждого диапазона выражение для ЛАХ

5.1) $\omega < \omega_2$

Т.к. в этом диапазоне обе частоты сопряжения больше или равны верхней границы, то считаем что в выражении для $A(\omega)$ значения ωT_1 и ωT_2 малы и можно их не учитывать. Отсюда выражение для ЛАХ

$$L(\omega) = 20\lg(k); \omega < \omega_2$$

$$5.2) \omega_2 < \omega < \omega_1$$

В этом диапазоне ω_2 меньше верхней границы диапазона. Считаем, что $\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \approx \sqrt{T_2^2 \omega^2} = T_2 \omega$. Частота ω_1 , больше или равна верхней границы диапазона, считаем, что $\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \approx 1$. С учетом этих предположений, выражение для ЛАХ примет вид:

$$L(\omega) = 20\lg\left(k \frac{1}{T_2 \omega}\right) = 20\lg\left(\frac{k}{T_2}\right) - 20\lg(\omega); \omega_2 < \omega < \omega_1$$

Это прямая с отрицательным наклоном 20 дб/дек (6 дб/окт).

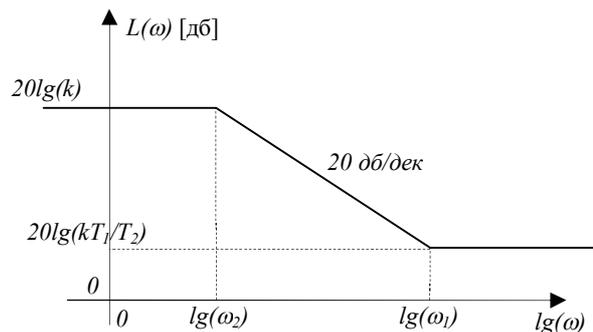
$$5.3) \omega_1 < \omega$$

В этом обе частоты сопряжения меньше верхней границы диапазона. Считаем, что $\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \approx \sqrt{T_2^2 \omega^2} = T_2 \omega$ и $\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \approx \sqrt{T_1^2 \omega^2} = T_1 \omega$. С учетом этих предположений, выражение для ЛАХ примет вид:

$$L(\omega) = 20\lg\left(k \frac{T_1 \omega}{T_2 \omega}\right) = 20\lg\left(\frac{k T_1}{T_2}\right); \omega_1 < \omega$$

6) Построим график ЛАХ. Для этого предварительно выпишем итоговое выражение :

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg(k); \omega < \omega_2 \\ L(\omega) = 20\lg\left(\frac{k}{T_2}\right) - 20\lg(\omega); \omega_2 < \omega < \omega_1 \\ L(\omega) = 20\lg\left(\frac{k T_1}{T_2}\right); \omega_1 < \omega \end{cases}$$



6.2.2. Задача.

Для звена с коэффициентом передачи $W(p) = k \frac{(1+T_3 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$; $T_3 > T_1 > T_2$ необходимо построить ЛАХ.

Решение:

1. Перейдем в частотную область, заменим в исходном КП $p \rightarrow j\omega$.

$$W(j\omega) = k \frac{(1+T_3j\omega)}{j\omega(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)}$$

2. Найдем модуль коэффициента передачи

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k \frac{\sqrt{1+T_3^2\omega^2}}{\omega \sqrt{1+T_1^2\omega^2} \sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

3) Найдем частоты сопряжения для данного коэффициента передачи

$$\omega_1=1/T_1; \omega_2=1/T_2; \omega_3=1/T_3;$$

4) Расположим частоты сопряжения в порядке возрастания

$$\omega_3 < \omega_1 < \omega_2$$

5) Проанализируем КП в разных диапазонах частот. Получим для каждого диапазона выражение для ЛАХ

5.1) $\omega < \omega_3$

Т.к. в этом диапазоне все частоты сопряжения больше или равны верхней границы, то считаем что в выражении для $A(\omega)$ ωT_1 , ωT_2 , ωT_3 малы и можно их не учитывать. Отсюда выражение для ЛАХ

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{k}{\omega} \right) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega); \omega < \omega_3.$$

Это прямая с отрицательным наклоном 20 дб/дек (6 дб/окт).

5.2) $\omega_3 < \omega < \omega_1$

В этом диапазоне ω_3 меньше верхней границы диапазона. Считаем, что $\sqrt{1+T_3^2\omega^2} \approx \sqrt{T_3^2\omega^2} = T_3\omega$. Частоты ω_1 , ω_2 больше или равны верхней границы диапазона, считаем, что $\sqrt{1+T_1^2\omega^2} \approx 1$, $\sqrt{1+T_2^2\omega^2} \approx 1$. С учетом этих предположений, выражение для ЛАХ примет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(k \frac{T_3\omega}{\omega} \right) = 20 \lg(kT_3); \omega_3 < \omega < \omega_1$$

График ЛАХ в этом диапазоне - горизонтальная прямая.

5.3) $\omega_1 < \omega < \omega_2$

В этом диапазоне ω_3 , ω_1 меньше верхней границы диапазона. Считаем, что $\sqrt{1+T_3^2\omega^2} \approx \sqrt{T_3^2\omega^2} = T_3\omega$, $\sqrt{1+T_1^2\omega^2} \approx \sqrt{T_1^2\omega^2} = T_1\omega$. Частота ω_2 больше или равна верхней границы диапазона, считаем, что $\sqrt{1+T_2^2\omega^2} \approx 1$. С учетом этих предположений, выражение для ЛАХ примет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(k \frac{T_3\omega}{\omega T_1\omega} \right) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_1\omega} \right) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_1} \right) - 20 \lg(\omega); \omega_1 < \omega <$$

ω_2

Это прямая с отрицательным наклоном 20 дб/дек (6 дб/окт).

5.4) $\omega_2 < \omega$

В этом диапазоне все частоты $\omega_3, \omega_1, \omega_2$ меньше верхней границы диапазона. Считаем, что $\sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} \approx T_3 \omega$, $\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \approx T_1 \omega$, $\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \approx T_2 \omega$. С учетом этих предположений, выражение для ЛАХ примет вид:

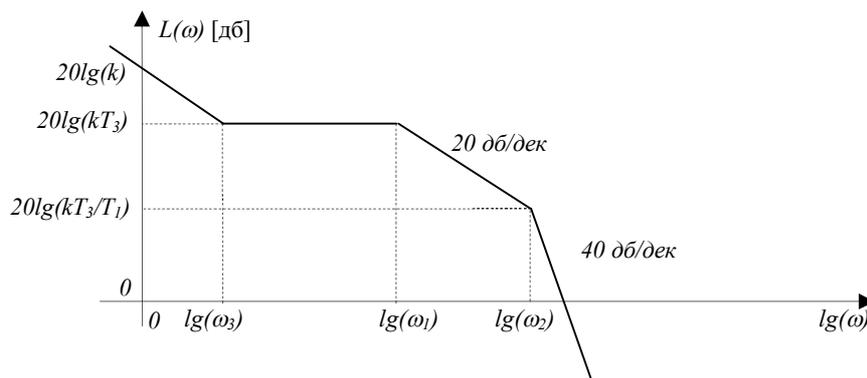
$$L(\omega) = 20 \lg \left(k \frac{T_3 \omega}{\omega T_2 \omega T_1 \omega} \right) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_2 T_1 \omega^2} \right) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_2 T_1} \right) - 40 \lg(\omega);$$

$\omega_2 < \omega$

Это прямая с отрицательным наклоном 40 дБ/дек (12 дБ/окт).

6) Построим график ЛАХ. Для этого предварительно выпишем итоговое выражение :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega); \quad \omega < \omega_3 \\ L(\omega) = 20 \lg(k T_3); \quad \omega_3 < \omega < \omega_1 \\ L(\omega) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_2} \right) - 20 \lg(\omega); \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ L(\omega) = 20 \lg \left(k \frac{T_3}{T_2 T_1} \right) - 40 \lg(\omega); \quad \omega_2 < \omega \end{array} \right.$$



6.3. Задачи

Постройте график ЛАХ для системы с коэффициентом передачи

1. $W(p) = k \frac{(1+T_3 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}; T_1 > T_2 > T_3$

2. $W(p) = k \frac{(1+T_3 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}; T_1 > T_3 > T_2$

3. $W(p) = k \frac{(1+T_3 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}; T_3 > T_2 > T_1$

4. $W(p) = k \frac{(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)}; T_1 > T_2$

$$5. W(p) = k \frac{(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}; T_2 > T_1$$

$$6. W(p) = k \frac{(1+T_3p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_2 > T_3$$

$$7. W(p) = k \frac{(1+T_3p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_3 > T_2$$

$$8. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_2 > T_3 > T_4$$

$$9. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_3 > T_2 > T_4$$

$$10. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_2 > T_3 > T_1 > T_4$$

$$11. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_3 > T_4 > T_2$$

$$12. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_2 > T_4 > T_3 > T_1$$

$$13. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_3 > T_4 > T_2 > T_1$$

$$14. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_3 > T_1 > T_2 > T_4$$

$$15. W(p) = k \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_3p)}; T_1 > T_2 > T_3$$

$$16. W(p) = k \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_3p)}; T_3 > T_1 > T_2$$

$$17. W(p) = k \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_3p)}; T_2 > T_3 > T_1$$

$$18. W(p) = k \frac{p(1+T_3p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_1 > T_2 > T_3$$

$$19. W(p) = k \frac{p(1+T_3p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_3 > T_1 > T_2$$

$$20. W(p) = k \frac{p(1+T_3p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}; T_2 > T_3 > T_1$$

$$21. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_5p)}; T_3 > T_1 > T_4 > T_2 > T_5$$

$$22. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_5p)}; T_4 > T_5 > T_3 > T_2 > T_1$$

$$23. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_5p)}; T_3 > T_1 > T_2 > T_4 > T_5$$

$$24. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_5p)}; T_4 > T_2 > T_5 > T_3 > T_1$$

$$25. W(p) = k \frac{(1+T_3p)(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_5p)}; T_1 > T_3 > T_4 > T_5 > T_2$$

Глава 7. Устойчивость линейных систем

7.1 Основные теоретические сведения

Устойчивость – это основное качественное свойство системы автоматического управления, без которого она неработоспособна. Физически понятие **устойчивости** системы означает, что процессы в системе с течением времени ($t \rightarrow \infty$) стремятся к определенной величине при любых начальных условиях.

На Рис. 7.1 изображены переходные характеристики устойчивой и неустойчивой систем. Для устойчивой системы справедливо равенство: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$.

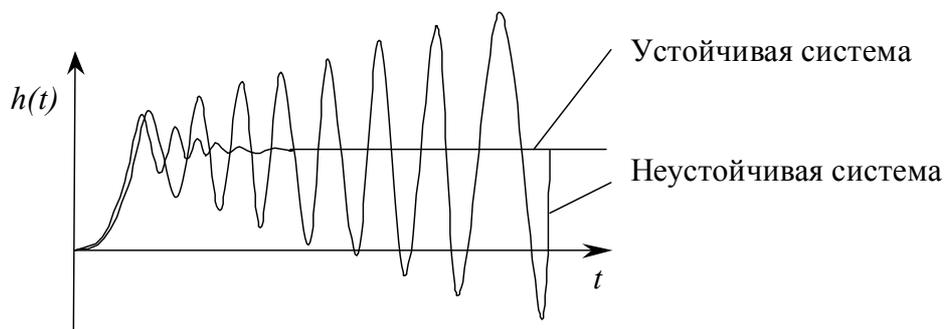


Рис. 7.1 – Переходные характеристики системы

Для линейной стационарной системы радиоавтоматики необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными. Непосредственное нахождение корней характеристического уравнения доступно лишь для систем первого и второго порядков. При $n > 2$ решение или громоздко, или вообще аналитически невозможно. Кроме того, в процессе нормальной эксплуатации происходит изменение параметров, приводящее к перемене состояний, и система устойчивая может стать неустойчивой и наоборот.

При определении устойчивости часто применяются различные критерии, позволяющие без решения уравнений динамики систем регулирования оценить их состояние: устойчивое, неустойчивое и на грани устойчивости. Поэтому каждый из критериев должен позволять получать области устойчивых и неустойчивых состояний линейной системы.

7.2 Критерий устойчивости Гурвица

Критерий устойчивости Гурвица находит широкое применение при анализе систем третьего и четвертого порядков, когда известны параметры системы. Кроме того, он позволяет получить аналитическое выражение (выражения) для границ области возможных значений какого-либо параметра (параметров) системы, при которых сохраняется устойчивое состояние системы.

Это алгебраический критерий, который предполагает рассмотрение характеристического уравнения в стандартной форме

$$D(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots + c_n p^n = 0$$

Из его коэффициентов по следующему правилу составляется **матрица Гурвица**: на главной диагонали сверху вниз вписываются коэффициенты характеристического уравнения от c_{n-1} до c_0 включительно. В каждом столбце вниз от диагонали записывают коэффициенты при возрастающих степенях оператора Лапласа $-p$, вверх – при убывающих степенях p . Недостающие элементы в столбце заполняются нулями. Либо в каждой строке справа от главной диагонали располагаются коэффициенты при убывающих через одну степенях p , слева от главной диагонали располагаются коэффициенты при возрастающих через одну степень оператора Лапласа $p - (c_{n-1}, c_{n-3}, c_{n-5}, \dots)$.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ c_n & c_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_2 & c_0 \end{vmatrix}$$

Формулировка критерия.

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы при $c_n > 0$ все n определителей, получаемых из матрицы Гурвица Δ_n , были положительны.

Для систем первого и второго порядка необходимое условие является и достаточным.

Из критерия Гурвица вытекают следующие условия устойчивости:

для систем первого порядка с $D(p) = c_0 + c_1 p$

$$c_1 > 0, c_0 > 0;$$

для систем второго порядка с $D(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2$

$$c_2 > 0, c_1 > 0, c_0 > 0;$$

для систем третьего порядка с $D(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3$

$$c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0;$$

для систем четвертого порядка с $D(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + c_4 p^4$

$$c_3(c_1 c_2 - c_0 c_3) - c_4 c_1^2 > 0.$$

7.3 Критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий был получен Н. Найквистом в 1932 году для проверки усилителей с отрицательной обратной связью, а затем обобщен на системы автоматического управления.

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость системы с обратной связью (замкнутой системы) по экспериментально снятой или

полученной на основе передаточной функции амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы (Рис. 7.2).

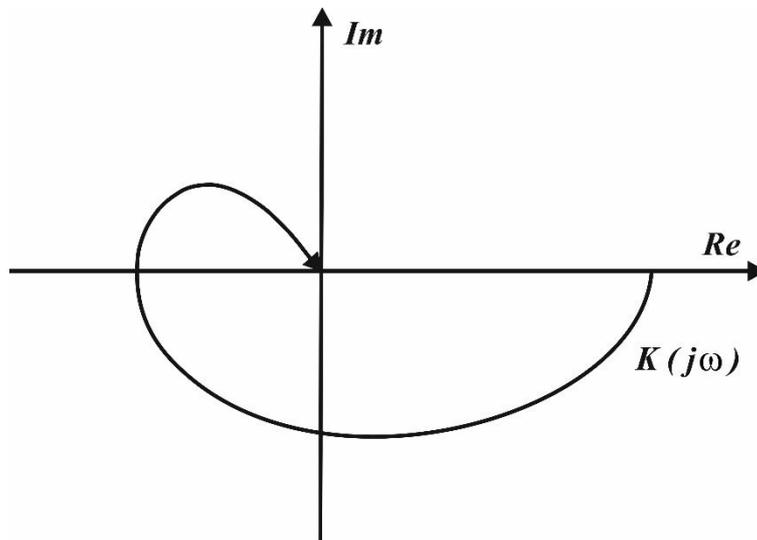
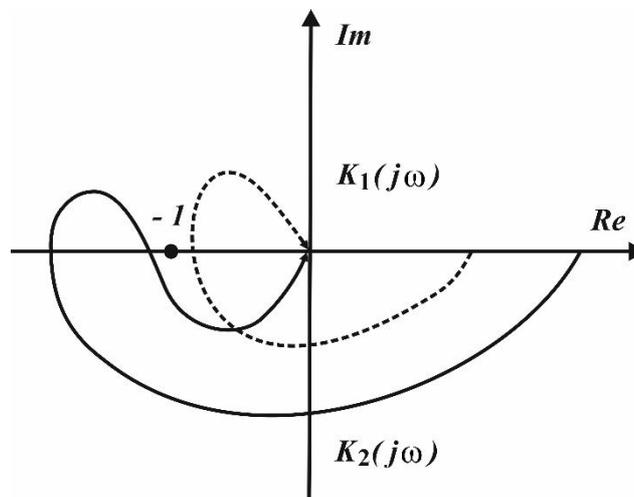


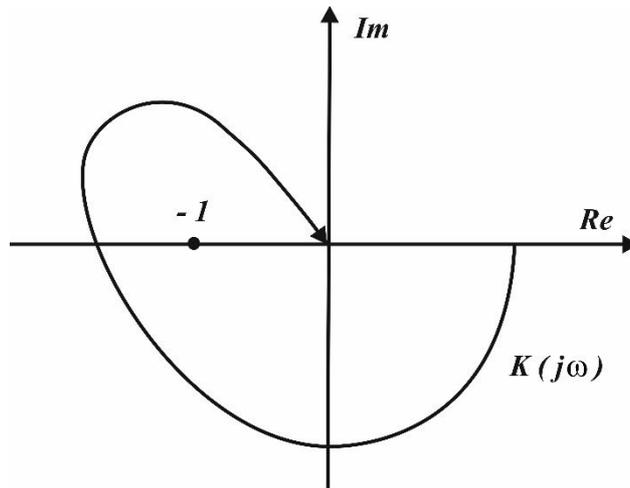
Рис. 7.2 – АФХ разомкнутой системы

Формулировка критерия Найквиста.

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $\{-1, j0\}$.



Система устойчива



Система неустойчива

Рис. 7.3 – Частотные характеристики системы для критерия Найквиста

Если годограф АФХ проходит через точку $(-1; j0)$, то система находится на границе устойчивости.

Критерий Найквиста можно также применять, если разомкнутая система имеет в своем составе интегратор, т.е. ее передаточная функция следующая:

$$K(p) = \frac{P(p)}{pQ(p)}. \quad (7.1)$$

Полученная в результате замены p на $j\omega$ в выражении (7.1) амплитудно-фазовая характеристика будет иметь неопределенность в точке $\omega = 0$. Поэтому при ее построении делают аппроксимацию: характеристику дополняют полуокружностью бесконечно большого радиуса так, чтобы она начиналась на положительной вещественной полуоси (Рис. 7.4).

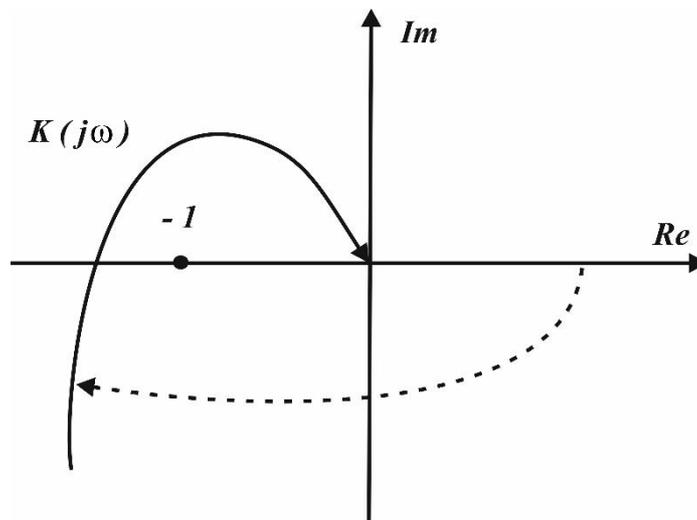


Рис. 7.4 – АФХ разомкнутой системы с интегратором

Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если при некоторой частоте $\omega = \omega_0$ АФХ разомкнутой системы пересекает точку с координатами $\{-1, j0\}$. Аналитически условие границы устойчивости записывается в виде:

$$1 + K(j\omega_0) = 0. \quad (7.2)$$

7.4 Логарифмическая форма критерия Найквиста

Для проверки устойчивости замкнутой системы можно использовать логарифмические частотные характеристики разомкнутой, которые строятся почти без вычислений.

Формулировка критерия Найквиста.

Для замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на частотах, где ЛАЧХ положительна (т.е. $L(\omega) > 0$), фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не пересекала ось -180° или пересекала ее четное число раз.

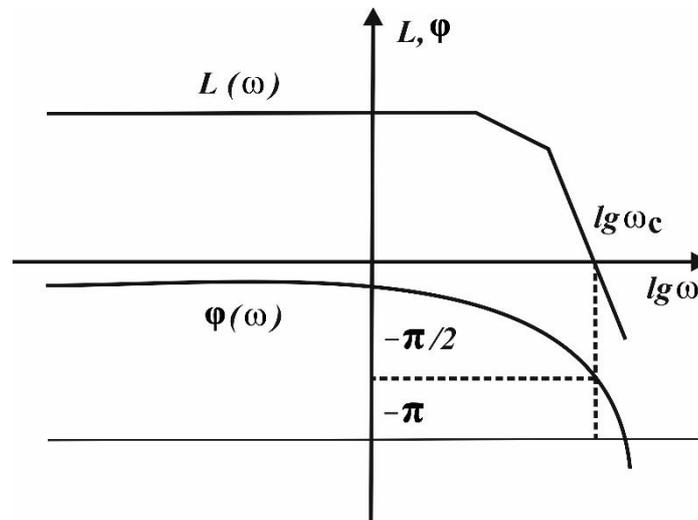


Рис. 7.5 – Логарифмические частотные характеристики, иллюстрирующие критерий Найквиста

Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если на той же частоте, где $L(\omega)=0$, фазовая частотная характеристика разомкнутой системы пересекает ось -180° .

7.5. Примеры решения типовых задач

7.5.1. Задача

Структурная схема соединения звеньев показана на рисунке 7.6.

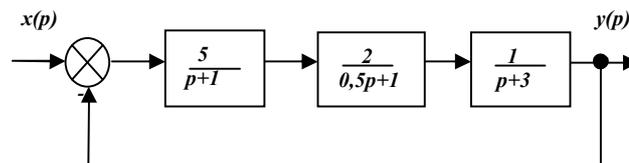


Рис. 7.6

Требуется:

- а) исследовать систему на устойчивость с использованием алгебраического критерия Гурвица;
- б) определить критическое значение $k_{кр}$ общего коэффициента усиления разомкнутой системы;
- в) исследовать систему на устойчивость с использованием частотного критерия Найквиста.

Решение.

а) Исследуем устойчивость системы с помощью критерия Гурвица.

1. Определяем передаточную функцию $K(p)$ разомкнутой системы:

$$K(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{5 \cdot 2}{(p+1) \cdot (0,5p+1) \cdot (p+3)} = \frac{10}{0,5p^3 + 2p^2 + 5,5p + 3}$$

2. Определяем передаточную функцию $K_{yx}(p)$ замкнутой системы:

$$K_{yx}(p) = \frac{P(p)}{D(p)} = \frac{10}{1 + \frac{10}{0,5p^3 + 2p^2 + 5,5p + 3}} = \frac{10}{0,5p^3 + 2p^2 + 5,5p + 13}$$

Согласно критерию Гурвица для системы третьего порядка

$c_1c_2 - c_0c_3 > 0$ запишем:

$$5,5 \cdot 2 - 13 \cdot 0,5 > 0$$

Следовательно, система по критерию Гурвица является устойчивой.

б) Критическое значение коэффициента усиления разомкнутой системы определяется из условия равенства нулю определителя матрицы Гурвица или написанного ранее неравенства (для систем с 1-го по 4-й порядок характеристического полинома). Для нашего случая

$$D(p) = 0,5p^3 + 2p^2 + 5,5p + (k+3)$$

$$5,5 \cdot 2 - 0,5 \cdot (k_{кр} + 3) = 0, \quad k_{кр} = 19.$$

в) Исследуем устойчивость системы с помощью критерия Найквиста.

1. В передаточной функции разомкнутой системы заменяем параметр p на значение $j\omega$, тогда

$$K(j\omega) = \frac{10}{-0,5j\omega^3 - 2\omega^2 + 5,5j\omega + 3} = \frac{10}{(3 - 2\omega^2) + j(5,5\omega - 0,5\omega^3)}$$

2. Для того, чтобы избавиться от мнимой единицы в знаменателе, умножаем числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное выражение знаменателя:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{10}{(3 - 2\omega^2) + j(5,5\omega - 0,5\omega^3)} \cdot \frac{(3 - 2\omega^2) - j(5,5\omega - 0,5\omega^3)}{(3 - 2\omega^2) - j(5,5\omega - 0,5\omega^3)} \\ &= \frac{10(3 - 2\omega^2) - j10(5,5\omega - 0,5\omega^3)}{(3 - 2\omega^2)^2 + (5,5\omega - 0,5\omega^3)^2} \end{aligned}$$

3. Из выражения АФХ выделяем действительную Re и мнимую Im части

$$K(j\omega) = \frac{10(3 - 2\omega^2)}{(3 - 2\omega^2)^2 + (5,5\omega - 0,5\omega^3)^2} + j \frac{-10(5,5\omega - 0,5\omega^3)}{(3 - 2\omega^2)^2 + (5,5\omega - 0,5\omega^3)^2}.$$

4. Построение годографа.

Для построения годографа изменяют ω от 0 до ∞ . Рассчитываемые значения Re и Im сводят в таблицу и по этим данным на комплексной плоскости можно построить годограф. Но этот путь трудоемкий, поэтому чаще строят годограф чисто асимптотически, задаваясь двумя значениями ω (0 и ∞) (см. табл. 7.1). При $\omega \rightarrow \infty$ действительная и мнимая части АФХ стремятся к нулю.

При этом действительная часть $Re = \frac{-\infty^2}{\infty^6}$ т.е. стремится к нулю, но остается *отрицательной* (3-я и 4-я четверти). Мнимая часть $Im = \frac{\infty^3}{\infty^6}$, т.е. стремится к нулю, но остается *положительной* (1-я и 4-я четверти). Таким образом, годограф будет стремиться к нулю на комплексной плоскости со стороны четвертой четверти (см. Рис. 7.7).

Определить, с какой четверти годограф стремится к нулю можно, зная какой сдвиг фаз дает каждое элементарное звено. Суммарный сдвиг фазы для трех апериодических звеньев будет -270° . При этом годограф при $\omega = \infty$, когда Re и Im части для выражения $K(j\omega)$ равны нулю, войдет в точку с координатами $(0,0)$ комплексной плоскости со стороны -270° , т.е., должен пересечь вещественную ось.

Найдем точку «z» пересечения годографа и вещественной оси (см. рис. 7.4). Для этого нужно найти такое значение ω , при котором мнимая часть выражения $K(j\omega)$ равна нулю.

Таблица 7.1

ω	0	∞
$R(\omega)$	≈ 3	- 0
$I(\omega)$	0	+0

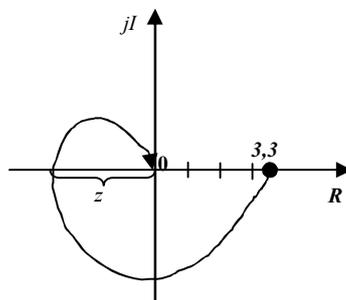


Рис. 7.7

Определяем это значение ω . Мнимая часть может быть равна нулю, когда числитель равен нулю: $Im = -10(5,5\omega - 0,5\omega^3)$, откуда найдем $\omega = \sqrt{11}$.

Подставив полученное значение частоты ω в выражение действительной части Re , найдем величину выброса годографа z :

$$z = \frac{10 \cdot (3 - 2(\sqrt{11})^2)}{(3 - 2(\sqrt{11})^2)^2 + (5,5\sqrt{11} - 0,5(\sqrt{11})^3)^2} = \frac{10 \cdot (-19)}{19^2} \approx -0,52$$

Из этого следует, что точка « z » имеет координаты $(-0,52; j0)$, а значит, годограф АФХ при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$. Следовательно, замкнутая автоматическая система устойчива.

7.6. Задачи

7.6.1. Задача

Дана структурная схема, которая изображена на рис.7.8.

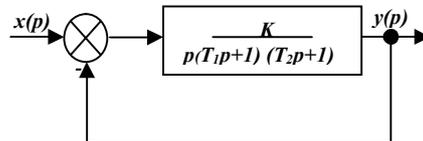


Рис. 7.8

Требуется, пользуясь критерием устойчивости Гурвица:

- исследовать устойчивость системы при $k = 10$, $T_1 = 2c$, $T_2 = 0,2c$;
- определить критические значения $k_{кр}$ общего коэффициента усиления разомкнутой системы.

7.6.2. Задача

Дана система, структурная схема которой показана на рис.7.8.

Требуется, пользуясь критерием устойчивости Найквиста, исследовать устойчивость системы при $k = 3$, $T_1 = 1c$, $T_2 = 3c$.

7.6.3. Задача

Структурная схема системы показана на Рис. 7.9. Показать, что при любых $k > 0$ и $T > 0$ система устойчива (с помощью критерия Гурвица и критерия Найквиста).

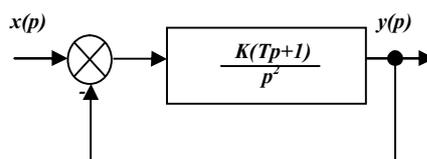


Рис. 7.9

7.6.7. Задача

Найти критический коэффициент усиления системы $k_{кр}$, если передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = \frac{k(0,1p + 1)}{(0,2p + 1)(0,5p + 1)p}$$

7.6.5 Задача

Структурная схема системы показана на Рис. 7.10.

Требуется:

а) исследовать устойчивость системы, пользуясь критерием устойчивости Найквиста. Варианты $K(p)$ приведены в табл. 7.2.

б) исследовать устойчивость системы, пользуясь критерием устойчивости Гурвица. Варианты $K(p)$ приведены в табл. 7.2.

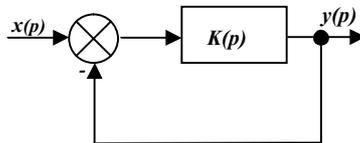


Рис. 7.10

Таблица 7.2

Номер вар.	$K(p)$	Номер вар.	$K(p)$
1	$\frac{10}{p^2}$	16	$\frac{100(p+1)}{p(4p+1)}$
2	$\frac{5}{p^2(2p+1)}$	17	$\frac{5(2p+1)}{p(0,5p+1)}$
3	$\frac{2(p+1)}{p^2}$	18	$\frac{10}{p(2p+1)^2}$
4	$\frac{10(p+1)}{p(2p+1)}$	19	$\frac{5}{p(0,5p+1)^2}$
5	$\frac{5(4p+1)}{p(p+1)}$	20	$\frac{2}{(5p+1)(p+1)}$
6	$\frac{10(0,5p+1)}{p^2(2p+1)}$	21	$\frac{20}{(0,5p+1)^2}$
7	$\frac{100(2p+1)}{p^2(p+1)}$	22	$\frac{5}{p^2}$
8	$\frac{10}{(2p+1)(p+1)}$	23	$\frac{10}{p^2(p+1)}$
9	$\frac{5}{p(2p+1)^2}$	24	$\frac{25(p+1)}{p^2(2p+1)}$
10	$\frac{0,3}{p^2}$	25	$\frac{2(p+1)}{p^2(0,25p+1)}$

11	$\frac{2}{p^2(0,5p+1)}$	26	$\frac{10(4p+1)}{p(2p+1)}$
12	$\frac{4(2p+1)}{p^2}$	27	$\frac{5}{p(0,5p+1)^2}$
13	$\frac{10(4p+1)}{p^2(2p+1)}$	28	$\frac{25}{p(0,5p+1)}$
14	$\frac{5(0,2p+1)}{p^2(p+1)}$	29	$\frac{(2p+1)}{(4p+1)(p+1)^2}$
15	$\frac{5}{p(2p+1)}$	30	$\frac{5(p+1)}{(2p+1)(0,5p+1)^2}$

Глава 8. Качество линейных стационарных систем

Под *качеством* автоматической системы понимается совокупность характеристик, определяющих насколько система удовлетворяет заданным критериям. Качество автоматической системы оценивается определенными показателями, называемыми *показателями качества*.

8.1. Качество САУ в переходном режиме

Основными параметрами, которые описывают качество систем управления в переходном режиме, являются:

Быстродействие АС обычно оценивается временем регулирования (временем переходного процесса) t_p , которое непосредственно определяется по переходной функции системы.

Перерегулирование АС оценивается величиной перерегулирования H_m , которая также непосредственно определяется по переходной функции системы (см. главу 2).

Точность линейной стационарной системы оценивается ошибками в установившемся режиме ее работы, т.е. после окончания переходного процесса.

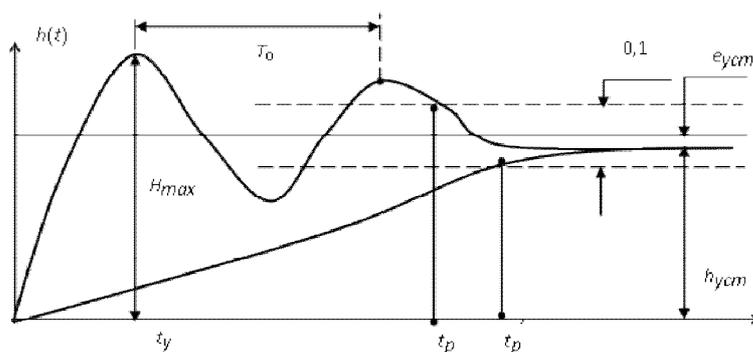


Рис. 8.1

Методы вычисления показателей качества переходного процесса можно разделить на две группы

- прямые методы вычисления
- косвенные методы оценки.

Прямые методы точны, но требуют непосредственного решения дифференциальных уравнений (или экспериментальных исследований).

Косвенные методы позволяют, не решая уравнений, с хорошей точностью оценить значения показателей качества.

Анализ переходного процесса по АЧХ

Рассмотрим АЧХ замкнутой системы. Если система неустойчива, то амплитуда колебаний на выходе системы достигает бесконечно большой величины (в реальных системах она ограничена из-за нелинейности характеристик). В этом случае АЧХ системы имеет разрыв. АЧХ устойчивой системы, в зависимости от параметров, либо имеет пик, либо является убывающей функцией (рис. 8.2). Уменьшение пика АЧХ соответствует

уменьшению амплитуды и числа колебаний, совершаемых системой в переходном режиме (рис. 8.3).

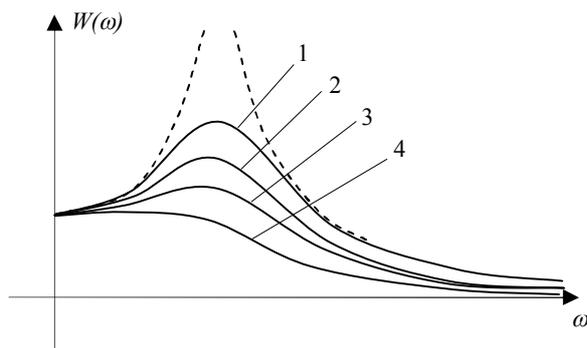


Рис. 8.2

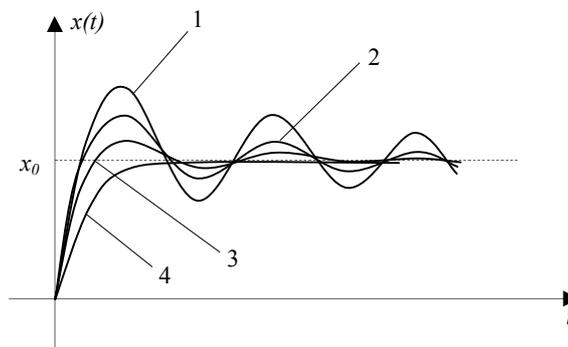


Рис. 8.3

Таким образом, вид АЧХ может быть использован для косвенной оценки длительности переходного процесса и степени перерегулирования. Чем больше пик, тем больше колебательные свойства системы, тем больше перерегулирование и длительность переходного процесса. Отношение максимума АЧХ к ее величине на нулевой частоте называется показателем колебательности. Подробно он рассмотрен в параграфе 8.5. Частота, на которой АЧХ имеет максимум, называется частотой собственных колебаний. Также если АЧХ имеет максимум, то точка ее пересечения с прямой $|W(j\omega)| = 1$ определяет частоту среза замкнутой системы ω_{cp} . По величине этой частоты можно косвенно судить о быстродействии системы. Чем больше частота среза, тем больше быстродействие. При этом время переходного процесса может быть определено по простой формуле:

$$t_p \cong \frac{\pi}{\omega_{cp}} \quad (8.1)$$

Часто свойства замкнутой системы рассматривают в зависимости от параметров передаточной функции разомкнутой системы. Можно показать, что в это случае выражение (8.1) переходит в неравенство:

$$t_p > \frac{\pi}{\omega_{rcp}}, \quad (8.2)$$

где ω_{rcp} - частота среза разомкнутой системы. Подробно зависимость между ЛАХ, показателем колебательности и переходными процессами описана в приложении П2.

8.2. Интегральные критерии качества

Локальные критерии качества обычно наглядны, но трудно вычисляются аналитически. Примером тому служат показатели переходной характеристики, рассмотренные выше. Интегральные критерии, особенно квадратичные, достаточно легко вычисляются, однако не так наглядны, как локальные.

Часто для оценки качества можно используется интегральный квадратичный критерий

$$Q = \int_0^{\infty} [h_{уст} - h(t)] dt = - \int_0^{\infty} e_n(t) dt = \int_0^{\infty} |e_n(t)| dt,$$

где через $e_n(t)$ обозначена ошибка переходного режима, представляющая разность между текущим и установившемся значениями переходной характеристики. Чем меньше Q , тем выше качество САУ.

Рассмотрим методику нахождения интегрального квадратичного критерия переходного режима для регулярного воздействия $x(t)$.

Изображение динамической ошибки можно записать в виде произведения $e(p) = x(p)K_{ex}(p)$.

Не прибегая к нахождению оригинала $e_x(t)$, можно найти установившееся значение ошибки управления

$$e_{x\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t),$$

или

$$e_{x\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} px(p)K_{ex}(p).$$

Если из полной ошибки $e_x(t)$ вычесть ошибку установившегося режима $e_{x\text{уст}}$, то получим составляющую, которая равна ошибке переходного режима

$$e_n(t) = e_x(t) - e_{x\text{уст}}.$$

Очевидно, что

$$e_n(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ так как } e_x(t) \rightarrow e_{x\text{уст}}.$$

Интегральный квадратичный критерий качества переходного режима определим как величину

$$Q = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt = \int_0^{\infty} [e_x(t) - e_{x\text{уст}}]^2 dt.$$

На основании известной теоремы Парсеваля, нахождение интегрального квадратичного критерия качества Q переходного режима сводится к вычислению интеграла Парсеваля

$$Q = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt = I[e_n(p)] \tag{8.3}$$

Чтобы вычислить конкретное значение этого интеграла, функцию $e_n(p)$ записывают в виде отношения полиномов

$$e_n(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot p + \dots + \alpha_m \cdot p^m}{\beta_0 + \beta_1 \cdot p + \dots + \beta_n \cdot p^n}.$$

Тогда интеграл будет функцией параметров α , и β . Значения функций табулированы и для $n < 4$ приведены в табл. П.3.

Изображение ошибки переходного режима получаем из формулы:

$$e_n(p) = e_x(p) - e_{x \text{ уст}},$$

где учтено, что изображение от постоянной $e_{x \text{ уст}}$ равно $e_{x \text{ уст}}/p$.

Установившуюся ошибку по задающему воздействию можно определить по формуле

$$e_{x \text{ уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pK_{ex}(p)x(p), \quad (8.4)$$

где $K_{ex}(p)$ - передаточная функция ошибки по задающему воздействию для замкнутой системы $K_{ex}(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}$; $x(p)$ - изображение задающего воздействия.

Установившуюся ошибку по возмущающему воздействию определяют по формуле

$$e_{v \text{ уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pK_{ev}(p)v(p), \quad (8.5)$$

где $K_{ev}(p)$ - передаточная функция ошибки по возмущающему воздействию для замкнутой системы; $v(p)$ - изображение возмущающего воздействия.

8.3. Коэффициенты ошибок

В случае если на систему с передаточной функцией $K_{yx}(p) = \frac{P(p)}{D(p)}$

действует полиномиальный входной сигнал вида

$$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_k t^k, \quad (8.6)$$

где x_i - постоянные известные коэффициенты, то в установившемся режиме ошибка $e_x(t)$ определяется равенством

$$e_x(t) = D_0 x(t) + D_1 x^{(1)}(t) + \dots + D_k x^{(k)}(t) \quad (8.7)$$

где D_i - коэффициенты ошибки.

Коэффициенты D_i , представляют собой коэффициенты разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $p = 0$ передаточной функции $K_{ex}(p)$ и удовлетворяют равенству

$$K_{ex}(p) = D_0 + D_1 p + \dots + D_k p^k \quad (8.8)$$

Формула (8.8) лежит в основе практического способа вычисления коэффициентов D_i . Для систем с передаточной функцией ошибки по задающему воздействию $K_{ex}(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}{c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0}$ равенство (8.8) можно

переписать в виде

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) = (D_0 + D_1 p + \dots + D_k p^k)(c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0) \quad (8.9)$$

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях p в обеих частях этого выражения вычисляются коэффициенты D_i :

$$D_0 = \frac{a_0}{c_0}, \quad D_1 = \frac{a_1 - c_1 D_0}{c_0}, \quad D_2 = \frac{a_2 - c_1 D_1 - c_2 D_0}{c_0}, \text{ и т.д.} \quad (8.10)$$

8.4. Астатизм систем

Система называется *статической* по отношению к определенному входному сигналу $x(t)$, если первый коэффициент ошибки D_0 не равен нулю. Из этого определения и формулы (8.8) следует, что в случае постоянного входного сигнала ошибка системы в установившемся режиме постоянна и отлична от нуля.

Система называется *астатической* ν -го порядка по отношению к определенному входному сигналу $x(t)$, если первые ν коэффициентов ошибки равны нулю, а D_ν отличен от нуля ($D_0=0, D_1=0, D_{\nu-1}=0, D_\nu \neq 0$)

Согласно этим определениям для наиболее часто встречающихся сигналов в таблице 8.1. приведены установившиеся ошибки АС.

Таблица 8.1

$x(t)$	Статическая система	Астатическая система 1-го порядка	Астатическая система 2-го порядка
$A \cdot 1(t)$	$\frac{A}{1+k}$	0	0
$V \cdot t$	∞	$\frac{V}{k}$	0
$\frac{a \cdot t^2}{2}$	∞	∞	$\frac{a}{k}$

Статизм или порядок астатизма системы по отношению к тому или иному входному сигналу могут быть определены по виду структурной схемы системы. Признаки структурных схем, позволяющие определять порядок астатизма системы, называются структурными признаками астатизма.

Порядок астатизма следящей системы со структурой вида рис.8.4 по отношению к полезному входному сигналу $x(t)$ равен числу интегрирующих звеньев в передаточной функции разомкнутой системы $K(p)$.

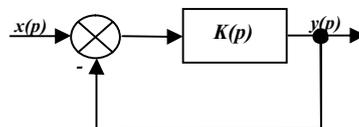


Рис. 8.4

Порядок астатизма системы со структурой вида (рис. 8.5) по отношению к возмущению $\nu(t)$ равен сумме числа дифференцирующих звеньев в передаточной функции элементов, расположенных между точкой приложения возмущения и выходом системы по ходу сигнала (т.е. в передаточной функции $K_2(p)$) и интегрирующих звеньев в передаточных функциях элементов, расположенных между точкой приложения возмущения и выходом системы против хода сигнала (т.е. в передаточных функциях $K_1(p)$ и $K_3(p)$).

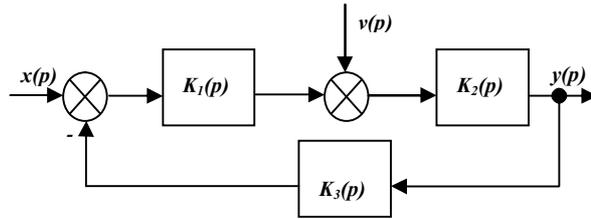


Рис. 8.5

8.5. Частотные критерии качества

Критерии качества, основанные на анализе частотных свойств коэффициента передачи системы, называются *частотными критериями качества*.

Запас устойчивости

Прежде всего, эти критерии позволяют оценить запас устойчивости системы. Будем рассматривать систему с обратной связью и построим годограф коэффициента передачи *разомкнутой* системы $W_r(j\omega)$. Согласно критерию Найквиста (см. параграф 7.4), система будет устойчива, если годограф не охватывает на комплексной плоскости точку $(-1, j0)$. Запас устойчивости по такому годографу определяется на двух частотах: на *частоте среза* и *критической частоте*. На частоте среза $\omega_{ср}$ модуль коэффициента передачи разомкнутой системы $|W_r(j\omega)| = 1$. На критической частоте $\omega_{кр}$ ФЧХ принимает значение $-\pi$. (Рис. 8.6)

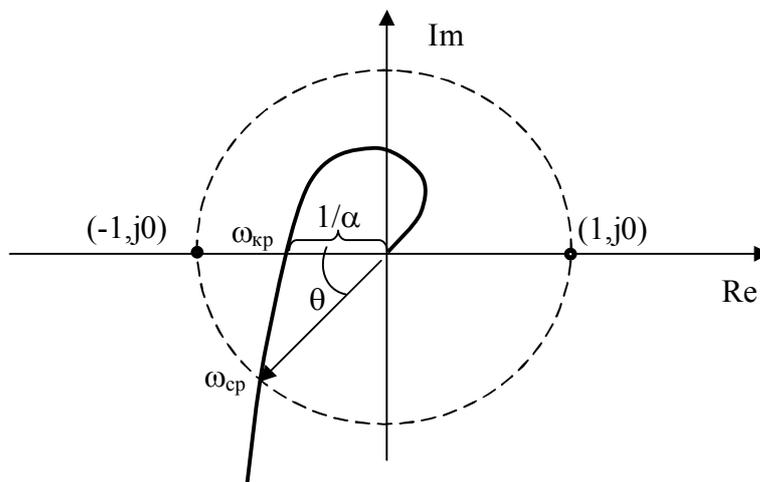


Рис. 8.6

Запас устойчивости по фазе показывает, на какое значение ФЧХ системы на частоте среза отличается от $-\pi$.

$$\theta = \pi + \psi(\omega), \quad (8.11)$$

где $\psi(\omega)$ аргумент коэффициента передачи разомкнутой системы $W_r(j\omega)$. Запас устойчивости по фазе показывает максимальное значение фазового сдвига, приводящее систему на границу устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде показывает, во сколько раз нужно увеличить коэффициент усиления на критической частоте, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Т.к. ФЧХ разомкнутой системы не зависит от коэффициента усиления, то при его изменении меняется только масштаб годографа. Таким образом, запас устойчивости по амплитуде определяется выражением:

$$\alpha = \frac{1}{|W_r(j\omega_{кр})|} \quad (8.12)$$

Определить запас устойчивости можно по логарифмическим частотным характеристикам. Система устойчива, если на частотах $\omega < \omega_{кр}$ (т.е. $L(\omega) > 0$) фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не пересекает ось $-\pi$ или пересекает ее четное число раз.

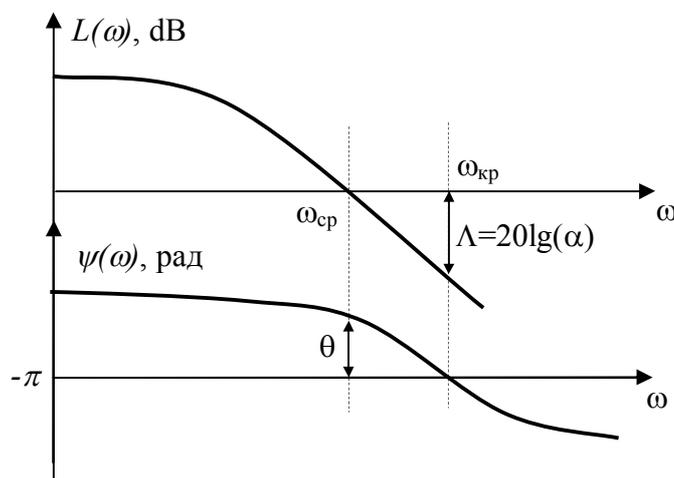


Рис. 8.7

Запас устойчивости по фазе определяется по ЛФХ на частоте $\omega_{ср}$, а запас устойчивости по амплитуде - по ЛАХ на частоте $\omega_{кр}$ (Рис. 8.7).

Показатель колебательности

Недостатком критерия, основанного на вычислении запасов устойчивости является то, что необходимо вычислить два значения - θ , α . Комплексным критерием, объединяющим в себе обе этих характеристики является *показатель колебательности* или *коэффициент колебательности*. Рассмотрим модуль частотного коэффициента передачи замкнутой системы. Показатель колебательности M будет равен максимальному значению этого модуля (имеется виду наибольший максимум)

$$M = |W(j\omega)|_{max} = \left| \frac{W_r(j\omega)}{1+W_r(j\omega)} \right|_{max} \quad (8.13)$$

Этот критерий качества имеет простой физический смысл. Чем больше резонансный пик $W(j\omega)$, тем больше склонность системы к колебаниям, тем меньше запас устойчивости.

Рассмотрим определение показателя колебательности по АФХ разомкнутой системы. Возьмем произвольное значение АЧХ замкнутой системы. Отобразим это значение на комплексную плоскость частотного коэффициента передачи разомкнутой системы. Для этого решим уравнение:

$$M = |W(j\omega)| = \left| \frac{W_r(j\omega)}{1+W_r(j\omega)} \right|, \quad (8.14)$$

Сделаем подстановку $W_r(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$ и перепишем (8.14) в виде

$$\left| \frac{U+jV}{1+U+jV} \right| = \left| \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{\sqrt{(1+U)^2+V^2}} \right|, \quad (8.15)$$

После несложных преобразований (8.15) получим

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2, \quad C = \frac{M^2}{M^2-1}, \quad R = \frac{M}{M^2-1}, \quad (8.16)$$

Выражение (8.16) задает в комплексной плоскости уравнение окружности с радиусом R и центром, смещенным от начала координат на величину C . Задаваясь различными значениями M можно построить семейство таких окружностей. Для $0 < M < 1$ окружности располагаются на оси U справа от значения $U=0.5$. Для $M > 1$ окружности располагаются на оси U слева от значения $U=0.5$. Значение $M=1$ является предельным - окружность выражается в прямую линию $U=0.5$. (Рис. 8.8)

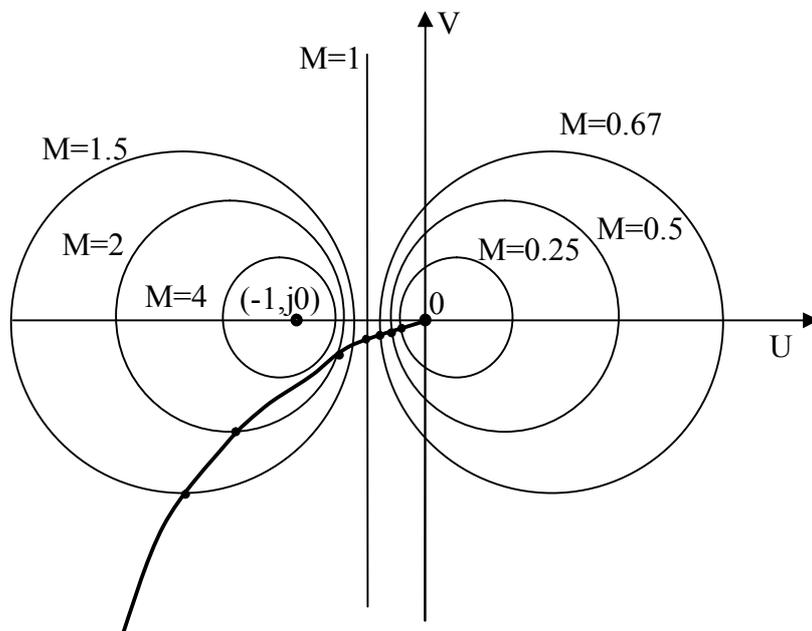


Рис. 8.8

Если на этой плоскости построить годограф коэффициента передачи разомкнутой системы, то точки пересечения годографа и каждой из окружностей будут определять значение АЧХ замкнутой системы. Показатель

колебательности системы будет равен значению M_{max} окружности с минимальный радиусом, которого коснется годограф.

При проектировании систем управления обычно ставится условие, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения M^* . Для выполнения этого условия необходимо, чтобы годограф коэффициента передачи разомкнутой системы не пересекал окружности $M=M^*$. Другими словами окружность M^* является запретной зоной для годографа разомкнутой системы. Непопадание в эту зону обеспечивает необходимый запас устойчивости системы.

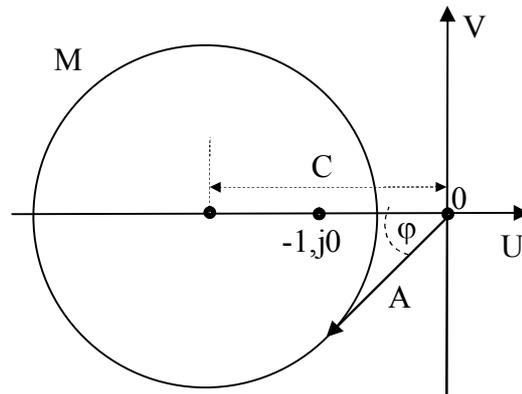


Рис. 8.9

Движение вектора изображающей точки годографа вдоль окружности M (рис. 8.9) описывается уравнением:

$$\cos(\varphi) = \frac{A^2 + C}{2AC}, \quad (8.17)$$

где φ - угол наклона вектора изображающей точки; A - модуль этого вектора; C - коэффициент, определяемый выражением (8.16). Зависимость (8.17) существует только при выполнении условий:

$$\frac{M}{M+1} < A < \frac{M}{M-1}, \quad (8.18)$$

Если (8.18) не выполняется, то вектор годографа не попадает в запретную зону. Если в выражении (8.18) положить $A=1$, то можно получить зависимость запаса устойчивости по фазе θ от M .

$$\cos(\theta) = \frac{2M^2 - 1}{2M^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{4M^2 - 1}}{2M^2} \quad (8.19)$$

При M больших единицы с хорошим приближением справедлива формула:

$$\sin(\theta) \approx \frac{1}{M} \quad (8.20)$$

Из выражений (8.18-8.20) так же можно найти связь показателя колебательности и запаса устойчивости по амплитуде.

$$\alpha = \frac{1}{|W_r(j\omega_{кр})|} = \frac{M+1}{M}, \quad (8.21)$$

Пусть есть построенная ЛАХ. Зададим предельное значением M и построим запретную область для фазовой характеристики. Для этого вычислим из (8.17) значение φ для всех амплитуд A , взятых в пределах (8.18). Чтобы показатель колебательности не был больше заданного значения - фазовая характеристика не должна заходить в эту область (Рис. 8.10). Таким образом, задав M и определив запретную область, можно сразу обеспечить требуемый запас по фазе и амплитуде.

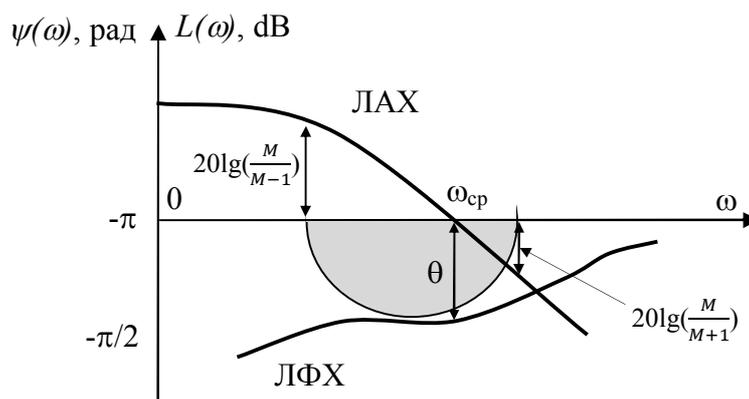


Рис. 8.10

8.6. Примеры решения типовых задач

8.6.1. Задача

Найти интегральный квадратичный критерий качества переходного процесса в системе управления антенной.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = \frac{K}{p(1+K+pT)} = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию равна

$$K_{ex}(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} = \frac{p(1+K+pT)}{p(1+K+pT)+K}.$$

Так как рассматривается переходный процесс, то воздействием является единичная функция

$$x(t) = 1(t)$$

с изображением

$$x(p) = 1/p.$$

Изображение ошибки управления

$$e_x(p) = \frac{1+K+pT}{K+p(1+K)+p^2T}.$$

Установившееся значение ошибки

$$e_{x \text{ уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} p e_x(p) = 0.$$

В итоге получим, что изображение ошибки переходного режима равно

$$e_n(p) = e_x(p) = \frac{1 + K + pT}{K + p(1 + K) + p^2 T} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p}{\beta_0 + \beta_1 \cdot p + \beta_2 \cdot p^2},$$

где

$$\alpha_0 = 1 + K; \quad \alpha_1 = T; \quad \beta_0 = K; \quad \beta_1 = 1 + K; \quad \beta_2 = T.$$

Согласно формуле (8.1) интегральный квадратичный критерий качества переходного режима равен интегралу Парсевала

$$Q = I[e_n(p)].$$

Используя данные табл. П.3. для $n = 2$, находим значение интеграла

$$Q = \frac{T}{2(1 + K)} + \frac{1 + K}{2K}.$$

8.6.2. Задача

Структурная схема системы представлена на Рис. 8.11.

Необходимо найти установившуюся ошибку и определить астатизм системы для входного и возмущающего воздействий. Решение необходимо выполнить в общем виде.

$x(p) = L[x(t)]$ - изображение задающего воздействия; $v(p) = L[v(t)]$ - изображение возмущающего воздействия.

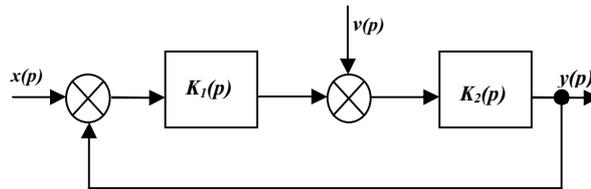


Рис. 8.11

Решение

1. Нахождение $e_{уст}(t)$.

Установившаяся ошибка будет равна сумме установившихся ошибок

$$e_{уст}(t) = e_{x \text{ уст}}(t) + e_{v \text{ уст}}(t),$$

где $e_{x \text{ уст}}(t)$ - установившаяся ошибка для задающего воздействия; $e_{v \text{ уст}}(t)$ - установившаяся ошибка для возмущающего воздействия.

На основании принципа суперпозиции, т.е. чтобы связать задающее воздействие, выходной сигнал и ошибку, необходимо составить два уравнения:

$$\begin{cases} y(p) = e(p)K_1(p)K_2(p) + v(p)K_2(p); \\ e(p) = x(p) - y(p). \end{cases}$$

Далее для нахождения $e(p)$ необходимо первое уравнение подставить во второе:

$$e(p) = x(p) - e(p)K_1(p)K_2(p) - v(p)K_2(p);$$

$$e(p)[1 + K_1(p)K_2(p)] = x(p) - v(p)K_2(p);$$

$$e(p) = \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)}x(p) - \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)}v(p).$$

Здесь: $K_{ex}(p) = \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)}$ - передаточная функция замкнутой

системы по ошибке для задающего воздействия;

$K_{ev}(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)}$ - передаточная функция замкнутой системы по

ошибке для возмущающего воздействия.

Тогда

$$e_x(p) = K_{ex}(p)x(p); e_v(p) = K_{ev}(p)v(p);$$

$$e_{x,ycm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p e_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{ex}(p)x(p),$$

$$e_{v,ycm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p e_v(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{ev}(p)v(p),$$

$$e_{ycm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{ex}(p)x(p) + \lim_{p \rightarrow 0} p K_{ev}(p)v(p).$$

2. Определение порядка астатизма.

Порядок астатизма системы по отношению к задающему (полезному) воздействию $x(t)$ равен числу интегрирующих звеньев в передаточной функции разомкнутой системы ($K_1(p)$, $K_2(p)$).

Порядок астатизма системы по отношению к возмущающему воздействию равен сумме числа дифференцирующих звеньев, расположенных между точкой приложения возмущения и выходом системы по ходу сигнала ($K_2(p)$) и интегрирующих звеньев в передаточной функции элементов, расположенных между точкой приложения возмущения в передаточной функции элементов, расположенных между точкой приложения возмущения и выходом системы против хода сигнала ($K_1(p)$).

8.6.3. Задача

Структурная схема системы показана на Рис. 8.12. Найти установившуюся ошибку при $x(t)=2t$ и $v(t)=3 \cdot I(t)$ и определить порядок астатизма системы относительно задающего и возмущающего воздействий.

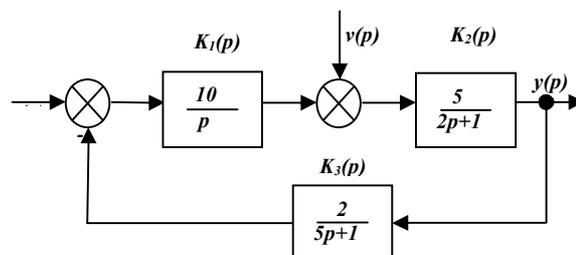


Рис. 8.12

Решение.

$$x(p) = L[x(t)] = 2/p^2; v(p) = L[v(t)] = 3/p.$$

$$\begin{cases} y(p) = e(p)K_1(p)K_2(p) + v(p)K_2(p); \\ e(p) = x(p) - y(p)K_3(p). \end{cases}$$

$$e(p) = \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} x(p) - \frac{K_2(p)K_3(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} v(p);$$

$$K_{ex}(p) = \frac{1}{1 + \frac{10 \cdot 5 \cdot 2}{p(2p+1)(5p+1)}} = \frac{p(2p+1)(5p+1)}{p(2p+1)(5p+1) + 100};$$

$$e_{x_{ycm}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(2p+1)(5p+1)}{p(2p+1)(5p+1) + 100} \frac{2}{p^2} = 0,02;$$

$$K_{ev}(p) = \frac{-10p}{p(2p+1)(5p+1) + 100};$$

$$e_{v_{ycm}}(t) = - \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{10p}{p(2p+1)(5p+1) + 100} \frac{3}{p} = 0;$$

$$e_{ycm}(t) = e_{x_{ycm}}(t) + e_{v_{ycm}}(t) = 0,02 + 0 = 0,02.$$

Данная система относительно задающего воздействия является астатической 1-го порядка, так как передаточная функция разомкнутой системы содержит одно интегрирующее звено, а также астатизм можно определить и по установившейся ошибке $e_{хуcm}(t)$. Так как $e_{хуcm}(t)$ постоянная при подаче на вход линейного нарастающего воздействия, то система является астатической 1-го порядка (см. табл. 8.1).

Относительно возмущающего воздействия система является астатической 1-го порядка, так как между точкой приложения $v(t)$ и выходом системы нет дифференцирующих звеньев и от точки приложения $v(t)$ против хода сигнала имеется одно интегрирующее звено. Также астатизм можно определить и по установившейся ошибке $e_{vуcm}(t)$. Для этой системы $e_{vуcm}(t)$ равно нулю при постоянном сигнале в промежуточной точке (см. табл. 8.1).

8.7. Задачи

8.7.1. Задача

Для системы с передаточной функцией разомкнутой системы $K(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 + 1)}$, требуется определить порядок астатизма по отношению к задающему воздействию и ошибку системы в установившемся режиме, если $x(t) = 3t$; $k = 10$; $T_1 = 5c$; $T_2 = 1c$; $T_3 = 0,1c$.

8.7.2. Задача

Для системы со структурной схемой, приведенной на Рис. 8.13, и передаточной функцией разомкнутой системы $K(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$, требуется определить порядок астатизма системы по отношению к задающему воздействию $x(t)$ и возмущающему $v(t)$ воздействиям, а также определить ошибку системы в установившемся режиме, если $x(t) = 2t$; $v(t) = 0,1t$; $k = 10 \text{ c}^{-2}$; $T_1 = 2\text{c}$; $T_2 = 1\text{c}$.

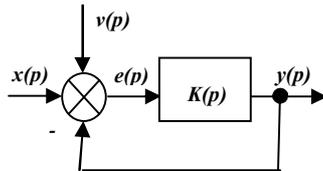


Рис. 8.13

8.7.3. Задача

Структурная схема системы приведена на Рис. 8.14.

Требуется определить порядок астатизма системы по отношению к входному сигналу $x(t)$ и определить первые три коэффициента ошибки.

$$K_1(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}; K_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

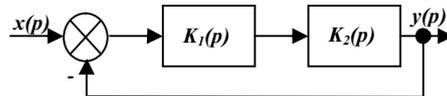


Рис. 8.14

8.7.4. Задача

Структурная схема системы приведена на Рис. 8.13.

Требуется определить порядок астатизма системы по отношению к задающему сигналу $x(t)$ и возмущению $v(t)$ и вычислить ошибку системы в установившемся режиме (по общей формуле и через коэффициенты ошибок).

Варианты заданий приведены в таблице 8.2.

Таблица 8.2

Номер вар.	$K(p)$	$x(t)$	$v(t)$	Номер вар.	$K(p)$	$x(t)$	$v(t)$
1	$\frac{2p}{p+1}$	$5 \cdot 1(t)$	$0,5t$	16	$\frac{5(2p+1)}{p^2}$	$-4t$	$2 \cdot 1(t)$
2	$\frac{5p}{p+1}$	$2 \cdot 1(t)$	$0,2t$	17	$\frac{2(0,5p+1)}{p^2}$	$4t$	$-2 \cdot 1(t)$

3	$\frac{10p}{p+1}$	$1,5 \cdot 1(t)$	$0,2t$	18	$\frac{2(0,5p+1)}{p}$	$0,5t^2$	$2t$
4	$\frac{2}{p}$	$2 \cdot 1(t)$	$0,2 \cdot 1(t)$	19	$\frac{4(0,2p+1)}{p}$	$5t$	$0,4 \cdot 1(t)$
5	$\frac{4}{2p+1}$	$5 \cdot 1(t)$	$0,5 \cdot 1(t)$	20	$\frac{3(0,5p+1)}{p^2}$	t^2	0
6	$\frac{1}{0,5p+1}$	$2 \cdot 1(t)$	$0,2 \cdot 1(t)$	21	$\frac{2(p+1)}{p}$	$-2 \cdot t$	$-0,5 \cdot 1(t)$
7	$\frac{4}{0,5p+1}$	$5 \cdot 1(t)$	$0,5 \cdot 1(t)$	22	$\frac{5(p+1)}{p}$	$5t$	$0,2$
8	$\frac{2(p+1)}{p}$	$2t$	$0,4 \cdot 1(t)$	23	$\frac{4(0,1p+1)}{p}$	$4t-2$	0
9	$\frac{5(p+1)}{p}$	t	$-0,8 \cdot 1(t)$	24	$\frac{10(p+1)}{p}$	$4t$	$0,4 \cdot 1(t)$
10	$\frac{10(p+1)}{p^2}$	$0,5t^2$	$-0,2 \cdot 1(t)$	25	$\frac{2p}{2p+1}$	$0,5t$	$2t$
11	$\frac{2}{p^2}$	t^2	$-0,2 \cdot 1(t)$	26	$\frac{5p}{2p+1}$	$1,5 \cdot 1(t)$	$0,5t$
12	$\frac{2(2p+1)}{p^2}$	$10t$	0	27	$\frac{10p}{2p+1}$	$-(2+5t)$	0
13	$\frac{2p+1}{p^2}$	$2(1+t)$	$0,5$	28	$\frac{p}{p+1}$	$1-2t$	t
14	$\frac{10}{p}$	$3t$	$0,2$	29	$\frac{5}{p}$	$5t-1$	$0,5$
15	$\frac{2}{p}$	$-5+2t$	0	30	$\frac{10p}{p+1}$	0	$0,5t+2$

Глава 9. Последовательная коррекция линейных стационарных систем

Наиболее простым, наглядным и хорошо разработанным инженерным методом синтеза корректирующих устройств является метод логарифмических частотных характеристик, основанный на связи показателей качества переходного и установившегося режимов с ЛАХ и ЛФЧ разомкнутой системы. Благодаря такой связи можно переходить от показателей качества к параметрам ЛАХ и ЛФХ системы, то есть по заданным показателям качества САУ (перерегулированию, времени регулирования, ошибке в установившемся режиме) возможно строить желаемую ЛАХ системы.

Желаемой ЛАХ принято называть такую частотную характеристику системы, при которой обеспечиваются заданные показатели качества.

При синтезе корректирующего устройства САУ методом ЛЧХ принято выделять следующие этапы решения задачи:

Построение ЛАХ некорректированной САУ в разомкнутом состоянии при требуемом (желаемом) коэффициенте усиления $K_{жс}$.

Построение желаемой ЛАХ с учетом ЛАХ некорректированной САУ и требований к ходу частотных характеристик, обусловленных желаемыми показателями САУ.

Определение ЛАХ корректирующего устройства. В случае синтеза последовательного корректирующего устройства его ЛАХ получают простым вычитанием ординат ЛАХ некорректированной САУ из ординат желаемой ЛАХ.

Определение передаточной функции корректирующего устройства на основе получения ЛАХ. Расчет параметров корректирующего устройства для его технической реализации.

Оценка показателей качества скорректированной САУ с использованием ЛАХ и ЛФХ.

9.1. Примеры решения типовых задач.

Синтезировать корректирующее устройство для САУ, имеющей передаточную функцию

$$K(P) = \frac{K}{P(1 + 0,02P)(1 + 0,01P)}.$$

Требуется обеспечить показатели качества переходного режима $tp < 0,5c$; $H_m < 30\%$ и следующие составляющие ряда ошибок $D_0 = 0$; $D_1 = 0,008 c$; $D_2 = 0,02 c^2$.

Поэтапное решение задачи:

1. Построение ЛАХ исходной (некорректированной) САУ.

Определяем желаемый коэффициент усиления для получения ошибки в установившемся режиме не выше заданной

$$K_{жс} = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{0,008} = 125c^{-1}.$$

Определяем также опорные частоты некорректированной САУ (индексы опорным частотам присвоены в порядке возрастания их значения)

$$\omega_1 = \frac{1}{0,2} = 5c^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{0,01} = 100c^{-1},$$

и отмечаем их вдоль оси частот.

Проводим низкочастотную асимптоту $L(\omega)$, представляющую при $\omega < \omega_1$ прямую с наклоном $-v$ (в нашем случае $v = 1$, так как система содержит одно интегрирующее звено. Это прямая (Рис. 9.1.) пересекает ось абсцисс на частоте

$$\omega = \sqrt[v]{K_{жс}} = 125c^{-1}.$$

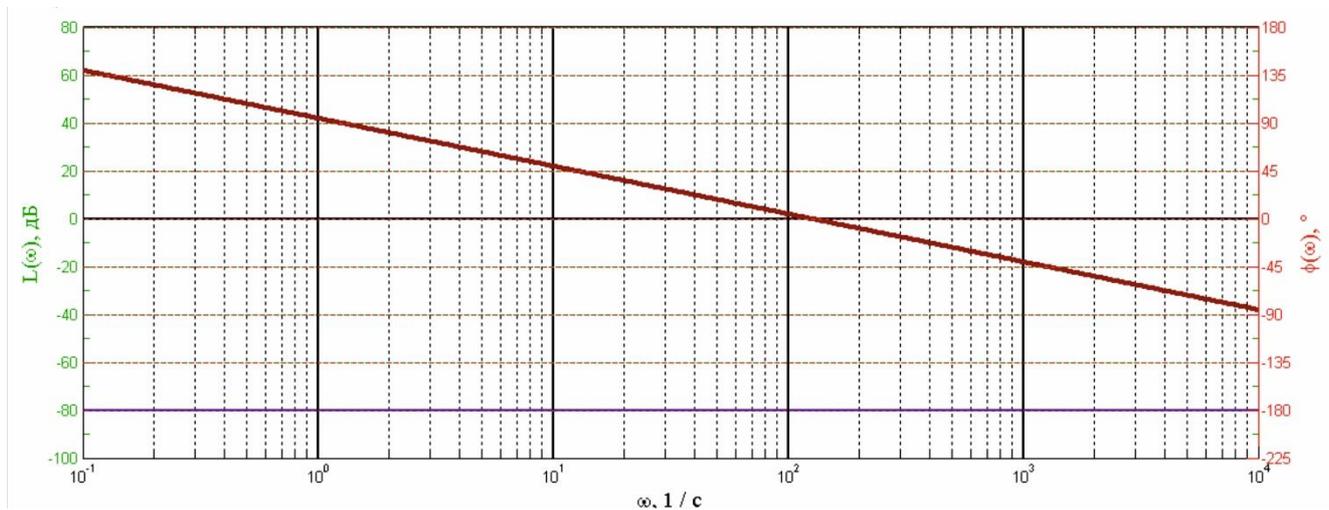


Рис. 9.1 Построение низкочастотной асимптоты

После каждой из опорных частот изменяем наклон на -1 , так как система содержит апериодические звенья.

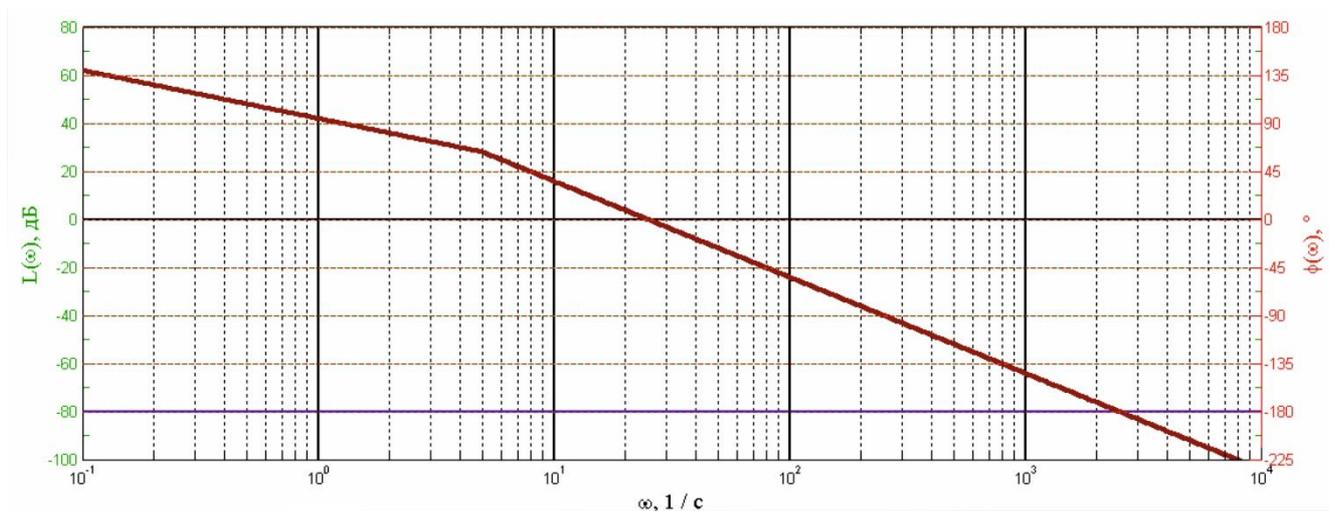


Рис. 9.2. Построение ЛАХ апериодического звена с $\omega_1 = 5c^{-1}$,

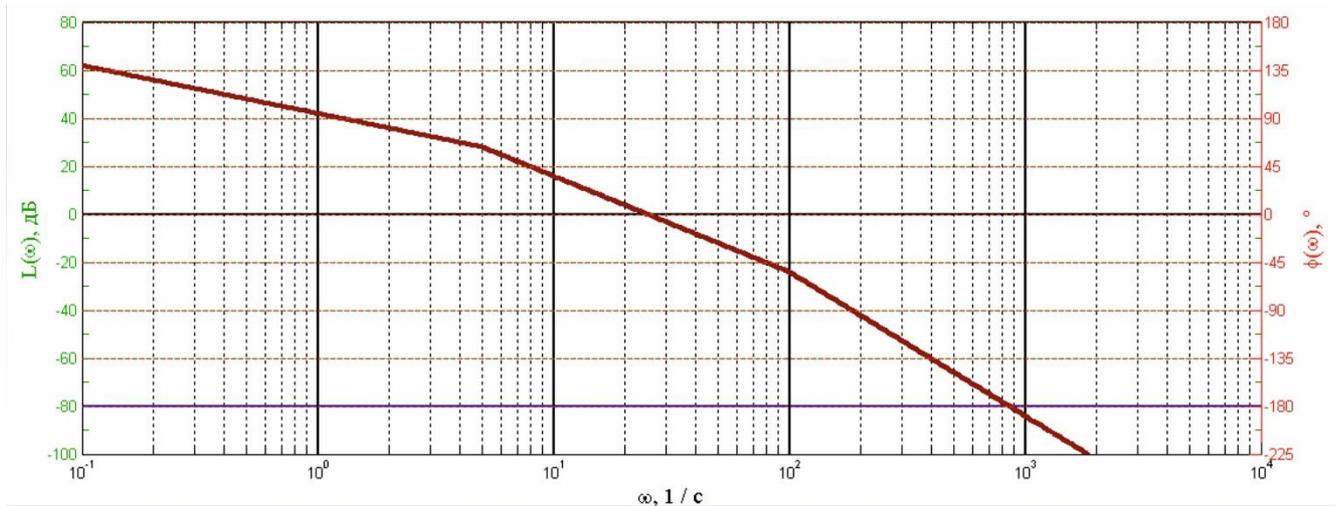


Рис. 9.3. Построение ЛАХ аperiodического звена с $\omega_1 = 100c^{-1}$,

Построенная таким образом асимптотическая характеристика разомкнутой САУ приведена на Рис. 9.4.

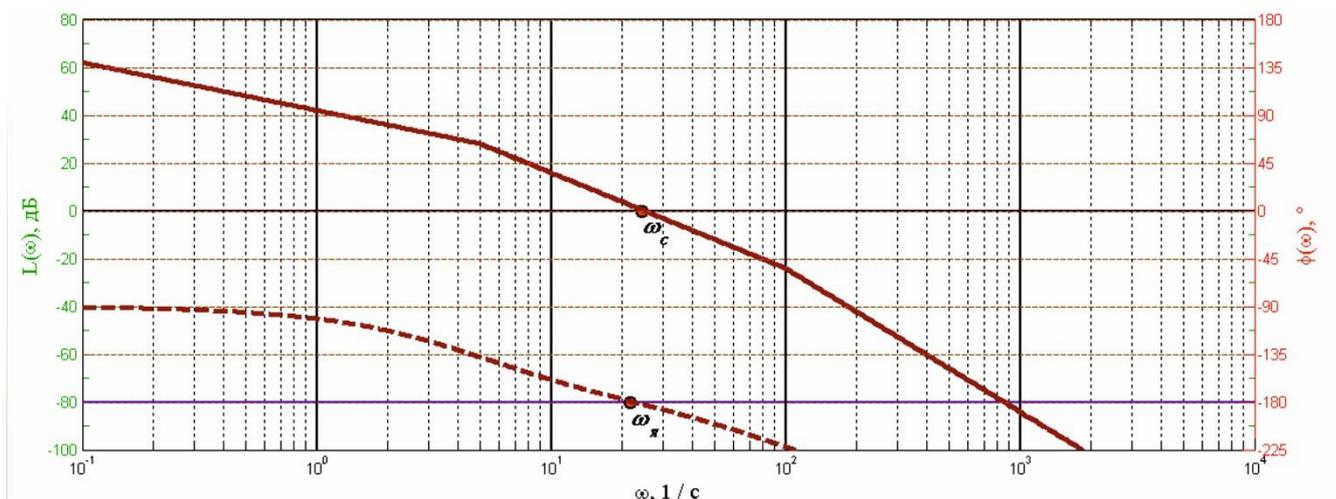


Рис. 9.4. ЛАЧХ и ЛФЧХ исходной системы

Как видно из рисунка ФЧХ системы пересекает частоту ω_π до частоты среза, следовательно система является неустойчивой.

2. Построение желаемой ЛАХ.

Выбираем тип желаемой ЛАХ. Так как по условию коэффициент D_0 равен 0 (ошибка по положению отсутствует), порядок астатизма ν желаемой ЛАХ должен быть больше 0 ($\nu > 0$). Поэтому тип желаемой ЛАХ будем выбирать из ряда $S^{\nu} | 1$, обычно это ЛАХ-2\1. После окончания построения ЛАХ необходимо проверить выполнение условия $\omega_c \backslash \omega_2 > 2 \dots 4$. Если указанное условие не выполняется, абсолютное значение S необходимо увеличить (например, выбрать ЛАХ -3\1) и построение повторить и т.д.

С помощью соотношений, приведенных в таблице, определяем частоту $\omega_{1ж}$. Для ЛАХ – 2\1 опорная частота $\omega_{1ж}$ равна (Рис. 9.5)

$$\omega_{1ж} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{0,0008}{0,02} = 0,4c^{-1}.$$

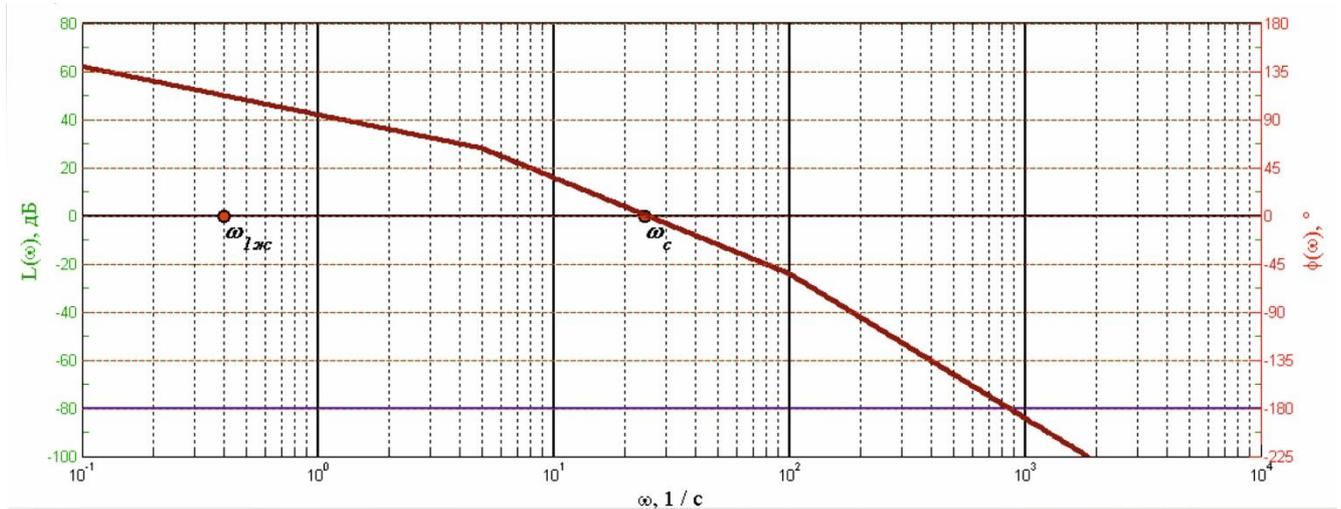


Рис. 9.5

С учетом требований к качеству переходного режима определяем частоту среза желаемой ЛАХ (Рис. 9.6.)

$$\omega_{сж} = \frac{7...9}{t_p} = \frac{8}{t_p} = 16c^{-1}.$$

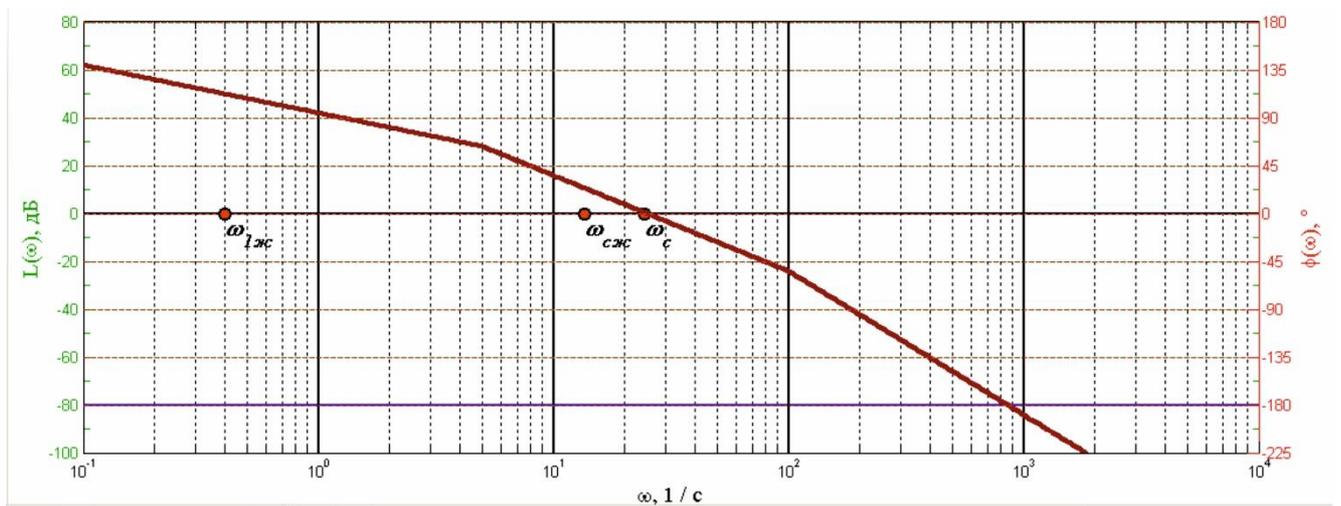


Рис. 9.6.

Через точку $\omega_{1ж}$ проводим с наклоном – 2 низкочастотную асимптоту (Рис. 9.7),

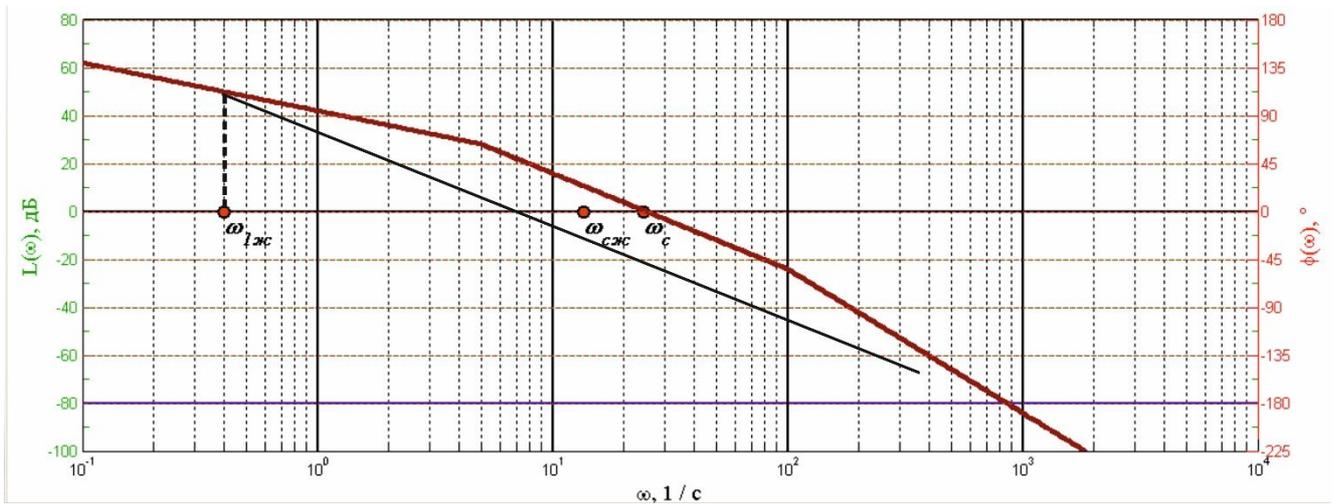


Рис. 9.7

а через точку $\omega_{сж}$ – среднечастотную асимптоту с наклоном -1 (рис 9.8),

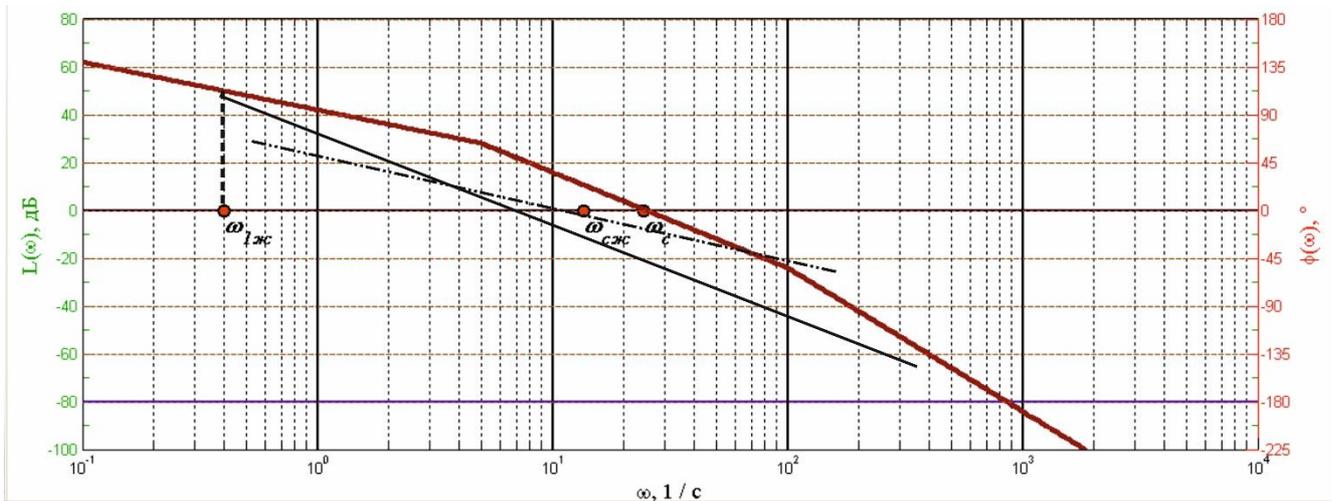


Рис. 9.8

точка пересечения указанных асимптот соответствует опорной частоте $\omega_{2ж}$ (Рис. 9.9).

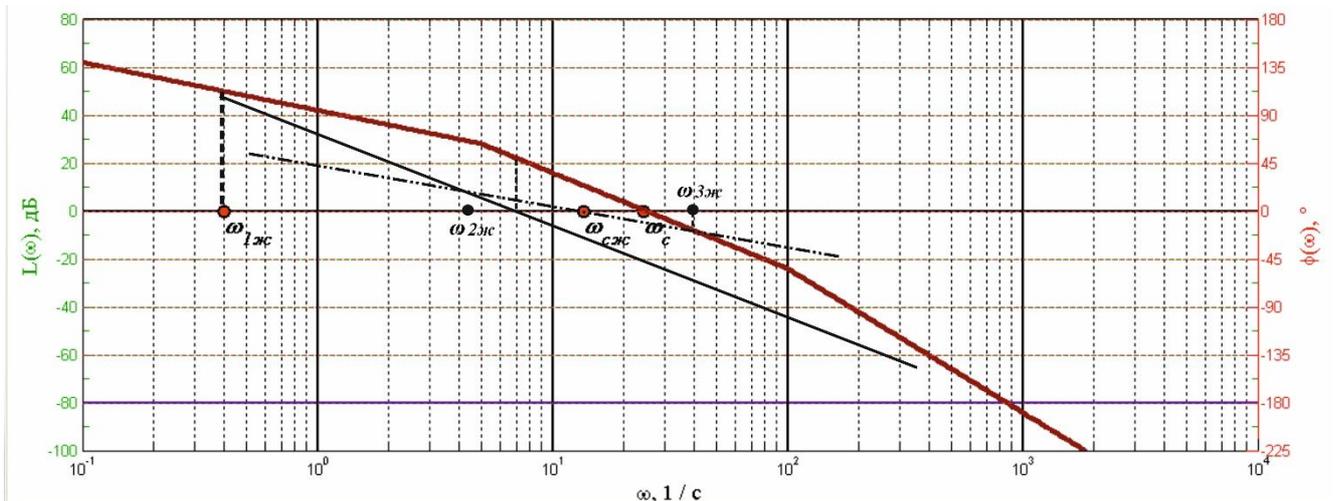


Рис. 9.9

Проверяем выполнение условия $\omega_{сж}/\omega_2 > 2$. В нашем примере $\omega_{2ж}$ равна $3,4 \text{ c}^{-1}$, то есть необходимое условие выполняется.

Построение желаемой ЛАХ в области высоких частот проводится из условия наибольшей простоты корректирующего устройства. В данном случае это удастся выполнить, если ход желаемой и исходной ЛАХ после их пересечения в точке, соответствующей частоте $\omega_{3ж}$ сделать одинаковым. В этом случае опорные частоты $\omega_{4ж}$ и ω_2 совпадают.

Выполнение в соответствии с изложенной методикой графики исходной и желаемой ЛАХ приведены на рис. 2.

3. Определение ЛАХ корректирующего устройства.

ЛАХ последовательного корректирующего устройства получаем вычитанием ординат ЛАХ некорректированной САУ из ординат желаемой ЛАХ. В результате получаем, что на участках $0 \dots \omega_{1ж}$ и $\omega_{3ж} \dots \infty$ желаемая и исходная ЛАХ совпадают и, следовательно, значение ЛАХ корректирующего устройства равно 0. На участках $\omega_{1ж} \dots \omega_{2ж}$ и $\omega_1 \dots \omega_{3ж}$ ЛАХ корректирующего устройства имеет соответственно наклоны -1 и 1 , на участке $\omega_{2ж} \dots \omega_1$ ЛАХ корректирующего устройства постоянна (Рис. 9.1).

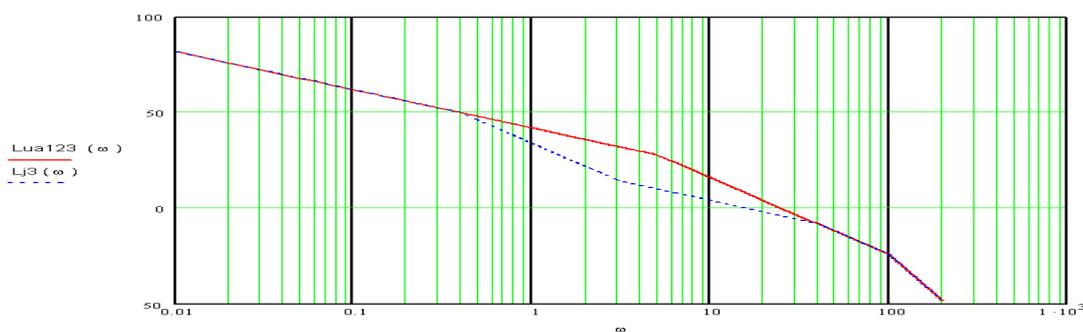


Рис. 9.1. Логарифмические частотные характеристики

4. Определение передаточной функции корректирующего устройства.

По виду ЛАХ определяем, что корректирующее устройство представляет собой интегродифференцирующий четырехполюсник, передаточная функция которого имеет вид

$$K_k(P) = \frac{(1 + PT_{k1})(1 + PT_{k3})}{(1 + PT_{k1})(1 + PT_{k4})}$$

Рассчитываем параметры корректирующего устройства:

$$T_{k1} = \frac{1}{\omega_{1жс}} = \frac{1}{0,4} = 2,5с;$$

$$T_{k2} = \frac{1}{\omega_{2жс}} = \frac{1}{3,4} \cong 0,3с;$$

$$T_{k3} = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{5} = 0,2с;$$

$$T_{k4} = \frac{1}{\omega_{3жс}} = \frac{1}{42} = 0,024с.$$

и значение емкостей и сопротивления схемы в соответствии с соотношениями, приведенными ранее.

5. Оценка показателей качества скорректированной САУ

Для качественной оценки показателей качества переходного режима проводим построения ЛФК скорректированной САУ, определяем запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi(\omega_c)$ и рассчитываем перерегулирование (Рис. 1.9).

$$Hm\% = 73 - \Delta\varphi(\omega_0) = 25\%$$

С учетом полученного запаса устойчивости по фазе уточняем значение времени регулирования

$$t_p = \frac{8}{\omega_{сжс}} = 0,5с, \text{ для } \Delta\varphi(\omega_c) = 48^0.$$

Глава 10. Системы управления при случайных воздействиях

На практике все системы РА функционируют в условиях возмущающих воздействий. Помехи, шумы, случайные отклонения параметров системы являются случайными процессами. Вследствие этого выходной сигнал системы и ошибка слежения так же являются случайными величинами. Для характеристики работы таких систем необходимо использовать характеристики случайных процессов.

10.1. Случайные величины и случайные процессы

Случайные величины

Пусть есть некоторая случайная величина x , которая может принимать значения в некотором интервале ($a \leq x \leq b$) или все значения $-\infty \leq x \leq \infty$. Вероятность того, что x примет значение меньше некоторой величины x_1 ($x \leq x_1$) называется *интегральным законом распределения*. На рис. 10.1 приведен пример графика закона распределения.

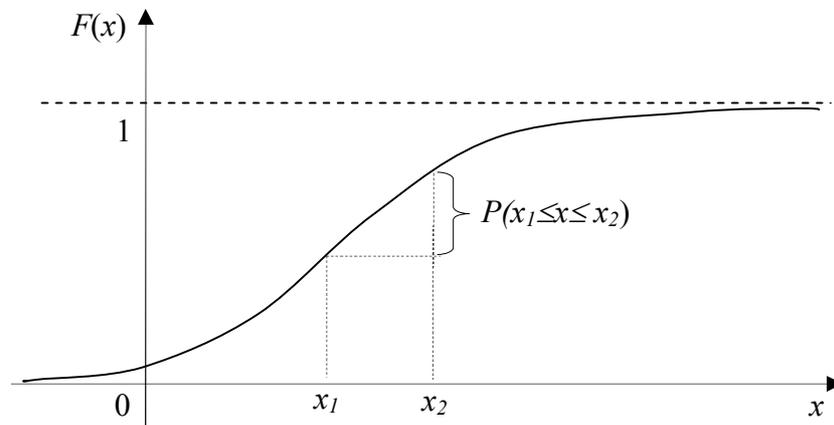


Рис. 10.1.

Закон распределения $F(x)$ произвольной случайной величины x обладает следующими простыми свойствами:

- 1) $F(-\infty)=0$
- 2) $F(\infty)=1$
- 3) Вероятность того, что x лежит в заданном интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ равна:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (10.1)$$

Величина

$$\frac{dF(x)}{dx} = p(x) \quad (10.2)$$

называется *плотностью распределения вероятности* или *дифференциальным законом распределения*. Согласно (10.2) вероятность того, что x лежит в заданном интервале

$$(10.3)$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Геометрически интеграл (10.4) равен площади заштрихованной фигуры под графиком плотности распределения вероятности (рис. 10.2). В силу определения (10.2), интегральный закон выражается через дифференциальный следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (10.4)$$

Так как $F(\infty)=1$, вся площадь под кривой $p(x)$ равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (10.5)$$

Усреднение по множеству реализаций будем обозначать скобками. С учетом такого обозначения, среднее арифметическое случайной величины $\langle x \rangle$ определяется интегралом:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (10.6)$$

Величина (10.7) называется *моментом первого порядка*. Соответственно момент порядка "m"

$$\langle x^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^m p(x) dx \quad (10.7)$$

Формула (10.5) это момент нулевого порядка.

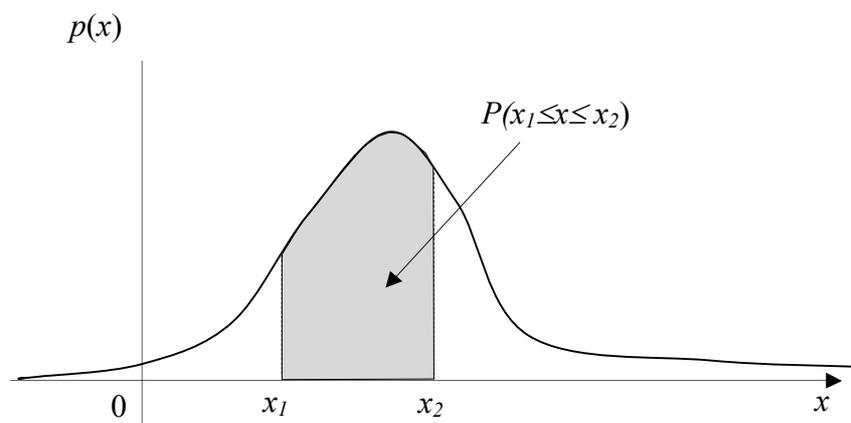


Рис. 10.2.

Центральным моментом порядка "m" называют величину

$$\begin{aligned} M[(x - \langle x \rangle)^m] &= \langle (x - \langle x \rangle)^m \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^m p(x) dx \end{aligned} \quad (10.8)$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю. Центральный момент второго порядка называется дисперсия

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2 \quad (10.9)$$

Корень квадратный из дисперсии - *среднеквадратичное отклонение*:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2} \quad (10.10)$$

Равномерное распределение

Распределение с плотностью вероятности, равной константе $p(x) = p_0$ на некотором интервале $x \in [x_1, x_2]$ значений называется *равномерным распределением* (рис. 10.3).

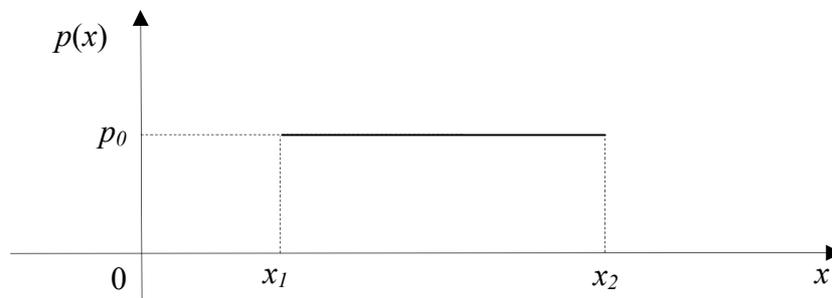


Рис. 10.3.

В силу свойства (10.6)

$$p_0 = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (10.11)$$

Рассмотрим основные свойства распределения (10.12). Математическое ожидание:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x p_0 dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (10.12)$$

Дисперсия:

$$(10.12a)$$

$$D = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Плотность распределения вероятности нормального закона определяется формулой:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (10.13)$$

где σ - среднеквадратичное отклонение, \bar{x} - математическое ожидание случайной величины (рис. 10.4)

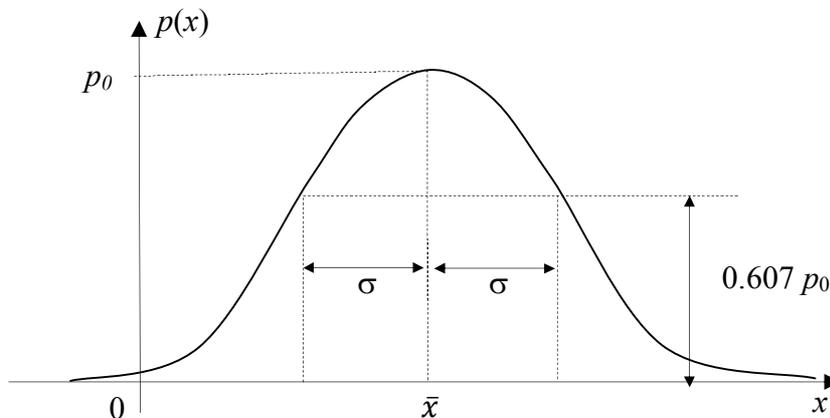


Рис. 10.4.

Нормальный закон распределения распространен очень широко. В частности Гауссов закон возникает в случае, если случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых величин.

Случайные процессы

Случайная величина x , изменяющаяся во времени, называется *случайным* или *стохастическим* процессом $x(t)$. Случайный процесс представляет собой не какую то определенную кривую $x(t)$, а представляет собой множество всех возможных кривых $x(t)$. Соответственно невозможно сказать по какой кривой пойдет процесс. Иногда говорят, что случайный процесс это такая функция времени, значение которой в каждый момент времени - случайная величина $x(t)$.

Будем наблюдать реализации случайного процесса в некоторый момент времени t_1 . Т.к. это случайная величина, то можно получить закон распределения $p(x, t_1)$. Причем в каждый момент времени справедливо условие нормировки (10.6) :

$$(10.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t_1) dx = 1$$

При изменении времени и закон $p(x, t)$ может изменяться, соответственно от времени будут зависеть характеристики случайной величины. Математическое ожидание:

$$D \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t_1) dx \quad (10.14)$$

Дисперсия:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x, t_1) dx = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (10.15)$$

Среднее значение случайного процесса - некоторая средняя кривая, около которой группируются все возможные реализации $x(t)$. Дисперсия $D(t)$ характеризует рассеяние возможных реализаций процесса от средней кривой. Таким образом, математическое ожидание (10.14) и дисперсия (10.15) являются средними значениями случайного процесса $x(t)$ по множеству для каждого момента времени.

Для связи значений процесса $x(t)$ в различные моменты времени введем понятие двумерной плотности вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$. Если в момент времени t_1 процесс $x(t)$ будет находиться в интервале $(x_1 + dx)$, то в вероятность того что в момент времени t_2 он будет находиться в интервале $(x_2 + dx)$ будет равна $p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$.

Аналогично можно определить n -мерную плотность вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Если ее умножить на $dx_1 dx_2 \dots dx_n$, то получим вероятность того, что процесс $x(t)$ пройдет около заданных n точек. Для условной плотности вероятности справедлива формула:

$$p(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_2 \quad (10.16)$$

т.к. $p(x_1, t_1)$ плотность вероятности случайной величины $x(t_1)$, безотносительно того куда перейдет процесс в последующий момент времени.

Двумерная плотность вероятности позволяет определить важную характеристику случайного процесса - *корреляционную функцию* (второй смешанный момент).

$$B(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (10.17)$$

и ковариационную функцию (второй смешанный центральный момент)

$$B_0(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) p(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (10.18)$$

При $t_1=t_2$ двумерная случайная величина x_1, x_2 вырождается в одномерную величину $x_1^2 = x_2^2$ и в соответствии с (10.8) корреляционная функция определяет среднюю величину квадрата случайного процесса:

$$B(t_1, t_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t_1) dx = \langle x(t_1)^2 \rangle = D(t_1) + \langle x(t_1) \rangle^2 \quad (10.19)$$

А ковариационная функция при $t_1=t_2$ определяет дисперсию случайного процесса

$$B_0(t_1, t_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - \langle x(t_1) \rangle)^2 p(x, t_1) dx = D(t_1) \quad (10.20)$$

Стационарные и эргодические случайные процессы

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле*, если его условная плотность вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ произвольного порядка n зависит только от интервалов $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$ и не зависит от положения этих интервалов во всей области t .

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если математическое ожидание и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности интервалов времени $\tau = t_2 - t_1$. Для стационарного в широком смысле случайного процесса можно записать:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (10.21)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (10.22)$$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2 \quad (10.23)$$

$$B(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (10.24)$$

$$B(0) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \langle x^2 \rangle = D + (\langle x \rangle)^2$$

В радиотехнических приложениях обычно ограничиваются стационарностью случайных процессов в широком смысле.

Введем понятие усреднения по времени случайной величины для отдельной реализации случайного процесса $x(t)$. Усреднение по времени будем обозначать чертой. Среднее значение \bar{x} по времени:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt \quad (10.25)$$

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если усреднение любой его вероятностной характеристики по множеству реализация эквивалентно усреднению по времени одной бесконечно длинной реализации. Таким образом, условие эргодичности процесса автоматически ведет его к стационарности.

Для эргодических процессов справедливы следующие выражения.

Математическое ожидание:

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt \quad (10.26)$$

Момент второго порядка:

$$\langle x^2 \rangle = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (10.27)$$

Корреляционная функция:

$$B(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau) dt \quad (10.28)$$

$$B(0) = \overline{x^2(t)} = D + (\bar{x})^2$$

Ковариационная функция:

$$B_0(\tau) = \overline{(x(t) - \bar{x})(x(t+\tau) - \bar{x})} = B(\tau) - (\bar{x})^2 \quad (10.29)$$

$$B_0(0) = \overline{(x(t) - \bar{x})^2} = D$$

Свойство эргодичности позволяет значительно упростить все расчеты и эксперименты, т.к. для эргодического случайного процесса отдельная его

реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет весь процесс со всеми возможными его реализациями.

Спектральная плотность мощности случайного процесса

Рассмотрим спектральные характеристики случайного процесса. Будем вычислять спектры отдельных реализаций. Т.к. отдельные реализации могут существенно отличаться друг от друга, то и их существенно отличаются. Усреднение по всему ансамблю приведет к нулевому среднему спектру (при $\langle x \rangle = 0$) из-за независимости амплитуд и фаз спектральных составляющих в различных реализациях. С другой стороны, величина среднего квадрата случайного процесса не зависит от соотношения фаз отдельных гармоник. Например, если рассматривать ток, то средний квадрат этого процесса можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую на сопротивлении 1 Ом.

Найдем среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте. Введенная таким образом величина называется *спектральной плотностью мощности* или *энергетическим спектром* случайного процесса $x(t)$. Зависимость среднего квадрата случайного процесса от спектральной плотности описывается соотношением:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \quad (10.30)$$

где $S(\omega)$ - спектральная плотность. Если случайный процесс имеет нулевой средние, то выражение (10.30) дает значение дисперсии D .

В силу определения спектральная плотность является четной и неотрицательной функцией частоты ω . Чем медленнее меняется во времени $x(t)$ тем уже ее энергетический спектр. С другой стороны скорость изменения отражается корреляционной функцией. Важным обстоятельством является то, что спектральная плотность и корреляционная функция связаны между собой преобразованиями Фурье

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (10.31)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (10.32)$$

Из соотношений (10.28, 10.31) можно получить выражение для дисперсии

$$D = B_0(0) = B(0) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \quad (10.33)$$

Спектральная плотность $S(\omega)$ двусторонняя и определена как для положительных, так и для отрицательных частот. Часто удобно пользоваться односторонней спектральной плотностью $N(f)$, определенной для положительных частот. Выражение для дисперсии центрированного случайного процесса через $N(f)$

$$D = \int_0^{+\infty} N(f)df \quad (10.34)$$

, где $\omega=2\pi f$; $N(f)=2S(\omega)$.

Белый шум

Белым шумом называется случайный процесс, имеющий "белый спектр", т.е. одинаковое значение спектральной плотности на всех частотах от $-\infty$ до $+\infty$.

$$S(\omega) = S_0 \quad (10.35)$$

На основании (10.31) такому процессу соответствует корреляционная функция

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{j\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau) \quad (10.36)$$

Формула (10.36) представляет дельта функцию, расположенную в начале координат. Вследствие этого процесс является чисто случайным процессом, т.к. при любом $\tau \neq 0$ корреляция между последующими и предыдущими значениями $x(t)$ отсутствует.

Белый шум является физически нереализуемым сигналом, т.к. ему соответствуют бесконечно большие дисперсия и средний квадрат

$$B(0) = \overline{x^2(t)} = D = \infty$$

И, следовательно, и бесконечно большая мощность.

10.2. Прохождение случайного сигнала через линейную систему

Временной анализ

Рассмотрим линейную систему с импульсной характеристикой $h(t)$ и соответствующей ей передаточной функцией $W(p)$. Пусть на входе системы действует случайный сигнал $x(t)$ с корреляционной функцией $B_x(t_1, t_2)$. Выходной сигнал системы $y(t)$ также будет случайным. Найдем его корреляционную функцию. На основании формулы свертки получим:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Математическое ожидание выходного сигнала

$$\overline{y(t)} = \int_0^t h(t - \tau)\overline{x(\tau)}d\tau$$

Перейдем к центрированным случайным величинам

$$x_0(t) = x(t) - \overline{x(t)}; \quad y_0(t) = y(t) - \overline{y(t)} \quad (10.37)$$

Далее найдем по формуле (10.33) значения $y_0(t)$ для двух различных моментов времени, перемножим их и найдем математическое ожидание. В итоге, опуская преобразования, получим:

$$B_{0y}(t, t_1) = \int_0^t h(\eta)d\eta \int_0^{t_1} h(\lambda)B_{0x}(t - \eta, t_1 - \lambda)d\lambda \quad (10.38)$$

где $B_{0y}(t, t_1)$, $B_{0x}(t, t_1)$ ковариационные функции (10.18) выходного и входного сигналов соответственно. Выражение для дисперсии выходного сигнала примет вид:

$$D_y(t) = \int_0^t h(\eta)d\eta \int_0^t h(\lambda)B_{0x}(t - \eta, t - \lambda)d\lambda \quad (10.39)$$

Если входной сигнал является стационарным процессом, то B_{0x} , B_{0y} зависят только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$. Согласно выражениями (10.38-10.39) можно вычислить корреляционную функцию и дисперсию выходного сигнала при $t \rightarrow \infty$

$$B_{0y}(\tau) = \int_0^\infty h(\eta)d\eta \int_0^\infty h(\lambda)B_{0x}(\tau + \lambda - \eta)d\lambda \quad (10.40)$$

$$D_y(t) = \int_0^t h(\eta)d\eta \int_0^t h(\lambda)B_{0x}(\lambda - \eta)d\lambda \quad (10.41)$$

$$D_y(\infty) = const = \int_0^\infty h(\eta)d\eta \int_0^\infty h(\lambda)B_{0x}(\lambda - \eta)d\lambda$$

Частотный анализ

Спектральная плотность сигнала на выходе линейной системы с коэффициентом передачи $W(p)$ определяется согласно формуле

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 \quad (10.42)$$

где $|W(j\omega)|^2$ квадрат модуля коэффициента передачи. Возведение в квадрат объясняется тем, что мы рассматриваем *спектральные плотности мощности*. Таким образом, по известным $W(j\omega)$, $S(\omega)$ можно определить корреляционную функцию выходного сигнала:

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (10.43)$$

Дисперсия выходного процесса, согласно (10.28,10.43) определится выражением

$$D_y = B_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega \quad (10.45)$$

Закон распределения

Рассмотрим плотность распределения вероятности сигнала на выходе линейной цепи. При произвольном законе распределения процесса на входе вычисление выходного распределения весьма сложная задача.

Исключением является нормальное распределение, т.к. *при любых линейных преобразованиях* нормального процесса его распределение *остается нормальным*.

Если задана плотность распределения вероятности входного процесса (с нулевым средним)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

, то плотность распределения вероятности на выходе линейной цепи будет подчиняться тому же закону:

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (10.44)$$

Дисперсию выходного процесса можно вычислить по формулам (10.41,10.45).

Эквивалентная шумовая полоса

Важной характеристикой систем управления является *эквивалентная шумовая полоса* системы или *эффективная полоса пропускания*. Она равна полосе пропускания некоторой эквивалентной системы. Эквивалентная система имеет прямоугольную амплитудно-частотную характеристику, одинаковый с исходной системой модуль комплексного коэффициента передачи на нулевой частоте и одинаковую дисперсию выходного сигнала при действии на входах этих систем белого шума.

$$f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi|W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega; \quad (10.46)$$

$$\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{|W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega; \quad 2\pi f_{\text{эф}} = \omega_{\text{эф}}$$

При действии на входе системы белого шума со спектральной плотностью $S(\omega)=S_0$ дисперсия выходного процесса, согласно (10.46) выразится через $f_{\text{эф}}$ следующим образом

$$D = \sigma^2 = 2S_0 f_{\text{эф}} |W(0)|^2 = \frac{S_0 \omega_{\text{эф}} |W(0)|^2}{\pi} \quad (10.47)$$

Если выполняется условие $|W(0)|=1$ (это всегда справедливо для астатических систем), формула (10.47) приобретает особенно простой вид

$$D = \sigma^2 = 2S_0 f_{\text{эф}} = \frac{S_0 \omega_{\text{эф}}}{\pi} = N_0 f_{\text{эф}} = \frac{N_0 \omega_{\text{эф}}}{2\pi} \quad (10.48)$$

, где $N_0 = N(0)$ - спектральная плотность шума, соответствующая выражению (10.34) ($N_0=2S_0$). Эквивалентная шумовая полоса имеет очень простую геометрическую интерпретацию (рис. 10.5)

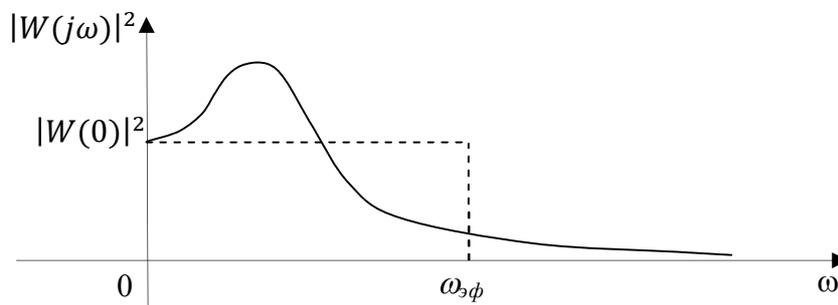


Рис. 10.5.

Площадь прямоугольника с основанием $\omega_{\text{эф}}$ равна площади, ограниченной графиком квадрата АЧХ. Приведем выражения для вычисления $f_{\text{эф}}$ для типовых коэффициентов передачи разомкнутой системы

$W_r(p)$	$f_{\Delta\phi}$
$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{4}$
$\frac{k}{p(1+Tp)}$	$\frac{k}{4}$
$\frac{k}{1+Tp}$	$\frac{k^2}{4T(1+k)}$
$\frac{k}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$	$\frac{k}{4(T_1+T_2-kT_1T_2)}$
$\frac{k(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}$	$\frac{k(T_1+T_2^2k)}{4T_1(1+kT_2)}$
$\frac{k(1+T_2p)}{p^2}$	$\frac{1+T_2^2k}{4T_2}$

Формирующий фильтр

Формирующий фильтр - это устройство, позволяющее формировать из белого шума сигнал с заданной спектральной плотностью.

Сигналы обычно не являются белыми шумами, но, при использовании формирующего фильтра, анализ систем сводится к исследованию воздействия на систему белых шумов. Формирующий фильтр и анализируемая система образуют некоторую расширенную систему, на вход которой действует белый шум $n(t)$ (рис.10.6).

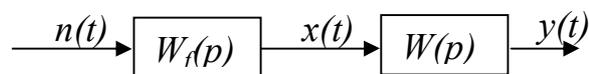


Рис. 10.6.

На выходе формирующего фильтра сигнал $x(t)$ уже обладает необходимой спектральной плотностью $S_x(\omega)$.

Пусть, спектральная плотность является дробно рациональной функцией частоты. Тогда она может быть представлена в виде произведения двух комплексно сопряженных чисел.

$$S_x(\omega) = N_x W_f(j\omega) W_f(-j\omega)$$

Отсюда легко найти коэффициент передачи формирующего фильтра

$$W_f(p) = W_f(j\omega) \Big|_{p=j\omega}$$

Существует простой алгоритм расчета параметров формирующего фильтра. Запишем спектральную плотность $S_x(\omega)$ в виде .

$$S_x(\omega) = N_x \frac{c_{2m}(j\omega)^{2m} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_0}{d_{2n}(j\omega)^{2n} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_0} \quad (10.49)$$

$$= N_x \left| \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \right|^2$$

Вычислим квадрат модуля в правой части (10.49) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях частоты. Так можно получить выражение для коэффициентов a_j, b_j .

10.3. Средняя квадратичная ошибка системы

Пусть на вход системы управления (рис. 10.7) поступает воздействие вида:

$$f(t) = x(t) + \eta(t)$$

где $x(t)$ - входной случайный сигнал, $\eta(t)$ - аддитивная случайная помеха, $W_r(p)$ - коэффициент передачи разомкнутой системы. Суммарная ошибка системы вычисляется как разница выходного и входного сигналов.

$$e_s(t) = x(t) - y(t) \quad (10.50)$$

Если взять от преобразование Лапласа от обеих частей (10.50), то можно получить зависимость $e_s(p)$ от коэффициента передачи системы.

$$e_s(p) = x(p) - y(p) = x(p) - W(p)f(p) =$$

$$x(p) - W(p)(x(p) + \eta(p)) =$$

$$= x(p) - \frac{W_r(p)}{1 + W_r(p)}(x(p) + \eta(p)) = W_e(p)x(p) - W(p)\eta(p) \quad (10.51)$$

где $W_e(p)$ - коэффициент передачи системы по ошибке, $W(p)$ - коэффициент передачи замкнутой системы. Выражение (10.51) имеет две составляющих. Точность работы системы зависит от передаточной функции по ошибке $W_e(p)$. Влияние помехи определяется $W(p)$.

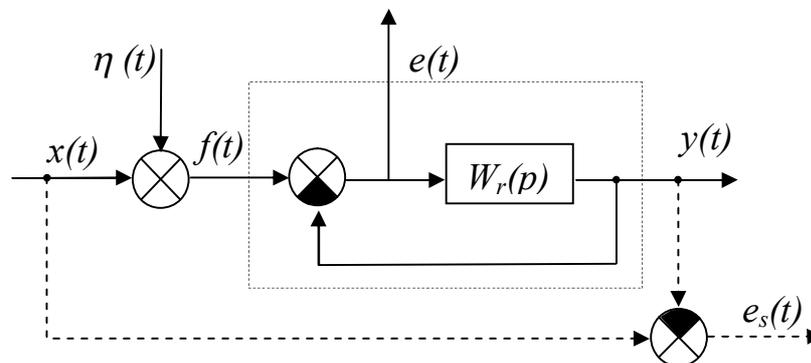


Рис. 10.7.

Будем считать, что сигнал $x(t)$ и помеха $\eta(t)$ являются стационарными случайными процессами с нормальным распределением и характеризуются математическим ожиданием ($\bar{\eta} = m_\eta$ и $\bar{x} = m_x$) и дисперсией ($D_x = \sigma_x^2$, $D_\eta = \sigma_\eta^2$). В этом случае математическое ожидание суммарной ошибки будет определяться теоремой о конечном значении функции. Из (10.51) найдем:

$$m_e = \bar{e}_s = \lim_{p \rightarrow 0} p(W_e(p)m_x - W(p)m_\eta) \quad (10.52)$$

Точность работы системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи определяется дисперсией сигнала ошибки. Найдем дисперсию $D_e = \sigma_e^2$. При этом, не теряя общности, можно положить, что сигнал и помеха являются центрированными случайными процессами, т.е. математическое ожидание $x(t)$, $\eta(t)$ равно нулю: $\bar{\eta} = m_\eta = 0$, $\bar{x} = m_x = 0$. (Если m_η или m_x отличны от нуля, то всегда можно перейти к переменным $x(t)-m_x$, $\eta(t)-m_\eta$, а значение m_e вычислить по формуле (10.52))

Согласно (10.28, 10.43) дисперсия ошибки определяется выражением:

$$\sigma_e^2 = B_e(0) \quad (10.53)$$

где, $B_e(\tau)$ - автокорреляционная функция ошибки. В силу эргодичности процессов можно искать $B_e(\tau)$ как среднее по времени от составляющих сигнала ошибки, разделенных промежутком времени τ .

$$B_e(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e(t)e(t+\tau)dt \quad (10.54)$$

Выразим $e(t)$ в (10.54) через импульсные характеристики коэффициентов передачи $W_e(p)$, $W(p)$ и после несложных, но громоздких преобразований получим.

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} [h_e(\xi)h_e(\tau)B_x(\xi-\tau) + h(\xi)h(\tau)B_\eta(\xi-\tau)]d\xi d\tau + \\ &+ \iint_{-\infty}^{+\infty} [h_e(\xi)h(\tau)B_{x\eta}(\xi-\tau) + h(\xi)h_e(\tau)B_{\eta x}(\xi-\tau)]d\xi d\tau = \\ &= \sigma_{e_x}^2 + \sigma_{e_\eta}^2 + \sigma_{e_{x\eta}}^2 + \sigma_{e_{\eta x}}^2 \end{aligned} \quad (10.55)$$

где $h(t)$, $h_e(t)$ - импульсные характеристики передаточных функций $W(p)$, $W_e(p)$ соответственно; $B_x(\tau)$ - автокорреляционная функция сигнала; $B_\eta(\tau)$ - автокорреляционная функция помехи; $B_{\eta x}(\tau)$, $B_{x\eta}(\tau)$ - взаимные корреляционные функции.

Величину σ_e часто называют *среднеквадратичной ошибкой системы*.

Если сигнал и помеха некоррелированы, то $B_{\eta x}(\tau)$, $B_{x\eta}(\tau)$ равны нулю и в выражении (10.55) останется только первый интеграл.

Дисперсия (10.55) может быть вычислена и через спектральную плотность и частотные коэффициенты передачи системы. Подставим в (10.45) выражение для $e_s(p)$ из (10.51) и после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [|W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_\eta(\omega)] d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_e(-j\omega)W(j\omega)S_{x\eta}(\omega) + W_e(j\omega)W(-j\omega)S_{\eta x}(\omega)] d\omega \quad (10.56) \\ &= \sigma_{e_x}^2 + \sigma_{e_\eta}^2 + \sigma_{e_{x\eta}}^2 + \sigma_{e_{\eta x}}^2 \end{aligned}$$

, где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность сигнала; $S_\eta(\omega)$ - спектральная плотность помехи; $S_{x\eta}(\omega)$, $S_{\eta x}(\omega)$ - взаимные спектральные плотности. Если сигнал и помеха некоррелированы, то $S_{x\eta}(\omega)$, $S_{\eta x}(\omega)$ равны нулю и в выражении (10.56) останется только первый интеграл.

Пусть сигнал помехи представляет из себя белый шум с постоянной спектральной плотностью S_0 . В этом случае составляющая дисперсии ошибки за счет действия помехи примет, согласно (10.47), очень простой вид:

$$\sigma_{e_\eta}^2 = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{S_0 \omega_{\text{эф}}}{\pi} \quad (10.57)$$

, где $\omega_{\text{эф}}$ - шумовая полоса замкнутой системы.

10.4. Примеры решения типовых задач

10.4.1. Задача

Пусть на вход интегрирующего звена с передаточной функцией $W(p)=k/p$ действует белый шум с корреляционной функцией $B(\tau)=N_0\delta(\tau)$. Необходимо определить дисперсию выходного сигнала.

Решение

Импульсная характеристика $W(p)=k/p$ равна $h(t)=L^{-1}\{k/p\}=k$

В соответствии с (10.41) запишем:

$$\begin{aligned} D_y(t) &= \int_0^t h(\eta) d\eta \int_0^t h(\lambda) B_{0x}(\lambda - \eta) d\lambda \\ &= \int_0^t k d\eta \int_0^t k N \delta(\lambda - \eta) d\lambda \end{aligned}$$

$$= \int_0^t k d\eta \quad k N_0 = k^2 N_0 t$$

Т.е. дисперсия выходного сигнала при прохождении белого шума через интегрирующее звено линейно возрастает.

10.4.2. Задача

Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W_r(p) = \frac{k}{p}$. Необходимо найти эквивалентную шумовую полосу замкнутой системы.

Решение

Согласно (10.46) шумовая полоса определяется выражением:

$$f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi |W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega$$

Частотный коэффициент передачи замкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{k}{k + j\omega}, \quad W(0) = 1$$

В итоге

$$f_{\text{эф}} = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{1}{k} \arctg\left(\frac{\omega}{k}\right) \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{k}{4}$$

Значение интеграла можно вычислить по формулам в приложении.

10.4.3. Задача

Найти коэффициент передачи формирующего фильтра для сигнала спектральная плотность которого определяется выражением:

$$S_x(\omega) = \frac{k_x}{1 + T_x^2 \omega^2}$$

В соответствии с выражением (10.49)

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= k_x \frac{1}{1 + T_x^2 \omega^2} = k_x \left| \frac{b_0}{a_1(j\omega) + a_0} \right|^2 \\ &= \frac{b_0^2}{(a_0 + a_1 j\omega)(a_0 - a_1 j\omega)} \end{aligned}$$

Отсюда легко получается: $b_0=1$, $a_0=1$, $a_1=T_x$. Выражение для передаточной функции формирующего фильтра:

$$W_{fx}(p) = k_x \frac{1}{1 + T_x p}$$

10.4.4. Задача

Определить среднеквадратичную ошибку сигнала на выходе следящей системы (рис. 10.8). Передаточная функция замкнутой системы:

$$W(p) = \frac{k}{1 + T_1 p}$$

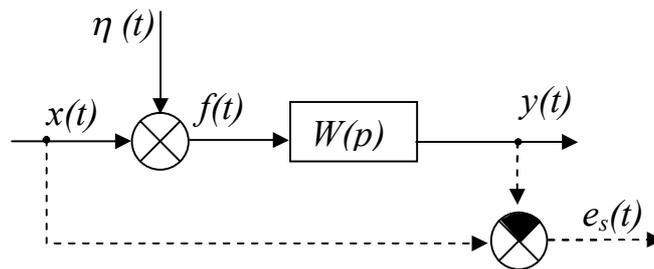


Рис. 10.8.

На систему поступают:

1) Информационный сигнал, спектральная плотность случайной составляющей которого, определяется выражением

$$S_x(\omega) = \frac{k_x}{1 + T_x^2 \omega^2}$$

2) Сигнал помехи - белый шум с равномерным распределением спектральной плотности $S(\omega) = S_0$ на всех частотах и нулевым средним.

Решение

Среднеквадратичная ошибка определяется выражением

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{ex}^2 + \sigma_{e\eta}^2},$$

где $\sigma_{ex}^2, \sigma_{e\eta}^2$ составляющие дисперсии сигнала и помехи на выходе системы. Дисперсия σ_{ex}^2 ошибки относительно входного сигнала

$$\sigma_{ex}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega,$$

где $W_e(p)$ коэффициент передачи по ошибке:

$$W_e(p) = 1 - W(p) = 1 - \frac{k}{1 + T_1 p} = \frac{1 - k + T_1 p}{1 + T_1 p}$$

$$|W_e(j\omega)|^2 = \left| \frac{(1-k) + T_1(j\omega)}{1 + T_1(j\omega)} \right|^2$$

С учетом выражения для $S_x(\omega)$, частотная характеристика формирующего фильтра входного сигнала (смотри задачу 10.4.3)

$$W_{fx}(j\omega) = \frac{k_x}{1 + T_x(j\omega)}$$

Соответственно интеграл для вычисления дисперсии примет вид

$$\sigma_{ex}^2 = \frac{k_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{T_1(j\omega) + (1-k)}{T_1 T_x(j\omega)^2 + (T_1 + T_x)(j\omega) + 1} \right|^2 d\omega$$

Найдем его значение по таблице интегралов в приложении

$$\sigma_{ex}^2 = k_x \frac{T_1^2 + (1-k)^2 T_1 T_x}{2T_1 T_x (T_1 + T_x)}$$

Дисперсия $\sigma_{e\eta}^2$ ошибки относительно помехи

$$\sigma_{e\eta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega)|^2 S_0 d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k}{1 + T_1(j\omega)} \right|^2 d\omega = \frac{S_0 k}{2T_1}$$

Ответ:

$$\sigma_s = \sqrt{k_x \frac{T_1^2 + (1-k)^2 T_1 T_x}{2T_1 T_x (T_1 + T_x)} + \frac{S_0 k}{2T_1}}$$

10.5. Задачи

10.5.1. Задача

Задана передаточная функция разомкнутой системы $W_r(p)$.

Требуется определить эквивалентную шумовую полосу замкнутой системы. Для вычислений можно воспользоваться значениями табличных интегралов из приложения.

Варианты заданий приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Номер вар.	$W_r(p)$	Номер вар.	$W_r(p)$
1	$W_r(p) = \frac{1}{2p+1}$	16	$W_r(p) = \frac{p^2 + p + 10}{12p^2 + 4p}$

2	$W_r(p) = \frac{p}{0.1p + 1}$	17	$W_r(p) = \frac{p^2 + p + 10}{8p^2 + 3p}$
3	$W_r(p) = \frac{0.1p + 1}{0.2p + 1}$	18	$W_r(p) = \frac{2p}{7p^3 + p + 12}$
4	$W_r(p) = \frac{p}{4p + 7}$	19	$W_r(p) = \frac{p - 2}{4p^2 + 5}$
5	$W_r(p) = \frac{5}{(p + 10)(p + 5)}$	20	$W_r(p) = \frac{p(4p + 1)}{12p^2 + p + 2}$
6	$W_r(p) = \frac{5(0.5p + 1)}{(p + 10)(p + 5)}$	21	$W_r(p) = \frac{100(0.5p + 1)}{p(p + 2)}$
7	$W_r(p) = \frac{100(0.5p + 1)}{10p + 1}$	22	$W_r(p) = \frac{10(2p - 7)}{3p^2 - 2}$
8	$W_r(p) = \frac{10}{(p + 2)(p + 1)}$	23	$W_r(p) = \frac{10p}{(p + 5)(p - 1)}$
9	$W_r(p) = \frac{10}{p(p + 2)}$	24	$W_r(p) = \frac{10 - 8p}{(p + 2)^2}$
10	$W_r(p) = \frac{10p + 1}{(p + 2)^2}$	25	$W_r(p) = \frac{10p^2 + 4}{(p - 3)^2}$
11	$W_r(p) = \frac{7p + 1}{p + 2}$	26	$W_r(p) = \frac{7p + 1}{p(p - 1)}$
12	$W_r(p) = \frac{7p(p + 1)}{p^2}$	27	$W_r(p) = \frac{7p(p + 1)}{p^2 + p}$
13	$W_r(p) = \frac{(p + 1)}{p(0.5p - 7)}$	28	$W_r(p) = \frac{7p(p - 12)}{p(2p + 2)}$
14	$W_r(p) = \frac{7(p + 1)}{p(0.5p - 7) - 4}$	29	$W_r(p) = \frac{3(p + p^2)}{p(2p + 1) - 5p}$
15	$W_r(p) = \frac{10}{p(p - 7) - 4p^2}$	30	$W_r(p) = \frac{10p}{p(p - 1) + 4p^2}$

10.5.2. Задача

Задана спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega)$.

Требуется определить коэффициент передачи формирующего фильтра для этого сигнала.

Варианты заданий приведены в таблице 10.2.

Таблица 10.2

Номер вар.	$S_x(\omega)$
1	$S_x(\omega) = \frac{k}{1 + 0.01\omega^2}$
2	$S_x(\omega) = \frac{k\omega^2}{1 + 0.01\omega^2}$
3	$S_x(\omega) = \frac{k}{\omega^2(1 + \omega^2)}$
4	$S_x(\omega) = \frac{k\omega^2}{\omega^2(1 + \omega^2)}$

5	$W_r(p) = \frac{5}{(1 + 0.01\omega^2)(1 + 0.04\omega^2)}$
6	$W_r(p) = \frac{1 + 0.01\omega^2}{1 + 0.05\omega^2 + 4 \cdot 10^{-4}\omega^4}$
7	$W_r(p) = \frac{3\omega^2}{(1 + 0.01\omega^2)(1 + 0.04\omega^2)}$
8	$W_r(p) = \frac{3}{\omega^2(1 + 0.01\omega^2)(1 + 0.04\omega^2)}$
9	$W_r(p) = \frac{1 + 0.01\omega^2}{\omega^4(1 + 0.04\omega^2)}$

Глава 11. Типовые системы автоматического управления

Основные теоретические сведения

При разработке систем радиоавтоматики основную роль играют требования к характеристикам проектируемой системы. В зависимости от показателей качества, которые должны быть достигнуты, выбирается тот или иной подход к построению системы управления.

Одним из основных показателей эффективности работы является реакция системы на типовые задающие воздействия. Значение коэффициентов ошибок системы существенным образом зависит от астатизма системы (см. главу 8). Повышение порядка астатизма делает равными нулю первые коэффициенты ряда ошибок системы (и повышает, таким образом, точность регулирования). Для астатизма первого порядка - $D_0=0$, для астатизма второго порядка - $D_0=0$, $D_1=0$ и т.д.

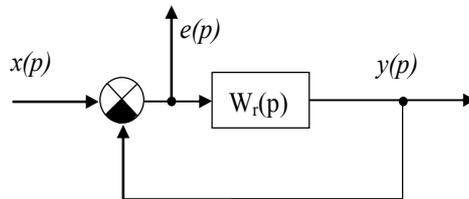


Рис. 11.1

Рассмотрим типовые системы РА с разными значениями астатизма, характеристики и показатели качества, которые обеспечивают эти системы на примере типовой системы автоматического управления с обратной связью.

11.1. Коэффициент передачи

Пусть коэффициент передачи разомкнутой системы $W_r(p)$ не имеет в своем составе интеграторов:

$$W_r(p) = \frac{k}{p^v} \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0}, n \leq m \quad (11.1)$$

Порядок астатизма системы определяется количеством интеграторов в знаменателе (11.1) и равен v . Согласно (3.2) коэффициент передачи замкнутой системы,

$$W(p) = \frac{W_r}{1+W_r} = \frac{k(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0)}{p^v(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0) + k(b_m p^m + \dots + b_1 p^1 + b_0)} \quad (11.2)$$

Коэффициент передачи по ошибке, согласно (3.3)

$$W_e(p) = \frac{1}{1+W_r} = \frac{p^v(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0)}{p^v(a_n p^n + \dots + a_1 p^1 + a_0) + k(b_m p^m + \dots + b_1 p^1 + b_0)}$$

Или

$$W_e(p) = \frac{1}{1+W_r} = \frac{p^v(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0)}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p^1 + c_0} \quad (11.3)$$

Отметим, что количество дифференцирующих звеньев в числителе в полиномах передаточных функций $W(p)$ и $W_e(p)$ равно астатизму. В системе с астатизмом нулевого порядка таких звеньев нет. Такую систему называют *статической*.

Коэффициенты ошибок

Пусть на систему (11.1) действует полиномиальный входной сигнал вида (8.4)

$$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_k t^k,$$

Установившуюся ошибку системы можно представить в виде (8.5)

$$e_x(t) = D_0 x(t) + D_1 x^{(1)}(t) + \dots + D_k x^{(k)}(t) + \dots$$

Найдем коэффициенты ошибок статической системы.

Т.к. $e(p) = W_e(p)x(p)$, то отличие от нуля коэффициентов D_i определяется способностью $W_e(p)$ дифференцировать входное воздействие, т.е. порядком астатизма системы. С другой стороны коэффициенты D_i представляют собой коэффициенты разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $p=0$ передаточной функции $W_e(p)$ и удовлетворяют равенству (8.6)

$$W_e(p) = D_0 + D_1 p + \dots + D_k p^k \quad (11.4)$$

Для вычисления D_i , согласно (11.3), перепишем (11.4) в виде

$$p^v (a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) = (D_0 + D_1 p + \dots + D_k p^k) (c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0) \quad (11.5)$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях p , получим формулы для вычисления значений коэффициентов ошибок:

Ниже приведены значения первых трех коэффициентов ошибок для порядка астатизма $v=(0,1,2)$, выраженные через параметры $W_r(p)$.

Статическая система

D_0	$\frac{1}{1+k}$
D_1	$k \frac{a_1 - b_1}{(1+k)^2}$
D_2	$2 \left\{ k \frac{a_2 - b_2}{(1+k)^2} + k \frac{a_1(b_1 - a_1)}{(1+k)^3} + k^2 \frac{2b_1(b_1 - a_1)}{(1+k)^3} \right\}$

Астатизм 1-го порядка

D_0	0
-------	---

D_1	$\frac{1}{k}$
D_2	$2 \left\{ \frac{a_1 - b_1}{k} - \frac{1}{k^2} \right\}$

Астатизм 2-го порядка

D_0	0
D_1	0
D_2	$\frac{2}{k}$

Отметим, что для статической системы *все коэффициенты ошибок отличны от нуля*. Это значит, что такая система входное воздействие нулевого порядка (постоянный входной сигнал $x(t)=const$) обработает с постоянной ошибкой - $e(t) = \frac{1}{1+k}$

Частотные характеристики

Найдем значение модуля частотного коэффициента передачи замкнутой системы $W(j\omega)$ на нулевой частоте. Для статической системы он равен

$$|W(0)| = \frac{a_0}{c_0} = \frac{a_0}{a_0 + b_0} \quad (11.6)$$

Из (11.6) следует что, значение АЧХ системы на нулевой частоте статической системы *всегда меньше единицы*. Для системы с порядком астатизма больше единицы значение передаточной функции замкнутой системы на нулевой частоте *всегда равно единице*:

$$|W(0)| = \frac{a_0}{c_0} = \frac{a_0}{a_0} = 1 \quad (11.7)$$

Для применения частотных критериев анализа устойчивости замкнутой системы часто удобно исследовать годограф частотного коэффициента передачи $W_r(j\omega)$ разомкнутой системы (11.1). Рассмотрим основные его свойства.

На нулевой частоте $|W_r(0)| = \frac{b_0}{a_0}$, следовательно, годограф начинается на положительной оси комплексной плоскости.

При выполнении условия $m < n$, значение годографа при $\omega = \infty$ всегда *равно нулю*.

При выполнении условия $m = n$, значение годографа при $\omega = \infty$, равно $|W_r(0)| = \frac{b_n}{a_n}$, т.е. он заканчивается на положительной оси комплексной плоскости.

11.2. Шумовая полоса

Статическая система (система нулевого порядка астатизма)

Пусть передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W_r(p) = \frac{k}{(1+T p)}, \quad (11.8)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$W(p) = \frac{W_r}{1+W_r} = \frac{k}{T p + k + 1}$$

Шумовая полоса системы соответственно будет равна.

$$\begin{aligned} f_{\text{эф}} &= \frac{1}{2\pi |W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k^2 \frac{1}{|T(j\omega) + k + 1|^2} d\omega = \frac{k^2}{4T(1+k)} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Система первого порядка астатизма

1) Пусть передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W_r(p) = \frac{l}{p},$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$W(p) = \frac{W_r}{1+W_r} = \frac{p}{1+p}$$

Шумовая полоса системы соответственно будет равна.

$$f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi |W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{k}{4} \quad (11.10)$$

2) Пусть передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W_r(p) = \frac{k}{p(1+T_2 p)}, \quad (11.11)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$W(p) = \frac{W_r}{1+W_r} = \frac{k}{T_2 p^2 + p + k}$$

Шумовая полоса системы соответственно будет равна.

$$\begin{aligned} f_{\text{эф}} &= \frac{1}{2\pi |W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k^2 \frac{1}{|T_2^2(j\omega)^2 + (j\omega) + k|^2} d\omega \\ f_{\text{эф}} &= \frac{k}{4} \end{aligned} \quad (11.12)$$

Выражения (11.8) и (11.9) идентичны. Отсюда можно сделать вывод, что постоянная времени T_2 дополнительной интегрирующей цепочки не влияет на шумовую полосу замкнутой системы.

3) Ситуация меняется когда в коэффициент передачи разомкнутой системы добавляется дифференцирующая цепь. Передаточная функция в этом случае определяется выражением

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p(1+T_2 p)}, \quad (11.13)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$W(p) = \frac{W_r}{1+W_r} = \frac{k(1+T_1 p)}{T_2 p^2 + (1+kT_1)p + k}$$

Шумовая полоса системы соответственно будет равна.

$$f_{\text{ЭФ}} = \frac{1}{2\pi|W(0)|^2} \int_0^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k^2 \frac{1+T_1^2 \omega^2}{|T_2^2 (j\omega)^2 + (1+kT_1)(j\omega) + k|^2} d\omega$$

$$f_{\text{ЭФ}} = \frac{k(T_2 + kT_1^2)}{4T_2(1+kT_1)} \quad (11.14)$$

Система с астатизмом второго порядка

Пусть в передаточной функции разомкнутой системы присутствуют два идеальных интегратора

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p^2(1+T_2 p)}, \quad (11.15)$$

В соответствии с ранее сказанным, передаточные функции замкнутой системы $W(p)$ и по ошибке $W_e(p)$ определяются выражениями:

$$W_e(p) = \frac{p^2(1+T_2 p)}{k(1+T_1 p) + p^2(1+T_2 p)} = \frac{p^2(1+T_2 p)}{T_2 p^3 + p^2 + kT_1 p + k},$$

$$W(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{k(1+T_1 p) + p^2(1+T_2 p)} = \frac{k(1+T_1 p)}{T_2 p^3 + p^2 + kT_1 p + k}, \quad (11.16)$$

Аналогично предыдущему, шумовая полоса системы соответственно будет равна.

$$f_{\text{ЭФ}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k^2 \frac{1+T_1^2 \omega^2}{|T_2 (j\omega)^3 + (j\omega)^2 + kT_1(j\omega) + k|^2} d\omega = \frac{1+T_1^2 k}{2(T_1 - T_2)} \quad (11.17)$$

11.3. Логарифмические характеристики

Рассмотрим свойства логарифмических фазовых и амплитудных характеристик разомкнутых систем. Особое внимание обратим на запас устойчивости системы и параметры, которыми он определяется.

Логарифмические характеристики системы с астатизмом второго порядка

Рассмотрим систему с коэффициентом передачи разомкнутой системы (11.15). Соответствующая ему ЛАХ изображена на рис 11.2. Замкнутая система (11.16) будет устойчива, если выполняется условие $T_1 > T_2$. Соответственно частота сопряжения $\omega_1 < \omega_2$.

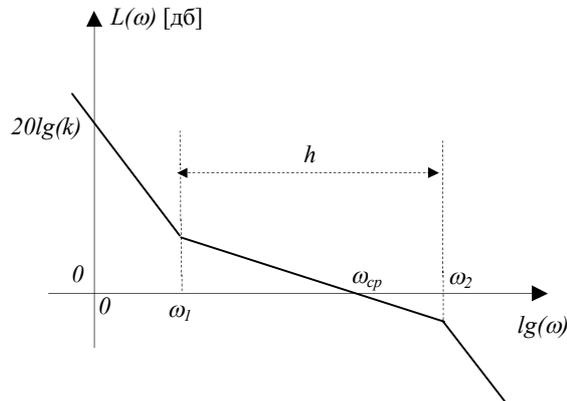


Рис. 11.2

Положение всей характеристики определяется частотой среза ω_{cp} (частотой на которой модуль коэффициента передачи равен единице).

$$\omega_{cp} = kT_1 \quad (11.18)$$

Продолжительность участка с наклоном $20 \text{ дб/дек} = 6 \text{ дб/окт}$ определяется соотношением частот сопряжения или соответствующих им постоянных времени.

$$h = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (11.19)$$

Фазовая характеристика системы определяется выражением

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T_1\omega) - \text{arctg}(T_2\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_1 T_2}\right) \quad (11.20)$$

Найдем запас устойчивости по фазе, для этого вычислим значение (11.20) на частоте ω_{cp} .

$$\varphi(\omega_{cp}) = \text{arctg}\left(\frac{\omega_{cp} T_2 (h-1)}{1 + h \omega_{cp}^2 T_2^2}\right)$$

Из полученного следует, что запас устойчивости по фазе возрастает с ростом h . Еще нагляднее это можно увидеть, если задаться максимальным показателем колебательности M системы (8.11). Построим запретную зону (8.16) для фазовой характеристики и потребуем чтобы ФЧХ в нее не попадало. Для этого исследуем (11.20) на максимум. Частота на которой он достигается равна:

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{h}}$$

Соответственно

$$\varphi_{max} = \arctg \left(\frac{h-1}{2\sqrt{h}} \right) \quad (11.21)$$

т.е., максимально возможное значение ФЧХ (максимальный запас по фазе) определяется только длительностью h участка единичного наклона. Если приравнять максимумы фазовой характеристики и запретной зоны (рис. 11.3), то можно получить выражения для связи минимального показателя колебательности, который может быть получен в системе для заданного значения h и наоборот, величину минимальной длительности участка h для заданного значения показателя колебательности.

$$h = \frac{M+1}{M-1}, \quad M = \frac{h+1}{h-1} \quad (11.22)$$

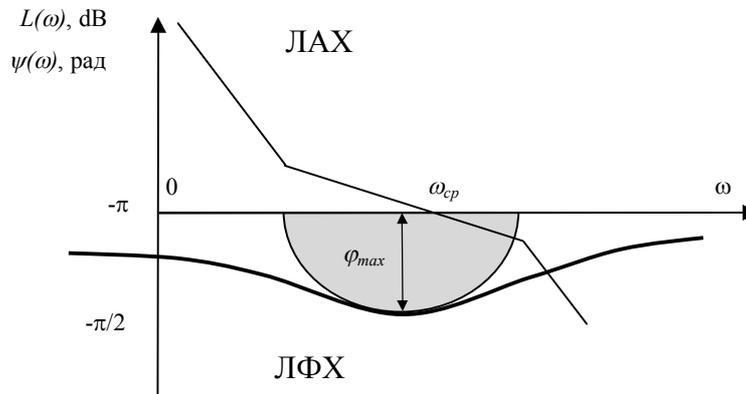


Рис. 11.3

Определим условия на значения постоянных времени, при которых выполняются равенства (11.22). Учтем, что величина модуля W_r на частоте ω_{max} равна:

$$|W_r(\omega_{max})| = \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} \quad (11.23)$$

На участке h модуль коэффициента передачи $|W_r(\omega)| = A(\omega) = \frac{kT_1}{\omega}$. Соответственно на частоте ω_{max} модуль $A(\omega_{max}) = kT_1\sqrt{T_1T_2} = A(\omega) = kT_1\sqrt{T_1T_2} = \frac{kT_1^2}{\sqrt{h}}$. Учитывая (11.18), (11.22), (11.23) получим

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} \sqrt{\frac{M+1}{M-1}} = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M-1} \quad (11.24)$$

Аналогично можно получить условие для T_2

$$T_2 = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} \sqrt{\frac{M-1}{M+1}} = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1} \quad (11.25)$$

Если превратить равенства (11.24-11.25) в неравенства

$$T_1 \geq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M-1}; \quad T_2 \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1}, \quad (11.26)$$

то можно получить выражения, которые при заданной частоте среза, а значит и при фиксированном положении запретной зоны для фазовой характеристики, определяют условия на постоянные времени. Зависимость между показателем колебательности и длительностью переходного процесса описана в параграфе 8.1 и приложении П2.

Логарифмические характеристики системы с астатизмом первого порядка

В простейшем случае $W_r(p)$ системы с астатизмом первого порядка имеет вид:

$$W_r(p) = \frac{k}{p(1+T_1p)} \quad (11.27)$$

Частота среза (рис. 11.3) определяется выражением

$$\omega_{cp} = \sqrt{\frac{k}{T_1}}$$

Фазовая характеристика системы имеет вид

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{1}{\omega T_1}\right)$$

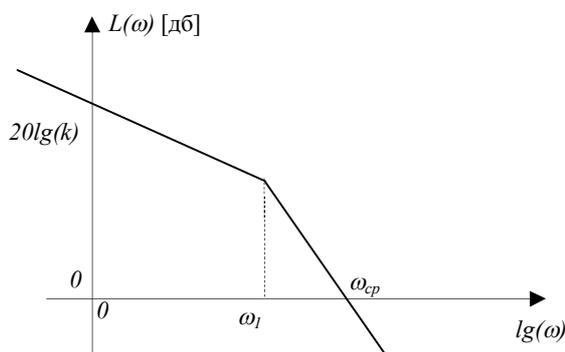


Рис. 11.3

Зададимся предельным значением показателя колебательности M_{max} . Найдем условие на постоянную времени фильтра, при котором показатель колебательности не превышает заданного значения:

$$kT_1 \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (11.28)$$

Если учесть, что коэффициент ошибки по скорости системы равен $D_1 = \frac{1}{k}$, то выражение (11.28) позволяет найти T_1 при заданных M и D_1 .

В случае, если $W_r(p)$ имеет более сложную форму

$$W_r(p) = \frac{k}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)...} \quad (11.29)$$

для M мало отличающихся от единицы ($M \leq 1.3$), можно воспользоваться приближенной формулой:

$$k(T_1 + T_2 + T_3 \dots) \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (11.30)$$

Звено с передаточной функцией (11.27) используется только в простейших системах с невысокими требованиями. Для улучшения характеристик систем автоматического управления переходят к звеньям более сложной структуры. Часто ее получают добавлением дополнительного излома на частоте ω_1 , так как это показано на рис. 11.4

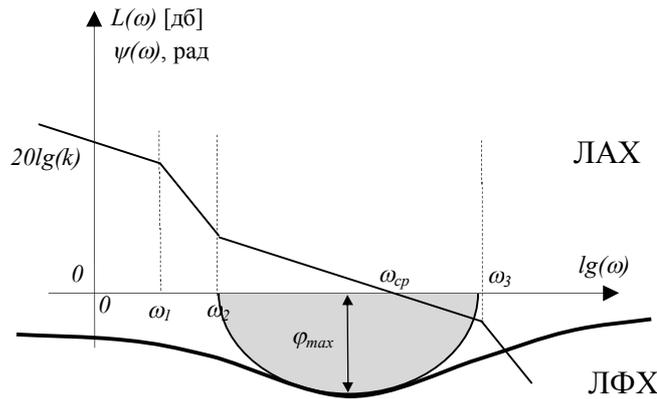


Рис. 11.4

Такой ЛАХ соответствует передаточная функция

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p)\dots} \quad (11.31)$$

Положение ЛАХ определяется частотой среза

$$\omega_{cp} = \frac{kT_2}{T_1} \quad (11.32)$$

Если частота сопряжения ω_1 значительно отличается от частоты на которой запретная зона имеет максимум по фазе, то с хорошей точностью расчет можно вести по формулам (11.24-11.26). Для уточнения расчета можно учесть, что по сравнению с системой 2-го порядка астатизма, здесь имеется дополнительный запас устойчивости по фазе

$$\Delta\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega T_1}\right) \quad (11.33)$$

Логарифмические характеристики статических систем

В простейшем случае $W_r(p)$ статической системы имеет вид:

$$W_{r0}(p) = \frac{k_0}{(1+T_0p)(1+T_1p)} \quad (11.34)$$

Соответствующая ЛАХ изображения на рис. 11.5

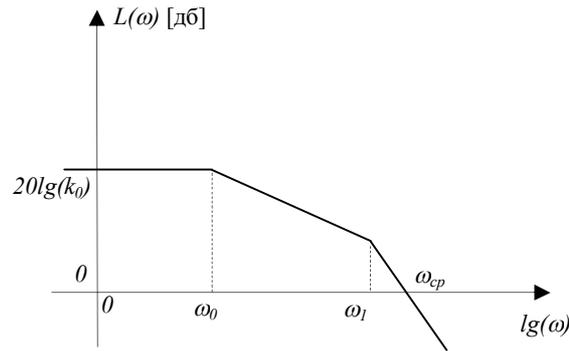


Рис. 11.5

В области частоты среза ω_{cp} передаточная функция (11.34) может быть приближенно сведена к коэффициенту передачи системы с астатизмом первого порядка

$$W_{r0}(p) \approx \frac{k_0}{T_0 p (1 + T_1 p)} \quad (11.35)$$

Это дает возможность использовать для расчетов формулу (11.28), в которой $k = k_0 / T_0$

$$\frac{k_0 T_1}{T_0} \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (11.36)$$

Из выражения (11.36) следует, что постоянная времени T_0 существенно влияет на запас устойчивости системы. С увеличением коэффициента усиления или суммы остальных постоянных времени можно увеличить T_0 и обеспечить требуемые характеристики по устойчивости.

При повышенных требованиях к точности систем, применяются коэффициенты передачи разомкнутой системы $W_r(p)$ более сложного вида (рис. 11.6)

$$W_r(p) = \frac{k_0 (1 + T_2 p)}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots} \quad (11.37)$$

Частота среза такой ЛАХ находится на участке с единичным наклоном (20 дБ/дек), который следует за участком двойного наклона (40 дБ/дек). Как и в предыдущем случае, здесь можно с достаточной точностью применять формулы, полученные для системы с астатизмом второго порядка (11.24-11.26).

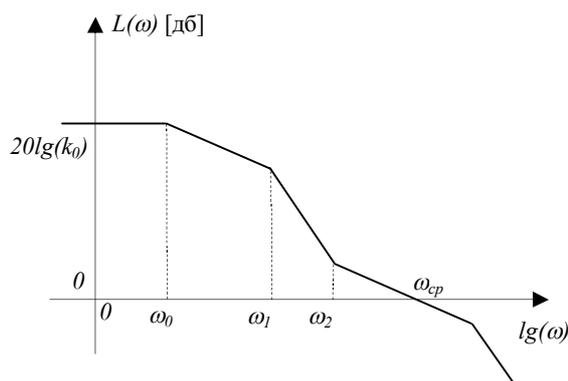


Рис. 11.6

11.4. Задачи по выбору оптимальных параметров САУ

Целью оптимизации обычно является выбор параметров системы, при котором заданные характеристики системы являются наилучшими. Применительно к системам автоматического управления чаще всего речь идет о минимизации результирующей ошибки слежения при заданных типах задающих воздействий и наличии шума на входе дискриминатора.

В силу большого разнообразия структур систем управления, возможных типов входных воздействий и критериев оптимизации, рассмотреть все варианты оптимизационных задач не представляется возможным. Поэтому рассмотрим несколько характерных случаев применительно к типовым системам.

Будем считать, что :

1) входное воздействие $x(t)$ - детерминированный процесс, возмущающее воздействие $\eta(t)$ - флюктуационный процесс.

2) входное воздействие $x(t)$ и возмущающее воздействие $\eta(t)$ - случайные процессы.

11.4.1. Задача

Необходимо выбрать ФНЧ и параметры системы ФАПЧ, обеспечивающие при ускорении $\frac{d\omega}{dt} = 20 \text{ рад/с}^2$ следующие показатели качества: время переходного процесса $t_p \leq 0.1 \text{ с}$; перерегулирование $\leq 30\%$; фазовую ошибку $\varphi \leq 20 \text{ рад}$;

Решение

Т.к. система должна обеспечить постоянную ошибку при ускорении, то астатизм должен быть второго порядка.

По заданному времени переходного процесса, используя формулу (8.2), определим частоту среза разомкнутой системы $\omega_{rcp} > 31 \text{ с}^{-1} \approx 40 \text{ с}^{-1}$. На частоте среза ЛАХ должна иметь наклон -20 db/дек для обеспечения необходимого запаса устойчивости по фазе и усилению (см. 11.3). В области верхних частот

наклон АЧХ должен составлять не менее -40 дБ/дек для эффективного подавления шумов. Указанным условиям удовлетворяет АЧХ разомкнутой системы вида

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p^2(1+T_2 p)}$$

Выберем постоянные времени $T_1=0.1$ и $T_2=0.01$. Это обеспечит необходимую длину участка наклона -20 дБ/дек. Перерегулированию $\leq 30\%$ соответствует показатель колебательности M замкнутой системы $M \leq 1.5$. (Найдем это по таблице в приложении П.2). Это соответствует соотношению частот среза и базовой $\omega_{cp}/\omega_0 \geq 1.7$.

$$\omega_0 = \sqrt{k} \leq \frac{\omega_{cp}}{1.7} \cong 23 \text{ с}^{-1} \text{ (выберем значение } \sqrt{k} = 20 \text{ с}^{-1}, \text{ соотв. } k=400 \text{ с}^{-2}\text{)}$$

При таком выборе динамическая ошибка системы по ускорению равна

$$\varphi_{ст} = \frac{1}{k} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi}{20}$$

Запас устойчивости по фазе

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \pi - |\varphi(\omega_{cp})| = \pi - \left| -\pi + \arctg\left(\frac{\omega_{cp}}{\omega_1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_{cp}}{\omega_2}\right) \right| \cong \\ &\cong \arctg\left(\frac{\omega_{cp}}{\omega_1}\right) = \arctg(4) \approx 1.3 \text{ рад} \end{aligned}$$

11.4.2. Задача

Пусть на входе следящей системы (рис. 11.1) аддитивно действуют детерминированное входное воздействие $s(t)$ и помеха $\eta(t)$: $x(t) = s(t) + \eta(t)$.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p(1+T_2 p)}$$

Пусть помеха - белый гауссов шум с равномерной на всех частотах спектральной плотностью S_η . Необходимо найти параметры системы, при которых дисперсия ошибки слежения будет минимальна.

Решение

Т.к. управляющее воздействие детерминированный процесс, то дисперсия ошибки будет определяться только сигналом помехи. Для определения дисперсии воспользуемся формулой (10.47), позволяющей найти ее через эквивалентную шумовую полосу системы

$$\sigma^2 = 2S_\eta f_{эф}$$

Шумовая полоса для этого коэффициента передачи приведена в выражении (11.14)

$$f_{эф} = \frac{k(T_2 + kT_1^2)}{4T_2(1 + kT_1)}$$

В итоге получим выражение для дисперсии ошибки.

$$\sigma^2 = \frac{S_{\eta} k (T_2 + kT_1^2)}{2 T_2 (1 + kT_1)}$$

Исследуем полученное выражение. Для этого найдем производную дисперсии по T_1 и приравняем ее к нулю.

$$\frac{d(\sigma^2)}{dT_1} = \frac{S_{\eta} k}{2T_2} (k^2 T_1^2 + 2kT_1 - kT_2) = 0$$

В итоге найдем соотношения между T_1 , T_2 , k , при которых дисперсия ошибки минимальна.

$$T_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + kT_2}}{kT_2}$$

11.4.3. Задача

Пусть на входе следящей системы (рис. 11.1) действует стационарный случайный процесс с дисперсией σ_{λ}^2 и со спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{2\lambda\sigma_{\lambda}^2}{\lambda^2 + \omega^2}$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы - идеальный интегратор

$$W_T(p) = \frac{k}{p}$$

Необходимо найти параметры системы, при которых дисперсия ошибки слежения будет минимальна.

Решение

Комплексный коэффициент передачи по ошибке определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{k + j\omega}$$

Подставим это значение и выражение для спектральной плотности входного сигнала в формулу для расчета дисперсии (10.45)

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda\sigma_{\lambda}^2}{\lambda^2 + \omega^2} \frac{|j\omega|^2}{|k + j\omega|^2} d\omega$$

Воспользуемся формулами расчета интегралов, приведенными в приложении. Для этого преобразуем выражение для дисперсии к виду

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\lambda\sigma_{\lambda}^2 (j\omega)^2}{(\lambda + j\omega)(\lambda - j\omega)(k + j\omega)(k - j\omega)} d\omega$$

В нашем случае $A(\omega) = (\lambda + j\omega)(k + j\omega) = (j\omega)^2 + (k + \lambda)j\omega + k\lambda$, $n=2$. Соответственно для вычисления интеграла J_2 необходимо указать следующие

значения коэффициентов: $b_0 = 0$, $b_1 = -2\lambda\sigma_\lambda^2$, $a_0 = k\lambda$, $a_1 = k + \lambda$, $a_2 = 1$. После вычислений получим выражение для дисперсии

$$D_y = \frac{\lambda\sigma_\lambda^2}{\lambda + k}$$

Из анализа полученного выражения видно, что дисперсия ошибки не имеет выраженного минимума в зависимости от параметров системы. Вместе с тем она убывает с увеличением коэффициента усиления по постоянному току в кольце.

11.4.4. Задача

Пусть на входе следящей системы (рис. 11.1) действует сумма квадратичного входного сигнала и помехи $x(t) = \alpha t^2 + \eta(t)$. Где $\eta(t)$ - белый шум, с нулевым средним и постоянной спектральной плотностью которого S_η .

Пусть система имеет второй порядок астатизма и передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением:

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p^2}$$

Необходимо найти параметры системы, при которых средний квадрат ошибки в установившемся режиме будет минимален

Решение

Квадрат ошибки в установившемся режиме определяется выражением:

$$M = m_x^2 + D_\eta,$$

где m_x^2 - математическое ожидание детерминированной составляющей входного сигнала; $D_\eta = \sigma_\eta^2$ - дисперсия случайной составляющей на выходе системы.

Вычислим m_x^2 с помощью теоремы о предельном значении

$$m_x = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) \frac{2\alpha}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^2}{p^2 + k(1 + T_1 p)} \frac{2\alpha}{p^3} = \frac{2\alpha}{k}$$

Дисперсия ошибки слежения будет определяться выражением

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega)|^2 S_\eta d\omega = \frac{S_\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2(1 - T_1^2(j\omega)^2)}{|-(j\omega)^2 + k(1 + T_1 j\omega)|^2} d\omega$$

Воспользовавшись таблицей интегралов их приложения, получим

$$D_y = S_\eta \frac{1 + kT_1^2}{2T_1}$$

Общая среднеквадратичная ошибка:

$$M = \left(\frac{2\alpha}{k}\right)^2 + S_\eta \frac{1 + kT_1^2}{2T_1}$$

Для нахождения оптимальных значений найдем производные M по k и T_1 и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial M}{\partial k} = \frac{8\alpha^2}{k^3} + \frac{S_\eta T_1}{2} = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial T_1} = S_\eta \frac{kT_1^2 - 1}{2T_1^2} = 0$$

Решим уравнения и получим значения:

$$k_{\text{опт}} = \sqrt[5]{\frac{256\alpha^2}{S_\eta^2}}; \quad T_{1\text{опт}} = \sqrt{\frac{1}{k_{\text{опт}}}}$$

Приложение

П1. Формулы интегрирования спектральной плотности

1) Запишем интеграл от функции спектральной плотности в виде:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 d\omega,$$

где:

$$C(j\omega) = c_{n-1}(j\omega)^{n-1} + c_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \dots + c_1(j\omega) + c_0$$

$$D(j\omega) = d_n(j\omega)^n + d_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + d_1(j\omega) + d_0$$

Для n=1

$$I_1 = \frac{c_0^2}{2d_0d_1};$$

Для n=2

$$I_2 = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2};$$

Для n=3

$$I_3 = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(-d_0d_3 + d_1d_2)};$$

Для n=4

$$I_4 = \frac{c_3^2(-d_0^2d_3 + d_0d_1d_2) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4}{2d_0d_4(-d_0d_3^2 - d_4d_1^2 + d_1d_2d_3)} + \\ + \frac{(c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(-d_4^2d_1 + d_2d_3d_4)}{2d_0d_4(-d_0d_3^2 - d_4d_1^2 + d_1d_2d_3)}$$

2) Запишем интеграл от функции спектральной плотности в виде:

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega,$$

где:

$$G(j\omega) = b_{n-1}(j\omega)^{2(n-1)} + b_{n-2}(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_0$$

$$A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0$$

Для n=1

$$J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1};$$

Для n=2

$$J_2 = \frac{-b_1 + \frac{a_2b_0}{a_0}}{2a_2a_1};$$

Для n=3

$$J_3 = \frac{-a_1b_2 + a_3b_1 - \frac{a_3a_2b_0}{a_0}}{2a_3(a_3a_0 - a_2a_1)};$$

Для n=4

$$J_4 = \frac{b_3(-a_3a_0 + a_2a_1) - a_4a_1b_2 + a_4a_3b_1 + \frac{a_4b_0}{a_0}(a_4a_1 - a_3a_2)}{2a_4(a_4a_1^2 + a_0a_3^2 - a_3a_2a_1)};$$

П2. Оценка качества переходного процесса по ЛАХ разомкнутой системы

Можно показать, что колебательность переходного процесса будет минимальной, если частота среза разомкнутой системы лежит на участке ЛАХ с наклоном -20 дБ/дек. Время процесса приблизительно будет определяться неравенством:

$$t_p > \frac{\pi}{\omega_{rcp}},$$

где ω_{rcp} - частота среза разомкнутой системы. Можно показать что, чем шире участок с наклоном -20 дБ/дек, тем ближе переходная характеристика к экспоненте и тем меньше время t_p (тем ближе оно к величине π/ω_{rcp}).

Рассмотрим коэффициент передачи разомкнутой системы:

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p^2(1+T_2 p)},$$

которому соответствует логарифмическая характеристика вида (рис. П.1). Частота ω_0 - базовая частота. Для этой системы $\omega_0 = \sqrt{k}$, k -коэффициент усиления разомкнутой системы.

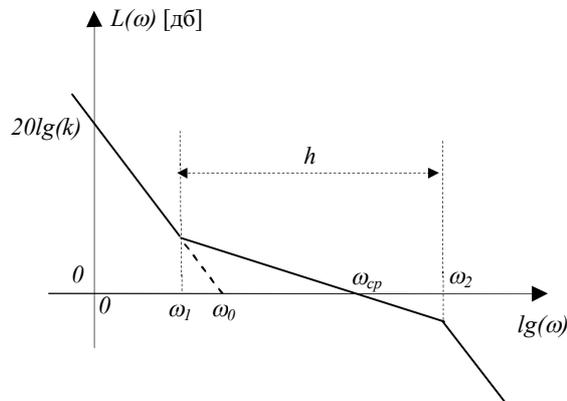


Рис. П1

Рассмотрим переходный процесс в замкнутой системе, при единичном входном воздействии $x(t)=1(t)$. Построим нормированный на ω_0 отклик - нормированный переходный процесс. Для этого перейдем к переменным:

$$\tau_1 = \omega_0 T_1, \quad \tau_2 = \omega_0 T_2, \quad q = p / \omega_0$$

Нормированное изображение по Лапласу выходной величины будет иметь вид:

$$y(q) = \frac{1 + \tau_1 q}{\tau_2 p^3 + p^2 + \tau_1 q + 1} \frac{1}{q}$$

Задаваясь различными значениями показателя колебательности, можно найти различные значения τ_1 , τ_2 и построить переходный процесс для величины $y(q)$ в нормированном времени $\tau = \omega_0 t$. Пример такого построения показан на рис. П2

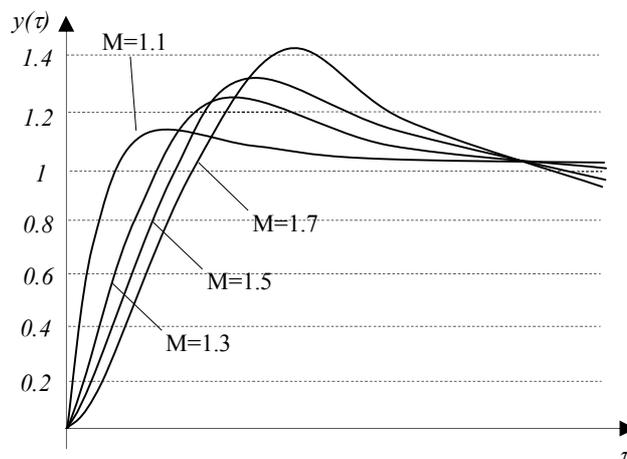


Рис. П2

Типовые параметры расчета таких процессов - перерегулирование $\sigma, \%$, относительное время переходного процесса $\omega_0 t_p$ (для $|1-y(\omega_0 t_p)| < 0.05$), относительную частота среза $\omega_{ср}/\omega_0$ приведены в таблице табл. П1

Табл. П1

М	1.1	1.3	1.5	1.7
$\sigma, \%$	13.8	26.5	37.2	44.6
$\omega_0 t_p$	7.75	5.85	5.45	7.25
$\omega_{ср}/\omega_0$	3.35	2.08	1.73	1.56

Несмотря на то, что эти результаты получены для характеристики рис. П1, системы с астатизмом второго порядка, они с достаточно большой степенью точности могут использоваться для оценки переходных процессов систем с ЛАХ других типов, для которых частота среза лежит на участке с наклоном - 20 дБ/дек.

П3. Таблица преобразований Лапласа

Наименование	Оригинал	Изображение Лапласа
δ функция	$\delta(t)$	1
Идеальное запаздывание	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$
Единичная функция	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
Степенная функция	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p + \alpha}$
Экспонента со смещением	$\frac{1}{a}(1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
Синусоида	$\text{Sin}(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
Косинусоида	$\text{Cos}(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\alpha t} \text{Sin}(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\alpha t} \text{Cos}(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{p + \beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$